Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Ужгородський національний університет»

І. В. Шапочка

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Ужгород
Видавництво УжНУ «Говерла»
2023

УДК 512.64
Ш24

Рекомендовано до друку Вченою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(*протокол №8 від 6 жовтня 2022 року*).

Рекомендовано до друку Редакційно-видавничою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(*протокол №6 від 27 вересня 2022 року*).

Рецензенти:

Петравчук А. П. — завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, професор;

Щедрик В. П. — провідний науковий співробітник відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник.

Шапочка І. В.

Ш24 Лінійна алгебра. Навчальний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2023. 224 с.
ISBN 978-617-7825-88-2.

У навчальному посібнику викладено основи лінійної алгебри. Він уособлює собою курс лекцій з однойменної навчальної дисципліни, який читався протягом останніх кількох десятиліть викладачами кафедри алгебри Ужгородського державного, а пізніше національного університету. Для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей 014.04 Середня освіта (Математика), 111 Математика.

УДК 512.64

ISBN 978-617-7825-88-2

Зміст

Передмова

Це навчальне видання призначене для студентів факультету математики та цифрових технологій державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет», які навчаються за освітніми програми, що включають у себе, як компоненту, навчальну дисципліну «Лінійна алгебра». Лінійна алгебра є важливим розділом математики у дечому дуже схожим з іншим її розділом, а саме аналітичною геометрією. Тим не менше це окремий розділ математики, в якому пропонується концепція узагальнення, аналізу із спільних позицій різних за природою об'єктів. Такий математичний апарат, що цілком сформувалася у XX столітті, дав можливість одержати фундаментальні результати у різних галузях науки, знайшов практичне застосування у електронно обчислювальній техніці. Через це знання елементів лінійної алгебри на рівні окремих понять і алгоритмів зустрічаються серед компетентностей освітніх програм ряду спеціальностей. Мета цього навчального посібника ознайомити студента із основами лінійної алгебри у тій логічній послідовності викладання матеріалу, як це робилося протягом кілька десятиріч викладачами кафедри алгебри Ужгородського державного, а згодом національного університету. Теоретичний матеріал з питань, які виносяться на семестровий екзамен згідно робочої навчальної програми навчальної дисципліни «Лінійна алгебра», подано повністю з доведенням і обґрунтуванням відповідних теорем. Його цілком достатньо для успішного складання екзамену із дисципліни. Студенту, що прагне досягти більшого у навчанні, рекомендуємо ознайомитися з підручниками з лінійної алгебри, перелік яких наведений у кінці навчального посібника. Чималу частину книг з цього переліку можна знайти у бібліотеці ДВНЗ «Ужгородський національний університет» або у мережі Інтернет. Через це виокремимо ще одну особливість цього посібника — доступність студентам факультету його електронної копії на сайті електронного навчання університету. Кожен пункт завершується вправами для самостійної роботи, більшість із яких запозичені із збірників задач [5, 7]. На цьому етапі видання навчального посібника ми не включили відповіді і вказівки до розв'язання окремих завдань. Їх можна знайти у вказаних збірниках задач, періодичне читання яких, так само, як і підручників з лінійної алгебри із переліку використаних джерел, лише розширить кругозір читача. У процесі написання цього навчального посібника розроблено і раніше видано методичні рекомендації для виконання студентами індивідуальних робіт [10]. Вони поділені на дві частини, у першій з яких наведено тексти задач для індивідуальної роботи, а у другій — приклади розв'язань цих задач. Відзначимо, що для індивідуальної роботи студентів запропоновані лише найбільш важливі на думку автора питання навчальної програми.

Автор щиро вдячний рецензентам за поради, надані при написанні цього навчального видання.

Розділ 1

Лінійні простори

Вивчення математики у школі розпочинається із знайомства з натуральними числами, пов'язуючи їх з поняттям «щось порахувати», необхідністю «кількісно порівнювати», а також з потребою виконувати так звані дії «додавання» і «множення» натуральних чисел. Згодом учні пізнають нові для них числа: цілі, раціональні, дійсні, для яких також вводяться за певними правилами дії додавання та множення. Всі дії об'єднує єдине правило: впорядкованій парі чисел a і b певним чином ставиться у відповідність знову ж таки число, яке для дії додавання називали *сумою* і позначали $a + b$ за допомогою символу $+$, а для дії множення — *добутком*, який позначали $a \cdot b$, використовуючи символ $\cdot$. Пізніше учні знайомляться з дещо іншими за природою об'єктами, а саме многочленами, функціями, векторами, для яких також вводяться дії додавання і множення, використовуючи ті ж самі символи $+$, $\cdot$. Через досвід учнів привчають до істинності деяких властивостей цих дій, а саме переставних, сполучних законів додавання і множення, розподільного закону множення відносно додавання, які фіксують у вигляді «правил». У курсі вищої алгебри вже ретельніше застосовується конструктивний підхід до побудови нових об'єктів: поля комплексних чисел, алгебри матриць, n-вимірного векторного простору і всі відповідні властивості доводяться, спираючись на відомі властивості елементів конструкції. Мета цього розділу лінійної алгебри полягає у бажанні об'єднати з однакових позицій, на перший погляд, різні за природою об'єкти. Їй також служить тема «Групи. Кільця. Поля», яка розглядалася у навчальній дисципліні «Алгебра».

1.1 Означення лінійного простору

Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи. Елементи поля P ми зазвичай будемо позначати малими грецькими літерами, а елементи із L — в основному латинськими літерами. Крім того, нехай 1 — одиниця поля P, а 0 — нуль поля P.

Означення 1. Непорожня множина L називається *лінійним простором над полем P*, якщо:

1) задано відображення f із декартового добутку $L \times L$ в L, яке кожній впорядкованій парі (a, b) елементів a і b множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається *сумою елементів a і b* і позначається через $a + b$ (за домовленістю відображення f будемо називати *дією додавання елементів з L*);
2) задано відображення g із декартового добутку $P \times L$ в L, яке кожній впорядкованій парі (α, a) елементів α із P і a із L ставить у відповідність єдиний елемент із L, що називається *добутком α на a* і позначається через $\alpha \cdot a$ (за домовленістю відображення g будемо називати *дією множення елементів поля P на елементи множини L*);
3) вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають *аксіомами лінійного простору*):

   (i) $a + b = b + a$ для будь-яких елементів a і b із L;

   (ii) $(a+b)+c = a+(b+c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L;

   (iii) існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L;

   (iv) для будь-якого елемента a із L існує такий елемент a' із L, що $a + a' = \bar{0}$;

   (v) $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$ для будь-яких елементів α, β із P і a із L;

   (vi) $1 \cdot a = a$ для будь-якого елемента a із L;

   (vii) $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ для будь-яких елементів α із P і a, b із L;

   (viii) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ для будь-яких елементів α, β із P і a із L.

Зауваження 1. Добуток $\alpha \cdot a$ елементів α із P і a із L інколи пишуть без символу $\cdot$, тобто αa. Ми також будемо підтримувати цю традицію, але за необхідністю інколи писатимемо і так, як вказано в означенні.

Розглянемо деякі приклади лінійних просторів, вказуючи лише множину L, в окремих випадках поле P та дії додавання елементів із L та множення елементів поля P на елементи із L. Перевірку істинності усіх восьми аксіом лінійного простору для кожного прикладу залишаємо читачеві.

1. *Нульовий простір над полем* P — це множина $L = \{a\}$, що складається із одного вектора a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a + a = a, \qquad \alpha a = a$$

для довільного α із P.

2. Для будь-якого натурального n *дійсний n-вимірний векторний простір* $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Узагальненням дійсного n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ є, так званий, *n-вимірний векторний простір P^n над полем P*. Нехай n — деяке натуральне число. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається *n-вимірним вектором над полем P*. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами α_1, α_2, ..., α_n поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 *1-ю компонентою*, α_2 — *2-ю компонентою* і т.д., α_n — *n-ю компонентою* цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються *рівними*, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

1) якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ із P^n, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n);$$

2) якщо γ із P і $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ із P^n, то добуток γa визначимо за правилом

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n).$$

Вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору, який називається *n-вимірним векторним простором над полем P*.

У процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що вектором $\bar{0}$ із третьої аксіоми лінійного простору в P^n є

n-вимірний вектор $(0, 0, \ldots, 0)$, а вектором a' із четвертої аксіоми лінійного простору для n-вимірного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ є n-вимірний вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

4. Кільце многочленів $P[x]$ від невідомої x над полем P є прикладом лінійного простору. Дія додавання многочленів та дія множення елемента поля на многочлен задаються у звичайний спосіб, тобто через бінарні алгебраїчні операції, визначені в кільці $P[x]$.

5. Нехай α і β — деякі дійсні числа і $\alpha < \beta$. Множина $C_{[\alpha,\,\beta]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[\alpha,\,\beta]$ є прикладом лінійного простору над полем дійних чисел. Дві функції f, g із $C_{[\alpha,\,\beta]}$ називаються рівними, якщо $f(x) = g(x)$ для будь-якого числа $x \in [\alpha, \beta]$. Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

1) якщо $f, g \in C_{[\alpha,\beta]}$, то суму $f + g$ визначимо за правилом
$$\big[f + g\big](x) = f(x) + g(x)$$
для кожного $x \in [\alpha, \beta]$;

2) якщо $\gamma \in \mathbb{R}$ і $f \in C_{[\alpha,\beta]}$, то добуток γf визначимо за правилом
$$\big[\gamma f\big](x) = \gamma f(x)$$
для кожного $x \in [\alpha, \beta]$.

Із відомих теорем математичного аналізу слідує, що $f + g$ і γf — неперервні функції на $[\alpha, \beta]$, тобто $f + g \in C_{[\alpha,\beta]}$ і $\gamma f \in C_{[\alpha,\beta]}$.

Твердження 1. *Нехай L — лінійний простір над полем P. Тоді в L існує тільки один елемент $\bar{0}$ такий, що задовольняє аксіомі* (iii) *лінійного простору. Також для кожного a із L існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.*

Доведення. Доведемо від протилежного обидва твердження. Припустимо спочатку, що $\bar{0}$ і $\hat{0}$ — два різні елементи із L, що задовольняють аксіому (iii) лінійного простору. Тоді справджуються рівності $\bar{0} + \hat{0} = \bar{0}$, $\hat{0} + \bar{0} = \hat{0}$. За аксіомою (i) лінійного простору $\bar{0} + \hat{0} = \hat{0} + \bar{0}$. Через це $\bar{0} = \hat{0}$, що суперечить тому, що це різні елементи із L.

Тепер припустимо, що для деякого елемента a із L існують два різні елементи a' і a'' із L, що $a + a' = \bar{0}$ і $a + a'' = \bar{0}$. Тоді
$$a' = a' + \bar{0} = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = (a + a') + a'' = \bar{0} + a'' = a'',$$
що знову ж таки призводить до суперечності.

Зауваження 2. Елементи лінійного простору L будемо називати *векторами* незалежно від природи цих елементів. Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати *нульовим вектором* простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати *протилежним вектором до вектора* a і позначати його через $-a$.

Твердження 2. *Нехай L — лінійний простір над полем P з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:*

$$0a = \bar{0}, \qquad \alpha\bar{0} = \bar{0}, \qquad (-1)a = -a. \tag{1}$$

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення. Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіоми (viii) лінійного простору слідує, що

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a.$$

Позначивши вектор $0a$ через b, одержимо $b = b + b$. Оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$, то

$$b = b + \bar{0} = b + (b + (-b)) = (b + b) + (-b) = b + (-b) = \bar{0}.$$

Це означає, що справджується перша з рівностей (1).

Друга з цих рівностей доводиться аналогічно, використовуючи аксіому (vii) лінійного простору, а саме з рівностей

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}$$

для довільного елемента α поля P.

Істинність третьої з рівностей (1) слідує із першої з них, аксіом (vi) та (viii) лінійного простору та твердження 1:

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = \bar{0}.$$

Тому $-a = (-1)a$.

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то твердження доведено. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α. За доведеним раніше та за аксіомами (v), (vi) лінійного простору маємо, що

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}\bar{0} = \bar{0}.$$

Твердження доведено.

Означення 2. Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що *підмножина A замкнена відносно дій* над векторами, якщо виконуються умови:

1) сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2) добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Для визначення інших, крім наведених вище, прикладів лінійних просторів зручно використовувати наступну теорему.

Теорема 1. *Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L, тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.*

Доведення. Необхідність теореми очевидна. Доведемо достатність. Нехай A є замкненою підмножиною відносно дій, заданих у лінійному простору L над полем P. Оскільки рівності з усіх аксіом лінійного простору окрім аксіом (iii) та (iv) справджуються для всіх векторів лінійного простору L, то зрозуміло, що вони справджуються і для елементів підмножини A. Залишилося переконатися в істинності згаданих двох аксіом. Множина A є непорожньою. Через це містить деякий елемент a. Оскільки A є замкненою підмножиною, то $0a \in A$. Однак $0a = \bar{0}$. Тому $\bar{0}$ міститься в A. Нарешті для довільного елемента $b \in A$ справджуються рівність та включення $-b = (-1)b \in A$. Теорема доведена.

Зауваження 3. Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$,
- $a + b + c = (a + b) + c$,
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d \ldots$

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай O — деяка точка площини α, b — деяка пряма, що лежить в цій площині, а L є множиною всіх векторів площини α з початками у точці O і кінцями, що лежать на прямій b. Чи є множина L лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел відносно звичних дій додавання векторів та множення дійсного числа на вектор? Відповідь обґрунтувати.

2. Нехай на площині задана система координат з початком у точці O. Вияснити чи є лінійним простором над полем дійсних чисел множина всіх векторів площини, початки яких знаходяться у точці O, а кінці у а) першій чверті; б) першій або третій чверті, відносно звичних дій додавання векторів та множення числа на вектор. Відповідь обґрунтувати.

3. Нехай O — деяка точка площини α, v — деякий ненульовий вектор, що належить цій площині, а L є множиною всіх векторів площини α з початками у точці O і які утворюють кут φ з вектором v, де $\varphi \in [0, \pi]$. Чи є множина L лінійним простором над полем дійсних чисел відносно звичних дій додавання векторів та множення дійсного числа на вектор? Відповідь обґрунтувати.

4. В множині $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел визначені наступні дії: 1) дія додавання $\oplus$ елементів із $\mathbb{R}^+$ за правилом $x \oplus y = x \cdot y$, де $\cdot$ є звичною операцією множення дійсних чисел x і y із $\mathbb{R}^+$; 2) дія множення $\odot$ дійсного числа α на елемент x із $\mathbb{R}^+$ за правилом $\alpha \odot x = x^\alpha$, де x^α — звичний степінь дійсного числа x із $\mathbb{R}^+$ з дійсним показником α. Перевірити чи є множина $\mathbb{R}^+$ лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно введених дій.

5. В множині $\tilde{\mathbb{R}}^2$ всіх впорядкованих пар дійсних чисел визначені наступні дії: 1) дія додавання $+$ довільних елементів $x = (\alpha_1, \alpha_2)$, $y = (\beta_1, \beta_2)$ із $\tilde{\mathbb{R}}^2$ за правилом $x+y = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)$; 2) дія множення $\circ$ довільного дійсного числа γ на будь-який елемент $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ із $\tilde{\mathbb{R}}^2$ за правилом $\gamma \circ x = (\gamma\alpha_1, \alpha_2)$. Перевірити чи є множина $\tilde{\mathbb{R}}^2$ лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно введених дій.

6. Нехай $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ — поле з двох елементів, $\mathbb{F}_2^n$ — n-вимірний векторний простір над полем $\mathbb{F}_2$. Довести, що для будь-якого елемента x із $\mathbb{F}_2^n$ справджується рівність $x + x = \bar{0}$, де $\bar{0}$ — нульовий вектор із $\mathbb{F}_2^n$. Знайти число елементів в $\mathbb{F}_2^n$.

7. Нехай S є множиною всіх нескінченних послідовностей раціональних чисел. Дія додавання довільних послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ із S задається так: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. Дія множення раціонального числа γ на послідовність $\{a_n\}$ із S задається таким чином: $\gamma \cdot \{a_n\} = \{\gamma a_n\}$. Чи є множина S лінійним простором над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел відносно введених дій? Нагадаємо, що нескінченною послідовністю елементів деякої непорожньої множини A називається відображення з множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел у множину A.

