УДК 512.53

Жучок А. В. (Луганський національний університет імені Тараса Шевченка)

ЛІВІ НАПІВРЕТРАКЦІЇ ВІЛЬНОГО МОНОЇДА

We establish the connection between left and symmetric semiretractions of a semigroup, namely, show how with the help of left semiretractions new symmetric semiretractions are constructed. We also present one-sided semiretractions of a free monoid over a finite alphabet and characterize relationships between some types of left and symmetric semiretractions of this monoid.

Встановлено зв'язок між лівими та симетричними напівретракціями напівгрупи, а саме: показано як за допомогою лівих напівретракцій будуються нові симетричні напівретракції. Представлено однобічні напівретракції вільного моноїда над скінченним алфавітом та охарактеризовано зв'язки між деякими типами лівих та симетричних напівретракцій цього моноїда.

Вступ. Поняття лівої (правої, симетричної) напівретракції моноїда [1] вперше було введено В. М. Усенком. Ці поняття відіграють важливу роль при розв'язку проблем теорії конгруенцій напівгруп: з використанням лівих (правих, симетричних) напівретракцій напівгрупи суттєво полегшується задача знаходження правих (лівих, двобічних) конгруенцій на напівгрупі. Перші застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій на моноїдах наведено в [1]. Пізніше в [2], [3] розв'язувалася задача класифікації напівретракцій напівгруп заданого класу за властивостями їх образів. Виявилося також, що техніка, яка використовувалася в [4], [5] при описі конгруенцій на вільній напівгрупі, збігається з технікою В. М. Усенка симетричних напівретракцій.

Метод безпосереднього опису симетричних напівретракцій напівгруп заданого класу в багатьох випадках є достатньо складним. У цій статті ми пропонуємо інший підхід, заснований на використанні лівих напівретракцій напівгрупи. Цей підхід використовується для випадку вільного моноїда над скінченним алфавітом. Ми представляємо кілька класів лівих та правих напівретракцій вільного моноїда та використовуємо ліві напівретракції для опису симетричних напівретракцій цього моноїда.

1. Зв'язок лівих та симетричних напівретракцій. Через $\Im(X)$ позначатимемо симетричну напівгрупу на множині X, а через i_X – тотожне перетворення множини X. Якщо $\varphi : A \to B$ – відображення множини A в множину B, то ∇_φ – відношення рівнозначності відображення φ, тобто

$$\nabla_\varphi = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ x\varphi = y\varphi\}.$$

Перетворення τ напівгрупи S називається лівою напівретракцією, якщо

$$(xy)\tau = (x\tau y)\tau \tag{1}$$

при будь-яких $x, y \in S$. Якщо замість тотожності (1) виконується наступна:

$$(xy)\tau = (x y\tau)\tau, \tag{2}$$

то говорять про праву напівретракцію. Якщо для $\tau \in \Im(S)$ виконуються обидві тотожності (1) та (2), то τ називають симетричною напівретракцією напівгрупи S.

Необхідні та достатні умови, за якими ідемпотентне перетворення напівгрупи є її лівою (правою) напівретракцією, дає така лема.

Лема 1. *Ідемпотентне перетворення τ напівгрупи S є її лівою (правою) напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення рівнозначності ∇_τ є правою (лівою) конгруенцією на цій напівгрупі.*

Доведення леми 1 ґрунтується на тих самих міркуваннях, що й доведення леми п. 1.1 роботи [1].

Загальну характеристику симетричних напівретракцій дає твердження.

Твердження 1. ([2], твердження п. 1) *Для ідемпотентного перетворення π напівгрупи S еквівалентними є твердження:*

1) π є симетричною напівретракцією;

2) π є лівою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією на напівгрупі S;

3) π є правою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією на напівгрупі S;

4) для всіх $x, y \in S$ виконується тотожність: $(xy)\pi = (x\pi y\pi)\pi$.

Таким чином, задача опису лівих (правих, двобічних) конгруенцій на напівгрупах заданого класу зводиться до опису правих (лівих, симетричних) напівретракцій цих напівгруп.

