УДК 517.957

Л. М. Мамай (Ужгородський нац. ун-т)

# ОЦІНКА АБСОЛЮТНОЇ ПОХИБКИ ЗАОКРУГЛЕННЯ ПРИ УТОЧНЕННІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ МІНІМАЛЬНИХ НЕВ'ЯЗОК

**In given paper was obtained the estimates of an absolute error of rounding at iterative refinement of solutions of one type of nonlinear integral equations by minimal misclosures method.**

**В даній роботі отримані оцінки абсолютної похибки заокруглення при застосуванні методу мінімальних невязок для уточнення наближених розв'язків одного типу нелінійних інтегральних рівнянь з кубчиною нелінійністю.**

Існує багато математичних задач, в тому числі і моделей реальних процесів, точні розв'язки яких знайти класичними методами неможливо або ці розв'язки можуть бути отримані в такому складному вигляді, який неприйнятний для подальшого практичного застосування. Крім того, точне розв'язання задачі може вимагати дуже великої кількості операцій. У таких випадках вдаються до наближених і чисельних методів розв'язування, які приводять до появи похибок. Є декілька причин їх появи: невідповідність математичної моделі досліджуваному реальному явищу і неточність при заданні вхідних даних; застосування наближеного методу для розв'язання задачі та похибка, яка виникає в результаті застосування ЕОМ для розв'язування задачі і є наслідком заокруглень за рахунок фіксованої довжини мантиси $\tau$ в режимі плаваючої коми, способу заокруглення, порядку виконання арифметичних операцій і т. д. Ці похибки, відповідно, називаються неусувна, методу та заокруглення, а їх сума складає повну похибку, оцінка якої визначає точність обчислювального алгоритму. Кожна із складових повної похибки має свої методи дослідження та знаходження оцінок, зокрема, похибка заокруглення вимагає детального підрахунку арифметичних операцій обчислювального алгоритму з урахуванням специфіки машинної арифметики.

В роботі [1] знайдено оцінку повної похибки при наближеному розв'язуванні нелінійного інтегрального рівняння

$$Tu(x) := u(x) - \frac{1}{4}\int_0^1 \sin(xy)u^3(y)dy - \frac{1}{4}\sin x = 0 \qquad (1)$$

комбінованим методом відокремлення розв'язків та їх ітераціного уточнення методом мінімальних нев'язок (ММН) [2]. В даній роботі отримані оцінки абсолютної похибки заокруглення при уточненні наближених розв'язків рівняння (1) ММН.

Отже, знаходження всіх ізольованих обмежених за нормою розв'язків рівняння (1) передбачає побудову послідовності апроксимаційних рівнянь [1]

$$T_n u_n(x) := u_n(x) - \frac{1}{4}\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] u_n^3(y)dy-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=0, n=1,2,\ldots, \quad (2)$$

розв'язки яких шукать у вигляді

$$u_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k x^{2k-1}, \quad (3)$$

де $a_k$ — невідомі коефіцієнти. Їх знаходять розв'язуючи систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (1) $\varepsilon s$−алгоритмом [3], яка утворюється при підстановці (3) у (2) і виконанні відповідних арифметичних операцій та точного інтегрування.

Розглянемо ітераційний метод мінімальних нев'язок для оператора (2)

$$u_n^{p+1}=u_n^p-\alpha_p T_n(u_n^p), (p=0,1,\ldots), \quad (4)$$

де

$$\alpha_p=\frac{(T_n'(u_n^p)T_n u_n^p, T_n u_n^p)}{\|T_n'(u_n^p)T_n u_n^p\|^2}. \quad (5)$$

Оскільки розв'язок $u_n^p$ подано у вигляді (3), то враховуючи, що

$$\left[\sum_{i=1}^{n}a_i y^{2i-1}\right]^3=\sum_{i=1}^{n}a_i^3 y^{3(2i-1)}+3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_i^2 a_j y^{4i+2j-3}+6\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{l=j+1}^{n}a_i a_j a_l y^{2(i+j+l)-3},$$

будемо мати

$$T_n u_n^p(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[a_k-\frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!}\int_0^1 y^{2k-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i y^{2i-1}\right)^3 dy-\frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!}\right]x^{2k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[a_k-\frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{6i+2k-3}+3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{a_i^2 a_j}{4i+2j+2k-3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+6\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{a_i a_j a_l}{2(i+j+l)+2k-3}\right)-\frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!}\right]x^{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k x^{2k-1}, \quad (6)$$

