УДК 512.544.6

А. О. Кирилюк, О. А. Кирилюк (Ужгородський нац. ун-т)

АБЕЛЕВІ МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(2, R_p)$

Classification up to conjugation of the abelian minimal irreducible subgroups of the group $GL(2, R_p)$ uhere R_p is a ring of integers of the finite extension of the field rational p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ are given.

Класифікуються з точністю до спряженості абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$, де R_p — кільце цілих величин скінченного розширення поля раціональних p-адичних чисел $\mathbb{Q}_p$.

Вступ. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи повної лінійної групи $GL(q, F)$, де q – просте число, а F – поле, описані з точністю до спряженості в [1]. Використовуючи [2], результати і методи теорії цілочислових p-адичних зображень скінченних груп (див. [3]) були класифіковані всі неспряжені мінімальні незвідні неабелеві розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ [4] і всі неспряжені мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(3, R_p)$ [5]. В даній роботі класифікуються з точністю до спряженості абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$, що завершує класифікацію неспряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(n, R_p)$ при $n \le 3$.

Ми будемо використовувати наступний результат, який легко випливає з [2].

Лема 1. *Нехай F_p – скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, F_p^* – мультиплікативна група поля F_p і $P_q = \langle \delta \mid \delta^{q^n} = 1 \rangle$ силовська q-підгрупа групи F_p^* (q – просте число). Тоді*

1. *Імпримітивні абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(q, F_p)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $\mid P_q \mid > 1$, спряжені з групою*

$$H_{q^{n+1}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ E_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle h_n \rangle \subset GL(q, F_p)$$

(E_{q-1} – одинична матриця порядку $q-1$, $\mid H_{q^{n+1}} \mid = q^{n+1}$).

2. *Примітивні абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(q, F_p)$, які існують тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке просте число $r > q$, що $(F_p(\varepsilon) : F_p) = q$ (ε – первісний корінь степеня r з 1), спряжені в $GL(q, F_p)$ з групою $H_{q,\Gamma} = \langle \tilde{\varepsilon} \rangle \subset GL(q, R_p)$, де $\tilde{\varepsilon}$ – матриця оператора множення на ε в базисі $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{r-1}$ кільця $R_p[\varepsilon]$, $\mid H_{q,r} \mid = r$.*

Наслідок 1. 1) *Абелеві мінімальні незвідні 2-підгрупи групи $GL(2, F_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються групою*

$$H_{2^{n+1}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{1}$$

де $P_2 = \langle \xi \mid \xi^{2^n} = 1 \rangle$ – силовська 2-підгрупа групи F_2^*.

2) *При $p > 2$ абелеві p-підгрупи групи $GL(2, R_2)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $(F_2(\varepsilon) : F_2) = 2$, де ε – первісний корінь степеня $p > 1$, з точністю до спряженості вичерпуються групою*

$$H_{2,p} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 \\ 1 & \beta_1 \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{2}$$

де β_0, β_1 – коефіцієнти незвідного над F_2 дільника $f(x) = \beta_0 - \beta_1 x + x^2$ полінома $x^p - 1$.

Доведення. 1)Доведення безпосередньо випливає з леми 1.

2) Оскільки $p \neq 2$, то абелева мінімальна підгрупа H групи $GL(2, R_2)$ ізоморфна групі (2) і є 2'-групою. Як випливає з [6], описання неспряжених 2'-підгруп групи $GL(2, R_2)$ зводиться до аналогічної задачі для групи $GL(2, F_2)$ і доведення випливає з леми 1.

Таким чином, залишилось описати циклічні мінімальні незвідні 2-підгрупи групи $GL(2, R_2)$, спряжені в групі $GL(2, F_2)$ з групою $H_{2^{n+1}}$. Зауважимо, що у випадку, коли $(F_2 : Q_2) = 2$, таке описання випливає з [7]. Розглянемо наступні випадки:

1) $P_2 = \langle -1 \rangle$, тобто $i \notin F_2$ $(i^2 = -1)$.

Нехай Δ – точне R_2-зображення групи $C_2 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$, F_2– еквівалентне зображенню

$$\Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_0,$$

тобто $\Delta_0 : a \to \tilde{i}$.