Нехай τ – ліва напівретракція довільної напівгрупи S та $T = Im\tau$. Якщо визначити відображення $\varphi : S \to \Im(T) : a \mapsto \rho_a$ так, що $t\rho_a = (ta)\tau$ для всіх $t \in T$, то отримаємо гомоморфізм напівгрупи S в напівгрупу $\Im(T)$. Дійсно, для будь-яких $a, b \in S$, $t \in T$ маємо:

$$t\rho_a\rho_b = (ta)\tau\rho_b = ((ta)\tau\, b)\tau = (tab)\tau = t\rho_{ab},$$

звідки випливає стверджуване. При цьому для довільних $x, y \in S$ виконується умова $(x, y) \in \nabla_\varphi$ тоді й лише тоді, коли $(tx)\tau = (ty)\tau$ для всіх $t \in T$. Згадуваний зв'язок між різними типами лівих та симетричних напівретракцій полягає в тому, що для будь-якої лівої напівретракції τ напівгрупи S існує симетрична напівретракція $\alpha[\tau]$ цієї напівгрупи, відношення рівнозначності за якою збігається з конгруенцією ∇_φ на напівгрупі S, тобто $\nabla_{\alpha[\tau]} = \nabla_\varphi$. Опис таких зв'язків на вільному моноїді і є основною метою цієї роботи.

2. Ліві та симетричні напівретракції вільного моноїда.

У цьому пункті представлено однобічні напівретракції вільного моноїда над скінченним алфавітом та охарактеризовано зв'язки між деякими типами лівих та симетричних напівретракцій цього моноїда.

3.1. Нехай $F^\theta = F^\theta[X]$ – вільний моноїд в алфавіті $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, θ – порожнє слово, $F = F[X]$ – вільна напівгрупа в тому ж алфавіті. Для всіх $x \in X$, $w \in F$ кількість з'явлень елемента x в w позначимо через $d_x(w)$.

Як зазвичай, через $\mathbb{N}$ позначатимемо множину всіх натуральних чисел. Нехай $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$. Початкове (кінцеве) підслово w' слова $w \in F$, для якого $d_{x_i}(w') = k_i$ для всіх $1 \leq i \leq n$, назвемо K-початком (K-кінцем) слова w та позначимо через $\vec{w}_{[K]}$ ($\overleftarrow{w}_{[K]}$). Зрозуміло, що не кожне слово напівгрупи F має K-початок (K-кінець).

Нехай $\tilde{K} = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \mid k_i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n\}$. Для кожного $K \in \tilde{K}$ визначимо далі перетворення $\varphi^{(K)} \in \Im(F^\theta)$, поклавши

$$\theta\varphi^{(K)} = \theta, \quad w\varphi^{(K)} = \begin{cases} \vec{w}_{[K]}, & \text{якщо } w \text{ має } K\text{-початок}, \\ w & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

для всіх $w \in F$.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Будь-яке перетворення $\varphi^{(K)}$, $K \in \widetilde{K}$, вільного моноїда F^θ є його лівою напівретракцією, для якої $\alpha[\varphi^{(K)}] = i_{F^\theta}$ при $n > 1$. При цьому $\varphi^{(K)}$, $K \in \widetilde{K}$, не є правою напівретракцією при $n > 1$.*

Доведення. Якщо $w, v \in F$ та w має K-початок, то, очевидно, що

$$(wv)\varphi^{(K)} = \vec{w}_{[K]} = (\vec{w}_{[K]}v)\varphi^{(K)} = (w\varphi^{(K)}v)\varphi^{(K)},$$

оскільки $w\varphi^{(K)} = \vec{w}_{[K]}$. В іншому випадку

$$(wv)\varphi^{(K)} = (w\varphi^{(K)}v)\varphi^{(K)},$$

оскільки $w\varphi^{(K)} = w$. Випадок, що визначається умовою $w = \theta$ або $v = \theta$, або $w = v = \theta$, є очевидним.

Отже, перетворення $\varphi^{(K)}$ є лівою напівретракцією моноїда F^θ.

Нехай $n > 1$ та $K = (k_1, ..., k_i, ..., k_n)$, $p \in \mathbb{N}$. Якщо

$$w = x_i^{k_i+p} \in Im\varphi^{(K)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

то

$$(ws_1)\varphi^{(K)} = (ws_2)\varphi^{(K)} \Leftrightarrow s_1 = s_2$$

при будь-яких фіксованих $s_1, s_2 \in F^\theta$, а це означає, що $\alpha[\varphi^{(K)}]$ тотожне на F^θ.

Покажемо, що $\varphi^{(K)}$ не є правою напівретракцією при $n > 1$.

Нехай задано елементи $w_1 = x_1^{k_1+p}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, $\quad w_2 = x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}w$ напівгрупи F, $w \in F$. Тоді

$$(w_1w_2)\varphi^{(K)} = ((x_1^{k_1+p}x_2^{k_2}...x_n^{k_n})(x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}w))\varphi^{(K)} =$$
$$= x_1^{k_1+p}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}w \neq x_1^{k_1+p}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} =$$
$$= ((x_1^{k_1+p}x_2^{k_2}...x_n^{k_n})(x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}))\varphi^{(K)} =$$
$$= ((x_1^{k_1+p}x_2^{k_2}...x_n^{k_n})(x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}w)\varphi^{(K)})\varphi^{(K)} = (w_1w_2\varphi^{(K)})\varphi^{(K)},$$

звідки й випливає стверджуване. Теорему доведено.