8. Нехай F — множина всіх нескінченних послідовностей дійсних чисел, у яких кожен член, починаючи з третього, є сумою двох попередніх її членів. Дія додавання довільних послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ із F задається так: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. Дія множення дійсного числа γ на послідовність $\{a_n\}$ із F задається таким чином: $\gamma \cdot \{a_n\} = \{\gamma a_n\}$. Чи є множина F лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно введених дій?

9. Чи є лінійним простором над деяким полем P множина всіх многочленів деякого даного степеня $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ над полем P разом нульовим многочленом відносно звичних дій додавання многочленів та множення числа на многочлен?

10. Нехай L — множина всіх многочленів $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, для яких справджується рівність а) $f(0) = 1$; б) $f(0) = 0$; в) $2f(0) - 3f(1) = 0$. Чи є множина L лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно звичних дій додавання многочленів та множення числа на многочлен?

1.2 Лінійна залежність векторів

Нехай всюди надалі L є лінійним простором над полем P.

Означення 1. Будь-яку впорядковану скінченну множину векторів лінійного простору L будемо називати *системою векторів*.

Означення 2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s є деякою системою із s векторів лінійного простору L для деякого натурального числа s, а β_1, β_2, ..., β_s є деякими елементами поля P. Вектор b лінійного простору L такий, що

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

називається *лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., a_s відповідно з коефіцієнтами β_1, β_2, ..., β_s*. Якщо ж для деякого вектора c із L знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P такі, що

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s,$$

то казатимемо, що вектор *c представляється у вигляді лінійної комбінації* заданої системи векторів.

Означення 3. Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається *лінійно залежною*, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 4. Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається *лінійно незалежною*, якщо нульовий вектор $\bar{0}$ тільки одним способом представляється у вигляді лінійної комбінації цієї системи векторів, а саме

$$\bar{0} = 0a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_s.$$

Цілком очевидним є той факт, що у випадку, коли система векторів лінійного простору не є лінійно залежною, то вона є лінійно незалежною системою векторів. Також справджується наступне твердження.

Твердження 1. *Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо і тільки якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0,* *лінійна комбінація* $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ *не є нульовим вектором лінійного простору* L.

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)**.** *Дана система векторів лінійного простору* L *над полем* P *є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.*

Доведення. Справді, припустимо спочатку, що деяка задана система векторів a_1, a_2, ..., a_s із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із цієї рівності слідує, що

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (1)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то ліву і праву частини рівності (1) можна помножити на $-\gamma_j^{-1}$. У результаті одержимо рівність

$$a_j = \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_1\right) a_1 + \cdots + \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_{j-1}\right) a_{j-1} + \\ + \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_{j+1}\right) a_{j+1} + \cdots + \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_s\right) a_s.$$

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_s, а тому необхідність теореми доведена.

Доведемо тепер її достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких елементів $\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_s$ поля P. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі з елементів системи $\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, -1, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_s$ дорівнюють нулю, а тому за означенням система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною. Теорема доведена.

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)**.** *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною, то і дана система векторів є також лінійно залежною. Якщо ж дана система векторів лінійного простору L є лінійно незалежною, то і будь-яка її підсистема також є лінійно незалежною.*

Доведення. Припустимо, що деяка підсистема системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s лінійного простору L є лінійно залежною і нехай вона складається з k векторів. Враховуючи, що властивість бути лінійно залежною, не залежить від порядку векторів системи, ми не зменшимо загальності доведення теореми припустивши, що підсистема a_1, a_2, $\dots$, a_k є лінійно залежною. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система елементів γ_1, γ_2, $\dots$, γ_k поля P, не всі з яких рівні нулю і таких, що $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k = \bar{0}$. Тому очевидно

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \dots + 0 \cdot a_s = \bar{0},$$

тобто система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійно залежною.

Друге твердження теореми є оберненим і протилежним твердження до першого. Його не важко довести методом від протилежного, яке залишаємо читачеві для самостійної вправи.

Теорема 3 (про лінійні комбінації)**.** *Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деяка система векторів лінійного простору L над полем P. Якщо кожен вектор системи векторів b_1, b_2, $\dots$, b_t лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s і $t > s$, то система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_t є лінійно залежною.*

Доведення. Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11} a_1 + \gamma_{12} a_2 + \dots + \gamma_{1s} a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21} a_1 + \gamma_{22} a_2 + \dots + \gamma_{2s} a_s, \\ &\quad \cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1} a_1 + \gamma_{t2} a_2 + \dots + \gamma_{ts} a_s \end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Розглянемо наступні s-вимірні вектори над полем P:

$$u_1 = (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \dots,\ \gamma_{1s}), \quad \dots, \quad u_t = (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \dots,\ \gamma_{ts}).$$

Через те, що $t > s$ система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_t$ є лінійно залежною. Це слідує із теореми про системи n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Вона є аналогом теореми про системи дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент. Тому існують елементи $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_t$ поля P, не всі з яких рівні нулю для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts}) = \\ = (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_t\gamma_{t1},\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_t\gamma_{ts}) = \\ = \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k1},\ \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k2},\ \ldots,\ \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{ks}\right).\end{gathered}$$

Звідси та із векторної рівності (2) одержимо наступні рівності:

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{ks} = 0.$$

Беручи їх до уваги, обчислимо лінійну комбінацію

$$\begin{gathered}\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k = \\ = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} \lambda_k\gamma_{kl} a_l = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{kl} a_l = \\ = \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{kl}\right) a_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot a_l = \bar{0} \in L.\end{gathered}$$

Таким чином, система векторів $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_t$ є лінійно залежною. Теорема доведена.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що будь-яка система векторів лінійного простору L над полем P, яка містить нульовий вектор, є лінійно залежною.

2. Довести, що будь-яка система векторів лінійного простору L над полем P, яка містить два пропорційні вектори, є лінійно залежною.

3. Нехай L — лінійний простір над полем P; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — лінійно залежна система векторів із L, де $n \in \mathbb{N}$; b — вектор із L, який є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Довести, що вектор b принаймні двома способами множна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4. Нехай L — лінійний простір над полем P; x, y, z — лінійно незалежна система векторів із L. Чи є лінійно незалежною система векторів а) x, $x+y$, $x+y+z$; б) $x+y$, $y+z$, $z+x$?

5. Нехай L — лінійний простір над полем P. Довести що для будь-яких векторів x, y, z із L та будь-яких елементів α, β, γ поля P система векторів $\alpha x - \beta y$, $\gamma y - \alpha z$, $\beta z - \gamma x$ є лінійно залежною.

6. Нехай задано систему многочленів $f_1 = 1 - t^2$, $f_2 = 1 + t^3$, $f_3 = t - t^3$, $f_4 = 1 + t + t^2 + t^3$ із лінійного простору многочленів $\mathbb{R}[t]$ над полем $\mathbb{R}$. Обчислити лінійні комбінації $5f_1 + f_2 - 4f_3$ та $f_1 + 9f_2 - 4f_4$. Порівнюючи результати обчислень зробіть висновок про задану систему многочленів.

7. Виявснити чи є лінійно залежною система чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{8}$ із лінійного простору $\mathbb{R}$ дійсних чисел над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

8. Нехай r, s і v — попарно різні дійсні числа. Чи є лінійно незалежною система многочленів $(x-r)(x-s)$, $(x-r)(x-v)$, $(x-s)(x-v)$ із лінійного простору $\mathbb{R}[x]$ над полем $\mathbb{R}$?

9. Виявснити чи є лінійно залежною система векторів $a_1 = (1, i, 2-i, 3+i)$, $a_2 = (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$ із чотиривимірного комплексного векторного простору $\mathbb{C}^4$.

10. Виявснити чи є лінійно залежною система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

із лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$ всіх 2×2-матриць над полем дійсних чисел.

1.3 Скінченновимірний лінійний простір

Означення 1. Лінійний простір L над полем P називається *нескінченновимірним*, якщо для будь-якого натурального числа n існує лінійно незалежна система із n векторів лінійного простору L. Якщо ж для деякого натурального числа m будь-яка система із m векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то лінійний простір L називається *скінченновимірним*.

Прикладом нескінченновимірного лінійного простору є кільце многочленів $\mathbb{R}[x]$, розглядуване як лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійних чисел. Бо для будь-якого натурального числа n система многочленів 1, x, x^2, $\ldots$, x^{n-1} є лінійно незалежною системою векторів. Натомість дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є скінченновимірним лінійним простором. Бо добре відомо, що будь-яка система із більш ніж n n-вимірних векторів є лінійно залежною.

Означення 2. *Розмірністю скінченновимірного лінійного простору L над полем P* називається натуральне число s, для якого існує лінійно незалежна система із s векторів лінійного простору L, а будь-яка система із $s+1$ векторів є лінійно залежною.

Якщо L є нульовим простором, то його розмірність вважають рівною нулю. Розмірність нескінченновимірного простору вважають умовно рівною ∞. Розмірність лінійного простору L над полем P позначають через $\dim_P L$.

Розмірність дійсного n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ дорівнює n, тобто $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n = n$, оскільки, як зазначалося раніше, будь-яка система із більш ніж n n-вимірних векторів є лінійно залежною, а з іншого боку існує лінійно незалежна система із n векторів, наприклад: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Аналогічно, яким би не було поле P, векторний простір P^n також є скінченновимірним лінійним простором над полем P і $\dim_P P^n = n$.

Означення 3. Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L над полем P називається *базисом лінійного простору L*, якщо виконуються наступні умови:

1) система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є лінійно незалежною;
2) будь-який вектор лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Теорема 1 (теорема про базис і розмірність)**.** *Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором над полем P. Тоді* *існує базис лінійного простору L, причому число векторів будь-якого базису лінійного простору L дорівнює розмірності лінійного простору L над полем P.*

Доведення. Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності k, тобто $\dim_P L = k$, де k — деяке натуральне число. Тоді існує деяка лінійно незалежна система із k векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного простору L. Причому будь-яка система із $k+1$ векторів лінійного простору L є лінійно залежною. Тому для довільного вектора b із L система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, b є лінійно залежною. Це означає, що існують елементи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, α_k, β поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \beta b = \bar{0}.$$

Елемент β не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку одержали б, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ є лінійно залежною. Тому

$$b = (-\beta^{-1}\alpha_1)a_1 + (-\beta^{-1}\alpha_2)a_2 + \cdots + (-\beta^{-1}\alpha_k)a_k,$$

тобто будь-який вектор b лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Таким чином, ця система векторів задовольняє обидві умови із означення базису лінійного простору. Тому вона є базисом лінійного простору L над полем P.

Далі, нехай $c_1, c_2, \ldots, c_l$ — деякий інший базис лінійного простору L над полем P. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — базис лінійного простору L, то кожен із векторів $c_1, c_2, \ldots, c_l$ є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. За теоремою про лінійні комбінації, враховуючи що система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_l$ є лінійно незалежною, одержимо, що $l \le k$. Навпаки, враховуючи, що кожен із векторів лінійно незалежної системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ є лінійною комбінацією системи векторів $c_1, c_2, \ldots, c_l$, аналогічно одержимо, що $k \le l$. Таке можливе лише у випадку, коли $l = k$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є деякою системою векторів скінченновимірного лінійного простору L над полем P. Справджується лише одне із наступних тверджень:*

1) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною;*
2) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — базис лінійного простору L;*
3) *існує вектор b із лінійного простору L такий, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$ є лінійно незалежною.*

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів скінченновимірного лінійного простору L над полем P. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для неї справджується третє твердження.

Припустимо, що система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійно незалежною і не є базисом лінійного простору L. Тоді існує вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s. Розглянемо систему векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s, b. Якщо вона є лінійно залежною, то аналогічно доведенню теореми 1 можна показати, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s. Оскільки це суперечить припущенню, то можемо стверджувати, що система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s, b є лінійно незалежною. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Будь-яку лінійно незалежну систему векторів скінченновимірного лінійного простору L над полем P, яка не є базисом L, можна доповнити до деякого базису простору L.*

Доведення. Дійсно, нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійно незалежною системою векторів скінченновимірного лінійного простору L розмірності n над полем P, яка не є базисом L. За попередньою теоремою знайдеться вектор b_1 із L, що система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s, b_1 є лінійно незалежною. Тоді $s + 1 \le n$. Якщо $s + 1 = n$, то система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s, b_1 — базис L. Бо для цієї системи векторів очевидно не справджуються 1-ше твердження із теореми 2. А 3-тє твердження не справджується у цьому випадку через те, що будь-яка система із $s + 2$ векторів лінійного простору L є лінійно залежною, бо $s + 2 > n = \dim_P L$. Якщо ж $s + 1 < n$, то система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s, b_1 не є базисом L, бо за доведеним раніше будь-який базис L повинен складатися з n векторів. Тому знову ж таки за теоремою 2 знайдеться вектор b_2 із L, що система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s, b_1, b_2 є лінійно незалежною і т. д. Оскільки s і n — деякі фіксовані натуральні числа, то зрозуміло, що цей процес зупиниться на $(n - s)$-му кроці. Після якого одержимо базис a_1, a_2, $\dots$, a_s, b_1, b_2, $\dots$, b_{n-s} лінійного простору L. Наслідок доведено.

Теорема 3 (про розклад)**.** *Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n, а система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_n — базис цього лінійного простору. Для кожного вектора b лінійного простору L існує тільки одна система елементів β_1, β_2, $\dots$, β_n поля P така, що вектор b представляється у вигляді*

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n. \tag{1}$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і b — довільний вектор лінійного простору L. Із означення базису одразу слідує, що існують елементи β_1, β_2, ..., β_n поля P такі, що справджується рівність (1). Припустимо, що крім набору елементів β_1, β_2, ..., β_n поля P існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_n цього ж поля такі, що справджується рівність

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n,$$

причому $\beta_i \neq \gamma_i$ для деякого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n.$$

Звідси $(\beta_1 - \gamma_1)a_1 + \cdots + (\beta_i - \gamma_i)a_i + \cdots + (\beta_n - \gamma_n)a_n = \bar{0}$. Оскільки $\beta_i - \gamma_i \neq 0$, то із останньої рівності слідує, що система векторів a_1, a_2, ..., a_n є лінійно залежною, що суперечить умові теореми. Теорема доведена.

Означення 4. Представлення вектора b лінійного простору L у вигляді (1) лінійної комбінації векторів деякого базису a_1, a_2, ..., a_n цього лінійного простору називається *розкладом вектора за базисом* a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Коефіцієнти β_1, β_2, ..., β_n називаються *координатами* вектора b у базисі a_1, a_2, ..., a_n.

При цьому будемо говорити, що β_1 — 1-ша координата, β_2 — 2-га координата і т.д., β_n — n-а координата вектора b.

Означення 5. n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, складений з координат вектора b, будемо називати *координатним рядком вектора* b у базисі a_1, a_2, ..., a_n. Відповідно стовпець, складений із цих координат, будемо називати *координатним стовпцем* у цьому базисі.

Для прикладу розглянемо базис $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)$ дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Оскільки для вектора $w = (2, 3, 4)$ справджується рівність $w = 2u_1 + 1u_2 + 1u_3$, то $(2, 1, 1)$ є координатним рядком вектора w у базисі u_1, u_2, u_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$.

Зауваження 1. Якщо система векторів a_1, a_2, ..., a_n є базисом лінійного простору L над полем P, то координатні рядки базисних векторів a_1, a_2, ..., a_n співпадають відповідно з векторами канонічного базису в P^n через те, що

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_{n-1} + 0a_n,\\
a_2 &= 0a_1 + 1a_2 + \cdots + 0a_{n-1} + 0a_n,\\
&\quad \cdots\cdots \\
a_n &= 0a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_{n-1} + 1a_n.
\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 4 (про дії над векторами у координатній формі)**.** *Нехай у скінченновимірному лінійному просторі L над полем P вибрано базис і деякі вектори b та c із L розкладені за цим базисом. Тоді координати суми векторів b і c дорівнюють сумам відповідних координат цих векторів у розглянутому базисі. Щоб одержати координати добутку елемента δ поля P на вектор b потрібно елемент δ поля помножити на відповідні координати цього вектора.*

Доведення. Нехай L — деякий скінченновимірний лінійний простір над поем P, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис цього лінійного простору. Розглянемо будь-які вектори b і c лінійного простору L. Розкладемо вектори b і c за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n,$$

де $\beta_i, \gamma_j \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді

$$\begin{aligned} b + c &= (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) + (\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n) = \\ &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n + \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \\ &= (\beta_1 a_1 + \gamma_1 a_1) + (\beta_2 a_2 + \gamma_2 a_2) + \cdots + (\beta_n a_n + \gamma_n a_n) = \\ &= (\beta_1 + \gamma_1) a_1 + (\beta_2 + \gamma_2) a_2 + \cdots + (\beta_n + \gamma_n) a_n. \end{aligned}$$

Тому за теоремою про розклад $\beta_1+\gamma_1, \beta_2+\gamma_2, \ldots, \beta_n+\gamma_n$ є відповідно 1-шою, 2-гою і т.д., n-ю координатою вектора $b + c$.

