УДК 517.9

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко (Донбасский гос. пед. ун-т)

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТИПА INTERFACE CONDITIONS

Constructive conditions for the existence of solutions have been found and generalized Green's operator for Noetherian linear system of the differential equation with impulse perturbation has been constructed in critical and noncritical cases.

Одержані конструктивні умови існування та знайдено узагальнений оператор Гріна для побудови розв'язків нетерової лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у критичному та некритичному випадку.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о нахождении решения [1–4]

$$z(t) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t),\ \ldots,\ z^{(n)}(t)\right),\ z^{(j)}(\cdot) \in C^1\left\{[a;b]\setminus\{\tau_i\}_I\right\},\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$$

линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,p, \tag{1}$$

с импульсным воздействием типа "interface conditions" [5–12]

$$\ell_i z(\cdot) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p, \tag{2}$$

где $A(t)-$ $(n \times n)-$ мерная матрица, непрерывная на отрезке $[a;b]$, $\ell_i z(\cdot)-$ линейные векторные функционалы вида

$$\ell_i z(\cdot) = \sum_{j=0}^{i} \ell_i^{(j)} z(\cdot): \quad C\left\{[a,\tau_{i+1}[\ \setminus\{\tau_1,\ \ldots,\ \tau_i\}_I\right\} \to \mathbb{R}^m;$$

здесь

$$\ell_i^{(0)} z(\cdot):\ C[a,\tau_1[\to \mathbb{R}^m,\ \ldots,\quad \ell_i^{(i)} z(\cdot):\ C[\tau_i,\tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^m,\quad i = 1,\ \ldots\ ,\ p-1,\ \ldots\ ,$$

$$\ell_p^{(0)} z(\cdot):\ C[a,\tau_1[\to \mathbb{R}^m,\ \ldots,\ \ \ell_p^{(p)} z(\cdot):\ C[\tau_p,b] \to \mathbb{R}^m$$

— линейные ограниченные функционалы. Пусть $X_0(t)-$ нормальная ($X_0(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части системы (1).

Фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части системы (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"представима в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)W_1, & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_0(t)W_p, & t \in [\tau_p;b], \end{cases} \tag{3}$$

где W_i — постоянные $(n \times n)-$ мерные матрицы. В статьях [7, 8] фундаментальная матрица $X(t)$ однородной части системы (1), (2) с импульсным воздействием была найдена в предположении $W_0 = I_n$, а, следовательно, rank $X(t) =$

$n,\ t \in [a;\tau_1[$, что приводило к существенным ограничения, а именно — дополнительным условиям разрешимости однородной части системы (1), (2) с импульсным воздействием, которая, очевидно, без ограничения $W_0 = I_n$ имеет по меньшей мере одно тривиальное непрерывное решение $z(t) \equiv 0,\ t \in [a;b]$. Таким образом, целью данной статьи является нахождении решения системы (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions" без ограничения $W_0 = I_n$, а, следовательно, без ограничения $\operatorname{rank} X(t) = n,\ t \in [a;\tau_1[$.

2. Однородная задача с импульсным воздействием типа "interface conditions". Рассмотрим задачу о построении решения линейной однородной задачи с импульсным воздействием типа "interface conditions"

$$dz/dt = A(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ p.$$

Для нахождения матриц $W_0, W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_1 W_1 + \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) W_0 = 0, \quad Q_1 := \ell_1^{(1)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) W_0 = 0;$$

последнее равенство обеспечивает матрица

$$W_0 = \mathcal{P}_1 U_1 \in \mathbb{N}\left[P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\right], \quad U_1 \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где

$$\mathcal{P}_1 := P_{\left[P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\right]} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Здесь $P_{Q_1^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_1^*)$, $P_{\left[P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\right]}$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\left[P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\right].$$

При $p = 1$ положим $U_1 = I_n$; если же $p > 1$, то матрица будет определена из условия разрешимости в моменты времени $\tau_2,\ \tau_3,\ \dots$ однородной части задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions". Таким образом,

$$W_1 = -Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) W_0 + P_{Q_1} V_1 \cdot U_1, \quad V_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_1 \neq 0.$$