Якщо покласти

$$\theta\varphi^{[K]} = \theta, \quad w\varphi^{[K]} = \begin{cases} \overleftarrow{w}_{[K]}, & \text{якщо} \quad w \quad \text{має} \quad K\text{-кінець}, \\ w & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

для всіх $w \in F$, то безпосередньо перевіряється, що перетворення $\varphi^{[K]} \in \Im(F^\theta)$, $K \in \widetilde{K}$, є правою напівретракцією вільного моноїда.

3.2. Нехай $w \in F$. Зафіксуємо натуральне число m. Якщо $d_{x_i}(w) \geq m$ для всіх $1 \leq i \leq n$, то через $\vec{w}_{(m)}$ $\quad (\overleftarrow{w}_{(m)})$ позначатимемо початкове (кінцеве) слово мінімальної довжини слова w, для якого $d_{x_i}(\vec{w}_{(m)}) \geq m$ $(d_{x_i}(\overleftarrow{w}_{(m)}) \geq m)$ для всіх $1 \leq i \leq n$.

Визначимо перетворення $\varphi_m^{\rightarrow}$, $\varphi_m^{\leftarrow} \in \Im(F^\theta)$, поклавши

$$\theta\varphi_m^{\rightarrow} = \theta\varphi_m^{\leftarrow} = \theta,$$

$$w\varphi_m^{\rightarrow} = \begin{cases} \vec{w}_{(m)}, & \text{якщо} \quad d_{x_i}(w) \geq m, \ 1 \leq i \leq n, \\ w & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$w\varphi_m^{\leftarrow} = \begin{cases} \overleftarrow{w}_{(m)}, & \text{якщо} \quad d_{x_i}(w) \geq m, \ 1 \leq i \leq n, \\ w & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $w \in F$.

Має місце лема.

Лема 2. *Для кожного $m \in \mathbb{N}$ перетворення $\varphi_m^{\rightarrow}$ та $\varphi_m^{\leftarrow}$ є симетричними напівретракціями вільного моноїда F^{θ}.*

Доведення. Дійсно, для довільних $w_1, w_2 \in F$ таких, що $d_{x_i}(w_1) \geq m$ для всіх $1 \leq i \leq n$, отримуємо:

$$(w_1 w_2)\varphi_m^{\rightarrow} = (\vec{w}_1)_{(m)} = ((\vec{w}_1)_{(m)} w_2 \varphi_m^{\rightarrow})\varphi_m^{\rightarrow} = (w_1 \varphi_m^{\rightarrow} w_2 \varphi_m^{\rightarrow})\varphi_m^{\rightarrow}.$$

Якщо $w_1\varphi_m^{\rightarrow} = w_1$, $w_2\varphi_m^{\rightarrow} = (\vec{w}_2)_{(m)}$, то

$$(w_1 w_2)\varphi_m^{\rightarrow} = (\overrightarrow{w_1 w_2})_{(m)} = (w_1 (\vec{w}_2)_{(m)})\varphi_m^{\rightarrow} = (w_1 \varphi_m^{\rightarrow} w_2 \varphi_m^{\rightarrow})\varphi_m^{\rightarrow}.$$

Останні випадки є очевидними. Таким чином, згідно з твердженням 1 $\varphi_m^{\rightarrow}$ – симетрична напівретракція моноїда F^{θ}.

У двоїстий спосіб доводиться, що перетворення $\varphi_m^{\leftarrow}$ $(m \in \mathbb{N})$ є симетричною напівретракцією моноїда F^{θ}. Лему доведено.

Символом ℓ_w позначатимемо довжину слова $w \in F^{\theta}$. Через

$$E_{(w]} = \{w_{(1]}, w_{(2]}, ..., w_{(k]}\},$$

де $\ell_{w_{(1]}} < \ell_{w_{(2]}} < ... < \ell_{w_{(k]}}$, позначимо множину всіх початкових слів слова $w \in F$, які закінчуються першою літерою слова w. Аналогічно через

$$E_{[w)} = \{w_{[1)}, w_{[2)}, ..., w_{[s)}\},$$

де $\ell_{w_{[1)}} < \ell_{w_{[2)}} < ... < \ell_{w_{[s)}}$, позначимо множину всіх кінцевих слів слова $w \in F$, які починаються на останню літеру слова w. Далі для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначимо перетворення $\varphi(m] \in \Im(F^{\theta})$, поклавши

$$\theta\varphi(m] = \theta, \quad w\varphi(m] = \begin{cases} w_{(m]}, & \text{якщо} \quad |E_{(w]}| \geq m, \\ w & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