Подібним чином доводиться друга частина теореми. А саме, для довільного елемента δ поля P та вище згаданого вектора b справджуються рівності

$$\begin{aligned} \delta b &= \delta(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \delta(\beta_1 a_1) + \cdots + \delta(\beta_n a_n) = \\ &= (\delta\beta_1) a_1 + (\delta\beta_2) a_2 + \cdots + (\delta\beta_n) a_n. \end{aligned}$$

Звідси слідує, що $(\delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots, \delta\beta_n)$ є координатним рядком вектора δb. Теорема доведена.

Означення 6. Нехай L — лінійний простір розмірності n над полем P, а системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — базиси лінійного простору L над полем P. Розкладемо вектори одного базису по другому базису:

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_{11} a_1 + \tau_{21} a_2 + \cdots + \tau_{n1} a_n, \\ b_2 &= \tau_{12} a_1 + \tau_{22} a_2 + \cdots + \tau_{n2} a_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= \tau_{1n} a_1 + \tau_{2n} a_2 + \cdots + \tau_{nn} a_n, \end{aligned}$$

де $\tau_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу* від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Теорема 5. *Нехай L — лінійний простір розмірності n над полем P, а системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ та $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — базиси лінійного простору L над полем P. Якщо T є матрицею переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а S є матрицею переходу від базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то TS є матрицею переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_n$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми та

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

є відповідно матрицями переходу від першого базису до другого базису і від другого базису до третього базису. Тоді

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ki}a_k,$$

$$c_j = \sigma_{1j}b_1 + \sigma_{2j}b_2 + \cdots + \sigma_{nj}b_n = \sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj}b_l$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Із цих рівностей слідує, що

$$c_j = \sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj}b_l = \sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj}\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{kl}a_k\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{lj}\tau_{kl}a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj}\tau_{kl}a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj}\tau_{kl}\right)a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} \tau_{kl}\sigma_{lj}\right)a_k$$

для довільного $j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$. Отже, матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{1l}\sigma_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{1l}\sigma_{l2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{1l}\sigma_{ln} \\ \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{2l}\sigma_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{2l}\sigma_{l2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{2l}\sigma_{ln} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{nl}\sigma_{l1} & \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{nl}\sigma_{l2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{n} \tau_{nl}\sigma_{ln} \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від базису $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ до базису $c_1,\, c_2,\, \ldots,\, c_n$ лінійного простору L. У свою чергу за означенням добутку матриць матриця Q дорівнює добутку матриць T і S. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай T є матрицею переходу від базису a_1, $a_2,\, \ldots,\, a_n$ до базису $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ лінійного простору L над полем P. Матриця T є оборотною матрицею, а обернена до неї матриця T^{-1} є матрицею переходу від базису $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ до базису a_1, $a_2,\, \ldots,\, a_n$.*

Доведення. Нехай виконуються умови наслідку і S є матрицею переходу від базису $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ до базису $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$. Тоді за попередньою теоремою матриця TS є матрицею переходу від базису a_1, $a_2,\, \ldots,\, a_n$ до базису $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$, яка, очевидно (див. рівності (2)), є одиничною матрицею. Оскільки добуток TS дорівнює одиничній матриці, то T є оборотною матрицею, а S є оберненою матрицею до матриці T. Наслідок доведено.

Теорема 6. *Нехай системи векторів $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ та b_1, $b_2,\, \ldots,\, b_n$ — базиси лінійного простору L над полем P, а T є матрицею переходу від базису $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ до базису $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$. Тоді для будь-якого вектора u лінійного простору L координатні стовпці U_a та U_b вектора u відповідно у базисах $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ та b_1, $b_2,\, \ldots,\, b_n$ пов'язані рівністю*

$$U_a = TU_b. \tag{3}$$

Доведення. Нехай справджуються умови теореми, $T = \|\tau_{ij}\|$, де $\tau_{ij} \in P$; $i,\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і u — довільний вектор лінійного простору L. Розкладемо вектор u за обома базисами:

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n, \quad u = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n.$$

Тоді

$$u = \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\sum_{l=1}^{n} \tau_{lk} a_l \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \beta_k \tau_{lk} a_l = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{lk} \beta_k \right) a_l.$$

Із теореми про розклад слідує, що $\alpha_l = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_{lk} \beta_k$ для довільного $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, що й потрібно було довести.

Означення 7. Рівність (3) називається *формулою перетворення координат* вектора при переході від одного базису лінійного простору до іншого базису.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел є скінченновимірним лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел відносно звичних алгебраїчних операцій додавання та множення комплексних чисел, беручи до уваги, що будь-яке дійсне число є комплексним. Знайти розмірність $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

2. Довести, що поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел є нескінченновимірним лінійним простором над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел відносно звичних алгебраїчних операцій додавання та множення комплексних чисел, беручи до уваги, що будь-яке раціональне число є комплексним.

3. Нехай $\mathbb{R}^+$ є лінійним простором всіх додатних дійсних чисел над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел з наступними діями: $x \oplus y = x \cdot y$, $\alpha \odot x = x^\alpha$ для довільних $x, y \in \mathbb{R}^+$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Чи є лінійний простір $\mathbb{R}^+$ скінченновимірним? Якщо так, то знайти його розмірність і деякий його базис.

4. Нехай S є лінійним простором всіх нескінченних послідовностей раціональних чисел над полем $\mathbb{Q}$ з діями додавання довільних послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ із S за правилом $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ та множенням раціонального числа γ на послідовність $\{a_n\}$ так, що $\gamma \cdot \{a_n\} = \{\gamma a_n\}$. Чи є лінійний простір S скінченновимірним? Якщо так, то вкажіть деякий базис цього лінійного простору.

5. Нехай F є лінійним простором всіх нескінченних послідовностей дійсних чисел, у яких кожен член, починаючи з третього, є сумою двох попередніх її членів. Дія додавання довільних послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ із F задається так: $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$. Дія множення дійсного числа γ на послідовність $\{a_n\}$ із F задається таким чином: $\gamma\cdot\{a_n\}=\{\gamma a_n\}$. Чи є лінійний простір F над полем $\mathbb{R}$ скінченновимірним? Якщо так, то вкажіть деякий базис цього лінійного простору.

6. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ є лінійним простором всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують деякого невід'ємного цілого числа n (дії в $\mathbb{R}[x]_n$ задаються звичним чином). Чи є лінійний простір $\mathbb{R}[x]_n$ скінченновимірним? Якщо так, то вкажіть деякий базис цього лінійного простору.

7. Нехай P є деяким полем, а n — натуральним числом. Довести, що n-вимірні вектори

$$(\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}),\ (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}),\ \ldots,\ (\alpha_{n1},\ \alpha_{n2},\ \ldots,\ \alpha_{nn})$$

векторного простору P^n утворюють базис цього простору тоді і тільки тоді, коли детермінант

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

не дорівнює нулю.

8. Довести, що для будь-якого натурального числа n система векторів

$$a_1=(1,2,3,\ldots,n-1,n),\ a_2=(0,2,3,\ldots,n-1,n),$$
$$a_3=(0,0,3,\ldots,n-1,n),\ \ldots,\ a_n=(0,0,0,\ldots,0,n)$$

є базисом дійсного n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

9. Довести, що для будь-якого натурального числа n система векторів

$$x_1=(1,1,\ldots,1,1,1),\ x_2=(1,1,\ldots,1,1,0),$$
$$x_3=(1,1,\ldots,1,0,0),\ \ldots,\ x_n=(1,0,\ldots,0,0,0)$$

є базисом дійсного n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

10. У чотиривимірному векторному просторі $\mathbb{R}^4$ знайти два базиси, що містять вектори $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1, 1)$.

11. Систему многочленів $x^5 + 4x^4$, $x^5 - 3x^3$, $x^5 + 2x^2$, $x^5 - x$ із лінійного простору $\mathbb{R}[x]_5$ доповнити до базису цього простору.

12. Нехай будь-який вектор лінійного простору L над полем P представляється у вигляді лінійної комбінації деякої системи векторів a_1, a_2, …, a_n цього простору, де n — деяке натуральне число. Причому для деякого вектора b із L існує лише одне представлення у вигляді лінійної комбінації векторів цієї системи. Довести, що система векторів a_1, a_2, …, a_n є базисом лінійного простору L.

13. Довести, що система векторів $e_1 = (2, 2, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (-1, 2, 2)$ є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти координати вектора $x = (1, 1, 1)$ у цьому базисі.

14. Довести, що система векторів $e_1 = (1, 5, 3)$, $e_2 = (2, 7, 3)$, $e_3 = (3, 9, 4)$ є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти координати вектора $x = (2, 1, 1)$ у цьому базисі.

15. Довести, що система матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

є базисом лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Знайти координати матриці

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

у цьому базисі.

16. Знайти координати многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ у базисі $t^3 + 1$, $t^3 + t$, $t^3 + t^2$, t^3, $t^4 + t^3$, $t^5 + t^3$ лінійного простору $\mathbb{R}[t]_5$ всіх многочленів над полем дійсних чисел, степінь яких не перевищує 5.

17. Знайти координати многочлена $2x^3 - 7x^2 + 11x - 11$ у базисі $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $x^2 - 2x + 1$, $x - 1$, 1 лінійного простору $\mathbb{R}[x]_3$ всіх многочленів над полем дійсних чисел, степінь яких не перевищує 3.

18. Нехай F є лінійним простором всіх нескінченних послідовностей дійсних чисел, у яких кожен член, починаючи з третього, є сумою двох попередніх її членів. Дія додавання довільних послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ із F задається так: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$. Дія множення дійсного числа γ на послідовність $\{a_n\}$ із F задається таким чином: $\gamma \cdot \{a_n\} = \{\gamma a_n\}$. Довести, що послідовності

$$(2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots), \quad (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots)$$

утворюють базис лінійного простору F. Розкласти за цим базисом послідовність $(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots)$.

19. Довести, що кожна із двох систем векторів $a_1 = (1,2,1)$, $a_2 = (2,3,3)$, $a_3 = (3,7,1)$; $b_1 = (3,1,4)$, $b_2 = (5,2,1)$, $b_3 = (1,1,-6)$ є базисом тривимірного дійсного векторного простору $\mathbb{R}^3$ і знайти зв'язок між координатами одного і того ж вектора в цих двох базисах.

20. Знайти координати многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

а) в базисі $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$; б) в базисі $1,\ x-\alpha,\ (x-\alpha)^2,\ \ldots,\ (x-\alpha)^n$ лінійного простору $\mathbb{R}[x]_n$, де $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

21. Як зміниться матриця переходу від одного базису скінченновимірного лінійного простору до іншого базису, якщо поміняти місцями два вектора першого базису.

1.4 Ізоморфізм лінійних просторів

Означення 1. Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P з діями додавання векторів відповідно $+$, $\oplus$ та діями множення елемента поля на вектор відповідно $\cdot$ і $\odot$. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається *лінійним відображенням* лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \odot \varphi(a) \tag{1}$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Зауваження 1. Через бажання розвинути ідею «узагальнення з єдиних позицій» різних за природою об'єктів дію додавання векторів лінійного простору всюди зазвичай позначають символом $+$, а дію множення елементів поля на вектори позначають символом $\cdot$. Тому рівності (1) ми писатимемо, як і у багатьох підручниках, у спрощеному вигляді

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a),$$

розуміючи із контексту про які дії йде мова.

Означення 2. Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається *ізоморфізмом*, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3. Лінійний простір L над полем P називається *ізоморфним* лінійному простору L' над полем P, якщо існує ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів.

Запис $L \cong L'$ означає, що лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L'. Розглянемо приклади ізоморфних лінійних просторів.

Приклад 1. Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha,\ \beta,\ 0) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha,\ \beta,\ 0)\big) = (\alpha,\ \beta)$$

для будь-якого вектора $(\alpha, \beta, 0)$ із L, є ізоморфізмом. Це так через те, що:

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha,\ \beta,\ 0)$, $v = (\gamma,\ \delta,\ 0)$ із L і для будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\alpha+\gamma,\ \beta+\delta,\ 0)\big) = (\alpha+\gamma,\ \beta+\delta) =$$

$$= (\alpha,\ \beta) + (\gamma,\ \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma\alpha,\ \gamma\beta,\ \gamma 0)\big) = (\gamma\alpha,\ \gamma\beta) = \gamma \cdot (\alpha,\ \beta) = \gamma \cdot \psi(u);$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta,\ \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta,\ \eta,\ 0) \in L$, тобто ψ є сюр'єктивним відображенням;
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha,\ \beta,\ 0)$, $v = (\gamma,\ \delta,\ 0)$ із L $\psi(u) = (\alpha,\ \beta) \neq (\gamma,\ \delta) = \psi(v)$, а це означає, що φ є ін'єктивним відображенням.

Приклад 2. Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ *є ізоморфним* лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a \oplus b = ab, \qquad \gamma \odot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.

Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких $a,\ b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a 2^b = 2^a \oplus 2^b = \varphi(a) \oplus \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \odot 2^a = \gamma \odot \varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u) = \log_2 u \in \mathbb{R}^1$, тобто φ є сюр'єктивним відображенням;
  - для будь-яких різних дійсних чисел a, $b \in \mathbb{R}^1$ $\varphi(a) = 2^a \neq$ $\neq 2^b = \varphi(b)$, а отже, φ є ін'єктивним відображенням.

Пропонуємо читачеві самостійно довести, що відношення *«бути ізоморфними»*, задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, є відношенням еквівалентності, тобто задовольняє властивостям рефлексивності, симетричності і транзитивності:

1) будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі;

2) якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, то L' ізоморфний L;

3) якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, а він у свою чергу ізоморфний лінійному простору L'' над полем P, то L ізоморфний L''.

Теорема 1. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і a_1, a_2, $\ldots$, a_s — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_s поля P справджується рівність*

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s).$$

Доведення. Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1\varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж із k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_k лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P справджуються рівності

$$\begin{gathered}\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k) = \varphi\left(\gamma_1 a_1 + (\gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k)\right) = \\ = \varphi(\gamma_1 a_1) + \varphi\left(\gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k\right) = \gamma_1\varphi(a_1) + \\ + \left(\gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_k\varphi(a_k)\right) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_k\varphi(a_k).\end{gathered}$$

Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.*

Доведення. Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}',$$

що і потрібно було довести.

Теорема 3. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є ізоморфізмом лінійних просторів L та L' над полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є деякою системою векторів лінійного простору L. Справджуються наступні твердження:*

1) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система образів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ є лінійно залежною;*
2) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є базисом лінійного простору L тоді і тільки тоді, коли система образів $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{s-1})$, $\varphi(a_s)$ є базисом лінійного простору L'.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною. Тоді існують елементи $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \\ = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Таким чином система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P не всі рівні нулю такі, що справджується рівнінсть $\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \bar{0}'$. Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Оскільки φ є ізоморфізмом із лінійного простору L в лінійний простір L', то за теоремою 2 нульовий вектор $\bar{0}$ із L є єдиним прообразом нульового вектора $\bar{0}'$ із L', а тому

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Це означає, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною.

Нехай тепер система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{s-1})$, $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, а останнє суперечить тому, що вона є базисом L.

Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора b із L такого, що $\varphi(b) = b'$. Нехай $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$ — розклад вектора b за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L. Тоді

$$\begin{aligned} b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \\ = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_s \varphi(a_s), \end{aligned}$$

Це означає, що будь-який вектор лінійного простору L' є лінійною комбінацією системи векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$. Тому вона є базисом лінійного простору L'.