Нехай далі t – простий елемент кільця R_2. Тоді, якщо $u = i - 1$, то $u = \theta_1 \cdot t^d$, $2 = \theta_1 \cdot t^e$, де e – індекс розгалуження поля F_2 над Q_2 $(\theta, \theta_1 \in R_2^*)$.

Лема 2. *Нехай $i \notin F_2^*$. Тоді точні незвідні R_2-зображення групи $C_4 = \langle a \rangle$, F_2-еквівалентні зображенню Δ_0, з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями*

$$\Delta_0 : a \to \tilde{i}, \Delta_r : a \to \begin{pmatrix} 1 & -\theta \cdot t^{e-r} \\ t^r & 1 \end{pmatrix} = a_r \, (r = 1, \ldots, d; \theta \in R_2^*). \qquad (3)$$

Доведення. Оскільки $i \notin F_2^*$, то зображення Δ_0 реалізується в кільці $R_2[i]$. Розглянемо ідеали $I_r = \langle t^r, u \rangle$ кільця $R_2[i]$ $(r = 1, \ldots, d)$. Так як a діє як оператор множення на i в кільці $R_2[i]$, то

$at^r = it^r = t^r + t^r u$;

$au = iu = (i-1)u + u = u^2 + u = -2i + u = -u - 2 = (-\theta \cdot t^{e-r})t^r - u$

і матриця A_r зображення Δ_r має вигляд (3).

Покажемо, що зображення Δ_r та Δ_{e-r} R_2-еквівалентні, де $r = 1, \ldots, d$. Нехай

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

задовольняє умові $A_r C = C A_{e-r}$. Тоді одержимо систему рівностей

$$\begin{cases} c_1 - c_3\theta \cdot t^{e-r} & = & c_1 + c_2 t^{e-r}, \\ c_1 t^r - c_3 & = & c_3 - c_4 t^{e-r}, \\ c_2 - c_4\theta \cdot t^{e-r} & = & -c_1\theta \cdot t^{e-r} - c_2, \\ c_2 t^r - c_4 & = & -c_3\theta \cdot t^r - c_4. \end{cases}$$

З першої рівності одержимо $c_2 = -c_3\theta$, а з другої при $c_3 = 1$ одержимо $c_1 t^r = 2 - c_4 t^{e-r} = \theta \, t^e - c_4 t^{e-r}$. Поклавши $c_4 = \theta$, матимемо $c_1 = \theta \cdot t^{e-r}$ і матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} \theta \cdot t^{e-r} & -\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |C| = \theta \in R_2^*.$$

Покажемо тепер, що при $r > s$ $(1 \leq r, s \leq d)$ Δ_r і Δ_s нееквівалентні над кільцем R_2. Дійсно, нехай $A_rC = CA_s$. Тоді одержимо систему рівностей

$$\begin{cases} c_1 - c_3t^{e-r} &= c_1 + c_2t^s, \\ c_2t^r - c_3 &= c_3 + c_4t^s, \\ c_2 - c_4\theta \cdot t^{e-r} &= -c_1\theta \cdot t^{e-r} - c_2, \\ c_2t^r - c_4 &= -c_3\theta \cdot t^{e-s} - c_4. \end{cases}$$

З другої рівності маємо $c_1t^r - c_4t^s = 2c_3$ і далі $t^s(c_1t^{e-s} - c_4) = c_3\theta \cdot t^{2e}$, звідки $c_4 \equiv 0(modt)$ або $c_4 = c_1t^{e-r} \equiv 0(modt)$. Тоді з першої рівності одержимо $c_2 = -c_3t^{e-r-s}$. Оскільки $e - r - s > 0$, то $c_2 \equiv 0(modt)$ і $|C| \equiv 0(modt)$, звідки C є необоротною над R_2 матрицею.