Для нахождения матрицы $W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_2 W_2 + \ell_2^{(0)} X_0(\cdot) W_0 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) W_1 = 0, \quad Q_2 := \ell_2^{(2)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_2^*}\left[\ell_2^{(0)} X_0(\cdot) W_0 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) W_1\right] = 0,$$

что равносильно

$$P_{Q_2^*}\left\{\ell_2^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\left[P_{Q_1} V_1 - Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\} U_1 = 0;$$

последнее равенство обеспечивает матрица $U_1 = \mathcal{P}_2 U_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где

$$\mathcal{P}_2 := P_{P_{Q_2^*}\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1+\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\left[P_{Q_1}V_1-Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}}.$$

Здесь $P_{Q_2^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_2^*)$,

$$\mathcal{P}_2 = P_{P_{Q_2^*}\left[\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)W_0+\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)W_1\right]}\Bigg|_{U_1 = I_n}$$

— ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\left[P_{Q_1}V_1 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}.$$

Таким образом,

$$W_2 = -Q_2^+\left[\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)W_1\right] + P_{Q_2}V_2\cdot U_2, \quad V_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_2 \neq 0,$$

что равносильно

$$W_2 = -Q_2^+\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\left[P_{Q_1}V_1 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}\mathcal{P}_2\cdot U_2 + P_{Q_2}V_2\cdot U_2,$$

при этом

$$W_0 = \mathcal{P}_1 U_1 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\cdot U_2, \quad W_1 = -Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\cdot U_2 + P_{Q_1}V_1\mathcal{P}_2\cdot U_2.$$

При $p = 2$ положим $U_2 = I_n$; если же $p > 2$, то матрица будет определена из условия разрешимости в моменты времени $\tau_3,\ \tau_4,\ \dots$ однородной части задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions". Для нахождения матрицы $W_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_3W_3 + \ell_3^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + \ell_3^{(1)}X_0(\cdot)W_1 + \ell_3^{(2)}X_0(\cdot)W_2 = 0, \quad Q_3 := \ell_3^{(3)}X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_3^*}\left[\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + \ell_3^{(1)}X_0(\cdot)W_1 + \ell_3^{(2)}X_0(\cdot)W_2\right] = 0,$$

что равносильно

$$P_{Q_3^*}\left\{\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \ell_3^{(1)}X_0(\cdot)\left[P_{Q_1}V_1\mathcal{P}_2 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\right] + \ell_3^{(2)}X_0(\cdot)\left\{P_{Q_2}V_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -Q_2^+\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\left[P_{Q_1}V_1 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}\mathcal{P}_2\right\}\right\}\cdot U_2 = 0;$$

последнее равенство обеспечивает матрица $U_2 = \mathcal{P}_3 U_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где

$$\mathcal{P}_3 := P_{P_{Q_3^*}\left[\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)W_0+\ell_3^{(1)}X_0(\cdot)W_1+\ell_3^{(2)}X_0(\cdot)W_2\right]}\Bigg|_{U_2=I_n}.$$

Здесь $P_{Q_3^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_3^*)$, $\mathcal{P}_3$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\Bigg\{P_{Q_3^*}\Bigg\{\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \ell_3^{(1)}X_0(\cdot)\Big[P_{Q_1}V_1\mathcal{P}_2 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\Big] +$$

$$+\ell_3^{(2)}X_0(\cdot)\Bigg\{P_{Q_2}V_2 - Q_2^+\Bigg\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\Big[P_{Q_1}V_1 -$$

$$-Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\Big]\Bigg\}\mathcal{P}_2\Bigg\}\Bigg\}\Bigg\}.$$