Якщо ж система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ є базисом лінійного простору L', то доведення того, що система векторів $a_1, a_2, \ldots$, a_s є базисом лінійного простору L аналогічне попередньому. Теорема доведена.

Теорема 4 (класифікаційна теорема)**.** *Нехай L та L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P. Тоді лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L' тоді і тільки тоді, коли розмірність лінійного простору L дорівнює розмірності лінійного простору L'.*

Доведення. Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним.

Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деякий базис лінійного простору L. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim_P L' = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim_P L = \dim_P L'$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ лінійних просторів L і L'.

Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L' таким чином, що кожному вектору u із L ставиться у відповідність вектор u' із L', координатний рядок якого у базисі a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_s дорівнює координатному рядку вектора u у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_s. Тобто, якщо

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s,$$

— розклад вектора u за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L, де γ_1, γ_2, $\ldots$, $\gamma_s \in P$, то

$$\psi(u) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s.$$

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a'_1 + (\gamma_2+\delta_2)a'_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a'_s =$$

$$= (\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s) + (\delta_1 a'_1 + \delta_2 a'_2 + \cdots + \delta_s a'_s) = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a'_1 + (\alpha\gamma_2)a'_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a'_s = \alpha(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s) = \alpha\psi(u).$$

Таким чином, ψ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', а тому $L \cong L'$. Теорема доведена.

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n. Тоді лінійний простір L ізоморфний n-вимірному векторному простору P^n ($L \cong P^n$). Якщо $n \neq m$, то векторний простір P^n не ізоморфний векторному простору P^m.*

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай L є лінійним простором всіх векторів площини α над полем дійсних чисел відносно звичайних операцій додавання векторів та множення дійсного числа на вектор, O — деяка точка площини α. Чи є ізоморфізмом із L в L поворот площини на деякий кут β навколо точки O. Відповідь обґрунтувати.

2. Нехай L є лінійним простором розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ з невідомими x_1, x_2, x_3 над полем дійсних чисел. Навести приклад ізоморфізму із L у дійсний двовимірний векторний простір $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай L є лінійним простором розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0$ з невідомими x_1, x_2, x_3 над полем дійсних чисел. Відображення $\varphi : \mathbb{R}^2 \to L$ кожному дійсному двовимірному вектору (x_1, x_2) ставить у відповідність вектор із L такий, що

$$\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)x_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)x_2, \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)x_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)x_2, \frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_1\right).$$

Довести, що φ є ізоморфізмом.

4. Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожному дійсному тривимірному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ ставить у відповідність вектор $\varphi(x)$ із $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$\varphi(x) = (10x_1 - 10x_2 - 5x_3,\ -2x_1 + 5x_2 - 14x_3,\ -11x_1 - 10x_2 - 2x_3).$$

Довести, що φ є ізоморфізмом.

5. Відображення $\varphi : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ кожному многочлену $f(x)$ над полем дійсних чисел, степінь якого не перевищує 2, ставить у відповідність дійсний тривимірний вектор $(f(1), f(2), f(3))$ із $\mathbb{R}^3$. Довести, що φ є ізоморфізмом.

6. Довести, що лінійний простір $S_{2\times 2}$ всіх дійсних симетричних 2×2-матриць ізоморфний лінійному простору $\mathbb{R}[x]_5(x^3 - 1)$ всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують 5 і які кратні многочлену $x^3 - 1$. Дії в обох лінійних просторах задано звичним чином. Побудувати деякий ізоморфізм із $S_{2\times 2}$ в $\mathbb{R}[x]_5(x^3 - 1)$.

1.5 Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами

Означення 1. Нехай L є лінійним простором над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається *лінійним підпростором* L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

Домовимося надалі всюди використовувати поняття «підпростір» в якості поняття «лінійний підпростір».

Теорема 1 (перша ознака підпростору)**.** *Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором простору L тоді і тільки тоді, коли множина A є замкненою відносно дій над векторами.*

Доведення. Нехай L є лінійним простором над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Тепер нехай A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, додавання векторів із A, розглядуваних як векторів із L, та множення елемента поля P на вектор із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних векторів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$$
$$1a = a, \qquad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \qquad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a.$$

Розглянемо деякий вектор a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A$$

через те, що A є замкненою підмножиною лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим вектором в A. Так само, для довільного вектора a із A існує протилежний вектор $-a$ в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L, а отже й підпростором в L. Теорема доведена.

Теорема 2 (друга ознака підпростору)**.** *Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a та b із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha a + \beta b$ належить A.*

Доведення. Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів a та b із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αa і βb належить A. Тому сума $\alpha a + \beta b$ належить A.

Навпаки, нехай для будь-яких векторів a та b із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha a + \beta b$ належить A. Тоді $a + b = 1u + 1v \in A$, $\alpha a = \alpha a + 0b \in A$. Отже, множина A — замкнена відносно дій над векторами. За першою ознакою підпростору A є підпростором лінійного простору L. Теорема доведена.

Розглянемо приклади підпросторів лінійного простору:

1) простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими над полем P є підпростором n-вимірного векторного простору P^n;

2) для будь-якого лінійного простору L над полем P його тривіальні підмножини $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L, їх ще називають *тривіальними підпросторами*;

3) множина $\{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P\}$ всіх лінійних комбінацій деякої системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s із лінійного простору L над полем P є підпростором L, цей підпростір називається *лінійною оболонкою системи векторів* a_1, a_2, $\dots$, a_s та позначають символом $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$.

Означення 2. Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A + B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a + b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Множина $A + B$ називається *сумою підмножин A і B* лінійного простору L.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається *перетином множин A та B* і позначається через $A \cap B$.

Розглянемо приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору. Нехай

$$A = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(0, \alpha', \beta') \mid \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді:

$$A + B = \mathbb{R}^3, \qquad A + A = A, \qquad A + \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3,$$

$$A \cap \mathbb{R}^3 = A, \qquad A \cap A = A, \qquad A \cap B = \{(0, \gamma, 0) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A + B \subset \mathbb{R}^3$, є очевидним, а друге $A + B \supset \mathbb{R}^3$ випливає із того, що будь-який вектор (α, β, γ) із $\mathbb{R}^3$ можна записати у вигляді суми векторів

$$(\alpha, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) \in A + B.$$

Обґрунтування інших рівностей залишаємо читачеві. Справджується наступна теорема.

Теорема 3. *Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами простору L, то розмірність суми $A + B$ цих підпросторів дорівнює сумі розмірностей підпросторів A і B мінус розмірність їх перетину, тобто* $\dim_P(A + B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B)$.

Доведення. Нехай L є лінійним простором над полем P, а A і B — підпростори простору L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, δ із поля P справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L, то за другою ознакою підпростору

$$\gamma a_1 + \delta a_2 \in A, \qquad \gamma b_1 + \delta b_2 \in B.$$

Це означає, що $\gamma u + \delta v \in A + B$. Знову ж таки за другою ознакою підпростору $A + B$ є підпростором лінійного простору L. Аналогічно доводиться, що перетин $A \cap B$ є підпростором простору L.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори лінійного простору L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$, але це не впливає на подальші міркування.

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_{m-k}$ підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ підпростору B. Покажемо, що система векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-k},\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-k} \tag{2}$$

— базис суми $A + B$. Нехай u — будь-який вектор із $A + B$. Тоді $u = a + b$ для деяких векторів $a \in A$, $b \in B$. Розкладемо вектори a і b відповідно за базисами підпросторів A і B:

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma'_1 c_1 + \gamma'_2 c_2 + \cdots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma'_1, \ldots \gamma'_k \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma'_1)c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \cdots + (\gamma_k + \gamma'_k)c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2).

Тепер від протилежного доведемо, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma''_1, \ldots, \gamma''_k, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{m-k}, \beta'_1, \ldots, \beta'_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma''_1 c_1 + \cdots + \gamma''_k c_k + \alpha_1 a'_1 + \cdots + \alpha'_{m-k} a_{m-k} + \beta'_1 b_1 + \cdots + \beta'_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Звідси

$$\gamma''_1 c_1 + \cdots + \gamma''_k c_k + \alpha'_1 a_1 + \cdots + \alpha'_{m-k} a_{m-k} = \\ = -\beta'_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b'_{n-k}. \tag{3}$$

В лівій частині рівності (3) знаходиться вектор із A, а в правій — вектор із B. Оскільки це один і той же вектор, то він належить перетину $A \cap B$. Тому знайдуться елементи γ_1''', …, γ_k''' поля P такі, що

$$-\beta_1' b_1 - \dots - \beta_{n-k}' b_{n-k} = \gamma_1''' c_1 + \dots + \gamma_k''' c_k.$$

Звідси

$$\gamma_1''' c_1 + \dots + \gamma_k''' c_k + \beta_1' b_1 + \dots + \beta_{n-k}' b_{n-k} = \bar{0},$$

що можливо лише у випадку, коли

$$\gamma_1''' = 0, \quad \dots, \quad \gamma_k''' = 0, \quad \beta_1' = 0, \quad \dots, \quad \beta_{m-k}' = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \dots, c_k, b_1, \dots, b_{n-k}$ є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що

$$\gamma_1'' c_1 + \dots + \gamma_k'' c_k + \alpha_1' a_1 + \dots + \alpha_{m-k}' a_{m-k} = \bar{0},$$

що також можливо лише у випадку, коли

$$\gamma_1'' = 0, \quad \dots, \quad \gamma_k'' = 0, \quad \alpha_1' = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{n-k}' = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \dots, c_k, a_1, \dots, a_{n-k}$ є лінійно незалежною. Це суперечить припущенню, що хоча б один з коефіцієнтів α_1', …, α_{m-k}', β_1', …, β_{n-k}', γ_1'', …, γ_k'' не дорівнює нулю.

Оскільки розмірність скінченновимірного лінійного простору дорівнює числу векторів його базису, то

$$\begin{aligned}\dim_P(A+B) = k + (m-k) + (n-k) = \\ = m + n - k = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Означення 3. Сума $A+B$ підпросторів A і B лінійного простору L над полем P називається ***прямою сумою***, якщо для кожного вектора c із $A+B$ існує тільки один вектор a із A і тільки один вектор b із B такі, що $c = a + b$.

Якщо сума $A + B$ підпросторів є прямою, то її позначатимемо символом $A \oplus B$. Розглянемо приклад прямої суми. Нехай

$$A = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, \qquad B = \{(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Тоді $A+B = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$. Сума $A+B$ є прямою, тому що будь-який вектор $c = (\alpha, \beta) \in A+B$ тільки одним способом представляється у вигляді суми векторів із A і B, а саме $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta)$.

Дійсно, якщо для деяких векторів $(\gamma, 0) \in A$ та $(0, \delta) \in B$ справджується рівність $(\alpha, \beta) = (\gamma, 0) + (0, \delta)$, то $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, а це означає $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Теорема 4. *Сума $A+B$ підпросторів A і B лінійного простору L над полем P є прямою сумою тоді і тільки тоді, коли існує тільки один вектор a із A і тільки один вектор b із B такі, що $a + b = \bar{0}$.*

Доведення. Зазначимо, що оскільки сума підпросторів A і B лінійного простору L є підпростором, то $\bar{0} \in A+B$. Тому необхідність теореми одразу слідує із означення прямої суми, а отже будь-який вектор із суми $A+B$, зокрема нульовий, однозначно представляється у вигляді суми векторів із A та B. Тому $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$ — єдине таке представлення.

Доведемо достатність. Нехай $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$ — єдине представлення нульового вектора $\bar{0}$ у вигляді суми векторів із A та B. Припустимо, що сума $A + B$ не є прямою. Тобто деякий вектор u із $A + B$ двома способами представлений у вигляді суми векторів із A і B: $u = a + b$ і $u = a' + b'$, де a, $a' \in A$; b, $b' \in B$ і або $a \neq a'$, або $b \neq b'$. Тоді $a + b = a' + b'$ і, як наслідок,

$$\bar{0} = (a' - a) + (b' - b).$$

Це відмінне від $\bar{0} = \bar{0}+\bar{0}$ представлення нульового вектора $\bar{0}$ у вигляді суми векторів із A та B, бо або $a' - a \neq 0$, або $b' - b \neq 0$. Отже, припущення, що сума $A + B$ не є прямою є неправильним.

Теорема 5. *Сума $A + B$ підпросторів A і B лінійного простору L над полем P є прямою сумою тоді і тільки тоді, коли перетин $A \cap B$ цих підпросторів є нульовим підпростором.*

Доведення. Нехай сума $A + B$ підпросторів A і B лінійного простору L є прямою сумою. Припустимо, що $A \cap B \neq \{\bar{0}\}$. Це означає, що перетин $A \cap B$ містить деякий ненульовий вектор c. Вектор c належить сумі $A + B$. Причому його можна двома способами представити у вигляді суми векторів із A і B: $c = c + \bar{0} = \bar{0} + c$, оскільки вектори $\bar{0}$ і c належать як підпростору A, так і підпростору $\bar{0}$. Це суперечить тому, що $A + B$ є прямою сумою.

Нехай тепер $A \cap B = \{\bar{0}\}$. Припустимо, що сума $A+B$ підпросторів A і B лінійного простору L не є прямою сумою. Тобто деякий вектор u із $A + B$ двома способами представлений у вигляді суми векторів із A і B: $u = a + b$, $u = a' + b'$, де a, $a' \in A$; b, $b' \in B$ і або $a \neq a'$, або $b \neq b'$. Тоді $a + b = a' + b'$ і, як наслідок, $a - a' = b' - b$. Оскільки

A — підпростір в L, то $a - a' \in A$. Аналогічно $b - b' \in B$. Тому $a' - a = b - b' \in A \cap B = \{\bar{0}\}$. Таким чином, $a' - a = b - b' = \bar{0}$. Це означає $a = a'$ і $b = b'$. Одержана суперечність доводить теорему.

Означення 4. Нехай лінійний простір L над деяким полем є прямою сумою своїх підпросторів A і B. Якщо вектор u із L дорівнює сумів векторів $a \in A$ і $b \in B$, то вектор a називається *проекцією вектора u на підпростір A паралельно підпростору B*, а вектор b відповідно — *проекцією вектора u на підпростір B паралельно підпростору A*.

Означення 5. Будемо говорити, що лінійний простір L над полем P є прямою сумою своїх ненульових підпросторів $A_1, \ldots, A_s$, якщо для кожного вектора $a \in A$ існує рівно по одному вектору $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_s \in A_s$ таких, що $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$. У цьому випадку писатимемо, що $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s$.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Показати, що будь-який підпростір в L є лінійною оболонкою деякої системи векторів простору L.

2. Показати, що будь-який підпростір в P^n є простором розв'язків деякої системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими над полем P.

3. Довести, що якщо X є підпростором скінченновимірного лінійного простору L над полем P і $\dim_P X = \dim_P L$, то X дорівнює L.

4. Нехай X є лінійною оболонкою системи векторів $x_1, \ldots, x_k$ із лінійного простору L над полем P. Довести, що розмірність підпростору X дорівнює рангу системи векторів $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а в якості базису підпростору X можна взяти будь-який базис цієї системи векторів.

5. Знайти розмірність і деякий базис підпростору векторного простору $\mathbb{R}^4$, що є лінійною оболонкою системи векторів $x_1 = (1, 2, 2, -1)$, $x_2 = (2,\ 3,\ -2,\ 5)$, $x_3 = (-1,\ 4,\ 3,\ 1)$, $x_4 = (2,\ 9,\ 3,\ 5)$.

6. Знайти розмірність і деякий базис підпростору векторного простору $\mathbb{R}^5$, що є лінійною оболонкою системи векторів

$$x_1 = (-3,\ 1,\ 5,\ 3,\ 2),\ x_2 = (2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 0),\ x_3 = (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$x_4 = (3,\ -5,\ -1,\ -3,\ -1),\ x_5 = (3,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0).$$

7. Знайти деякий базис і розмірність підпростору X дійсного n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$, якщо

$$X = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0\}\,.$$

8. В лінійному просторі $\mathbb{R}[t]_n$ всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степені яких не перевищують n, розглядають підмножину V всіх многочленів $f(t)$, для яких $f(1) = 0$. Перевірити чи є підпростором лінійного простору $\mathbb{R}[t]_n$ підмножина V. Якщо підмножина V є підпростором, то знайти його розмірність.