Нехай тепер

$$\Delta : a \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A$$

– точне R_2-зображення групи $C_4 = \langle a \rangle$. З умови $A^2 = -E$ одержимо рівності

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta\gamma &= -1, \\ \alpha\beta + \delta^2 &= -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\beta + \beta\gamma &= 0, \\ \alpha\gamma + \gamma\delta^2 &= 0. \end{cases}$$

Якщо $\alpha + \beta \neq 0$, то з рівності $\beta(\alpha + \delta) = 0$ і $\gamma(\alpha + \delta) = 0$ одержимо $\beta = \gamma = 0$. Тоді з першої рівності матимемо $\alpha^2 = -1$, що неможливо, оскільки $i \notin R_2$. Тому $\delta = -\alpha$ і

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha^2 + \beta\gamma = -1). \tag{4}$$

Розглянемо наступні випадки:

а) β або γ належать R_2^*. Покажемо, що зображення Δ R_2-еквівалентне Δ_0. Дійсно, якщо $A_0C = CA$, то одержимо систему рівностей

$$\begin{cases} c_3\alpha + c_4\gamma &= c_1, \\ c_3\beta - c_4\alpha &= c_2, \end{cases}$$

звідки $|C| = 2c_3c_4 + c_4^2\gamma - c_2^2\beta$.

Якщо $\beta \in R_2^*$, то покладемо $c_3 = 1$, $c_4 = 0$. Тоді $c_1 = \alpha$, $c_2 = 1$ і $|C| = -\beta$.

Якщо $\gamma \in R_2^*$, то покладемо $c_3 = 0$, $c_4 = 1$, $c_1 = \gamma$, $c_2 = -\alpha$ і $|C| = \gamma$.

В обох випадках $C \in GL(2, R_2)$ і $C^{-1}AC = A_0$.

б) Нехай $\beta \equiv 0(modt)$, $\gamma \equiv 0(modt)$. Тоді $\alpha \in R_2^*$. Якщо $\alpha = 1$, то з (4) випливає, що $\beta\gamma = -2$, тобто $\gamma = \theta_1t^r$, $\beta = -\theta\theta_1^{-1}t^{e-r}$.

Якщо покласти

$$C = \begin{pmatrix} \theta_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, як легко бачити, $C^{-1}AC = A_r$.

Будемо вважати надалі, що $\alpha \neq 1$. Нехай

$$\alpha = 1 + \theta_1t^k \ (\theta_1 \in R_2^*, \ k \geq 1). \tag{5}$$

З умови $\alpha^2+\beta\gamma+1=0$ випливає, що $\alpha^2+1\equiv 0(mod t)$, тобто $\alpha\equiv 1(mod t)$. Нехай

$$\beta=\theta_2 t^r,\ \gamma=\theta_3 t^s,\ 2=\theta\cdot t^e\ (\theta,\theta_1,\theta_2,\theta_3\in R_2^*,\ s\geq 1).$$

Тоді з (4) одержимо

$$\alpha^2+1=-\theta_2\theta_3 t^{r+s},$$

або

$$1+2\theta_1 t^k+\theta_1^2 t^{2k}+1+\theta_1\theta_3 t^{r+s}=0,$$

звідки

$$\theta\cdot t^e+2\theta_1 t^k+\theta_1^2 t^{2k}+\theta_2\theta_3 t^{r+s}=0. \tag{6}$$

З (5)випливає, що

$$\beta=-\frac{\alpha^2+1}{\gamma}=-\frac{\alpha^2+1}{\theta_3 t^s}=-\theta_3^{-1}\frac{\alpha^2+1}{t^s}.$$

Легко бачити, що коли

$$C=\begin{pmatrix}\theta_3^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\theta_3^{-1}\frac{\alpha^2+1}{t^s}\\ \theta_3 t^s & -\alpha\end{pmatrix}C=C\begin{pmatrix}\alpha & -\frac{\alpha^2+1}{t^s}\\ t^s & -\alpha\end{pmatrix},$$

тобто можна вважати, що

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\frac{\alpha^2+1}{t^s}\\ t^s & -\alpha\end{pmatrix}\ (s\geq 1). \tag{7}$$

Тоді, вважаючи, що $\theta_3=1$, (6) можна переписати у вигляді

$$\theta\cdot t^e+\theta\theta_1 t^{e+k}+\theta_1^2 t^{2k}+\theta_2 t^{r+s}=0. \tag{8}$$

Нехай $k>\frac{e}{2}=d$. Тоді з (6) і (8) випливає, що $s\geq e$. З (5) одержимо

$$\alpha^2=(1+\theta_1 t^k)^2=1+\theta_1 t^{k+e}+\theta_1^2 t^{2k},$$

звідки

$$\alpha^2+1=2+\theta_1 t^{k+e}+\theta_1^2 t^{2k}=\theta\cdot t^e+\theta_1 t^{k+e}+\theta_1^2\theta^{2k}. \tag{9}$$

Тоді, при $k>\frac{e}{2}$

$$\alpha^2+1=t^e\left(1+\theta_1 t^k+\theta_1^2 t^{2k-e}\right),$$

тобто

$$\alpha^2+1=\theta_4 t^e(\theta_4\in R_2^*). \tag{10}$$

Отже, $s<e$.

