УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

Ю. М. Мисло

Ужгород. нац. ун-т
пл. Народна, 3, Ужгород, 88000, Україна

В. І. Ткаченко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

By using properties of almost periodic solutions, we prove theorems on existence of an asymptotically stable piecewise continuous solution to a differential system with delays and impulsive effects at nonfixed times.

С помощью свойств асимптотически почти периодических решений доказаны теоремы существования асимптотически устойчивого кусочно-непрерывного почти периодического решения системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и нефиксированными моментами импульсного воздействия.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \tag{1}$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$. Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками поверхонь $\Gamma_k = \{(t, x) \colon t = \tau_k(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені одна від іншої.

Метою даної роботи є знаходження умов існування кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи (1), (2). Вивчення майже періодичних імпульсних систем привертає увагу багатьох дослідників (див., наприклад, [1–9]). Ми використовуємо концепцію кусково-неперервних майже періодичних функцій у сенсі робіт [10, 11]. Спочатку ми доведемо існування асимптотично майже періодичного розв'язку системи (1), (2), з чого випливатиме існування кусково-неперервного асимптотично стійкого майже періодичного розв'язку. Такий підхід запропоновано у роботі [12] для систем функціонально-диференціальних рівнянь. У роботі [13] цей підхід поширено на системи рівнянь із запізненням та фіксованими моментами імпульсної дії. У системи рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії розв'язки, які мають різні початкові значення, мають також і різні точки розривів. Це вимагає іншого підходу при дослідженні асимптотично майже періодичних розв'язків. Відмінність точок розриву різних розв'язків системи з нефіксованими моментами імпульсної дії враховується також і при означенні стійкості розв'язків.

Також у таких системах може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати поверхню $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів [14, 15].

Оскільки розв'язки рівнянь із запізненням однозначно задаються значеннями на початковому інтервалі і через кожну точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ проходить нескінченна кількість розв'язків, які не обов'язково продовжуються вліво, до систем із запізненням і нефіксованими моментами імпульсної дії не застосовується метод зведення до систем з фіксованими моментами імпульсної дії, запропонований у [16] для систем звичайних диференціальних рівнянь без запізнення.

2. Основні означення та попередні результати. Нехай $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Z}$ — множини дійсних і цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ чи відповідну норму в просторі матриць. Будемо позначати через $\mathcal{PC}^k(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subseteq \mathbb{R}$, простір усіх кусково-неперервних функцій $x\colon J \to \mathbb{R}^n$ таких, що:

i) множина $T = \{t_j \in J\colon t_{j+1} > t_j, j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;

ii) функції неперервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ і існують границі $\lim_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + 0)$;

iii) функція $x(t)$ є гладкою класу C^k на множині $J \setminus T$.

Введемо такі означення (див. [10, 11, 18]).

Означення 1. *Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in \in \mathbb{R}^n$, якщо $\|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів.*

Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує таке додатне число l, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить $\mathcal{A}$.

Означення 2. *Послідовність дійсних чисел $\{t_k\}$ має рівномірно майже періодичні різниці, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{t_k^j\}$, де $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Як показано у [17], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 3. *Функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ називається w-майже періодичною, якщо:*

i) послідовність $\{t_k\}$ точок розривів функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

ii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що якщо точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$;

iii) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - t_k| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що неперервна функція $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\psi(t+\tau) - \psi(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Означення 4. *Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$ знаходиться у ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, якщо $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| < \varepsilon$ для всіх таких $t \in J$, що $|t - \tau_i^1| > \varepsilon$, $|t - \tau_i^2| > \varepsilon$ та $|\tau_i^1 - \tau_i^2| < \varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$, де $\{\tau_i^1\}$ і $\{\tau_i^2\}$ — послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно. У цьому випадку будемо писати $\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \varepsilon$.*

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, $J \subset \mathbb{R}$, збігається у w-топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}^n)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що $\|f_k(t) - f(t)\| < \varepsilon$ для всіх $k \geq N$ і $|t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i — точки розривів функції f

на множині J), а також точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

В роботі [18] доведено, що функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *w*-майже періодична тоді і тільки тоді, коли з довільної послідовності дійсних чисел $\{\theta_n\}, \theta_n > \theta_{n-1}, \lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty$, можна виділити таку підпослідовність $\{\theta_{n_k}\}$, що послідовність $\varphi(t + \theta_{n_k})$ збігається на осі у *w*-топології.

Будемо розглядати систему (1), (2) з такими умовами:

($\mathbf{H_1}$) Нехай $U_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le \rho\}$, де ρ — деяке додатне число. Припустимо, що послідовність $\{\tau_k\}$ функцій імпульсної дії $\tau_k : U_\rho \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in U_\rho$ і існують такі $\theta > 0$ і $\Theta > 0$, що $\inf_x \tau_{k+1}(x) - \sup_x \tau_k(x) \ge \theta$ і $\sup_x \tau_{k+1}(x) - \inf_x \tau_k(x) \le \Theta$ для всіх $x \in U_\rho$ і $k \in \mathbb{Z}$.

($\mathbf{H_2}$) Функція $f(t, x, y)$ майже періодична по t і ліпшицева по $x, y \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0$: $\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \le L_1(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|)$.

($\mathbf{H_3}$) Вектор-функції $I_j : U_\rho \to \mathbb{R}^n$ ліпшицеві по $x \in U_\rho$ зі сталою $L_1 > 0$. Послідовність $\{I_j(x)\}$ майже періодична рівномірно відносно $x \in U_\rho$.