для всіх $w \in F$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Будь-яке перетворення $\varphi(m] \in \Im(F^{\theta})$, $m \in \mathbb{N}$, є лівою напівретракцією вільного моноїда, для якої $\alpha[\varphi(m]] = \varphi_{m-1}^{\rightarrow}$ при $m > 1$. При цьому $\varphi(m]$, $m \in \mathbb{N}$, не є правою напівретракцією при $m > 1$, $n > 1$.*

Доведення. Нехай задано довільні елементи $w_1, w_2 \in F$, причому $|E_{(w_1]}| < m$. Тоді

$$(w_1 w_2)\varphi(m] = (w_1 \varphi(m] w_2)\varphi(m],$$

оскільки $w_1\varphi[m]=w_1$. За умовою $|E_{(w_1]}|\geq m$ та при будь-якому $w_2\in F$ отримуємо:

$$(w_1w_2)\varphi(m] = (w_1w_2)_{(m]} = (w_1)_{(m]} = ((w_1)_{(m]}w_2)\varphi(m] = (w_1\varphi(m]w_2)\varphi(m].$$

Таким чином, $(w_1w_2)\varphi(m] = (w_1\varphi(m]w_2)\varphi(m]$ при будь-яких $w_1, w_2 \in F$.

Випадок, що визначається умовою $w_1=\theta$ або $w_2=\theta$, або $w_1=w_2=\theta$, є очевидним. Відзначимо, що $\varphi(1]$ є симетричною, а тому й лівою напівретракцією моноїда F^θ.

Отже, перетворення $\varphi(m]$ є лівою напівретракцією моноїда F^θ при будь-якому $m\in\mathbb{N}$.

Нехай далі $m>1$. Згідно з лемою 2 $\varphi_{\overrightarrow{m}}$ є симетричною напівретракцією моноїда F^θ. Позначимо через $\bar{\alpha}$ конгруенцію на F^θ, яка збігається з відношенням рівнозначності симетричної напівретракції $\alpha[\varphi(m]]$. З пункту 2 випливає, що $(w_1,w_2)\in\bar{\alpha}$, де w_1,w_2 – довільні, але фіксовані елементи моноїда F^θ, тоді й лише тоді, коли $(t\,w_1)\varphi(m] = (t\,w_2)\varphi(m]$ для всіх $t\in Im\varphi(m]$. Легко бачити, що остання тотожність справджуватиметься в тих і лише в тих випадках, коли елементи w_1,w_2 мають однаковий початковий відрізок, у запису якого кожна літера алфавіту X зустрічається не менше ніж $m-1$ раз або, якщо $w_1=w_2$. Отже, для будь-яких $w_1=u_0u_1,\ w_2=v_0v_1\in F^\theta$, де $u_0,v_0,u_1,v_1\in F^\theta$, маємо:

$$w_1\alpha[\varphi(m]] = w_2\alpha[\varphi(m]] \Leftrightarrow u_0=v_0\in F,\ d_{x_i}(u_0)\geq m-1$$

для всіх $1\leq i\leq n$ або $w_1=w_2$. А це означає, що $\alpha[\varphi(m]]=\varphi_{\overrightarrow{m-1}}$.

Нарешті, покажемо, що $\varphi(m]$ не є правою напівретракцією при $m>1$, $n>1$. Для цього розглянемо елементи $x, y^mx^{m-1}\in F$, де $x,y\in X$, $x\neq y$, для яких отримаємо:

$$(x(y^mx^{m-1}))\varphi(m] = xy^mx^{m-1}\neq xy^m = (xy^m)\varphi(m] = (x(y^mx^{m-1})\varphi(m])\varphi(m].$$

Теорему доведено.

Якщо покласти

$$\theta\varphi[m)=\theta,\ \ w\varphi[m)=\begin{cases} w_{[m)}, & \text{якщо } |E_{[w)}|\geq m,\\ w & \text{в іншому випадку}\end{cases}$$

для всіх $w\in F$, то безпосередньо перевіряється, що перетворення $\varphi[m)\in\Im(F^\theta)$, $m\in\mathbb{N}$, є правою напівретракцією вільного моноїда.