9. Знайти розмірність і деякий базис підпростору лінійного простору $\mathbb{R}[t]$ всіх многочленів від невідомої t над полем дійсних чисел, що є лінійною оболонкою системи многочленів $t^6 + t^4$, $t^6 + 3t^4 - t$, $t^6 - 2t^4 + t$, $t^6 - 4t^4 + 2t$.

10. Нехай X — лінійна оболонка системи векторів x_1, x_2, …, x_k, а Y — лінійна оболонка системи векторів y_1, y_2, …, y_l із лінійного простору L над полем P. Довести, що базисом суми $X + Y$ підпросторів X і Y може бути будь-який базис системи векторів x_1, …, x_k, y_1, …, y_l.

11. Знайти деякий базис і розмірність суми $X + Y$ підпросторів X і Y дійсного чотиривимірного векторного простору $\mathbb{R}^4$, якщо X і Y є лінійними оболонками відповідно систем векторів

$$x_1 = (0,\ 1,\ 1,\ 1),\ x_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 2),\ x_3 = (-2,\ 0,\ 1,\ 1);$$
$$y_1 = (-1,\ 3,\ 2,\ -1),\ y_2 = (1,\ 1,\ 0,\ -1).$$

Знайти також розмірність перетину $X \cap Y$.

12. Знайти деякі базиси суми і перетину підпросторів векторного простору $\mathbb{R}^3$, що є лінійними оболонками відповідно систем векторів $x_1 = (2,\ 1,\ 0)$, $x_2 = (1,\ 2,\ 3)$, $x_3 = (-5,\ -2,\ 1)$ та $y_1 = (1,\ 1,\ 2)$, $y_2 = (-1,\ 3,\ 0)$, $y_3 = (2,\ 0,\ 3)$.

13. Представити вектор $a = (1,\ 0,\ 1)$ двома способами у вигляді суми векторів із підпросторів векторного простору $\mathbb{R}^3$, що є лінійними оболонками відповідно систем векторів $x_1 = (2, 1, 0)$, $x_2 = (1, 2, 3)$, $x_3 = (-5,\ -2,\ 1)$ та $y_1 = (1,\ 1,\ 2)$, $y_2 = (-1,\ 3,\ 0)$, $y_3 = (2,\ 0,\ 3)$.

14. Знайти деякі базиси суми і перетину підпросторів векторного простору $\mathbb{R}^4$, що є лінійними оболонками відповідно систем векторів $x_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $x_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 0)$, $x_3 = (3,\ 1,\ 1,\ -2)$ та $y_1 = (0,\ 4,\ 1,\ 3)$, $y_2 = (1,\ 0,\ -2,\ -6)$, $y_3 = (1,\ 0,\ 3,\ 6)$.

15. Нехай $A = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $C = \{(\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Довести, що сума $A + C$ є прямою і $A \oplus C = \mathbb{R}^2$.

16. Нехай A, B скінченновимірні підпростори лінійного простору L над полем P. Довести, що сума $A + B$ є прямою тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов: 1) $\dim_P(A \cap B) = 0$; 2) $\dim_P(A + B) = \dim_P A + \dim_P B$.

17. Довести, що простір L є прямою сумою своїх підпросторів A і B тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови: 1) $A + B = L$; 2) $A \cap B = \{\bar{0}\}$.

18. Нехай A — нетривіальний підпростір скінченновимірного лінійного простору L над полем P. Довести, що існує підпростір B в L, такий, що L є прямою сумою підпросторів A і B.

19. Нехай дано систему лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ і матриця A цієї системи відмінна від нульової. Довести, що простір $\mathbb{R}^n$ є прямою сумою простору розв'язків цієї системи рівнянь і лінійної оболонки, натягнутої на рядки матриці A.

20. Перевірити, чи є векторний простір $\mathbb{R}^4$ прямою сумою підпросторів X та Y, що є лінійними оболонками відповідно систем векторів $x_1 = (2,\ 3,\ 11,\ 5)$, $x_2 = (1,\ 1,\ 5,\ 2)$, $x_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$ та $y_1 = (2,\ 1,\ 3,\ 2)$, $y_2 = (1,\ 1,\ 3,\ 4)$, $y_3 = (5,\ 2,\ 6,\ 2)$. Знайти розклад вектора $z = (2,\ 0,\ 0,\ 3)$ за цими підпросторами.

21. Нехай X — лінійна оболонка системи векторів $x_1 = (1,\ 3,\ 0,\ -1)$, $x_2 = (2, 5, 1, 2)$, $x_3 = (1, 2, 1, 3)$ векторного простору $\mathbb{R}^4$. Знайти два різних підпростори Y і Z векторного простору $\mathbb{R}^4$, для яких $\mathbb{R}^4$ є прямою сумою як підпросторів X і Y, так і підпросторів X і Z.

1.6 Суміжні класи. Фактор-простір

Означення 1. Нехай L є лінійним простором над полем P, A є підпростором простору L і u є деяким вектором із L. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина $\{u + a \mid a \in A\}$, називається *суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником u.* У деяких підручниках її також називають *лінійним многовидом* або *площиною, одержаною зсувом підпростору A на вектор u.*

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$. Якщо A є лінійною оболонкою системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s, то будь-який елемент v суміжного класу $u + A$ можна записати у вигляді

$$v = u + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \cdots + \tau_s a_s, \tag{1}$$

де τ_1, τ_2, $\ldots$, τ_s — деякі елементи поля P. Рівність (1) називають *параметричним рівнянням площини лінійного простору L*, яка є зсувом підпростору A на вектор u.

Якщо, для прикладу, розглянути підпростір A дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$. який є простором розв'язків лінійного однорідного рівняння $x - y = 0$ з двома невідомими x, y, тобто

$$A = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

то суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\, 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + t, 2 + t) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

яка є множиною розв'язків лінійного рівняння $x - y = -1$. Параметричним рівнянням суміжного класу $u + A$ є добре відоме читачеві з навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» параметричне рівняння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

звичної прямої на декартовій площині.

Теорема 1 (властивості суміжних класів)**.** *Нехай A є підпростором лінійного простору L над полем P, x, y є деякими векторами із L. Тоді:*

1) *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
2) *якщо $x + A \neq y + A$, то перетин $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*

3) *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
4) *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Доведемо послідовно кожну із перерахованих властивостей.

1) Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x+a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x+(a-x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
2) Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перетину $(x + A) \cap (y + A)$. Тоді $z = x + a$ і $z = y + a'$ для деяких елементів a, $a' \in A$. Звідси $x + a = y + a'$ і як наслідок $x = y+(a'-a)$, $y = x+(a-a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:
$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$
$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$
Це означає, що $x+A \subset y+A$ і $y+A \subset x+A$. Отже, $x+A = y+A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.
3) Нехай суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
4) Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x+A)+(y+A) = (x+y)+A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + {} +a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але
$$(x + a) + (y + a') = (x + y) + (a + a') \in (x + y) + A.$$
Тому $(x+A)+(y+A) \subset (x+y)+A$. З іншого боку для довільного вектора $a'' \in A$ справджується відношення
$$(x + y) + a'' = (x + \bar{0}) + (y + a'') \in (x + A) + (y + A),$$
яке завершує доведення теореми.

Теорема 2. *Нехай L є лінійним простором над полем P, A — підпростір простору L. Множина*

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A, \qquad x,\ y \in L,$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A, \qquad \gamma \in P,\ x \in L,$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' — вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$ і $y - y' \in A$. Тому

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in A.$$

Отже, $(x + y) + A = (x' + y') + A$.

Аналогічно добуток будь-якого елемента γ поля P на суміжний клас $x+A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x+A = x'+A$, то $x-x' \in A$ і, як наслідок $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A),$$

$$\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$$
$$= \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$$
$$= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big),$$

$$\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big),$$

$$(\alpha + \beta)(x + A) = (\alpha + \beta)x + A = (\alpha x + \beta x) + A =$$
$$= (\alpha x + A) + (\beta x + A) = \alpha(x + A) + \beta(x + A),$$

$$\alpha\big((x+A)+(y+A)\big)=\alpha\big((x+y)+A\big)=$$
$$=\alpha(x+y)+A=(\alpha x+\alpha y)+A=$$
$$=(\alpha x+A)+(\alpha y+A)=\alpha(x+A)+\alpha(y+A),$$
$$1(x+A)=1x+A=x+A,$$
$$(x+A)+(\bar{0}+A)=(x+\bar{0})+A=x+A,$$
$$(x+A)+(-x+A)=(x+(-x))+A=\bar{0}+A.$$

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останніх двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. Теорема доведена.

Означення 2. Нехай L є лінійним простором над полем P, A — підпростір в L. Лінійний простір $L/A=\{x+A\mid x\in L\}$ всіх суміжних класів за підпростором A, визначений в теоремі 2 називається *фактор-простором лінійного простору L за підпростором A.*

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)**.** *Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, A — підпростір простору L. Тоді фактор-простір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним, розмірність якого дорівнює різниці розмірностей лінійного простору L та підпростору A, тобто $\dim_P L/A=\dim_P L-\dim_P A$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L=n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) фактор-простору L/A: x_1+A, x_2+A, $\ldots$, $x_{n+1}+A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L=n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, α_{n+1} із P, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1}=\bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1+A)+\alpha_2(x_2+A)+\cdots+\alpha_{n+1}(x_{n+1}+A)=$$
$$=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1})+A=\bar{0}+A=A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів фактор-простору L/A є лінійно залежною. Це доводить, що фактор-простір L/A є скінченновимірним і його розмірність не перевищує n, тобто розмірності лінійного простору L над полем P.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то фактор-простір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого x із L є істинною рівність $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів b_1+A, b_2+A, $\ldots$, b_k+A, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом фактор-простору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом фактор-простору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір, то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$. Отже,

$$u = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k.$$

Таким чином, $k = \dim_P L = n = 0 + n = \dim_P A + \dim_P L/A$ і теорема доведена у цьому випадку.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і a_1, a_2, $\ldots$, a_l — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_l, b_1, b_2, $\ldots$, b_k є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що α_1, α_2, $\ldots$, α_l, β_1, β_2, $\ldots$, β_k — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\dots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\dots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів b_1+A, b_2+A, ..., b_k+A є базисом фактор-простору L/A, то із попередньої рівності слідує, що $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, ..., $\beta_k = 0$. Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_l a_l = \bar{0}.$$

Але через те, що a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то звідси одержимо, що $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_l = 0$. Одержана суперечність доводить лінійну незалежність системи векторів a_1, a_2, ..., a_l, b_1, b_2, ..., b_k.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що b_1+A, b_2+A, ..., b_k+A — базис фактор-простору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \dots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_l a_l.$$

Отже, $u = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_l a_l + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k$, що й потрібно було довести. Із доведеного та з теореми про розмірність лінійного простору слідує істинність наступної рівності

$$\dim_P L = l + k = \dim_P A + \dim_P L/A,$$

звідки $\dim_P L/A = \dim_P L - \dim_P A$. Теорема доведена.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай a і b — деякі дійсні числа, а n — деяке натуральне число. Довести, що підмножина лінійного простору $\mathbb{R}[x]_n$ всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степені яких не перевищують n, яка складається з усіх многочленів, для яких $f(a) = b$, є суміжним класом за деяким підпростором A простору $\mathbb{R}[x]_n$. Вкажіть розмірність підпростору A.

2. Нехай A і B — підпростори лінійного простору L над полем P, а u і v — деякі вектори із L. Довести, що якщо перетин суміжних класів $u + A$ і $v + B$ є непорожньою множиною, то він є суміжним класом за підпростором $A \cap B$.

3. Нехай A є лінійною оболонкою системи векторів $a_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$ дійсного п'ятивимірного векторного простору $\mathbb{R}^5$, а $x = (2, 3, -1, 1, 1)$, $y = (1, 6, 4, 4, -2)$, $z = (1, 6, 5, 4, -2)$ — деякі вектори цього простору. Чи належать вектори y і z суміжному класу $x + A$?

4. Нехай A, B є підпросторами лінійного простору L над полем P розмірності 1, u — деякий вектори із L. Суміжний клас $u + A$ називатимемо *прямою лінійного простору* L. Довести, що якщо хоча б два вектори прямої $u + A$ належать суміжному класу (площині) $v + B$, де B — деякий підпростір, а v — деякий вектор із L, то пряма $u + A$ є підмножиною $v + B$.

5. Довести, що прямі (див. задачу 4) $y = x_1 + ta_1$ і $y = x_2 + ta_2$ векторного простору $\mathbb{R}^5$, де $x_1 = (9, 3, 6, 15, -3)$, $q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)$, «перетинаються». Знайти перетин цих прямих.

6. Нехай A і B є підпросторами лінійного простору L над полем P, а u і v — деякі вектори із L. Кажуть, що площини (суміжні класи) $u + A$ і $v + B$ є *паралельними*, якщо або $A \subset B$, або $B \subset A$. Визначити взаємне розташування площини $y = u + t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3$, де $u = (1, 0, 0, 1)$, $a_1 = (5, 2, -3, 1)$, $a_2 = (4, 1, -1, 0)$, $a_3 = (-1, 2, -5, 3)$, і прямих:

а) $x = v_1 + tb_1$, де $v_1 = (3, 1, -4, 1)$, $b_1 = (-1, 1, 2, 1)$;
б) $x = v_2 + tb_2$, де $v_2 = (3, 0, -4, 1)$, $b_2 = (-1, 1, 2, 1)$;
в) $x = v_3 + tb_3$, де $v_3 = (-2, 0, -1, 2)$, $b_3 = (1, 1, -2, 1)$.

Розділ 2

Лінійні відображення

Поруч з поняттям «множина» в математиці розглядають інше важливе її поняття таке, як «відображення множин». На відміну від першого, його чітко визначають, знову ж таки, через поняття «множина». Вже в шкільному курсі математики учні знайомляться з поняттям «функція», яке фактично є також відображенням. Але розвивають це поняття поступово, еволюційно, переходячи від понять «залежність між числовими змінними», «правило», «формула залежності», «графік залежності», до поняття «відповідності», здебільш, між числовими множинами. Якщо деяка функція f із множини X у множину Y ставить у відповідність елементу x із X елементи y із множини Y, то за домовленістю пишуть $y = f(x)$. Причому, коли множини X і Y є підмножинами множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, то f називають числовою функцією однієї змінної. Якщо ж $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є елементом декартового добутку $\mathbb{R}^n$, то пишуть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а саму функцію f традиційно називають функцією від кількох змінних. Ми ж писатимемо у останньому випадку $y = f\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$, зберігаючи, так би мовити, цілісність елемента x. Натомість f називатимемо відображенням, а не функцією. У цьому розділі вивчаються найпростіші відображення лінійних просторів, так звані лінійні відображення. Вони вже визначені у цьому навчальному посібнику у пункті 1.4 попереднього розділу. Звертаємо увагу читача, що робиться це за допомогою виділення окремих властивостей, а не як, скажімо, лінійна функція у шкільній математиці, як функція вигляду $y = kx + l$, де k і l є деякими дійсними числами.

2.1 Лінійні відображення лінійних просторів. Лінійні оператори

Нагадаємо, перефразувавши раніше сформульоване нами, означення лінійного відображення.

Означення 1. Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається *лінійним відображенням* лінійного простору L у лінійний простір L', якщо образ суми будь-яких векторів із L дорівнює сумі їх образів, а образ добутку будь-якого елемента γ поля P на будь-який вектор із L дорівнює добутку γ на образ цього вектора.

Очевидно будь-який ізоморфізм лінійних просторів є прикладом лінійного відображення. Зокрема відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таке, що $f\big((x, y)\big) = (x, -y)$ для будь-якого вектора (x, y) із дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$, є лінійним відображенням із $\mathbb{R}^2$ у $\mathbb{R}^2$. Дійсно, для будь-яких векторів $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ із $\mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a + b) = f\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) =$$
$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = f(a) + f(b),$$
$$f(\gamma a) = f\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma f(a).$$

Дещо іншим прикладом лінійного відображення із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$ є відповідність $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ із $\mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто $g\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2)$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ із $\mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(a + b) = g\big((\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)\big) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = g(a) + g(b),$$
$$g(\gamma a) = g\big((\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_3)\big) = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2) = \gamma g(a).$$

Теорема 1. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b). \tag{1}$$

Доведення. Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність (1) то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\alpha a) = \varphi(\alpha a + 0\bar{0}) = \alpha\varphi(a) + 0\varphi(\bar{0}) = \alpha\varphi(a).$$

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. пункт 1.4 розділу 1).