Підставивши (10) у (7), одержимо

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\theta_4 t^{e-s}\\ t^s & -\alpha\end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що, поклавши

$$C = \begin{pmatrix} \theta_4 t^{e-s}\alpha & -\theta_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

одержимо

$$AC = C\begin{pmatrix} \alpha & -\theta_4 t^s \\ t^{e-s} & -\alpha \end{pmatrix} \quad (C \in GL(2, R_2)).$$

Тому можна вважати, що $s \le \frac{e}{2}$. Покажемо, що

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2+1}{t^s} \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix} C = C\begin{pmatrix} 1 & -\theta_4 t^{e-s} \\ t^s & -1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in GL(2, R_2).$$

Дійсно, з умови (11) одержимо систему рівностей:

$$\begin{cases} \alpha c_1 = c_1 + c_2 t^s, & \alpha c_2 - \frac{\alpha\alpha^2+1}{t^s} c_4 = -c_1\theta_4 t^{e-s} - c_2, \\ t^s c_1 = c_4 t^s, & c_2 t^s - \alpha c_4 = -c_4. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = c_4$, $\alpha c_1 = c_1 + c_2 t^s$ і далі $c_2 = (\alpha - 1)t^{-s}$. Поклавши $c_1 = c_4 = 1$, одержимо $c_2 = (\alpha - 1)t^s$. Легко бачити, що інші рівності системи при цьому виконуються. Отже,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2, R_2), \text{ де } c_2 = (\alpha - 1)t^s.$$

Таким чином, ми показали, що при $k > \frac{e}{2}$ всі нееквівалентні незвідні R_2-зображення групи $C_4 = \langle a \rangle$ вичерпуються зображеннями Δ_r $(r = 0, 1, \ldots, d)$.

Нехай тепер $k \le \frac{e}{2}$ і $s \le k$. Тоді, поклавши

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $c_2 = (\alpha - 1)t^{-s}$, одержимо, що

$$C^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2+1}{t^s} \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_4 t^{e-s} \\ t^s & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, і в цьому випадку Δ еквівалентне Δ_r над R_2.

Нехай

$$s \le e \text{ і } C = \begin{pmatrix} 2\alpha \cdot t^{-s} & -\theta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & -\theta_2 t^r \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \alpha & -\theta_2 t^s \\ t^2 & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Нехай $2k < e$. Тоді з (9) одержуємо, що $\alpha^2+1=\theta_4 t^{2k}$ ($\theta_4 \in R_2^*$). Отже, в силу (7)

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & -\theta_4 t^{2k-s} \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix} \ (s<2k,\ 2k<e). \tag{13}$$

Нехай тепер $s \geq k$. Тоді $2k-s \geq k$. Звідси і з (11) одержуємо, що Δ еквівалентне зображенню

$$\Delta' : a \to \begin{pmatrix} \alpha & -\theta_4 t^s \\ t^{2k-s} & -\alpha \end{pmatrix} = A'.$$

Звідси, як і вище, Δ' еквівалентне зображенню Δ_s.

Залишилось розглянути випадок $2k=e$. Якщо в (7) $s \leq k = \frac{e}{2}$, то, в силу (11), все зводиться до зображення Δ_r.

Нехай $s > k = \frac{e}{2}$. Якщо $\frac{\alpha^2+1}{t^s} = \theta_5 t^r$ і $r \leq \frac{e}{2}$, то в силу (11) все також зводиться до Δ_r ($r=0,1,\ldots,d$). Тому покладемо $s \geq \frac{e}{2}+1$, $r \geq \frac{e}{2}+1$, тобто $\alpha^2+1=\theta\theta_1 t^{\frac{e}{2}}$.