Означення 5. *Функція $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0 - h, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, де $\alpha > 0$, є розв'язком системи (1), (2), якщо виконуються такі умови:*

(i) множина $T = \{t \in [t_0, t_0 + \alpha] : t = \tau_k(x(t))$ для деякого $k\}$ точок імпульсної дії скінченна (можливо, порожня);

(ii) $x(t)$ неперервна при всіх $t \in [t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

(iii) $x(t)$ неперервно диференційовна при всіх $t \in (t_0, t_0+\alpha] \setminus T$, за винятком скінченної множини точок;

(iv) похідна зліва функції $x(t)$ існує і задовольняє систему (1) для всіх $t \in (t_0, t_0+\alpha] \setminus T$;

(v) для $t \in T$ функція $x(t)$ задовольняє умову (2).

Якщо додатково функція $x(t)$ задовольняє умову

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad \varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (1) – (3).

Функція $x(t)$ є розв'язком системи (1), (2) на нескінченному інтервалі, якщо вона є розв'язком на кожному обмеженому підінтервалі.

Припускаємо, що розв'язки системи (1), (2) неперервні зліва.

Також припускаємо, що у множині U_ρ розв'язки системи (1), (2) не мають биття з поверхнями $t = \tau_j(x)$, іншими словами, розв'язки перетинають кожну поверхню не більше одного разу. Достатні умови відсутності биття наведено у [15].

Для розв'язку $x(t)$ через x_t будемо позначати його звуження на інтервал $[t-h, t]$, тобто $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-h, 0]\}$.

Означення 6. *Розв'язок $\xi(t)$ системи (1), (2), який при всіх $t \ge t_0 - h$ належить U_ρ і $\tau_j(x_0(t_0)) \ne t_0$, $j \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з U_ρ і*

$$\|\xi(\theta) - x(\theta)\| < \delta, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad |\theta - \tau_j^0| > \delta,$$

виконується $\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \ge t_0$ таких, що $|t - \tau_j^0| > \varepsilon$, де τ_j^0 — моменти часу, при яких розв'язок $\xi(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ *рівномірно стійкий за Ляпуновим, якщо* δ *не залежить від початкових моментів* t_0, *які задовольняють нерівності* $|t_0 - \tau_j^0| > \delta$, $j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ *називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке* $\delta_0 > 0$, *що для* $t_0 \in \mathbb{R}$, $\tau_j(x_0(t_0)) \neq t_0$, $j \in \mathbb{Z}$, *і кожного* $\varepsilon > 0$ *існує* $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ *таке, що для будь-якого іншого розв'язку* $x(t)$ *системи з початковими значеннями з* U_ρ *і*

$$\|\xi(\theta) - x(\theta)\| < \delta_0, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad |\theta - \tau_j^0| > \delta_0,$$

виконується $\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon$ *для* $t \geq t_0 + T$ *і* $|t - \tau_k^0| > \varepsilon$.

Розв'язок $\xi(t)$ *рівномірно асимптотично стійкий, якщо наведені вище нерівності виконуються для всіх* $t_0 \in \mathbb{R}$, $|t_0 - \tau_j^0| > \delta_0$, $j \in \mathbb{Z}$, *з незалежними від* t_0 *моментами часу* T.

Як і в неперервному випадку [19, с. 154], для кусково-неперервних функцій вводиться поняття асимптотично *w*-майже періодичних функцій, яке будемо використовувати при дослідженні існування майже періодичних розв'язків імпульсних систем.

Означення 7. *Кусково-неперервна функція* $\xi(t)$ *називається асимптотично w-майже періодичною, якщо для кожної послідовності додатних чисел* $\{\theta_k\}$ *таких, що* $\theta_{k+1} > \theta_k$, $\theta_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *існує така підпослідовність* $\{\theta_{k_j}\}$, *що* $\xi(t + \theta_{k_j})$ *збігається на* $0 \leq t < \infty$ *у w-топології.*

Нехай функція $\xi(t)$ асимптотично *w*-майже періодична і $\theta_k \to \infty$, $k \to \infty$. Припустимо, що послідовність $\{\xi(t + \theta_k)\}$ збігається на $[0, \infty)$ в *w*-топології до функції $p(t)$ з послідовністю розривів $\{p_k\}$. Використовуючи стандартний діагональний метод і вибираючи, якщо необхідно, підпослідовність послідовності $\{\theta_k\}$, продовжуємо функцію $p(t)$ з послідовністю розривів $\{p_k\}$ на всю вісь. Послідовність $\{\xi(t + \theta_k)\}$ збігається у *w*-топології до функції $p(t)$ на компактних підмножинах $\mathbb{R}$. Позначимо через $H(\xi)$ замикання множини всіх таких граничних функцій $p(t)$ в *w*-топології на компактних підмножинах.

Зауваження. При вивченні майже періодичних систем з фіксованими моментами імпульсної дії послідовність точок імпульсів $\{\tau_k\}$ не залежить від x і має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, тому достатньо розглядати асимптотично майже періодичні функції з розривами у наперед заданих точках τ_k. У цьому випадку асимптотично майже періодична функція є сумою *w*-майже періодичної функції і функції, що прямує до нуля при $t \to \infty$ [13]. У загальному випадку послідовність розривів асимптотично майже періодичної функції не обов'язково має рівномірно майже періодичні послідовності різниць.