Таким образом,

$$W_3 = -Q_3^+\Big[\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + \ell_3^{(1)}X_0(\cdot)W_1 + \ell_3^{(2)}X_0(\cdot)W_2\Big]U_2 + P_{Q_3}V_3\cdot U_3,$$

$$V_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_3 \neq 0,$$

что равносильно

$$W_3 = -Q_3^+\Bigg\{\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \ell_3^{(1)}X_0(\cdot)\Big[P_{Q_1}V_1\mathcal{P}_2 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\Big] +$$

$$+\ell_3^{(2)}X_0(\cdot)\Bigg\{P_{Q_2}V_2 - Q_2^+\Bigg\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\Big[P_{Q_1}V_1 -$$

$$-Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\Big]\Bigg\}\mathcal{P}_2\Bigg\}\Bigg\}\mathcal{P}_3\cdot U_3 + P_{Q_3}V_3\cdot U_3,$$

при этом

$$W_0 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\cdot U_3, \quad W_1 = -Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\cdot U_3 + P_{Q_1}V_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\cdot U_3,$$

$$W_2 = -Q_2^+\Bigg\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\Big[P_{Q_1}V_1 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\Big]\Bigg\}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\cdot U_3 +$$

$$+P_{Q_2}V_2\mathcal{P}_3\cdot U_3.$$

При $p = 3$ положим $U_3 = I_n$; если же $p > 3$, то матрица будет определена из условия разрешимости в моменты времени $\tau_4, \ \tau_5, \ \ldots$ однородной части задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions". Продолжая рассуждения, для нахождения матрицы $W_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_pW_p + \sum_{i=0}^{p-1}\ell_p^{(i)}X_0(\cdot)W_i = 0, \quad Q_p := \ell_p^{(p)}X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_p^*} \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i = 0,$$

последнее равенство обеспечивает матрица $U_{p-1} = \mathcal{P}_p U_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где

$$\mathcal{P}_p := P_{P_{Q_p^*} \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i} \Bigg|_{U_{p-1} = I_n}.$$

Здесь $P_{Q_p^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_p^*)$, $\mathcal{P}_p$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\left[P_{Q_p^*} \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i\right].$$

Таким образом,

$$W_p = -Q_p^+ \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i + P_{Q_p} V_p \cdot U_p, \quad V_p \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_p \neq 0, \quad U_p = I_n,$$

при этом

$$W_0 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_p \cdot U_p, \quad W_1 = -Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_3 \cdot U_p + P_{Q_1} V_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_p \cdot U_p,$$

$$W_2 = -Q_2^+ \left\{ \ell_2^{(0)} X_0(\cdot) \mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) \left[P_{Q_1} V_1 - Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) \mathcal{P}_1 \right] \right\} \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_p \cdot U_p +$$
$$+ P_{Q_2} V_2 \mathcal{P}_3 \dots \mathcal{P}_p \cdot U_p, \ \dots$$

Лемма. *Однородная часть линейной задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"*

$$dz/dt = A(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ p$$

имеет решение

$$z(t, c) = X(t)c, \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (3), где W_i — постоянные $(n \times n)$— мерные матрицы:

$$W_0 = \mathcal{P}_1 U_1, \quad \mathcal{P}_1 = P_{\left[P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\right]} \in \mathbb{R}^{n\times n};$$

$$W_1 = -Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) W_0 + P_{Q_1} V_1 \cdot U_1, \quad U_1 = \mathcal{P}_2 U_2,$$

$$\mathcal{P}_2 = P_{P_{Q_2^*}\left[\ell_2^{(0)} X_0(\cdot) W_0 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) W_1\right]} \Bigg|_{U_1 = I_n};$$

$$W_2 = -Q_2^+\Big[\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)W_1\Big] + P_{Q_2}V_2\cdot U_2, \quad U_2 = \mathcal{P}_3U_3,$$

$$\mathcal{P}_3 := P_{P_{Q_3^*}\big[\ell_3^{(0)}X_0(\cdot)W_0+\ell_3^{(1)}X_0(\cdot)W_1+\ell_3^{(2)}X_0(\cdot)W_2\big]}\Bigg|_{U_2=I_n}; \ \dots ;$$

$$W_p = -Q_p^+\sum_{i=0}^{p-1}\ell_p^{(i)}X_0(\cdot)W_i + P_{Q_p}V_p\,.$$

3. Неоднородная задача с импульсным воздействием типа "interface conditions". Предположим выполненными условия леммы. Решение неоднородной задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions" ищем в виде

$$G\Big[f(s);\alpha_i\Big](t) = \begin{cases} K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[a;\tau_1[,\\ X_0(t)\gamma_1 + K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[\tau_1;\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ X_0(t)\gamma_p + K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[\tau_p;b],\end{cases}$$