де через $\beta_k$, $k=1,2,\ldots,n$, позначено вираз у квадратних дужках останньої рівності, а кількість $\widetilde{S}(n)$ доданків у круглих дужках визначачається за формулою

$$\widetilde{S}(n)=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (7)$$

Оператор $T_n'(u_n^p)T_n u_n^p$ [1], підставляючи відповідні функції і збираючи коефіцієнти при $x^{2k-1}$, $k=1,2,\ldots,n$, подамо у вигляді:

$$T_n'(u_n^p)T_n u_n^p(x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k x^{2k-1}-\frac{3}{4}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i y^{2i-1}\right)^2\times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^n \beta_j y^{2j-1}\right) dy = \sum_{k=1}^n \Bigg[ \beta_k - \frac{(-1)^{k-1}\cdot 3}{4(2k-1)!}\int_0^1 y^{2k-1} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 y^{2i-2} + 2\sum_{i=1}^n\sum_{r=i+1}^n a_i a_r y^{2i+2r-2}\right)\left(\sum_{j=1}^n \beta_j y^{2j-1}\right) dy\Bigg] x^{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\beta_k - \frac{(-1)^{k-1}\cdot 3}{4(2k-1)!}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{a_i^2\beta_j}{2(2i+j+k)-3}}_{n^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{r=i+1}^n\sum_{j=1}^n \frac{a_i a_r \beta_j}{2(i+r+j+k)-3}}_{\frac{n^2(n-1)}{2}}\right)\right] x^{2k-1}.$$

Вводячи позначення $\gamma_k, k = 1, 2, \ldots, n$ для коефіцієнта при $x^{2k-1}$ в останній рівності, отримаємо

$$T_n'(u_n^p) T_n u_n^p(x) \equiv \sum_{k=1}^n \gamma_k x^{2k-1}. \tag{8}$$

Використовуючи (6) та (8) будемо мати:

$$(T_n'(u_n) T_n u_n, T_n u_n) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k x^{2k-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n \beta_j x^{2j-1}\right) dx = \underbrace{\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\beta_k \gamma_j}{2(k+j)-1}}_{n^2},$$

$$\|T_n'(u_n) T_n u_n\|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k x^{2k-1}\right)^2 dx = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^2}{4k-1}}_{n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^n \frac{2\gamma_k\gamma_j}{2(k+j)-1}}_{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Звідси

$$\alpha_p = \frac{\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{j=1}^n \frac{\beta_k\gamma_j}{2(k+j)-1}}{\sum\limits_{k=1}^n \frac{\gamma_k^2}{4k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j=k+1}^n \frac{2\gamma_k\gamma_j}{2(k+j)-1}}. \tag{9}$$

Тоді

$$u_n^{p+1} = u_n^p - \alpha_p T_n(u_n^p) = \sum_{k=1}^n a_k x^{2k-1} - \alpha_p \sum_{k=1}^n \beta_k x^{2k-1} = \sum_{k=1}^n \left[a_k - \alpha_p \beta_k\right] x^{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Bigg[ a_k - \alpha_p \Bigg\{ a_k - \frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!}\Bigg(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{6i+2k-3} + 3\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \frac{a_i^2 a_j}{4i+2j+2k-3} +$$

$$+6\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{l=j+1}^{n}\frac{a_ia_ja_l}{2(i+j+l)+2k-3}\Bigg)-\frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!}\Bigg\}\Bigg]x^{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\eta_kx^{2k-1},$$

де через $\eta_k, k=1,2,\ldots n$ позначено вираз у квадратних дужках, тобто коефіцієнт при $x^{2k-1}$.

Отже $u_n^{p+1}$ є поліномом. Тому оцінку абсолютної похибки заокруглення при застосуванні одного кроку ММН можна знайти як оцінку похибки заокруглення при обчисленні значення многочлена $\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_kx^{2k-1}$.

Позначимо $u_{n_\tau}^{p+1}$ вираз, що відрізняється від $u_n^{p+1}$ тим, що всі коефіцієнти $a_k$ та значення аргументу, що входять в $\eta_k, k=1,2,\ldots n$ заокруглені до $\tau$ розрядів у мантисі, а всі операції замінені псевдооперціями, тобто відповідними операціями із заокругленням.