Лема. *Множина* $H(\xi)$ *для асимптотично w-майже періодичної функції* $\xi(t)$ *з послідовністю розривів* $\{t_k\}$ *компактна в w-топології на осі і складається з w-майже періодичних функцій.*

Доведення. Спочатку покажемо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $T = T(\varepsilon)$, що множина

$$\left\{\tau\colon \sup_{t \geq T(\varepsilon)} \|\xi(t + \tau) - \xi(t)\| < \varepsilon,\ |t - t_k| > \varepsilon\right\} \tag{4}$$

відносно щільна в $\mathbb{R}$. Припустимо від супротивного, що множина (4) не є відносно щільною для деякого $\varepsilon_0 > 0$. Тоді для довільного $T(\varepsilon_0)$ існує послідовність таких інтервалів $[h_n - l_n, h_n + l_n]$, що $\sup_{t \geq T(\varepsilon_0), |t - t_k| \geq \varepsilon_0} \|\xi(t + \tau) - \xi(t)\| \geq \varepsilon_0$ для всіх $\tau \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$.

Виберемо довільне l_1 і $l_n > \max_{m<n} h_m$, тоді $h_n - h_m \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, якщо $m < n$. Тому

$$\sup_{t\geq 0, |t+h_m-t_k|\geq\varepsilon_0} \|\xi(t+h_n) - \xi(t+h_m)\| = \sup_{t\geq h_m, |t-t_k|\geq\varepsilon_0} \|\xi(t) - \xi(t+h_n-h_m)\| \geq \varepsilon_0.$$

Це суперечить *w*-збіжності послідовності функцій $\{\xi(t+h_n)\}$.

Нехай $\{\theta_k\}$ — деяка послідовність дійсних чисел така, що $\theta_{k+1} > \theta_k$ і $\theta_k \to \infty$, $k \to \infty$, і $p(t)$ — побудована за цією послідовністю гранична функція. Доведемо, що функція $p(t)$ *w*-майже періодична.

Спочатку покажемо, що гранична функція $p(t)$ задовольняє нерівність $\|p(t+\tau) - -p(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t - p_k| > \varepsilon$. Вибираючи θ_n з достатньо великим n, отримуємо нерівність $\|\xi(t+\theta_n+\tau) - \xi(t+\theta_n)\| < \varepsilon$ для $t \geq T(\varepsilon) - \theta_n$, $t + \tau \geq T(\varepsilon) - \theta_n$ і $|t + \theta_n - t_k| > \varepsilon$. Зафіксуємо t, τ і виберемо достатньо велике n так, що виконуються останні нерівності. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\|p(t+\tau) - p(t)\| < \varepsilon$. Ця нерівність виконується для $t \in \mathbb{R}$, $|t - p_k| > \varepsilon$ і відносно щільної множини ε-майже періодів τ.

Тепер покажемо, що послідовність розривів $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $p(t)$ має рівномірно майже періодичні різниці. Розглянемо функції

$$F(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \phi(t - t_j), \quad P(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \phi(t - p_j),$$

де $\phi(t) = \max\{0, 1 - 4|t|/\theta\}$. Зазначимо, що при кожному фіксованому t кожна з цих сум містить лише один ненульовий член.

Оскільки $\xi(t + \theta_k)$ збігається в *w*-топології до $p(t)$, то існує послідовність цілих чисел $\alpha(k)$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} (t_{n+\alpha(k)} - \theta_k) = p_n$$

рівномірно по $n \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $|t_{n+\alpha(k)} - \theta_k - p_n| < \varepsilon$, то

$$|\phi(t - t_{n+\alpha(k)} + \theta_k) - \phi(t - p_n)| = \left| \int_{t-t_{n+\alpha(k)}+\theta_k}^{t-p_n} \phi'(s)ds \right| < \frac{4\varepsilon}{\theta}.$$

Для кожного $t \geq 0$ тільки одна така різниця є відмінною від нуля. Отже, послідовність $\{F(t+\theta_j)\}$ рівномірно збігається на півосі $t \geq 0$. Тому неперервна функція $F(t)$ асимптотично майже періодична. Аналогічно до попереднього отримуємо, що гранична функція $P(t)$ майже періодична за Бором (див. також [19, с. 154]).

Для $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів ω функції $P(t)$. Зокрема, $|P(p_n + \omega) - P(p_n)| < \varepsilon$. Враховуючи форму функції $P(t)$, отримуємо, що для $p_n + \omega$ існує така точка $p_{n+\alpha(\omega)}$, що

$$|p_n + \omega - p_{n+\alpha(\omega)}| < \frac{\theta\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

За лемою 2 [20] послідовність $\{t_n\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ множина Ω_ε всіх чисел ω таких, що

$$|t_n^{h_\omega} - \omega| < \varepsilon$$

для деякого $h_\omega \in \mathbb{Z}$ і всіх $n \in \mathbb{Z}$, є відносно щільною в $\mathbb{R}$. Тому за (5) послідовність $\{p_n\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць.

Лему доведено.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Припустимо, що система (1), (2) має розв'язок $\xi(t)$, означений на $I = [0,\infty)$ і такий, що $\|\xi(t)\| \le \rho < \infty$ для всіх $t \ge 0$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то система (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок.*

Доведення. Нехай послідовність $\{\theta_m\}$ така, що $\theta_m \to \infty$ і $f(t+\theta_m, x, y) \to f(t,x,y)$ при $m \to \infty$ рівномірно по $t \in \mathbb{R}$ і $x, y \in U_\rho$, а також існує така послідовність цілих чисел $\{\alpha(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, що

$$\lim_{m\to\infty} (\tau_{n+\alpha(m)}(x) - \theta_m) = \tau_n(x), \quad \lim_{m\to\infty} I_{n+\alpha(m)}(x) = I_n(x) \tag{6}$$

рівномірно по $n \in \mathbb{Z}$, $x \in U_\rho$.