где

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для неоднородной дифференциальной системы (1), $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_p$ неизвестные постоянные из $\mathbb{R}^n$, для нахождения которых используем краевое условие (2), в частности, при $i=1,\ 2,\ \dots\ p$ получаем уравнение

$$Q_i\gamma_i = \alpha_i - \ell_iK\Big[f(s)\Big](\cdot),$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_i^*}\Big\{\alpha_i - \ell_iK\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0, \quad i=1,\ 2,\ \dots\ p, \tag{4}$$

при этом

$$\gamma_i = Q_i^+\Big\{\alpha_i - \ell_iK\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\}, \quad i=1,\ 2,\ \dots\ p.$$

Следуя традиционной классификации краевых задач [3, 4], случай

$$\sum_{i=1}^p P_{Q_i^*}^2 \neq 0$$

назовем критическим; в этом случае условия существования и вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующая теорема.

Теорема. *Линейная неоднородная задача (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"в критическом случае разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия (4); в этом случае задача (1), (2) имеет решение*

$$z(t,c) = X(t)c + G\Big[f(s);\alpha_i\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (3) и обобщенным оператором Грина

$$G\Big[f(s);\alpha_i\Big](t) = \begin{cases} K\Big[f(s)\Big](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)Q_1^+\Big\{\alpha_1 - \ell_1 K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , & \dots\dots\dots , \\ X_0(t)Q_p^+\Big\{\alpha_p - \ell_p K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\tau_p;b] \end{cases}$$

задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions".

Доказанная теорема обобщает аналогичные утверждения для различных гибридных задач. Действительно, для систем с толчками в заданные моменты времени, исследованных А.Д. Мышкисом и А.М. Самойленко, неоднородная задача Коши $z(a) = \alpha$ для системы (1) в критическом случае случае разрешима не для всех $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (требование 3 в статье [1, с. 203]). Задача с вырожденным импульсным воздействием [15, 16] приводится к задаче вида (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"в критическом случае.

Пример 1. *Условия теоремы выполнены для задачи*

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad t \in [0;2\pi], \quad t \neq \frac{2\pi}{3}, \quad t \neq \frac{4\pi}{3}, \quad \ell_i z(\cdot) = \alpha_i, \tag{5}$$

где

$$\ell_1 z(\cdot) := z\left(\frac{\pi}{3} + 0\right) - z\left(\frac{2\pi}{3} - 0\right), \quad \ell_2 z(\cdot) := z(0) - z(2\pi);$$

$$A(t) = J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (5)

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

определяет матрицу $Q_1 = O_2$, следовательно $P_{Q_1^*} = I_2$, при этом $\mathcal{P}_1 = O_2$ и $W_0 = O_2$. Таким образом, для задачи (5) имеет место критический случай. Поскольку $\ell_1^{(0)} X_0(\cdot) = I_2$, постольку $W_1 = I_2$. Кроме того, невырождена матрица

$Q_2 = -I_2$, следовательно $P_{Q_2} = P_{Q_2^*} = O_2$, при этом $\mathcal{P}_2 = I_2$, $W_2 = O_2$. Таким образом,

$$X(t) = \begin{cases} O_2, & t \in [0; \frac{2\pi}{3}[, \\ X_0(t), & t \in [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[, \\ O_2, & t \in [\frac{4\pi}{3}; 2\pi]. \end{cases}$$

Оператор Грина задачи Коши для неоднородной дифференциальной системы (5)

$$K\left[f(s)\right](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)ds = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

определяет условие разрешимости (4) задачи (5) для $i = 1$, при этом

$$\gamma_1 = Q_1^+\left\{\alpha_1 - \ell_1 K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} = 0.$$

Поскольку $P_{Q_2^*} = O_2$, постольку условие разрешимости (4) задачи (5) для $i = 2$ выполнено, при этом

$$\gamma_2 = Q_2^+\left\{\alpha_2 - \ell_2 K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} = 0.$$

Таким образом, для задачи (5)

$$K\left[f(s)\right](t) \equiv G\left[f(s); \alpha_i\right](t).$$

Примером фундаментальной матрицы $X(t)$, тождественно равной нулю является следующая задача.