Враховуючи, що $\alpha_\tau^p=\alpha^p(1+\varepsilon)^{\theta(n)}$, де $\theta(n)=5\widetilde{S}(n)+\frac{n^2(3n+5)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+121$ [1], та використовуючи формули, наведені в [4] одержимо

$$\left(\frac{(-1)^{k-1}\alpha_p}{4(2k-1)!}\cdot\frac{a_i^3}{2i+2k-3}\right)_\tau=\frac{(-1)^{k-1}\alpha_p}{4(2k-1)!}\cdot\frac{a_i^3}{2i+2k-3}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+14}, k,\ i=\overline{1,n};$$

$$\left(\frac{c_1\cdot(-1)^{k-1}\alpha_p}{4(2k-1)!}\cdot\frac{a_i^2a_j}{c_2}\right)_\tau=\frac{c_1\cdot(-1)^{k-1}\alpha_p}{4(2k-1)!}\cdot\frac{a_i^2a_j}{c_2}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+16}, k,i,j=\overline{1,n}, c_1,c_2\in R,$$

де вирази з індексом $\tau$ — вирази, обчислені із заокругленням. Тоді

$$u_{n_\tau}^{p+1}=\sum_{k=1}^{n}\Bigg[a_k(1+\varepsilon)^{4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,k)}-\alpha_pa_k(1+\varepsilon)^{\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,k)}+\frac{(-1)^{k-1}\alpha_p}{4(2k-1)!}\times$$

$$\times\Bigg\{\frac{a_1^3}{2k+3}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+15+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,k)}+\ldots+\frac{a_n^3}{6n+2k-3}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+16+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}+$$

$$+3\frac{a_1^2a_2}{2k+5}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+17+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}+\ldots+$$

$$+3\frac{a_n^2a_{n-1}}{6n+2k-5}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+18+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}+$$

$$+\frac{6a_1a_2a_3}{2k+9}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+17+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}+\ldots+\frac{6a_1a_2a_3}{6n+2k-9}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+18+\varphi(n,k)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}\alpha_p}{4(2k-1)!}(1+\varepsilon)^{\theta(n)+7+\varphi(n,k)}\Bigg]x^{2k-1},$$

де

$$\varphi(n,k)=2(2k-1)+(n-k)\left(\widetilde{S}(n)+3\right) \tag{10}$$

— вираз, який з'являється при виконанні $2k-1, k=\overline{1,n}$ множень аргумента $x$ самого на себе, його записі з заокругленням та похибок при виконанні $n$ додавань при обчисленні суми $\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_kx^{2k-1}$ та врахуванням всіх додавань, які треба виконати для обчислення кожного коефіцієнта $\eta_l,\, l = k+1, k+2, \ldots, n,\ k = \overline{1,n}$ за формулою

$$\eta_l = a_l - \alpha_p \left\{ a_l - \frac{(-1)^{l-1}}{4(2l-1)!} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{6i+2l-3} + 3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_i^2 a_j}{4i+2j+2l-3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +6 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^{n} \frac{a_i a_j a_l}{2(i+j+l)+2l-3} \right) - \frac{(-1)^{l-1}}{4(2l-1)!} \right\}, l = k+1, k+2, \ldots, n, k = \overline{1,n},$$

а $\widetilde{S}(n)$ має вигляд (7).

Введемо позначення $\Delta = |u_{n_\tau}^{p+1} - u_n^{p+1}|$, тоді

$$\Delta = |u_{n_\tau}^{p+1} - u_n^{p+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} \Big[ |a_k| \Big(4 + \widetilde{S}(n) + \varphi(n,k)\Big) + |\alpha_p||a_k| \Big(\theta(n) + 4 + \widetilde{S}(n) + \varphi(n,k)\Big) +$$

$$+ \frac{|\alpha_p|}{4(2k-1)!} \left\{ \frac{|a_1^3|}{2k+3} \Big(\theta(n) + 15 + \widetilde{S}(n) + \varphi(n,k)\Big) + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{|a_n^3|}{6n+2k-3} \left(\theta(n) + 16 + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \varphi(n,k)\right) +$$

$$+3 \frac{|a_1^2 a_2|}{2k+5} \left(\theta(n) + 17 + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \varphi(n,k)\right) + \ldots +$$

$$+3 \frac{|a_n^2 a_{n-1}|}{6n+2k-5} \left(\theta(n) + 18 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \varphi(n,k)\right) +$$

$$+ \frac{6|a_1 a_2 a_3|}{2k+9} \left(\theta(n) + 17 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \varphi(n,k)\right) + \ldots +$$

$$\left. + \frac{6|a_{n-2} a_{n-1} a_n|}{6n+2k-9} \left(\theta(n) + 18 + \varphi(n,k)\right) + \theta(n) + 7 + \varphi(n,k) \right\} \Big] x^{2k-1} \cdot 1{,}06 \cdot 2^{-\tau} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x^{2k-1} \cdot 1{,}06 \cdot 2^{-\tau},$$

де через $\Delta_k$ позначено вираз у квадратних дужках останньої нерівності.