Оскільки розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то існує підпослідовність послідовності $\{\theta_m\}$ (яку ми знову позначимо $\{\theta_m\}$) така, що $\xi(t+\theta_m) \to p(t)$ на півосі $t \ge 0$ у w-топології. Функцію $p(t)$ можна однозначно продовжити до w-майже періодичної функції на осі. Покажемо, що $p(t)$ задовольняє систему рівнянь (1), (2).

Функція $\xi(t+\theta_m)$ задовольняє систему

$$\dot{x}(t) = f(t+\theta_m, x(t), x(t-h)), \quad t \ne \tau_k(x(t)) - \theta_m, \tag{7}$$

$$x(t+0) = x(t) + I_k(x(t)), \quad t = \tau_k(x(t)) - \theta_m, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

З урахуванням (6) запишемо (8) у вигляді

$$x(t+0) = x(t) + I_{k+\alpha(m)}(x(t)), \quad t = \tau_{k+\alpha(m)}(x(t)) - \theta_m, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

При $m \to \infty$ послідовність $\xi(t+\theta_m)$ збігається на компактах у w-топології до w-майже періодичної функції $p(t)$. Позначимо через τ_j^m числа, які задовольняють рівності

$$\tau_j^m = \tau_{j+\alpha(m)}(\xi(\tau_j^m + \theta_m)) - \theta_m, \tag{10}$$

тобто $\tau_j^m + \theta_m$ — моменти перетину розв'язку $\xi(t+\theta_m)$ з поверхнями $t = \tau_{j+\alpha(m)}(x) - \theta_m$. При $m \to \infty$ виконується

$$\tau_j^m = \tau_{j+\alpha(m)}(\xi(\tau_j^m + \theta_m)) - \theta_m \to p_j = \tau_j(p(p_j)), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ — деякий підінтервал $\mathbb{R}$. Запишемо систему (7), (9) у інтегральній формі

$$x(t) = x(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s+\theta_m, x(s), x(s-h))ds + \sum_{\bar{t}_1 < \tilde{\tau}_j < t} I_{j+\alpha(m)}(x(\tilde{\tau}_j)),$$

де $\tilde{\tau}_j$ задовольняє рівність $\tau_{j+\alpha(m)}(x(\tilde{\tau}_j)) - \theta_m = \tilde{\tau}_j$. Функція $\xi(t+\theta_m)$ задовольняє рівняння

$$\xi(t+\theta_m) = \xi(\bar{t}_1+\theta_m) + \int_{\bar{t}_1}^{t} f(s+\theta_m, \xi(s+\theta_m), \xi(s+\theta_m-h))ds + \sum_{\bar{t}_1 < \tau_j^m < t} I_{j+\alpha(m)}(\xi(\tau_j^m+\theta_m)).$$

Переходячи до границі при $\theta_m \to \infty$, отримуємо

$$p(t) = p(\bar{t}_1) + \int\limits_{\bar{t}_1}^{t} f(s, p(s), p(s-h))ds + \sum_{\bar{t}_1 < p_j < t} I_j(p(p_j)).$$

Отже, *w*-майже періодична функція $p(t)$ є розв'язком системи (1), (2).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Припустимо, що* $M_0 N_1 + N_1 < 1$, *де* $M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}, x, y \in U_\rho} \|f(t,x,y)\|$, *а* N_1 *є сталою Ліпшиця для поверхонь імпульсів*

$$|\tau_j(x) - \tau_j(y)| \leq N_1 \|x - y\|, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in U_\rho.$$

Нехай розв'язок $\xi(t)$ *системи (1), (2) при всіх* $t \in [0, \infty)$ *належить* U_ρ *і є рівномірно асимптотично стійким при* $t \geq 0$. *Тоді* $\xi(t)$ *асимптотично w-майже періодичний, а система (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при* $t \geq 0$.

Доведення. Скористаємось ідеєю роботи [12].

1. Оскільки розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, то існує таке $\delta_0 > 0$, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta \leq \delta_0$, і $T(\varepsilon) > h$ такі, що для іншого розв'язку $x(t)$ рівняння (1), (2) з $\rho(\xi_0, x_0) < \delta$ випливає $\|\xi(t) - x(t)\| < \varepsilon/2$ для $t \geq 0$, $|t - \tau_j^0| > \varepsilon/2$ і $\|\xi(t) - x(t)\| < \delta_1/2$ для всіх $t \geq T(\varepsilon) - h$, $|t - \tau_j^0| > \delta_1/2$, де $\delta_1 = \min(\varepsilon, \delta)$, а τ_j^0 — точки перетину розв'язку $\xi(t)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$. Як і раніше, ми позначаємо $x_t = \{x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\}$ для розв'язку $x(t)$.

Виберемо довільну послідовність $\{\theta_m\}$ таку, що $\theta_{m+1} > \theta_m$, $\theta_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Покажемо, що існує така підпослідовність $\{\theta_{m_k}\}$, що послідовність функцій $\xi(t + \theta_{m_k})$ збігається у *w*-топології на півосі $t \geq 0$.