3.3. Через $c(w)$ позначатимемо множину елементів $x\in X$, які входять до запису слова $w\in F$. Для кожного $w\in F$ через $\vec{w}$ $(\overleftarrow{w})$ позначатимемо початкове (кінцеве) слово мінімальної довжини, для якого $c(w)=c(\vec{w})$ $(c(w)=c(\overleftarrow{w}))$. Визначеними, отже, є відображення

$$L_C: F^\theta\to F^\theta: w\mapsto w\,L_C=\begin{cases}\vec{w},\ w\neq\theta,\\ \theta,\ w=\theta,\end{cases}$$

$$R_C: F^\theta\to F^\theta: w\mapsto w\,R_C=\begin{cases}\overleftarrow{w},\ w\neq\theta,\\ \theta,\ w=\theta,\end{cases}$$

які в роботі [6] називають лівою (правою) C-примітивізацією моноїда F^θ. За лемою п. 5 роботи [6] ліва (права) C-примітивізація є правою (лівою) напівретракцією моноїда F^θ.

Перейдемо до опису симетричної напівретракції $\alpha[R_C]$ моноїда F^θ за допомогою правої C-примітивізації R_C цього моноїда. Для цього визначимо перетворення $\bar{R}_C \in \Im(F^\theta)$, поклавши

$$\theta \bar{R}_C = \theta, \; w\bar{R}_C = \begin{cases} wR_C, & \text{якщо} \quad c(w) = X, \\ w & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

для всіх $w \in F$.

Має місце лема.

Лема 3. *Перетворення $\bar{R}_C \in \Im(F^\theta)$ є симетричною напівретракцією вільного моноїда F^θ. При цьому $\alpha[R_C] = \bar{R}_C$.*

Доведення. Для довільних $w_1, w_2 \in F$ при $c(w_2) = X$ отримуємо:

$$(w_1w_2)\bar{R}_C = (w_1w_2)R_C = w_2R_C = w_2\bar{R}_C = (w_1\bar{R}_C w_2\bar{R}_C)R_C = (w_1\bar{R}_C w_2\bar{R}_C)\bar{R}_C.$$

Якщо ж $c(w_1) = X$, $c(w_2) \neq X$, то

$$(w_1w_2)\bar{R}_C = (w_1w_2)R_C = (w_1R_Cw_2)R_C = (w_1\bar{R}_C w_2\bar{R}_C)R_C = (w_1\bar{R}_C w_2\bar{R}_C)\bar{R}_C,$$

оскільки R_C – ліва напівретракція моноїда F^θ.

Випадок: $c(w_1) \neq X$, $c(w_2) \neq X$, тривіальний. Отже,

$$(w_1w_2)R_C = (w_1R_Cw_2R_C)R_C$$

при будь-яких $w_1, w_2 \in F$.

Випадок, коли $w_1 = \theta$ або $w_2 = \theta$, або $w_1 = w_2 = \theta$, є очевидним. Таким чином, за твердженням 1 $\bar{R}_C$ – симетрична напівретракція моноїда F^θ.

Доведемо другу частину леми.

Якщо для довільних $w_1, w_2 \in F^\theta$ має місце тотожність $(t\,w_1)R_C = (t\,w_2)R_C$ для всіх $t \in ImR_C$, то

$$w_1\,\alpha[R_C] = w_2\,\alpha[R_C] \Leftrightarrow c(w_1) = c(w_2) = X, \; \overleftarrow{w}_1 = \overleftarrow{w}_2$$

або $w_1 = w_2$. Отже, $\alpha[R_C] = \bar{R}_C$. Лему доведено.

Якщо покласти

$$\theta \bar{L}_C = \theta, \; w\bar{L}_C = \begin{cases} wL_C, & \text{якщо} \quad c(w) = X, \\ w & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

для всіх $w \in F$, то отримаємо, що легко перевірити, симетричну напівретракцію $\bar{L}_C$ вільного моноїда F^θ.

1. *Усенко В. М.* Напівретракції моноїдів // Труды ИПММ. – 2000. – **5.** – С. 155–164.
2. *Жучок А. В.* Напівретракції вільних моноїдів // Труды ИПММ. – 2005. – **11.** – С. 81–88.
3. *Жучок А. В.* Вільні нормальні напівгрупи ідемпотентів // Труды ИПММ. – 2006. – **12.** – С. 57–62.
4. *Gerhardt J. A., Petrich M.* Free bands and free *-bands // Glasgow Math. J. – 1986. – **28.** – P. 161–179.
5. *Petrich M., Silva P. V.* Relatively free bands // Comm. in Algebra. – 2000. – **28** (5). – P. 2615–2631.
6. *Усенко В. М.* Напівретракції та симетричні зображення // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – **1.** – С. 81–85.

Одержано 25.10.2013