Знайдемо оцінку $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_k x^{2k-1}$.

З (10) випливає, що

$$\varphi(n, k+1) - \varphi(n,k) = -(\widetilde{S}(n) - 1). \tag{11}$$

Оскільки $-(\widetilde{S}(n) - 1) < 0, \forall n > 1$, тоді $\varphi(n,k) > \varphi(n,k+1)$ і справедлива нерівність

$$\varphi(n,1) > \varphi(n,k), \forall k > 1. \tag{12}$$

Використовуючи (12) і формулу знаходження суми членів арифметичної прогресії та вводячи позначення

$$A = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|, \tag{13}$$

отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta_k x^{2k-1}\le\Big[A\left(4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\right)+|\alpha_p|A\Big(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\Big)+$$

$$+\frac{|\alpha_p|A^3}{4\cdot 5}\left(2\theta(n)+31+n+2n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+2\varphi(n,1)\right)\frac{n}{2}+$$

$$+\frac{3|\alpha_p|A^3}{4\cdot 7}\left(2\theta(n)+35+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+2\varphi(n,1)\right)\frac{n(n-1)}{2}+$$

$$+\frac{6|\alpha_p|A^3}{4\cdot 11}\left(2\theta(n)+35+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+2\varphi(n,1)\right)\frac{n(n-1)(n-2)}{12}+$$

$$+\frac{|\alpha_p|}{4}\left(\theta(n)+7+\varphi(n,1)\right)\Big]\sum_{k=1}^{n}x^{2k-1}.$$

Звідси, для $x\in(0,1)$ справедлива оцінка

$$\Delta\le\sum_{k=1}^{n}\Delta_k x^{2k-1}\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}\le\Big[A\left(4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)+|\alpha_p|\Big(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\Big)\right)+$$

$$+\frac{6|\alpha_p|A^3}{4\cdot 11}\left[\left(\theta(n)+\varphi(n,1)\right)\widetilde{S}(n)+\frac{n^4+35n^2-4n}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{12}\times\right.$$

$$\left.\times\left(35+2n^2\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)\right]+\frac{|\alpha_p|}{4}\left(\theta(n)+7+\varphi(n,1)\right)\Big]\frac{x}{1-x^2}\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}.$$

Очевидно, що для всіх $x\in[0,1]$ виконується нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_k x^{2k-1}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_k$.

Запишемо

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta_k=\left(4+\widetilde{S}(n)\right)\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|\varphi(n,k)+|\alpha_p|\left(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)\right)\sum_{k=1}^{n}|a_k|+$$

$$+|\alpha_p|\sum_{k=1}^{n}|a_k|\varphi(n,k)+\frac{|\alpha_p||a_1^3|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+15+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,k)}{(2k-1)!(2k+3)}+\ldots+$$

$$+\frac{|\alpha_p||a_n^3|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+16+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}{(2k-1)!(6n+2k-3)}+$$

$$+3\frac{|\alpha_p||a_1^2a_2|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+17+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}{(2k-1)!(2k+5)}+\ldots+\tag{14}$$

$$+3\frac{|\alpha_p||a_n^2a_{n-1}|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+18+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}{(2k-1)!(6n+2k-5)}+$$

$$+6\frac{|\alpha_p||a_1a_2a_3|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+17+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,k)}{(2k-1)!(2k+9)}+\ldots+$$

$$6\frac{|\alpha_p||a_{n-2}a_{n-1}a_n|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+18+\varphi(n,k)}{(2k-1)!(6n+2k-9)}+\frac{|\alpha_p|}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta(n)+7+\varphi(n,k)}{(2k-1)!},$$

та знайдемо оцінку для $\Delta$ проводячи наступні міркування.