Позначимо $\xi^m(t) = \xi(t+\theta_m)$. Тоді $\xi^m(t)$ є розв'язком системи (7), (9), і він асимптотично стійкий з тими ж сталими δ_0, $\delta(\varepsilon)$ і $T(\varepsilon)$, що і у розв'язку $\xi(t)$.

Послідовність $\{\theta_m\}$ містить підпослідовність (яку знову позначимо $\{\theta_m\}$) таку, що виконуються умови:

а) рівномірно по $i \in \mathbb{Z}$ і $x \in U_\rho$ існує границя

$$\lim_{m \to \infty} (\tau_{i+\alpha(m)}(x) - \theta_m) = p_i(x), \tag{11}$$

де $\{\alpha(m)\}$ — деяка послідовність цілих чисел, а послідовність $\{p_i(x)\}$ має рівномірно майже періодичні різниці для $x \in U_\rho$;

б) $f(t + \theta_m, x, y)$ збігається до $g(t, x, y)$ на осі у *w*-топології рівномірно відносно $x, y \in \in U_\rho$;

в) послідовність функцій $\xi_0^m = \{\xi^m(\theta), \theta \in [-h, 0]\}$ збігається у *w*-топології при $m \to \to \infty$ до деякої функції ζ_0. Існування граничної функції показано в лемі 1 [18].

Кожна з функцій ξ_0^m має скінченну множину Ξ_m точок розривів, які відповідають точкам перетину $\xi(t + \theta_m)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$ на відрізках $[\theta_m - h, \theta_m]$. Припускаємо, що граничні точки об'єднання множин Ξ_m рівномірно відділені від нуля. Якщо таке припущення не виконується, то замість послідовності функцій ξ_0^m можна взяти послідовність функцій ξ_ν^m з деяким $\nu > 0$.

Тому для δ_1 і додатного $\delta_2 \leq \theta/4$ існує натуральне число $k_0 = k_0(\delta_2)$ таке, що для $k \geq m \geq k_0$ виконується $\rho(\xi_0^k, \xi_0^m) \leq \delta_1$, $\|I_{i+\alpha(k)}(x) - I_{i+\alpha(m)}(x)\| < \delta_2$ і

$$\|f(t+\theta_k, x, y) - f(t+\theta_m, x, y)\| < \delta_2,$$

$$|\tau_{i+\alpha(k)}(x) - \theta_k - \tau_{i+\alpha(m)}(x) + \theta_m| < \delta_2$$

для всіх $x, y \in U_\rho$, $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Позначимо через $\eta(t)$ розв'язок системи (7), (9) з початковою функцією $\eta_0 = \xi_0^k$. Оскільки система (7), (9) рівномірно асимптотично стійка, то

$$\|\xi^m(t) - \eta(t)\| < \varepsilon/2 \tag{12}$$

для всіх $t \geq 0$, $|t - \tau_j^m| > \varepsilon/2$, і

$$\|\xi^m(t) - \eta(t)\| < \delta_1/2 \tag{13}$$

для всіх $t \geq T(\varepsilon) - h$, $|t - \tau_j^m| > \delta_1/2$, де τ_j^m, як і раніше, задовольняє (10).

Оцінимо різницю $\eta(t) - \xi^k(t)$ на інтервалі $t \in [0, T(\varepsilon)]$. Функція $\xi^k(t)$ задовольняє систему рівнянь

$$\dot y(t) = f(t+\theta_k, y(t), y(t-h)),$$

$$y(\tau_j^k + 0) = y(\tau_j^k) + I_{j+\alpha(k)}(y(\tau_j^k)), \quad j \in \mathbb{Z},$$

де τ_j^k визначається з рівності $\tau_j^k = t_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau_j^k)) - \theta_k$, $j \in \mathbb{Z}$.

Різниця $\eta(t) - \xi^k(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\eta(t) - \xi^k(t) = \eta(0) - \xi^k(0) +$$

$$+ \int_0^t \Big(f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_k, \xi^k(s), \xi^k(s-h)) \Big)\, ds +$$

$$+ \sum_{0<\tau_j^\eta<t} I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau_j^\eta)) - \sum_{0<\tau_j^k<t} I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau_j^k)), \tag{14}$$

де τ_j^η визначається з рівності $\tau_j^\eta = \tau_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau_j^\eta)) - \theta_m$, $j \in \mathbb{Z}$.

Позначимо $\tau_j' = \min\{\tau_j^\eta, \tau_j^k\}$, $\tau_j'' = \max\{\tau_j^\eta, \tau_j^k\}$ і розглянемо множини на прямій

$$\mathcal{J} = \mathop{\cup}_j \mathcal{J}_j, \quad \mathcal{J}_j = \left(\tau_j'', \tau_{j+1}'\right], \quad \mathcal{I} = \mathop{\cup}_j \mathcal{I}_j, \quad \mathcal{I}_j = \left(\tau_j', \tau_j''\right].$$

З (11) випливають оцінки

$$\left|\tau_j^\eta - p_j(\eta(\tau_j^\eta))\right| \leq \delta_2, \quad \left|\tau_j^k - p_j(\xi^k(\tau_j^k))\right| \leq \delta_2$$

для $k \geq m \geq k_0$ і $j = 1, 2, \ldots$. Тому

$$|\tau_j^\eta - \tau_j^k| \leq |\tau_j^\eta - p_j(\eta(\tau_j^\eta))| + |p_j(\eta(\tau_j^\eta)) - p_j(\xi^k(\tau_j^k))| +$$
$$+ |\tau_j^k - p_j(\xi^k(\tau_j^k))| \leq 2\delta_2 + N_1 \|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^k)\|.$$