Лему доведено.

Нехай t – простий елемент кільця R_2, $P=tR_2$ – простий ідеал кільця R_2, $\overline{R_2^{(s)}} = R_2/\overline{P^s}$ ($s>0$), G_1 і G_2 – скінченні підгрупи групи $GL(n,R_2)$. Позначимо через $\overline{G_1^{(s)}}$ і $\overline{G_2^{(s)}}$ підгрупи групи $GL(n,\overline{R_2^{(s)}})$ одержані з G_1 і G_2 зведенням елементів всіх матриць з цих груп за модулем ідеалу P^s. В цих позначеннях має місце лема (див. [6]).

Лема 3. *Якщо скінченні підгрупи G_1 і G_2 групи $GL(n,R_2)$ спряжені в $GL(n,R_2)$, то підгрупи $G_1^{(s)}$ і $G_2^{(s)}$ групи $GL(n,R_2^{(s)})$ спряжені в групі $GL(n,R_2^{(s)})$ при довільному s.*

Теорема 1. *Нехай $i \notin R_2$. Мінімальні незвідні абелеві 2-підгрупи групи $GL(2,R_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами*

$$U_0=\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ U_r=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\theta\cdot t^{e-r} \\ t^r & -1 \end{pmatrix} \right\rangle (r=1,\ldots,d).$$

Доведення. Нехай $A_r=\Delta_r(a)$ ($a^4=1$). Оскільки зображення Δ_r і Δ_s ($r \neq s,\ r,s=1,\ldots,d$) попарно нееквівалентні, то матриці

$$A_r=\begin{pmatrix} 1 & -\theta\cdot t^{e-r} \\ t^r & -1 \end{pmatrix} \text{ і } A_s=\begin{pmatrix} 1 & -\theta\cdot t^{e-s} \\ t^s & -1 \end{pmatrix}$$

неспряжені над кільцем R_2.

Припустимо, що $r<s$ і A_r спряжена з $A_s^3=-A_s$. Приведемо матриці A_r і A_s за модулем ідеала $P_s=\langle t^s\rangle$. Оскільки $r<s\leq d=\frac{e-1}{2}$, то $2r<2s<e$. Тоді

$$e-s, e-r \geq s \text{ і } \overline{A_r}=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \overline{t^r} & \bar{1} \end{pmatrix},\ \overline{A_s}=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\overline{A_r}$ неодинична, а $\overline{A_s}=\bar{E}$. За лемою 3 вони не спряжені в групі $GL(n,R_2)$. Теорему доведено.

2) Нехай $P_2 = \langle \varepsilon \mid \varepsilon^{2n} = 1 \rangle$ $(n > 1)$ і нехай Δ – точне R_2-зображення групи $C_{2^n} = = \langle a \mid a^{2^n} = 1 \rangle$, F_2-еквівалентне зображенню

$$\Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_0.$$

Нехай далі t – простий елемент кільця R_2 і $u = \varepsilon - 1$. Тоді $2 = \theta t^e$, $u = \theta_1 t^d$, де e – індекс розгалуження поля F_2 над полем Q_2 $(\theta, \theta_1 \in R_2^*)$.

Будемо вважати, що

$$\Delta : a \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A$$

– точне R_2-зображення групи C_{2^n} F_2-еквівалентне зображенню Δ_0. З умови $A^2 = A_0^2 = \varepsilon E$ одержимо, що матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha^2 + \beta\gamma = e). \tag{14}$$

Розглянемо наступні випадки:

а) δ або γ належать R_2^*. Покажемо, що тоді Δ R_2-еквівалентне зображенню Δ_0. Дійсно, якщо

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in GL(2, R_2),$$

то з умови $A_0C = CA$ одержимо систему рівностей

$$\begin{cases} c_1 = c_3\alpha + c_4\gamma, \\ c_2 = c_3\beta - c_4\gamma, \end{cases}$$

звідки $|C| = 2\alpha c_4 c_3 - c_4\gamma - c_3^2\beta$. Якщо $\beta \in R_2^*$, то покладемо $c_3 = 1$, $c_4 = 0$. Тоді $c_1 = \alpha$, $c_2 = \beta$ і $|C| = -\beta \in R_2^*$. Якщо $\gamma \in R_2^*$, то поклавши $c_3 = 0$, $c_4 = 1$, одержимо $c_1 = \gamma$ і $c_2 = -\gamma$, звідки $|C| = \gamma \in R_2^*$.