Згідно (11) маємо

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(n,k)=\varphi(n,1)+[\varphi(n,1)-(\widetilde{S}(n)-1)]+[\varphi(n,1)-2(\widetilde{S}(n)-1)]+\ldots+$$

$$+[\varphi(n,1)-(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)]=n\varphi(n,1)-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2},$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(n,k)=n\varphi(n,1)-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}. \qquad (15)$$

Тоді з (14), використовуючи (15) та позначення (13), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\leq\left(4+\widetilde{S}(n)\right)An+A\sum_{k=1}^{n}\varphi(n,k)+|\alpha_p|\left(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)\right)An+|\alpha_p|A\sum_{k=1}^{n}\varphi(n,k)+$$

$$+\frac{|\alpha_p||a_1^3|}{4\cdot 5}\left[n(\theta(n)+15+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1))-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]+\ldots+\frac{|\alpha_p||a_n^3|}{4\cdot(6n-1)}\times$$

$$\times\left[n(\theta(n)+16+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,1))-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]+$$

$$+\frac{3|\alpha_p||a_1^2a_2|}{4\cdot 7}\left[n(\theta(n)+17+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,1))-\right.$$

$$\left.\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]+\ldots+$$

$$+\frac{3|\alpha_p||a_{n-1}^2a_n|}{4\cdot(6n-3)}\left[n(\theta(n)+18+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,1))-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]+$$

$$+\frac{6|\alpha_p||a_1a_2a_3|}{4\cdot 11}\left[n(\theta(n)+17+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\varphi(n,1))-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]+$$

$$\ldots+\frac{6|\alpha_p||a_{n-2}a_{n-1}a_n|}{4\cdot(6n-7)}\left[n(\theta(n)+18+\varphi(n,1))-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]+$$

$$\frac{|\alpha_p|}{4}\left[n(\theta(n)+7+\varphi(n,1))-\frac{n(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right].$$

Звідси

$$\Delta\leq\left\{An\left[4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)-\frac{(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}+\right.\right.$$

$$+|\alpha_p|\left(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)-\frac{(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{3|\alpha_p|A^3}{22}n\Bigg[(\theta(n)+\varphi(n,1))\widetilde{S}(n)-\frac{\widetilde{S}(n)n(n^2-2n-1)}{2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{12}\left(35+(n-1)(n+1-\widetilde{S}(n))+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)+17n^2-2n\Bigg]+$$

$$+\frac{|\alpha_p|n}{4}\left[\theta(n)+7+\varphi(n,1)-\frac{(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right]\Bigg\}\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}.$$

З іншого боку, використовуючи нерівність (12), $\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_k$ можна оцінити наступним чином

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\le\left(4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\right)\sum_{k=1}^{n}|a_k|+|\alpha_p|\left(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\right)\sum_{k=1}^{n}|a_k|+$$

$$+\frac{|\alpha_p|n}{4\cdot 5}\left(\theta(n)+15+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\right)\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i^3|+3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_i^2a_j|+\right.$$

$$\left.+6\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{l=j+1}^{n}|a_ia_ja_l|\right]+\frac{|\alpha_p|n}{4}\left(\theta(n)+7+\varphi(n,1)-\frac{(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right).$$

Введемо позначення $S=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|$. Тоді з останньої нерівності отримаємо ще одну оцінку для $\Delta$:

$$\Delta\le\Bigg\{\left[4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)+|\alpha_p|\left(\theta(n)+4+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\right)\right]S+$$

$$+\frac{|\alpha_p|n}{20}\left(\theta(n)+15+\widetilde{S}(n)+\varphi(n,1)\right)S^3+$$

$$+\frac{|\alpha_p|n}{4}\left(\theta(n)+7+\varphi(n,1)-\frac{(n-1)(\widetilde{S}(n)-1)}{2}\right)\Bigg\}\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}.$$


1. Буря Л.М. Оцінка точності наближеного розв'язування одного класу нелінійних інтегральних рівнянь / Л.М Буря // Науковий вісник Ужгородського університету. – Сер. Математика і інформатика. – 2006. – вип.12-13. – С. 39–54.
2. Кивистик Л. А. Об одной модификации итерационного метода с минимальными невязками для решения нелинейных операторных уравнений / Л. А. Кивистик // Доклады Академии наук СССР. – 1961. – Т. 136, №1 – С. 22–25.
3. Бабич М.Д. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений / М.Д. Бабич, Л.Б. Шевчук // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74–79.
4. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.


Одержано 08.12.2013