Виконуються нерівності

$$\|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^k)\| \leq \frac{2M_0\delta_2 + \|\eta(\tau_j') - \xi^k(\tau_j')\|}{1 - M_0N_1}, \tag{15}$$

$$|\tau_j^\eta - \tau_j^k| \leq \frac{2\delta_2 + N_1\|\eta(\tau_j') - \xi^k(\tau_j')\|}{1 - M_0N_1}. \tag{16}$$

Дійсно, якщо $\tau_j^\eta < \tau_j^k$, то

$$\|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^k)\| \leq \|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^\eta)\| + \|\xi^k(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^k)\| \leq$$
$$\leq \|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^\eta)\| + \int\limits_{\tau_j^\eta}^{\tau_j^k} \|f(s, \xi^k(s), \xi^k(s-h))\|\, ds \leq$$
$$\leq \|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^\eta)\| + M_0(2\delta_2 + N_1\|\eta(\tau_j^\eta) - \xi^k(\tau_j^k)\|),$$

звідки отримуємо (15) і (16). Зауважимо, що при наших припущеннях і досить малому δ_2 на відрізку $[\tau_j^\eta, \tau_j^k)$ розв'язок $\xi(t)$ не має перетинів з поверхнями $\tau_j(x)$. При $\tau_j^\eta > \tau_j^k$ доведення аналогічне.

Враховуючи рівність початкових функцій $\eta_0 = \xi_0^k$, з (14) отримуємо

$$\|\eta(t) - \xi^k(t)\| \leq \int\limits_0^t \|f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h))\| ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \|f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \xi^k(s-h))\|\, ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \|f(s+\theta_m, \xi^k(s), \xi^k(s-h)) - f(s+\theta_k, \xi^k(s), \xi^k(s-h))\| ds +$$
$$+ \left\| \sum_{0<\tau_j^\eta<t} I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau_j^\eta)) - \sum_{0<\tau_j^k<t} I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau_j^k)) \right\| = i_1 + i_2 + i_3 + s_1. \tag{17}$$

Оцінимо інтеграли і суми в (17) при $t \in \mathcal{J}$:

$$i_1 = \int\limits_{[0,t]\cap\mathcal{J}} \|f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h))\| ds +$$

$$+ \int\limits_{[0,t]\cap\mathcal{I}} \|f(s+\theta_m, \eta(s), \eta(s-h)) - f(s+\theta_m, \xi^k(s), \eta(s-h))\| ds \le$$

$$\le L_1 \int\limits_{[0,t]\cap\mathcal{J}} \|\eta(s) - \xi^k(s)\| ds + 2M_0 \sum_{\tau'_j, \tau''_j \in (0,t)} |\tau''_j - \tau'_j|,$$

$$i_2 = \int\limits_{-h}^{t-h} \|f(s+h+\theta_m, \xi^k(s+h), \eta(s)) - f(s+h+\theta_m, \xi^k(s+h), \xi^k(s))\| ds \le$$

$$\le L_1 \int\limits_{[0,t-h]\cap\mathcal{J}} \|\eta(s) - \xi^k(s)\| ds + 2M_0 \sum_{0<\tau'_j<t-h} |\tau''_j - \tau'_j| + L_1 \int\limits_{-h}^{0} \|\eta_0 - \xi^k_0\| ds,$$

$$i_3 \le \int\limits_0^t \delta_2 ds.$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\|I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau^\eta_j)) - I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau^k_j))\| \le \|I_{j+\alpha(m)}(\eta(\tau^\eta_j)) - I_{j+\alpha(m)}(\xi^k(\tau^k_j))\| +$$

$$+ \|I_{j+\alpha(m)}(\xi^k(\tau^k_j)) - I_{j+\alpha(k)}(\xi^k(\tau^k_j))\| \le L_1 \|\eta(\tau^\eta_j) - \xi^k(\tau^k_j)\| + \delta_2,$$

то з урахуванням (15)

$$s_1 \le \sum_{0<\tau'_j<t} \frac{L_1}{1-M_0N_1} \|\eta(\tau'_j) - \xi^k(\tau'_j)\| + \delta_2 \left(\frac{2L_1M_0}{1-M_0N_1} + 1\right)\left(\frac{T(\varepsilon)}{\theta} + 1\right).$$

В результаті для $t \in \mathcal{J}$ отримуємо

$$\|\eta(t) - \xi^k(t)\| \le 2L_1 \int\limits_0^t \|\eta(s) - \xi^k(s)\| ds + \delta_2 M_1 + \sum_{0<\tau'_j<t} \frac{L_1 + 4M_0N_1}{1-M_0N_1} \|\eta(\tau'_j) - \xi^k(\tau'_j)\|,$$

де

$$M_1 = \left(\frac{8M_0 + 2M_0L_1}{1-M_0N_1} + 1\right)\left(\frac{T(\varepsilon)}{\theta} + 1\right) + T(\varepsilon).$$

Використовуючи лему Гронуолла для імпульсних систем [11, с. 12], маємо

$$\|\eta(t)-\xi^k(t)\| \le \delta_2 M_1 \left(1+\frac{L_1+4M_0N_1}{1-M_0N_1}\right)^{\frac{T(\varepsilon)}{\theta}+1} e^{2L_1T(\varepsilon)} \tag{18}$$

для $t \in [0,T(\varepsilon)]$, $t \notin (\tau_j', \tau_j'']$. Виберемо δ_2 так, щоб права частина (18) була меншою за $\delta_1/2$. Отже,

$$\|\eta(t)-\xi^k(t)\| < \frac{\delta_1}{2}, \quad t \in [0,T(\varepsilon)], \quad t \notin (\tau_j', \tau_j'']. \tag{19}$$

Також будемо вимагати виконання нерівності $|\tau_j' - \tau_j''| < \delta_1/2$, що досягається вибором δ_2, яке згідно з (16) задовольняє умову

$$\frac{2\delta_2 + N_1\|\eta(\tau_j')-\xi^k(\tau_j')\|}{1-M_0N_1} \le \frac{\delta_1}{2},$$

або $\delta_2 \le \delta_1(1-N_1-N_1M_0)/4$.