Пример 2. *Условия теоремы выполнены для задачи*

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad t \in [0; 2\pi], \quad t \neq \frac{2\pi}{3}, \quad t \neq \frac{4\pi}{3}, \quad \ell_i z(\cdot) = \alpha_i, \qquad (6)$$

где

$$\ell_1 z(\cdot) := z\left(\frac{2\pi}{3} + 0\right) - z\left(\frac{4\pi}{3} - 0\right), \quad \ell_2 z(\cdot) := z(0) - z\left(\frac{4\pi}{3} - 0\right);$$

$$A(t) = J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (6)

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

определяет невырожденную матрицу

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно $P_{Q_1} = P_{Q_1^*} = O_2$, при этом $\mathcal{P}_1 = I_2$. Поскольку $\ell_1^{(0)} z(\cdot) = 0$, постольку $W_1 = 0$. Кроме того, вырождена матрица $Q_2 = O_2$, следовательно $P_{Q_2} = P_{Q_2^*} = I_2$, при этом $\mathcal{P}_2 = O_2$. Таким образом, для задачи (6) имеет место критический случай. Поскольку $Q_2 = 0$, постольку $W_2 = 0$. Итак, $X(t) \equiv 0$.

Условие разрешимости (4) задачи (6) для $i = 1$ выполнено, поскольку $P_{Q_1^*} = O_2$. Оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (6)

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s) f(s)ds = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

определяет условие разрешимости (4)

$$P_{Q_2^*}\Big\{\alpha_2 - \ell_2 K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0$$

задачи (6) для $i = 2$, при этом

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для задачи (6)

$$G\Big[f(s); \alpha_i\Big](t) = \begin{cases} K\Big[f(s)\Big](t), & t \in [0; \frac{2\pi}{3}[, \\ X_0(t)\gamma_1 + K\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[, \\ K\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\frac{4\pi}{3}; 2\pi]. \end{cases}$$

В некритическом случае

$$\sum_{i=1}^{p} P^2_{Q_i^*} = 0$$

линейная неоднородная задача (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"разрешима для любых неоднородностей $f \in C[a, b]$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}^m$, при этом вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующее утверждение.

Следствие. *Линейная неоднородная задача (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"в некритическом случае разрешима для любых неоднородностей $f(t) \in C[a, b]$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}^m$; при этом задача (1), (2) имеет решение*

$$z(t, c) = X(t)c + G\Big[f(s); \alpha_i\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (3) и обобщенным оператором Грина $G\Big[f(s);\alpha_i\Big](t)$ задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions".

Заметим, что в некритическом случае представление (3) фундаментальной матрицы $X(t)$ существенно упрощается, поскольку равенства $P_{Q_i^*}=0$ влекут за собой $\mathcal{P}_i=I_n$, $i=1,\ 2,\ \dots\ p$; кроме того, поскольку $W_0=\mathcal{P}_0=I_n$, постольку исследованная в статьях [7,8] задача представляет некритический случай задачи (1),(2) с импульсным воздействием типа "interface conditions".