б) Нехай $\beta \equiv 0(mod t)$, $\gamma \equiv 0(mod t)$. Очевидно, $\beta, \gamma \neq 0$. В протилежному випадку з (14) випливає, $\alpha^2 = \varepsilon$, що неможливо. З (14) випливає, що тоді $\alpha \equiv \equiv 1(mod t)$.

При $\alpha = 1$ маємо $\beta\gamma = \varepsilon - 1 = u$. а при $\gamma = t^r - \beta = ut^{-r}$ і матриця A набуде вигляду

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & \pi t^{-r} \\ t^r a & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Нехай

$$\Delta_1 : a \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda\pi t^r \\ \lambda^{-1} t^r & -1 \end{pmatrix} = A'_r \ (\lambda \in R_2^*).$$

зображення виду (14). Тоді з умови $A_rC = CA'_r$ одержимо систему

$$\begin{cases} c_1 + \lambda\pi t^{-r} c_3 = c_1 + c_2 t^r, \\ c_2 + \lambda\pi t^{-r} c_4 = c_1 \pi t^{-r} - c_2, \\ \lambda^{-1} t^r c_1 - c_3 = c_3 + t^r c_4, \\ \lambda^{-1} t^r c_2 - c_4 = \pi t^{-r} c_3 - c_4, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \lambda\pi t^{-r}c_3 &= c_2 t^r, \\ 2c_2 &= \pi t^{-r}(c_1 - \lambda c_4), \\ 2c_3 &= t^r(\lambda^{-1}c_1 - c_4), \\ \lambda^{-1}t^r c_2 &= \pi t^{-r} c_3. \end{cases}$$

Поклавши $c_2 = c_3 = 0$, одержимо $c_1 = \lambda c_4$ і при $c_4 = 1$ будемо мати

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |C| = \lambda \in R_2^*.$$

Таким чином, зображення Δ і Δ_1 R_2-еквівалентні.

Нехай

$$\Delta : a \to A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \text{ і } \Delta_1 : a \to A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \ (\alpha^2 + \beta\gamma = \varepsilon)$$

два R_2-зображення групи C_{2^n}. З умови $AC = CA_1$ одержимо систему

$$\begin{cases} c_1 &+ \beta c_3 &= c_1 &+ \beta c_2, \\ c_2 &+ \beta c_4 &= c_1\gamma &- c_2, \\ \gamma c_1 &- c_3 &= c_3 &+ c_4\beta, \\ \gamma c_2 &- c_4 &= c_3\gamma &- c_4, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} c_2 &= c_3, \\ 2c_2 &= c_1\gamma - \beta c_4. \end{cases}$$

Нехай $\beta = \mu t^r$, $\gamma = \lambda t^s$ $(\lambda, \mu \in R_2^*)$ і $r \geq s$. Покладемо $c_2 = c_3 = 1$. Тоді

$$2 = \theta t^e = c_1\lambda t^s - \mu t^r c_4 = t^s(c_1\lambda - \mu t^{r-s}c_4),$$

звідки $c_1 = \lambda^{-1}\theta t^{e-s} + \mu t^{r-s}c_4$. Оскільки $r + s = d < e$, то $e - s > r - s$ і якщо $c_4 = 1$, то $|C| = -1 - \lambda^{-1}\theta t^{e-s} - \lambda^{-1}\mu t^{r-s} \in R_2^*$. Таким чином, при $r \geq s$ зображення Δ і Δ_1 R_2-еквівалентні. Аналогічно розглядається випадок $r < s$.

Надалі будемо вважати, що $\alpha \neq 1$. Нехай

$$\alpha^2 + \beta\gamma + \varepsilon = 0 \ (\theta_2 \in R_2^*, k \geq 1). \tag{16}$$

З умови $\alpha^2 + \beta\gamma + \varepsilon = 0$ випливає, що $\alpha^2 + \varepsilon \equiv 0(mod t)$, тобто $\alpha^2 \equiv 1(mod t)$ і $\alpha \equiv 1(mod t)$.