З (12) і (19) отримуємо

$$\left\|\xi^m(t)-\xi^k(t)\right\| \le \|\xi^m(t)-\eta(t)\| + \left\|\eta(t)-\xi^k(t)\right\| < \varepsilon$$

для $t \in [0,T(\varepsilon)]$, $|t-\tau_j^k| > \varepsilon/2$, $|t-\tau_j^m| > \varepsilon/2$. Зауважимо, що з (12), (15) і (19) випливає $|\tau_j^k - \tau_j^m| < \varepsilon$. Відповідно з (13) і (19) одержуємо

$$\rho\left(\xi^m_{T(\varepsilon)}, \xi^k_{T(\varepsilon)}\right) < \delta_1.$$

Повторюючи наведені вище аргументи, доводимо, що при $k \ge m \ge k_0$ виконується $\|\xi^m(t)-\xi^k(t)\| < \varepsilon$ для $t \in [T(\varepsilon), 2T(\varepsilon)]$, $|t-\tau_j^k| > \varepsilon/2$, $|t-\tau_j^m| > \varepsilon/2$ і далі

$$\|\xi^m(t)-\xi^k(t)\| < \varepsilon, \;\; t \in [qT(\varepsilon),(q+1)T(\varepsilon)], \;\; |t-\tau_j^k| > \varepsilon/2, \;\; |t-\tau_j^m| > \varepsilon/2.$$

Отже, ми встановили нерівність

$$\|\xi^m(t)-\xi^k(t)\| < \varepsilon$$

для всіх $t \ge 0$, $|t-\tau_j^k| > \varepsilon/2$, $|t-\tau_j^m| > \varepsilon/2$, причому $|\tau_j^k-\tau_j^m| < \varepsilon$. Функція $\xi(t)$ асимптотично майже періодична. За теоремою 1 система (1), (2) має *w*-майже періодичний розв'язок $p(t)$.

2. Доведемо, що *w*-майже періодичний розв'язок $p(t)$ є асимптотично стійким при $t \ge 0$. Як показано в теоремі 1, існує така послідовність $\{\theta_m\}$, що $\xi(t+\theta_m) \to p(t)$ рівномірно по $t \ge 0$ у *w*-топології.

Для послідовності $\{\theta_m\}$ виконується умова $f(t+\theta_m,x,y) \to f(t,x,y)$ рівномірно по $t \in \mathbb{R}$ і $x,y \in U_\rho$, а також існує послідовність цілих чисел $\{\alpha(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ така, що

$$\lim_{m\to\infty}(\tau_{n+\alpha(m)}(x)-\theta_m) = \tau_n(x)$$

рівномірно по $n \in \mathbb{Z}$, $x \in U_\rho$.

Оскільки розв'язок $\xi(t)$ системи (1), (2) рівномірно стійкий, то розв'язок $\xi^m(t) = \xi(t+ +\theta_m)$ системи (7), (9) з початковою функцією $\xi_{t_0+\theta_m}$ рівномірно стійкий з тими ж параметрами $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$, що і $\xi(t)$.

Для фіксованого $t_0 \in \mathbb{R}$, якщо m є досить великим, $\rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) < \dfrac{1}{2}\delta(\varepsilon/2)$. Нехай φ таке, що

$$\rho(\varphi, p_{t_0}) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon/2), \tag{20}$$

і $x(t)$ — такий розв'язок системи (1), (2), що $x_{t_0+\theta_m} = \varphi$. Відповідно $x^m(t) = x(t+\theta_m)$ — розв'язок системи (7), (9) з початковою умовою $x^m_{t_0} = \varphi$. Оскільки $\xi^m(t)$ рівномірно стійкий і

$$\rho(\xi^m_{t_0}, x^m_{t_0}) \le \rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) + \rho(p_{t_0}, \varphi) < \delta(\varepsilon/2),$$

то

$$\|\xi^m(t) - x^m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \ge t_0, \quad |t - \tau^m_j| > \frac{\varepsilon}{2}, \tag{21}$$

де τ^m_j, як і раніше, визначається рівністю (10).

Виберемо довільне $T_1 > 0$. Існує підпослідовність послідовності $\{\theta_m\}$ (яку ми знову позначимо $\{\theta_m\}$) така, що $x^m(t)$ збігається на інтервалі $[t_0, t_0+T_1]$ у *w*-топології до розв'язку $y(t)$ системи (1), (2) з початковими значеннями (t_0, φ). Тоді при досить великих m виконується

$$\|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0, t_0+T_1], \quad |t - \tau^y_j| > \varepsilon/4, \tag{22}$$

$$\|\xi^m(t) - p(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0, t_0+T_1], \quad |t - p_j| > \varepsilon/4, \tag{23}$$

де τ^y_j — точки перетину розв'язку $y(t)$ з поверхнями $t = \tau_j(x)$.