Теорема 2. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і a_1, a_2, $\dots$, a_s — система векторів лінійного простору L. Образ будь-якої лінійної комбінації системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійною комбінацією системи образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ відповідно з тими ж коефіцієнтами.*

Теорема 3. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Образом нульового вектора $\bar{0}$ лінійного простору L є нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$. Образом протилежного вектора до будь-якого вектора x лінійного простору L є протилежний вектор до образу цього вектора, тобто $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.*

Доведення. Твердження обох теорем крім останнього доведені вище. Останнє слідує із того, що для будь-якого вектора x із L істинними є рівності

$$\varphi(-x) = \varphi(-1 \cdot x) = -1 \cdot \varphi(x) = -\varphi(x).$$

Означення 2. Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\}$, тобто множина всіх тих векторів із L, образи яких дорівнюють нульовому вектору із L', називається *ядром лінійного відображення φ.*

Означення 3. Множина $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\}$, тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається *образом відображення φ.*

Теорема 4 (основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень)**.** *Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем. Тоді*

1) *ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L;*
2) *образ $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L';*
3) *фактор-простір $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ізоморфний образу $\operatorname{Im}\varphi$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}',$$

де $\bar{0}'$ є нульовим вектором із L'. Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором лінійного простору L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. За ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором лінійного простору L'.

Для доведення ізоморфізму $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ побудуємо ізоморфізм із фактор-простору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ у лінійний простір $\operatorname{Im}\varphi$. Розглянемо відповідність ψ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ таку, що

$$\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a), \qquad a + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із фактор-простору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$, то $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$
$$= \varphi(b) + \varphi(a - b) = \varphi(b + (a - b)) = \varphi(a) = \psi(a + \operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора a' із образу $\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a \in L$, що $\varphi(a) = a'$, а тому

$$\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a) = a'.$$

Інакше кажучи для кожного вектора a' із образу $\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у фактор-просторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \psi(b + \operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням, то останню рівність можна переписати у вигляді $\varphi(a - b) = \bar{0}'$. Це означає, що $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$ і як наслідок $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$. Із сказаного слідує, що ψ — ін'єктивне, а отже бієктивне відображення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$

$$\psi\big(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\big) = \psi\big((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\big) =$$
$$= \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\psi\left(a + \operatorname{Ker}\varphi\right) + \beta\psi\left(b + \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Теорема доведена.

Із теореми про розмірність трьох просторів і вище доведеної теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням скінченновимірного лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем. Тоді справджується рівність*

$$\dim_P L = \dim_P \operatorname{Ker}\varphi + \dim_P \operatorname{Im}\varphi.$$

Означення 4. Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається *оператором* лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1. Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ *переводить* або *перетворює* вектор x у вектор y.

Означення 5. Оператор φ лінійного простору L над полем P називається *лінійним*, якщо φ є лінійним відображенням лінійного простору L в себе.

Властивості лінійних відображень, розглянуті раніше переносяться на лінійні оператори лінійного простору.

Означення 6. Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається *одиничним* або *тотожним* оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже, $\mathrm{id}_L(x) = x$ для кожного вектора $x \in L$.

Означення 7. Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L такий, що $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_L$ (відповідно $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$), то φ' називається *лівим оберненим* (відповідно *правим оберненим*) оператором до оператора φ.

Означення 8. Лінійний оператор φ лінійного простору L називається *оборотним*, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається *оберненим* до оператора φ.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}. Залишаємо читачеві самостійно переконатися у тому, що у випадку, коли існує обернений оператор, то він є єдиним оберненим до даного.

Теорема 5. *Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:* 1) *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;* 2) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\mathrm{Im}\,\varphi = L$.

Доведення. Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\mathrm{Im}\,\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\mathrm{Im}\,\varphi = L$. Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\mathrm{Im}\,\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a)-\varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a-b \in \mathrm{Ker}\,\varphi =$

$= \{\bar{0}\}$, звідки $a = b$. Це означає, що φ є ін'єктивним відображенням. Оскільки φ одночасно є лінійним оператором лінійного простору L і бієктивним відображенням, то φ є ізоморфізмом.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1}: L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори $a, b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$
$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини, a — деякий фіксований вектор із L. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : L \to L$ таке, що $\varphi(x) = \langle a, x\rangle x$ для кожного вектора x із L? Тут символом $\langle a, x\rangle$ позначено скалярний добуток векторів a і x.

2. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів тривимірного простору, a — деякий фіксований вектор із L. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : L \to L$ таке, що $\varphi(x) = [x, a]$ для кожного вектора x із L? Тут символом $[x, a]$ позначено векторний добуток векторів x і a.

3. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини, $\mathbb{R}^1$ — дійсний одновимірний векторний простір, α — деяке фіксоване дійсне число. Чи є лінійним відображення $\varphi : L \to \mathbb{R}^1$ таке, що $\varphi(x) = \alpha$ для кожного вектора x із L?

4. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів простору, $\mathbb{R}^1$ — дійсний одновимірний векторний простір, a — деякий фіксований вектор із L. Чи є лінійним відображення $\varphi : L \to \mathbb{R}^1$ таке, що $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$ для кожного вектора x із L? Тут символом $\langle a, x\rangle$ позначено скалярний добуток векторів a і x.

5. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини $\mathbb{R}^1$ — дійсний одновимірний векторний простір. Чи є лінійним відображення $\varphi : L \to \mathbb{R}^1$ таке, що $\varphi(x) = \langle x, x\rangle$ для кожного вектора x із L? Тут символом $\langle x, x\rangle$ позначено скалярний добуток вектора x на себе.

6. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини, a — деякий фіксований вектор із L. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : L \to L$ таке, що $\varphi(x) = a$ для кожного вектора x із L?

7. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів простору, a — деякий фіксований вектор із L. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : L \to L$ таке, що $\varphi(x) = x + a$ для кожного вектора x із L?

8. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини, α — деяке фіксоване дійсне число. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : L \to L$ таке, що $\varphi(x) = \alpha x$ для кожного вектора x із L?

9. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів простору, a і b — деякі фіксовані вектори із L. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : L \to L$ таке, що $\varphi(x) = \langle a, x\rangle b$ для кожного вектора x із L? Тут символом $\langle a, x\rangle$ позначено скалярний добуток векторів a і x.

10. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таке, що $\varphi\big((x_1,\, x_2,\, x_3)\big) = (x_1,\, x_2,\, x_3^2)$ для кожного вектора $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ із дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$.

11. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таке, що $\varphi\big((x_1,\, x_2,\, x_3)\big) = (x_3,\, x_1,\, x_2)$ для кожного вектора $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ із $\mathbb{R}^3$.

12. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таке, що $\varphi\big((x_1,\, x_2,\, x_3)\big) = (x_3,\, x_1,\, x_2 - 1)$ для кожного вектора $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ із $\mathbb{R}^3$.

13. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таке, що $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3,\, 3x_1 - x_2 + 3x_3,\, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$ для кожного вектора $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ із $\mathbb{R}^3$?

14. Нехай $\mathbb{R}[x]_3$ — лінійний простір всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує 3. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ таке, що $\varphi\left(f(x)\right) = f(-x)$ для кожного многочлена $f(x)$ із $\mathbb{R}[x]_3$?

15. Нехай $\mathbb{R}[x]_3$ — лінійний простір всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує 3. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ таке, що $\varphi\left(f(x)\right) = f(x + 1)$ для кожного многочлена $f(x)$ із $\mathbb{R}[x]_3$?

16. Нехай $\mathbb{R}[x]$ — лінійний простір всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Чи є лінійним оператором відображення $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ таке, що $\varphi(f(x)) = f'(x)$ для кожного многочлена $f(x)$ із $\mathbb{R}[x]$, де $f'(x)$ є похідною многочлена $f(x)$?

17. Знайти деякі базиси ядра і образу лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такого, що $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$ для кожного вектора $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ із $\mathbb{R}^3$.

18. Знайти деякі базиси ядра і образу лінійного оператора φ лінійного простору $\mathbb{R}[x]_3$ всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує 3, такого, що $\varphi(f(x)) = f'(x)$ для кожного многочлена $f(x)$ із $\mathbb{R}[x]$.

19. Знайти деякі базиси ядра і образу лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такого, що $\varphi(x) = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$ для кожного вектора $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ із $\mathbb{R}^3$.

20. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціюванння і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$ всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$ визначаються таким чином: якщо $f \in C^{\infty}_{[0,1]}$, то

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = f'(x), \qquad [\mathfrak{I}(f)](x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

Показати, що $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{I}$ — лінійні оператори простору $C^{\infty}_{[0,1]}$. Знайти $\mathfrak{I}\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{D}\mathfrak{I}$.

21. Довести, що якщо для лінійного оператора φ лінійного простору L існують як лівий обернений, так і правий обернений, то ці обернені оператори співпадають.

22. Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

23. Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L, то лінійний оператор φ є оборотним тоді і тільки тоді, коли або $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$, або $\operatorname{Im}\varphi = L$.

2.2 Лінійні відображення скінченновимірних лінійних просторів. Матриця лінійного відображення

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення). *Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором над полем P розмірності n, а L' — будь-яким лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\dots$, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a'_1, a'_2, $\dots$, a'_n лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що $\varphi(a_1) = a'_1$, $\varphi(a_2) = = a'_2$, $\dots$, $\varphi(a_n) = a'_n$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ є будь-якими векторами лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L ставимо у відповідність лінійну комбінацію системи векторів a'_1, a'_2, $\dots$, a'_n з коефіцієнтами, кожен з яких є відповідною координатою вектора a у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n лінійного простору L. Тобто, якщо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

— розклад вектора a за базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ лінійного простору L, то

$$\varphi(a) = \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \dots + \alpha_n a'_n.$$

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, то відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії над векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ лінійного простору L, то

$$\begin{aligned}
&\varphi(\beta b + \gamma c) = \\
&\quad = \varphi\big((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n\big) = \\
&\quad = (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a'_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a'_2 + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a'_n = \\
&\quad = \beta(\beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \dots + \beta_n a'_n) + \gamma(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \dots + \gamma_n a'_n) = \\
&\qquad = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).
\end{aligned}$$

До того ж

$$\begin{gathered}
\varphi(a_1)=\varphi(1a_1+0a_2+\dots+0a_n)=1a'_1+0a'_2+\dots+0a'_n=a'_1,\\
\varphi(a_2)=\varphi(0a_1+1a_2+\dots+0a_n)=0a'_1+1a'_2+\dots+0a'_n=a'_2,\\
\dots\dots\\
\varphi(a_n)=\varphi(0a_1+0a_2+\dots+1a_n)=0a'_1+0a'_2+\dots+1a'_n=a'_n.
\end{gathered}$$

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого $\psi(a_1)=a'_1$, $\psi(a_2)=a'_2$, …, $\psi(a_n)=a'_n$. Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай $b=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_n a_n$ — розклад вектора b за базисом a_1, a_2, …, a_n лінійного простору L. Тоді

$$\begin{gathered}
\psi(b)=\psi(\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_n a_n)=\\
=\beta_1\psi(a_1)+\beta_2\psi(a_2)+\dots+\beta_n\psi(a_n)=\\
=\beta_1 a'_1+\beta_2 a'_2+\dots+\beta_n a'_n=\\
=\varphi(\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_n a_n)=\varphi(b).
\end{gathered}$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена.

Означення 1. Нехай L і L' є ненульовими скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P відповідно розмірностей n і m $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m — відповідно базиси лінійних просторів L і L'. Матриця, складена із координатних стовпців образів $\psi(a_1)$, $\psi(a_2)$, …, $\psi(a_n)$ у базисі b_1, b_2, …, b_m лінійного простору L', називається *матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m відповідно лінійних просторів L і L'.*

Тобто, якщо

$$\begin{gathered}
\psi(a_1)=\gamma_{11}b_1+\gamma_{21}b_2+\dots+\gamma_{m1}b_m,\\
\psi(a_2)=\gamma_{12}b_1+\gamma_{22}b_2+\dots+\gamma_{m2}b_m,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\psi(a_n)=\gamma_{1n}b_1+\gamma_{2n}b_2+\dots+\gamma_{mn}b_m,
\end{gathered}$$

де $\gamma_{ij}\in P$; $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m

відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n$, де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \ldots, n$. У свою чергу образ $\psi(x)$ розкладемо за базисом $b_1, \ldots, b_m$ лінійного простору L': $\psi(x) = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \cdots + \zeta_m b_m$, де $\zeta_i \in P$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Але з іншого боку справджуються рівності

$$\begin{gathered} \psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \\ = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) = \\ = \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m) = \\ = (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n) b_1 + \cdots \\ \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m2}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n) b_m. \end{gathered}$$

Звідси та із однозначності розкладу вектора за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівності (1) називають ***формулами для координат образу вектора*** при лінійному відображенні ψ. Ці рівності можна переписати компактно у вигляді $Y = \Psi X$, якщо через X позначити координатний стовпець вектора x, а через Y — координатний стовпець образу $y = \psi(x)$:

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Нехай L і L' є ненульовими скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P відповідно розмірностей n і m; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ...,*

a_n та a'_1, a'_2, …, a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, …, b_m та b'_1, b'_2, …, b'_m — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах a'_1, a'_2, …, a'_n та b'_1, b'_2, …, b'_m відповідно лінійних просторів L і L', то

$$\Psi' = S^{-1}\Psi T,$$

де S — матриця переходу від базису b_1, …, b_m до базису b'_1, …, b'_m простору L', а T — матриця переходу від базису a_1, …, a_n до базису a'_1, …, a'_n простору L.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах a'_1, a'_2, …, a'_n та b'_1, b'_2, …, b'_m відповідно лінійних просторів L і L'.

Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами a_1, a_2, …, a_n та a'_1, a'_2, …, a'_n лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису a_1, a_2, …, a_n до базису a'_1, a'_2, …, a'_n лінійного простору L. Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами b_1, b_2, …, b_m та b'_1, b'_2, …, b'_m лінійного простору L'. Нехай Y, Y' — координатні стовпці вектора $\psi(x)$ відповідно у цих базисах. Тоді

$$Y = SY', \tag{3}$$

де S — матриця переходу від базису b_1, b_2, …, b_m до базису b'_1, b'_2, …, b'_m лінійного простору L'.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що

$$Y' = \left(S^{-1}\Psi T\right) X'. \tag{6}$$

Рівність (6), так само як і друга з рівностей (4), вказує на зв'язок між координатами вектора x та координатами образу $\psi(x)$ відповідно у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'. Тому $\Psi' = S^{-1}\Psi T$. Теорема доведена.

Означення 2. Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. *Матрицею лінійного оператора* φ *у деякому базисі* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P називається $n \times n$-матриця, складена із координатних стовпців образів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ базисних векторів у цьому ж базисі.

Тобто, якщо

$$\begin{gathered}
\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,\\
\varphi(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,
\end{gathered}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є *матрицею лінійного оператора* φ *у базисі* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L.

Якщо в просторі L вибрати новий базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, то матрицю A' оператора φ у цьому базисі можна знайти за формулою

$$A' = T^{-1}AT,$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ простору L.

Зауваження 1. Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

2. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини, на якій задано декартову прямокутну систему координат Oxy з базисними ортами $\vec{i}$ та $\vec{j}$. Знайти матрицю лінійного оператора лінійного простору L, який є поворотом на кут α навколо початку координат, де α — деяке фіксоване дійсне число, що означає радіанну міру кута повороту.

3. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів тривимірного простору, а e_1, e_2, e_3 — деякий базис цього простору, що складається з попарно взаємно перпендикулярних одиничних векторів. Нехай a — деякий фіксований вектор із L, який має координати α, β, γ у цьому базисі. Знайти матрицю лінійного оператора $A : L \to L$ у базисі e_1, e_2, e_3, якщо $A(x) = [x, a]$ для кожного вектора x із L, де $[x, a]$ — векторний добуток векторів x і a.