Нехай $\beta = \lambda t^r$, $\gamma = \mu t^s$ $(\lambda, \mu \in R_2^*,\ r, s > 0)$. Тоді одержимо $\alpha^2 + \varepsilon = -\lambda\mu t^{r+s}$ або $1 + 2\theta_2 t^k + \theta_2^2 t^{2k} - \varepsilon + \lambda\mu t^{r+s} = 0$, звідки при $1 - \varepsilon = \theta_1 t^d$ одержимо

$$\theta_1 t^d + 2\theta_2 t^k +_2^2 t^{2k} + \lambda\mu t^{r+s} = 0. \tag{17}$$

Із (14) випливає, що

$$\beta = -\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\gamma} = -\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{\mu t^s} = -\mu^{-1}\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{t^s}.$$

Легко бачити, що коли

$$C = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{pmatrix} \alpha & -\mu^{-1}\frac{\alpha^2+\varepsilon}{t^s} \\ \mu t^s & -\alpha \end{pmatrix} C = C \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2-\varepsilon}{t^s} \\ \mu t^s & -\alpha \end{pmatrix},$$

тобто можна вважати, що

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2-\varepsilon}{t^s} \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix} (s \geq 1). \quad (18)$$

Тоді, вважаючи, що $\mu = 1$, (17) можна записати у вигляді

$$\theta_1 t^d + 2\theta_1 t^k + \theta_2^2 t^{2k} + \lambda t^{r+s} = 0. \quad (19)$$

Нехай $k > \frac{d}{2}$. Тоді із (17) і (19) випливає, що $s \leq d$. Із (16) одержимо

$$\alpha^2 = (1 + \theta_2 t^k)^2 = 1 + 2\theta_2 t^k + \theta_2^2 t^{2k},$$

звідки

$$\alpha^2 + 1 = 2 + 2\theta_2 t^k \theta_2^2 t^{2k} = \theta t^e + \theta\theta_2 t^{e+k} + \theta_2^2 t^{2k}. \quad (20)$$

Тоді при $k > \frac{d}{2}$

$$\alpha^2 + 1 = t^d \left(\theta t^{e-d} + \theta\theta_2 t^{e-d+k} + \theta_2^2 t^{2k-d}\right),$$

тобто

$$\alpha^2 + 1 = \theta_3 t^d \quad (\theta_3 \in R_2^*). \quad (21)$$

Підставивши (21) в (18), одержимо $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\theta_4 t^{d-s} \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix}$.

В силу попередніх міркувань можна вважати, що $s \leq \frac{d}{2}$. Покажемо, що

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha^2+\varepsilon}{t^s} \\ t^s & -\alpha \end{pmatrix} C = C \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 t^{d-s} \\ t^s & -1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in GL(2, R_2).$$

Дійсно, з умови (22) одержимо систему рівностей при $c_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha c_1 & = c_1 + c_2 t^s, \\ t^s c_1 & = c_4 t^s, \\ \alpha c_2 - \frac{\alpha^2+\varepsilon}{t^s} c_4 & = -c_1 \theta_3 t^{d-s} - c_2, \\ c_2 t^s - \alpha c_4 & = -c_4, \end{cases}$$

звідки $c_4 = c_1$, $c_2 = (\alpha - 1)t^{-s}$. Отже, при $c_1 = 1$ матимемо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha-1)t^{-s} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2, R_2). \quad (23)$$

Таким чином, ми показали, що при $k > \frac{d}{2}$ всі нееквівалентні незвідні R_2-зображення степеня 2 групи $C_{2^n} = \langle a \rangle$ вичерпуються зображеннями Δ_r $(r = 0, \ldots, d)$.

Якщо тепер $k \leq \frac{d}{2}$ і $s \leq k$, то поклавши C – матрицю виду (23), одержимо

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 t^{d-s} \\ t^s & -1 \end{pmatrix} = A_s.$$

Отже, і в цьому випадку Δ еквівалентне Δ_r над R_2.

Аналогічно розглядаються й інші випадки.

Таким чином, доведено лему.