З нерівностей (21) – (23) отримуємо

$$\|p(t) - y(t)\| \le \|p(t) - \xi^m(t)\| + \|\xi^m(t) - x^m(t)\| + \|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

для $t \in [t_0, t_0+T_1]$, $|t - p_j| > \varepsilon$.

Оскільки T_1 довільне, отримуємо нерівність

$$\|p(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, \infty), \quad |t - p_j| > \varepsilon$$

для розв'язку $y(t)$ з початковою умовою $y(\theta) = \varphi(\theta)$, $t_0 - h \le \theta \le t_0$, яка задовольняє (20). Це доводить рівномірну стійкість розв'язку $p(t)$.

Доведемо тепер рівномірну асимптотичну стійкість $p(t)$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, то $\xi^m(t)$ теж рівномірно асимптотично стійкий розв'язок системи (7), (9) з тими ж параметрами $(\delta_0, \varepsilon, T(\varepsilon))$, що і $\xi(t)$. При досить великих m маємо $\rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) < \delta_0/2$.

Розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (1), (2) такий, що $x_{t_0+\theta_m} = \varphi$, де початкова функція φ задовольняє $\rho(\varphi, p_{t_0}) < \delta_0/2$. Тоді $x^m(t) = x(t+\theta_m)$ є розв'язком системи (7), (9) з початковою функцією $x^m_{t_0} = \varphi$.

Оскільки $\rho(\xi^m_{t_0}, \varphi) \leq \rho(\xi^m_{t_0}, p_{t_0}) + \rho(p_{t_0}, \varphi) < \delta_0$, а розв'язок $\xi^m(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, то

$$\|\xi^m(t) - x^m(t)\| < \varepsilon/2, \quad t \geq t_0 + T(\varepsilon/2), \quad |t - \tau^m_j| > \varepsilon/2. \tag{24}$$

Зафіксуємо довільне $T_1 > 0$. Існує підпослідовність послідовності $x^m(t)$ (її знову позначимо $x^m(t)$), яка збігається у w-топології на інтервалі $[t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1]$ до розв'язку $y(t)$ системи (1), (2) з початковою умовою $y(\theta) = \varphi(\theta)$, $t_0 - h \leq \theta \leq t_0$. Тому при досить великих m виконується

$$\|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1], \quad |t - \tau^y_j| > \varepsilon/4, \tag{25}$$

$$\|\xi^m(t) - p(t)\| < \varepsilon/4, \quad t \in [t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1], \quad |t - p_j| > \varepsilon/4. \tag{26}$$

З нерівностей (24) – (26) отримуємо

$$\|p(t) - y(t)\| \leq \|p(t) - \xi^m(t)\| + \|\xi^m(t) - x^m(t)\| + \|x^m(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

для $t \in [t_0 + T(\varepsilon/2), t_0 + T(\varepsilon/2) + T_1]$, $|t - p_j| > \varepsilon$.

Оскільки T_1 довільне, одержуємо нерівність

$$\|p(t) - y(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0 + T(\varepsilon/2), \infty), \quad |t - p_j| > \varepsilon.$$

Звідси випливає рівномірна асимптотична стійкість майже періодичного розв'язку $p(t)$.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // J. Math. Anal. and Appl. — 2017. — **446**. — P. 1030 – 1045.
2. *Henriquez H. R., De Andrade B., Rabelo M.* Existence of almost periodic solutions for a class of abstract impulsive differential equations // ISRN Math. Anal. — 2011. — Article ID 632687. — 21 p.
3. *Pinto M., Robledo G.* Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Appl. Math. and Comput. — 2010. — **217**, № 8. — P. 4167 – 4177.
4. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Almost periodic impulsive systems // Different. Equat. — 1993. — **29**. — P. 684 – 691.
5. *Stamov G. T.* Almost periodic solutions of impulsive differential equations // Lect. Notes Math. — 2012. — **2047**. — xx+217 p.
6. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Different. Equat. — 2014. — **21**, № 3 – 4. — P. 155 – 169.
7. *Tkachenko V. I.* Exponential dichotomy and existence of almost periodic solutions of impulsive differential equations // J. Math. Sci. — 2016. — **212**, № 4. — P. 490 – 502.
8. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action // Mathematical Modeling and Applications in Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. — P. 161 – 205.
9. *Wang Q., Zhang H., Ding M., Wang Z.* Global attractivity of the almost periodic solution of a delay logistic population model with impulses // Nonlinear Anal. — 2010. — **73.** — P. 3688 – 3697.
10. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 310 с.
11. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci. Publ., 1995. — x+462 p.

12. *Yoshizawa T.* Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // Funkc. ekvacioj. — 1969. — **12**. – P. 23 – 40.

13. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Different. Equat. — 2011. — **18**, № 3 – 4. — P. 269 – 278.

14. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Trofimchuk S. I.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukr. Math. J. — 1991. — **43**, № 4. — P. 610 – 615.

15. *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. — 2004. — **51**, № 4. — P. 633 – 647.

16. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. and Mech. — 1992. — **56**, № 6. — P. 829 – 837.

17. *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 10. — С. 1409 – 1413.

18. *Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* О почти периодических решениях импульсных систем // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 1. — С. 74 – 80.

19. *Fink A. M.* Almost periodic differential equations // Lect. Notes Math. — 1974. — **377**. — 336 p.

20. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Spaces of piecewise-continuous almost-periodic functions and almost-periodic sets on the line. I // Ukr. Math. J. — 1991. — **43**, № 11. — P. 1501 – 1506.

Одержано 20.05.16