4. Нехай $\mathbb{R}[x]_4$ — лінійний простір всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує 4. Знайти матрицю лінійного оператора диференціювання $D : \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4$ у базисі 1, x, x^2, x^3, x^4 лінійного простору $\mathbb{R}[x]_4$. Зауважимо, що $D(f(x)) = f'(x)$ для кожного многочлена $f(x)$ із $\mathbb{R}[x]_4$.

5. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ — лінійний простір всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує деяке натуральне число n. Знайти матрицю лінійного відображення диференціювання $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}$ у базисах 1, x, x^2, $\ldots$, x^{n-1}, x^n та 1, x, x^2, $\ldots$, x^{n-2}, x^{n-1} відповідно лінійних просторів $\mathbb{R}[x]_n$ та $\mathbb{R}[x]_{n-1}$. Зауважимо, що $D(f(x)) = f'(x)$ для кожного многочлена $f(x)$ із $\mathbb{R}[x]_n$.

6. Знайти матрицю лінійного оператора диференціювання двовимірного лінійного простору, що є лінійною оболонкою системи функцій $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$, у базисі $f_1(x)$, $f_2(x)$ цього простору.

7. Знайти матриці лінійного оператора φ дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ у канонічному базисі e_1, e_2 та у базисі

$a_1 = (\frac{3}{5},\ \frac{4}{5})$, $a_2 = (-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5})$, якщо

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = \big(\tfrac{41}{25}x_1 - \tfrac{12}{25}x_2, \tfrac{34}{25}x_2 - \tfrac{12}{25}x_1\big)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2) із $\mathbb{R}^2$.

8. Нехай задано базис $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, -3, -2)$, $a_3 = (1, 2, 1)$ та деяку систему векторів $b_1 = (-2,\ 1,\ 0)$, $b_2 = (-1,\ 3,\ 0)$, $b_3 = (-2,\ -3,\ 0)$ дійсного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Нехай φ — лінійний оператор векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$, $\varphi(a_3) = b_3$. Знайти матриці лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3 та у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$.

9. У лінійному просторі $\mathbb{R}_{2\times 2}$ всіх дійсних матриць порядку 2 зафіксовано базис

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

— деякі матриці із $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Знайти матрицю лінійного оператора ψ лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$ у цьому базисі, якщо а) $\psi(X) = AXB$; б) $\psi(X) = AX + XB$ для кожної матриці X із $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Як зміниться знайдена матриця лінійного оператора ψ, якщо у базисі поміняти місцями матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. У базисі 1, x, x^2 лінійного простору $\mathbb{R}[x]_2$ всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує 2, лінійний оператор ψ заданий матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього лінійного оператора у базисі, складеного з многочленів $3x^2 + 2x$, $5x^2 + 3x + 1$, $7x^2 + 5x + 3$.

2.3 Дії над лінійними відображеннями. Зв'язок дій над лінійними відображеннями з діями над їх матрицями

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначати через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1. *Сумою лінійних відображень* φ *і* ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Означення 2. *Добутком елемента* α *поля* P *на лінійне відображення* φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\alpha\varphi : L \to L'$ таке, що

$$[\alpha\varphi](x) = \alpha\varphi(x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Розглянемо деякі приклади дій над лінійними відображеннями. Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x, y)\big) = x, \qquad \psi\big((x, y)\big) = -y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x, y)\big) = \varphi\big((x, y)\big) + \psi\big((x, y)\big) = x - y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x, y)\big) = 3\varphi\big((x, y)\big) = 3x, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1. *Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Сума будь-яких лінійних відображень із множини* $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ *є лінійним відображенням із* $\mathrm{Hom}_P(L, L')$*. Добуток будь-якого елемента поля P на лінійне відображення із* $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ *є лінійним відображенням із* $\mathrm{Hom}_P(L, L')$*.*

Доведення. Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із множини $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, b із L та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b)=\varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b)=$$
$$=\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big)=$$
$$=\alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big)=\alpha\cdot[\varphi+\psi](a)+\beta\cdot[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, b із L та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b)=\gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b)=\gamma\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)=$$
$$=\gamma\alpha\varphi(a)+\gamma\beta\varphi(b)=\alpha\big(\gamma\varphi(a)\big)+\beta\big(\gamma\varphi(b)\big)=$$
$$=\alpha\cdot[\gamma\varphi](a)+\beta\cdot[\gamma\varphi](b).$$

За ознакою лінійного відображення звідси слідує, що як сума $\varphi+\psi$, так і добуток $\gamma\varphi$ є лінійними відображеннями. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.*

Доведення. Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного вектора x із L образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами лінійного простору L', то за асоціативною властивості додавання векторів із L'

$$\big(\varphi(x)+\psi(x)\big)+\chi(x)=\varphi(x)+\big(\psi(x)+\chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi+\psi)\chi](x)=[\varphi+\psi](x)+\chi(x)=\big(\varphi(x)+\psi(x)\big)+\chi(x)=$$
$$=\varphi(x)+\big(\psi(x)+\chi(x)\big)=\varphi(x)+[\psi(x)+\chi](x)=[\varphi+(\psi+\chi)](x)$$

для довільного $x\in L$. За означенням рівності відображень звідси слідує, що

$$(\varphi+\psi)+\chi=\varphi+(\psi+\chi).$$

Аналогічно доводяться наступні аксіоми лінійного простору.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (див. означення лінійного простору із пункту 1.1).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є, так зване, *нульове відображення o*. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$ для довільного вектора x із L. Очевидно це відображення є лінійним, а отже є елементом множини $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$ є істинною рівність

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до лінійного відображення φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$ для довільного вектора x із L. Воно є лінійним, бо для будь-яких векторів a і b із L і будь-яких елементів α і β поля P є правильними рівності

$$\begin{gathered}[-\varphi](\alpha a + \beta b) = -\varphi(\alpha a + \beta b) = -(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)) = \\ = -\alpha\varphi(a) - \beta\varphi(b) = \alpha \cdot (-\varphi(a)) + \beta \cdot (-\varphi(b)) = \\ = \alpha \cdot [-\varphi](a) + \beta \cdot [-\varphi](b).\end{gathered}$$

І воно в сумі з лінійним відображенням φ дає нульове відображення o, тобто $\varphi + [-\varphi] = o$. Це через те що для будь-якого вектора x із L справджується ріність

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Подібним чином доводиться 8-ма аксіома лінійного простору. Розглянемо довільні елементи α, β поля P, будь-яке лінійне відображення φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ та будь-який вектор x із L. Тоді

$$\begin{gathered}[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(x) = \\ = [\alpha\varphi](x) + [\beta\varphi](x) = [\alpha\varphi + \beta\varphi](x).\end{gathered}$$

Тому $(\alpha + \beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$. Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай L і L' є ненульовими скінченновимірними лінійними просторами над полем P відповідно розмірностей n і m; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис лінійного простору L полем P; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — базис лінійного простору L' полем P. Якщо для кожного лінійного відображення φ із множини $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ через $\mathcal{M}(\varphi)$ позначити матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних* *просторів L і L', то для довільних лінійних відображень φ, ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:*

$$\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi), \quad \mathcal{M}(\alpha\varphi) = \alpha\mathcal{M}(\varphi).$$

Тобто матриця суми лінійних відображень φ і ψ у деяких базисах лінійних просторів L і L' дорівнює сумі матриць лінійних відображень φ і ψ у вибраних базисах. Матриця добутку елемента α поля P на лінійне відображення φ у деяких базисах лінійних просторів L і L' дорівнює добутку елемента α на матрицю лінійного відображення φ у вибраних базисах.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і φ, ψ — будь-які лінійні відображення із лінійного простору L у лінійний простір L'. Далі, нехай

$$\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}, \quad \mathcal{M}(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{m\times n}, \quad \mathcal{M}(\varphi + \psi) = \|\gamma_{ij}\|_{m\times n}$$

— $m \times n$-матриці відповідно лінійних відображень φ, ψ, $\varphi + \psi$ у вибраних базисах лінійних просторів L і L', де α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} є деякими елементами поля P. Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad \psi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_i, \quad [\varphi + \psi](a_j) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} b_i$$

для кожного j із $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. З іншого боку

$$[\varphi + \psi](a_j) = \varphi(a_j) + \psi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) b_i$$

для кожного $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору звідси слідує, що $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ для довільних $i \in \{1,\ 2,\ \ldots, m\}$ та $j \in \{1,\ 2,\ \ldots, n\}$. За означенням суми матриць це означає, що $\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi)$. Аналогічно доводиться й друга рівність у твердженні теореми. Теорема доведена.

Означення 3. Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. *Добутком лінійних відображень ψ і φ* називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x))$$

для будь-якого вектора x із L.

Зауваження 1. Звертаємо увагу читача, що означення добутку лінійних відображень лінійних просторів аналогічне означенню добутку відображень множин. Тим не менше добуток лінійних відображень знову ж таки є лінійним відображенням, про що говориться у наступній теоремі.

Теорема 4. *Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.*

Доведення. Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, b із L та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b))\big) =$$
$$= \alpha\psi\big(\varphi(a)\big) + \beta\psi\big(\varphi(b)\big) = \alpha \cdot [\psi\varphi](a) + \beta \cdot [\psi\varphi](b).$$

Теорема доведена.

Теорема 5. *Нехай L, L' і L'' є ненульовими скінченновимірними лінійними просторами над полем P відповідно розмірностей n, m і s; a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L над полем P; b_1, b_2, ..., b_m — базис лінійного простору L' над полем P; c_1, c_2, ..., c_s — базис лінійного простору L'' над полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ через $\mathcal{M}(\varphi)$ позначити матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', для кожного лінійного відображення $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ через $\mathcal{M}'(\psi)$ позначити матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L' і L'', а для кожного лінійного відображення $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ через $\mathcal{M}''(\sigma)$ позначити матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L'', то для довільних лінійних відображень φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$, ψ із $\mathrm{Hom}_P(L', L'')$ справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай

$$\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}, \quad \mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}, \quad \mathcal{M}''(\psi\varphi) = \|\gamma_{ij}\|_{s\times n}$$

— матриці відповідно лінійних відображень φ, ψ, $\psi\varphi$ у вибраних базисах лінійних просторів L, L' і L''. Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad [\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k$$

для довільних $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ та $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi\big(\varphi(a_j)\big) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{ki}\right) c_k$$

для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору звідси слідує, що

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}$$

для довільних $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. За означенням добутку матриць це означає, що $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi)$. Теорема доведена.

Означення 4. Непорожня множина A називається *алгеброю над полем* P, якщо на ній задані дії додавання і множення елементів множини A (тобто дві бінарні алгебраїчні операції додавання та множення) та дія множення елементів поля P на елементи множини A і виконуються такі умови:

1) A є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення;

2) A є лінійним простором над полем P відносно дії додавання і дії множення елементів поля P на елементи множини A;

3) дія множення елементів із A і дія множення елементів поля P на елементи із A пов'язані співвідношеннями

$$(\gamma a)b = a(\gamma b) = \gamma(ab)$$

для довільних елементів a, b із ; A і будь-якого елемента γ поля P.

Зауваження 2. Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi+\psi$, добутки $\alpha\varphi$, де $\alpha \in P$, $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ є лінійними операторами простору L.

Пропонуємо читачеві самостійно довести той факт, що множина $\mathrm{Hom}_P(L, L)$ всіх лінійних операторів лінійного простору L над полем P є ***алгеброю*** над полем P відносно введених у цьому пункті дій додавання, множення лінійних відображень та дії множення елемента поля на лінійне відображення.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай L є лінійним простором над полем P. Для лінійного оператора φ лінійного простору L та підмножини A лінійного простору L позначимо через $\varphi(A)$ множину $\{\varphi(a) \mid a \in A\}$. Довести, що для будь-яких лінійних операторів φ і ψ лінійного простору L, будь-якого ненульового елемента α поля P та будь-якого підпростору X лінійного простору L справджуються співвідношення: а) $[\alpha\varphi](X) = \varphi(X)$; б) $[\varphi+\psi](X) \subset \varphi(X) + \psi(X)$.

2. Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором над полем P з деяким базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n, а b — деякий заданий ненульовий вектор із L. Довести, що система лінійних операторів φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n лінійного простору L таких, що $\varphi_i(b) = a_i$ для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, є лінійно незалежною.

3. Нехай L є лінійним простором усіх геометричних векторів площини, на якій задано декартову прямокутну систему координат Oxy. Знайти добуток лінійних операторів лінійного простору L, кожен з яких є симетрією площини відносно координатних осей.

4. Навести приклади лінійних операторів φ, ψ дійсного векторного простору $\mathbb{R}^2$ таких, що $\varphi\psi = o$ і $\psi\varphi = o$, де o — нульовий оператор векторного простору $\mathbb{R}^2$.

5. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ — лінійний простір всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує деяке невід'мне ціле число n. Довести, що для лінійного оператора диференціювання D лінійного простору $\mathbb{R}[x]_n$ знайдеться натуральне число k, що $D^k = o$, де o — нульовий оператор $\mathbb{R}[x]_n$. Знайти найменше таке натуральне число k.

6. Нехай L є лінійним простором над полем P, який є прямою сумою своїх підпросторів L_1 і L_2. Довести, що для лінійного оператора проектування π лінійного простору L на підпростір L_1 паралельно L_2 справджується рівність $\pi^2 = \pi$.

7. Лінійний оператор φ дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ у базисі $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$

а лінійний оператор ψ ж простору — такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 5x_2)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2) із $\mathbb{R}^2$. Знайти образ $\sigma(x)$ вектора $x = (x_1, x_2)$ із $\mathbb{R}^2$, якщо $\sigma = \varphi^2 + \psi^{-1}$.

8. Лінійний оператор φ дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ у базисі $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

а лінійний оператор ψ ж простору у базисі $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю лінійного оператора $\varphi + \psi$ у базисі b_1, b_2.

9. Лінійний оператор φ дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$ — такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (x_2 + 2x_3, x_3, 0)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю лінійного оператора φ^3 у канонічному базисі $\mathbb{R}^3$.

10. Нехай φ — лінійний оператор диференціювання лінійного простору $\mathbb{R}[x]$ всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, ψ — лінійний оператор множення на многочлен x цього ж простору. Довести, що для будь-якого натурального n справджується рівність $\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$.

2.4 Характеристичний многочлен матриці і лінійного оператора. Власні вектори і власні значення лінійного оператора

Означення 1. Нехай n є деяким натуральним числом,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ символізує деяку змінну величину (невідомий, але певний елемент) із поля поля P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

називається *характеристичною матрицею* матриці A.

Характеристична матриця матриці A позначається через $A-\lambda E$, де E — одинична матриця порядку n. Характеристична матриця є матрицею над кільцем $P[\lambda]$ многочленів від змінної λ над полем P.

Означення 2. Детермінант $|A-\lambda E|$ матриці $A-\lambda E$ називається *характеристичним многочленом матриці* A.

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від змінної λ над полем P:

$$|A-\lambda E| = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-k}\gamma_k\lambda^k + \dots + \gamma_n.$$

Для кожного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A, тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A. Відмітимо, що

$$\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}, \qquad \gamma_n = |A|.$$

Означення 3. Сума всіх діагональних елементів матриці A називається *слідом матриці* A і позначається через $\operatorname{tr} A$.

Розглянемо приклади характеристичних многочленів деяких матриць над полем дійсних чисел. Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

А характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 -$$

$$-7\cdot(-2-\lambda)\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot(-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 1\cdot 2 = -\lambda^3 + 41\lambda + 108.$$

Означення 4. Квадратна матриця B порядку n полем P називається *подібною* квадратній матриці A того ж порядку, якщо існує оборотна над полем P матриця S порядку n така, що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриць позначатимемо символом $\simeq$, тобто писатимемо $B \simeq A$. якщо B подібна матриці A.

Теорема 1. *Нехай A і B є квадратними матрицями порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.*

Доведення. Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P. Припустимо, що матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці A, B, E, S можна також вважати матрицями над кільцем $P[\lambda]$. У свою чергу на множині всіх матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ аналогічно, як у випадку з матрицями над полем P, можна визначити операції додавання та множення матриць, а також операцію множення многочленів на матрицю. Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ так само, як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B-\lambda E| = |S^{-1}AS-\lambda E| = |S^{-1}(A-\lambda E)S| = |S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S| =$$
$$= |S|^{-1}\cdot|S|\cdot|A-\lambda E| = |A-\lambda E|.$$

Теорема доведена.