Лема 4. *Нехай $P_2 = \langle \varepsilon \mid \varepsilon^{2^n} = 1 \rangle$ $(n > 1)$. Тоді точні незвідні R_2-зображення групи $C_{2^n} = \langle a \rangle$, F_2-еквівалентні зображенню Δ_0, з точністю до еквівалентності, вичерпуються зображеннями*

$$\Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_r, \Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 t^{d-r} \\ t^r & -1 \end{pmatrix} = A_r, (r = 1, \ldots, d; \theta_3 \in R_2^*).$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $P_2 = \langle \varepsilon \mid \varepsilon^{2^n} = 1 \rangle$ $(n > 1)$ – силовська 2-підгрупа групи R_2^*. Мінімальні незвідні абелеві 2- підгрупи групи $GL(2, R_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами*

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_r = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 t^{d-r} \\ t^r & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \ (r = 1, \ldots, d),$$

де $u = \varepsilon - 1 = \theta_1 t^d$, t – простий елемент кільця R_2.

Доведення. Нехай $A_0 = \langle A_0 \rangle$, $V_r = \langle A_r \rangle$, де $A_r = \Delta_r(a)$ $(r = 0, \ldots, d)$. Оскільки Δ_r і Δ_s $(r \neq s,\ r, s = 1, \ldots, d)$ нееквівалентні над R_2, то матриці A_r A_s неспряжені при $r \neq s$.

Припустимо, що $r < s < d$ і матриця A_s спряжена з матрицею A_r^{2k+1}. Оскільки $A_r^{2k+1} = (1 - \theta_3 t^{d-r})^{2k} A_r$, то після зведення A_s і A_r^{2k+1} за модулем t^s одержимо

$$\overline{A_s} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-\theta_3 t^{d-s}} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix}, \overline{A_r^{2k+1}} = \overline{(1 - \theta_3 t^{d-r})^{2k}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-\theta_3 t^{d-r}} \\ \overline{t^r} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Якщо $d - r \geq s$, то

$$\overline{(1 - \theta_3 t^{d-r})} = \bar{1} \text{ і } \overline{A_r^{2k+1}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \overline{t^r} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Якщо при цьому $d - s \geq s$, тобто $s \leq \frac{d}{2}$, то $\overline{A_s} = \bar{E}$ і A_s не спряжена з A_r^{2k+1}. Якщо ж $d - s < s$, тобто $s > \frac{d}{2}$, то з умови $\overline{A_s C} = \overline{C A_e^{2k+1}}$ одержимо, що матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & \overline{-\theta_3 t^{d-s-r} c_3} \\ c_3 & 0 \end{pmatrix}, \ |C| = \overline{-\theta_3 t^{d-(r+s)} c_3} \equiv 0 (mod t),$$

тобто C – необоротня матриця в кільці $\overline{R_2^{(s)}} = R_2/t^s R_2$, а тому за лемою 3 A_s і A_r^{2k+1} не спряжені в групі $GL(2, R_2)$.

Якщо $d - r \leq s$, то

$$\overline{A_s} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \overline{-\theta_3 t^{d-s}} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix}, \ | \overline{A_s} | = \bar{1}, \ \text{а} \ | \overline{A_r^{2k+1}} | \neq \bar{1}$$

і тому $\bar{A}_s$ і $\bar{A}_r^{2k+1}$ не спряжені над $R_2^{(s)}$. Тоді A_s і A_r^{2k+1} не спряжені в групі $GL(2, R_2)$.

Теорему доведено.

1. *Супруненко Д. А.* Минимальные неприводимые разрешимые линейные группы простой степени // Труды Моск. матем. об-ва. – 1973. – **29**. – С. 223–234.
2. *Юферев В. П.* Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 5. – С. 96–97.
3. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – № 4. – С. 799–834.
4. *Кирилюк А. А.* Минимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(2, R_p)$ // В сб. "Материалы XXXII научн. конф. УжГУ. – Ужгород, 1978. – С. 166–198. Деп. в ВИНИТИ № 2079–79.
5. *Кирилюк А. А.* Классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(3, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2000. – Вип. 5. – С. 41–48.
6. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 5. – С. 326–329.
7. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* О минимальных неприводимых подгруппах полной линейной группы над кольцом целых P-адических чисел // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 37–44.

Одержано 17.10.2013