Пример 3. *Условия следствия выполнены для задачи*

$$dz/dt=A(t)z+f(t),\quad t\in[0;2\pi],\quad t\neq\frac{2\pi}{3},\quad t\neq\frac{4\pi}{3},\ \ell_i z(\cdot)=\alpha_i,\quad \alpha_i=0,\qquad (7)$$

где

$$\ell_1 z(\cdot):=z\left(\frac{2\pi}{3}+0\right)-z\left(\frac{4\pi}{3}-0\right),\ \ \ell_2 z(\cdot):=z(0)-z(2\pi);$$

$$A(t)=J_2:=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad f(t):=\begin{pmatrix}\cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}.$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (7)

$$X_0(t)=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

определяет невырожденную матрицу

$$Q_1=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&0\end{pmatrix},$$

следовательно $P_{Q_1}=P_{Q_1^*}=O_2$, при этом $\mathcal{P}_1=I_2$. Поскольку $\ell_1^{(0)}z(\cdot)=0$, постольку $W_1=0$. Кроме того, невырождена матрица $Q_2=I_2$, следовательно $P_{Q_2}=P_{Q_2^*}=O_2$, при этом $\mathcal{P}_2=I_2$. Таким образом, для задачи (7) имеет место некритический случай, при этом

$$X(t)=\begin{cases}X_0(t), & t\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right[,\\ O_2, & t\in\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right[,\\ X_0(t), & t\in\left[\frac{4\pi}{3};2\pi\right].\end{cases}$$

Оператор Грина задачи Коши для неоднородной системы (7)

$$K\Big[f(s)\Big](t):=X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)ds=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sin t+\sin 3t\\ \cos t-\cos 3t\end{pmatrix}$$

определяет векторы

$$\gamma_1=Q_1^+\left\{\alpha_1-\ell_1 K\Big[f(s)\Big](\cdot)\right\}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \gamma_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, для задачи (7)

$$G\Big[f(s);\alpha_i\Big](t)=\begin{cases} K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[0;\frac{2\pi}{3}[,\\ X_0(t)\gamma_1+K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}[,\\ K\Big[f(s)\Big](t), & t\in[\frac{4\pi}{3};2\pi]. \end{cases}$$

Заметим, что нахождение фундаментальной матрицы однородной части задачи (7) возможно с использованием техники [7,8]; в то же время, нахождение фундаментальной матрицы однородной части задачи (5) с использованием техники [7,8] невозможно. Доказанная теорема является частным случаем аналогичного утверждения [6,14,17], однако нахождение фундаментальной матрицы однородной части задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа "interface conditions"с использованием техники [6,14,17] предполагает использование матриц значительно большей размерности.

1. *Мышкис А.Д., Самойленко А.М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сборник. — 1967. — **74 (116)**, № 2. — С. 202 – 208.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк, 1987. — 287 с.
3. *Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. — 1991.— 5, № 9. — С. 1516 – 1521.
4. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
5. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001.– **37**. № 8. — С. 1132 – 1135.
6. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. Июль 2001. — **379**. — № 2. — С. 170 – 172.
7. *Чуйко О.С.* Слабконелінійні крайові задачі з імпульсним впливом загального вигляду // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — 2004. – № 5. – С. 51 – 52.
8. *Чуйко С.М., Чуйко О.С.* Імпульсні крайові задачі для систем із перемиканнями // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 349. Математика. — Чернівці: Рута, 2007. — С. 134 — 139.
9. *Conti R.* On ordinary differential equation with interface conditions // Journ. of Diff. Eq. — 1968. — 4. № 1. — P. 4 – 11.
10. *Sčhwabik S.* Differential Equations with Interface Conditions// Časopis Pro pestovani matematiky. — 1980. — roč. 105.— P. 391 – 410.
11. *Stallard F.W.* Differential systems with interface conditions. Oak Ridge National Laboratory Report № 1876.
12. *Pignani T. J., Whyburn W. M.* Differential Systems with Interface and General Boundary Conditions // F. Elisha Mitchell Sci. Soc. — 1956. — № 72. — P. 1 – 14.
13. *Pham D., Weiss D.* Sur un probléme aux limites pour un systéme ordinaire d'équations differentielles. Compt. Red. Acad. Sci. Paris. — 1966. — № 262. P. 123 — 126.
14. *Чуйко С.М.* Лекції з теорії імпульсних крайових задач. Слов'янськ. 2008. — 210 с.
15. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием//Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 5. – С. 588-594.
16. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доклады НАН Украины. — 1999. — № 6.— С. 43-47.
17. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**. № 1. — С. 51 — 65.

Одержано 10.10.2013