Означення 5. Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A-\lambda E|$ матриці A називається *характеристичним многочленом лінійного оператора* φ.

Зауваження 1. Характеристичний многочлен оператора φ не залежить від вибору матриці A лінійного оператора φ, інакше кажучи від вибору базису лінійного простору L для знаходження цієї матриці.

Означення 6. Нехай L є лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором цього простору. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається *власним вектором* лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a)=\alpha a$. Елемент α поля P називається *власним значенням* лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a)=\alpha a$.

Будемо говорити, що *власний вектор $a\in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha\in P$* цього оператора, якщо $\varphi(a)=\alpha a$.

Зауваження 2. Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Для прикладу розглянемо лінійний оператор φ дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$, заданий формулою $\varphi\big((x_1,\, x_2)\big) = (3x_1-5x_2,\, 2x_2)$ для будь-якого вектора (x_1,x_2) із $\mathbb{R}^2$. Вектори $(1,\,0)$ і $(5,\,1)$ є власним векторами цього лінійного оператора бо

$$\varphi\big((1,\,0)\big) = (3,\,0) = 3\cdot(1,\,0), \quad \varphi\big((5,\,1)\big) = (10,\,2) = 2\cdot(5,\,1).$$

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,\,0)$ і $(5,\,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори, наприклад $(-4,\ 0)$ та відповідно $(10,\ 2)$:

$$\varphi\big((-4,0)\big) = (-12,0) = 3\cdot(-4,0), \quad \varphi\big((10,2)\big) = (20,4) = 2\cdot(10,2).$$

А от вектор $(4,\ 1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,\ 1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1,\ 2\cdot 1) = (7,\ 2) \neq \alpha\cdot(4,1) = (4\alpha,\alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^\infty_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно, розглянемо функцію f із лінійного простору $C^\infty_{[0,\ 1]}$ всіх нескінченно диференційованих функції на проміжку $[0,\ 1]$ таку, що $f(x) = e^{\gamma x}$ для кожного $x \in [0,\ 1]$. Оскільки

$$\frac{df(x)}{dx} = (e^{\gamma x})' = \gamma e^{\gamma x} = \gamma f(x),$$

то $\mathfrak{D}(f) = \gamma f$.

Теорема 2. *Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.*

Доведення. Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P такий, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha-\beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$. Рівність $\alpha = \beta$ суперечить припущенню, що β — відмінне від α власне значення лінійного оператора φ, якому належить власний вектор a. Ця суперечність доводить теорему.

Теорема 3. *Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо довільні елементи β, γ поля P та будь-які вектори b, c із множини L_α. Оскільки b, $c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.

Теорема 4. *Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.*

Доведення. Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор цього простору. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.

Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів a_1, a_2, ..., a_k лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням α_1, α_2, ..., α_k, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1, \quad \varphi(a_2) = \alpha_2 a_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_k) = \alpha_k a_k,$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$

З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_k \varphi(a_k) =$$

$$= \beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k \alpha_k a_k.$$

Тому

$$\beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k \alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність

$$\beta_1(\alpha_1-\alpha_k)a_1+\beta_2(\alpha_2-\alpha_k)a_2+\cdots+\beta_{k-1}(\alpha_{k-1}-\alpha_k)a_{k-1}=\bar{0}.$$

Оскільки $\beta_1(\alpha_1-\alpha_k)\neq 0$, то із цієї рівності слідує, що система власних векторів a_1, a_2, ..., a_{k-1} лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням, є лінійно залежною. Це суперечить індуктивному припущенню. Таким чином, система векторів a_1, a_2, ..., a_k є лінійно незалежною. Теорема доведена.

Теорема 5. *Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.*

Доведення. Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором розмірності n над полем P, φ є лінійним оператором цього простору і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha)=0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b)=\alpha b. \tag{3}$$

Розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P. Розкладемо вектор b за цим базисом

$$b=\beta_1a_1+\beta_2a_2+\cdots+\beta_na_n,$$

де $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\in P$. Нехай $\Phi=\|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного оператора φ у базисі $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Тоді з рівності (3) та матричної формули для координат образу слідує, що

$$\begin{pmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1n}\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}&\cdots&\gamma_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \gamma_{n1}&\gamma_{n2}&\cdots&\gamma_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\gamma_{11}\beta_1+\gamma_{12}\beta_2+\cdots+\gamma_{1n}\beta_n&=\alpha\beta_1,\\ \gamma_{21}\beta_1+\gamma_{22}\beta_2+\cdots+\gamma_{2n}\beta_n&=\alpha\beta_2,\\ \cdots\cdots\cdots&\\ \gamma_{n1}\beta_1+\gamma_{n2}\beta_2+\cdots+\gamma_{nn}\beta_n&=\alpha\beta_n\end{aligned}$$

і, як наслідок,

$$\begin{gathered}(\gamma_{11}-\alpha)\beta_1+\gamma_{12}\beta_2+\dots+\gamma_{1n}\beta_n=0,\\ \gamma_{21}\beta_1+(\gamma_{22}-\alpha)\beta_2+\dots+\gamma_{2n}\beta_n=0,\\ \dots\dots\dots\\ \gamma_{n1}\beta_1+\gamma_{n2}\beta_2+\dots+(\gamma_{nn}-\alpha)\beta_n=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, …, x_n

$$\left\{\begin{gathered}(\gamma_{11}-\alpha)x_1+\gamma_{12}x_2+\dots+\gamma_{1n}x_n=0,\\ \gamma_{21}x_1+(\gamma_{22}-\alpha)x_2+\dots+\gamma_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\\ \gamma_{n1}x_1+\gamma_{n2}x_2+\dots+(\gamma_{nn}-\alpha)x_n=0.\end{gathered}\right.\tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує, що детермінант матриці системи лінійних однорідних рівнянь (6) дорівнює нулю, тобто

$$|\Phi-\alpha E|=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-\alpha & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-\alpha & \dots & \gamma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn}-\alpha\end{vmatrix}=0,\tag{7}$$

де E — одинична матриця порядку n. З іншого боку $|\Phi-\alpha E|=f(\alpha)$, а тому $f(\alpha)=0$, що й потрібно було довести.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, …, a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi=\|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, …, a_n. Тоді $f(\lambda)=|\Phi-\lambda E|$, а отже $|\Phi-\alpha E|=f(\alpha)=0$. Тому система лінійнних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi-\alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$. Нехай

$$b=\beta_1a_1+\beta_2a_2+\dots+\beta_na_n.$$

Тому що справджуються рівності (5), правильною є рівність (4) і, як наслідок, одержуємо рівність (3). Це означає, що α є власним значенням лінійного оператора φ. Теорема доведена.

Розглянемо приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора φ дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що $\varphi\big((x_1,\ x_2)\big) = (x_2,\ -x_1)$ для будь-якого вектора $(x_1,\ x_2)$ із $\mathbb{R}^2$. Виберемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\varphi(e_1) = (0,\ -1) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2, \quad \varphi(e_2) = (1,\ 0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

є матрицею лінійного оператора φ у канонічному базисі $\mathbb{R}^2$. Тому характеристичний многочлен лінійного оператора φ дорівнює

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Цей многочлен немає коренів у полі $\mathbb{R}$ дійсних чисел. За ознакою власного значення лінійний оператор φ немає власних значень, а отже, і власних векторів.

Якщо ж розглянути приклад лінійного оператора ψ комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такого, що $\psi\big((x_1,\ x_2)\big) = (x_2, -x_1)$ для будь-якого вектора (x_1, x_2) із $\mathbb{C}^2$, то одержимо інший результат. А саме, як і у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі векторного простору $\mathbb{C}^2$. Вона така ж, як (8) Цього разу характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i є вектори вигляду $(-i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. А власними векторами, що належать власному значенню $-i$ є вектори вигляду $(i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Означення 7. *Спектром лінійного оператора* φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 3. Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень α_1, α_2, $\ldots$, α_n, то існує базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L над полем P, що складається з власних векторів лінійного оператора φ. Якщо ж для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ вектор a_j належить власному значенню α_j, то діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

Навпаки, якщо лінійний оператор у деякому базисі має діагональну матрицю, то цей базис складається з власних векторів цього лінійного оператора.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай φ є лінійним оператором лінійного простору L над полем P. Довести, що ненульовий вектор a із L є власним вектором лінійного оператора φ, що належить власному значенню 0, тоді і тільки тоді, коли a належить ядру лінійного оператора φ.

2. Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то лінійні оператори φ і φ^{-1} мають одні і ті ж власні вектори. Знайти зв'язок між власними значеннями цих операторів.

3. Нехай φ є лінійним оператором лінійного простору L над полем P, α — деякий ненульовий елемент поля P. Довести, що лінійні оператори φ і $\alpha\varphi$ мають одні і ті ж власні вектори. Причому, якщо елемент β із P є власним значенням лінійного оператора φ, то $\alpha\beta$ є власним значенням лінійного оператора $\alpha\varphi$.

4. Довести, що якщо b є власним вектором лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, що належить власному значенню β, то b є власним вектором і для оператора а) φ^2; б) φ^k для довільного натурального числа k; в) $p\varphi^2 + q\varphi + r\mathrm{id}_L$ для довільних елементів p, q, r поля P, де id_L — одиничний оператор простору L. Знайти відповідні власні значення лінійних операторів.

5. Нехай φ є нільпотентним лінійним оператором лінійного простору L над полем P, тобто лінійним оператором, для якого існує натуральне число k, для якого φ^k є нульовим оператором. Довести, що лінійний оператор φ не має відмінних від нуля власних значень.

6. Довести, що лінійний оператор повороту площини на кут α, що не є кратним π, не має власних векторів.

7. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора A тривимірного евклідового простору, такого шо $A(x) = [x, a]$, де a — фіксований вектор.

8. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора диференціювання лінійного простору $\mathbb{R}[x]_n$ всіх многочленів від змінної x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує деяке невід'ємне ціле число n.

9. Знайти характеристичний многочлен лінійного оператора повороту площини на кут α.

10. Знайти характеристичний многочлен лінійного оператора A тривимірного евклідового простору, такого шо $A(x) = [x, a]$, де a — фіксований вектор.

11. Знайти характеристичний многочлен лінійного оператора диференціювання лінійного простору $\mathbb{R}[x]_n$ всіх многочленів від змінної x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує деяке невід'мне ціле число n.

12. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$, що задається матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

у канонічному базисі цього простору.

13. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$, що задається матрицею

$$\begin{pmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{pmatrix}$$

у канонічному базисі цього простору.

14. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$, що задається матри-

цею
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
у канонічному базисі цього простору.

15. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$, що задається матрицею
$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$
у канонічному базисі цього простору.

16. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора раціонального чотиривимірного векторного простору $\mathbb{Q}^4$, що задається матрицею
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
у канонічному базисі цього простору.

17. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора раціонального чотиривимірного векторного простору $\mathbb{Q}^4$, що задається матрицею
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
у канонічному базисі цього простору.

18. Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ — спектр лінійного оператора φ, Φ — матриця лінійного оператора φ у деякому базисі лінійного простору L. Показати, що у лінійному просторі L над полем P існує базис з власних векторів лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли
$$sn - \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rank}(\Phi - \alpha_i E) = n,$$
де E — одинична матриця порядку n.

Розділ 3

Будова лінійного простору з лінійним оператором

У прикладних математичних задачах, пов'язаних із дослідженням функцій, досить часто областю визначення і областю значень, розглядуваних відображень, є одна і та ж множина, скажімо X. Через це ці функції, що теж саме відображення, традиційно називають перетвореннями множини X або операторами цієї множини. Якщо f є перетворенням множини X, то говорять, що елемент x множини X перетворюється в елемент $f(x)$. Зазначимо, що коли X є множиною всіх точок геометричної площини, то перетворенням площини X називають бієктивне відображення множини X в себе. При цьому виділяють такі елементи множини X, які перетворюються самі в себе. Їх називають нерухомими точками перетворення f. Нульовий вектор, власні вектори лінійного оператора, що належать власному значенню 1, є прикладами нерухомих точок лінійного оператора деякого лінійного простору над полем. У цьому розділі вивчаються лінійні простори, на яких задано лінійний оператор, з позиції об'єктів, які узагальнюють поняття нерухомої точки.

3.1 Інваріантні підпростори

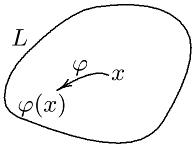

Рис. 1

Нехай L є лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором цього простору. Надалі всюди, як тільки задано деякий лінійний простір і лінійний оператор цього простору будемо казати, що задано лінійний простір з лінійним оператором. Інколи зручно зображати (див. рис. 2) лінійний простір L з оператором φ дублюючи лінійний простір, підкреслюючи цим самим, що множина L одночасно є областю визначення і областю значень лінійного оператора φ.

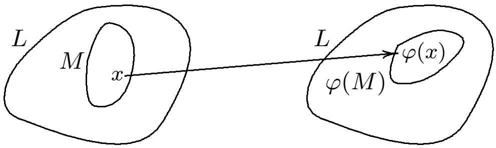

Рис. 2

Означення 1. *Образом підмножини* M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина, яка складається з образів усіх елементів підмножини M.

Образ підмножини M позначатимемо через $\varphi(M)$, інакше кажучи $\varphi(M) = \{\varphi(x) \mid x \in M\}$.

Означення 2. Підпростір M лінійного простору L над полем P називається *інваріантним* відносно оператора φ, якщо образ підпростору M є підмножиною M, тобто $\varphi(M) \subseteq M$.

Твердження 1. *Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного x із M, є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.*

Доведення цього твердження доволі просте, а тому залишаємо його читачеві.

Означення 3. Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається *обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.*

Теорема 1. *Нехай L є лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ. Якщо M є інваріантним відносно φ підпростором простору L, то відповідність $\widehat{\varphi}$ із фактор-простору L/M у фактор-простір L/M така, що кожному суміжному класу $x + M$ з представником x із L ставить у відповідність суміжний клас $\varphi(x) + M$, є лінійним оператором фактор-простору L/M.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір лінійного простору L. Розглянемо деякий суміжний клас $x+M$, де $x \in L$ Якщо x' є деяким іншим представником цього суміжного класу, тобто якщо $x'+M = x+M$, то $x'-x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M = \\ = \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ оператором фактор-простору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big) = \\ = \varphi(\alpha x + \beta y) + M = \big(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)\big) + M = \\ = \alpha\big(\varphi(x) + M\big) + \beta\big(\varphi(y) + M\big) = \alpha\widehat{\varphi}(x + M) + \beta\widehat{\varphi}(y + M).$$

Теорему доведено.

Припустимо, що у скінченновимірному лінійному просторі L з лінійним оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|_{k\times k}$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|_{l\times l}$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ фактор-простору L/M у деякому його базисі $v_1 + M$, v_2+M, ..., v_l+M, де $k = \dim_P M$, $l = \dim_P L/M$. Тоді для кожного $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ справджується рівність

$$\varphi_M(u_i) = \alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \dots + \alpha_{ki}u_k,$$

а для кожного $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ — рівність

$$\widehat{\varphi}(v_j + M) = \beta_{1j}(v_1 + M) + \beta_{2j}(v_2 + M) + \dots + \beta_{lj}(v_l + M).$$

Тому

$$\varphi(u_i) = \alpha_{1i}u_1 + \alpha_{2i}u_2 + \dots + \alpha_{ki}u_k, \\ \varphi(v_j) + M = (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \dots + \beta_{lj}v_l) + M, \qquad (1)$$

для будь-яких $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ та $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$.
Із рівності (1) слідує, що

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) \in M$$

для кожного $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$. Звідси для кожного такого j

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) = \gamma_{1j}u_1 + \gamma_{2j}u_2 + \cdots + \gamma_{kj}u_k$$

для деяких елементів $\gamma_{1j},\ \gamma_{2j},\ \ldots,\ \gamma_{kj}$ із поля P. Як наслідок одержуємо наступні рівності:

$$\begin{gathered}
\varphi(v_1) = \gamma_{11}u_1 + \gamma_{21}u_2 + \cdots + \gamma_{k1}u_k + \beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \cdots + \beta_{l1}v_l, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\varphi(v_l) = \gamma_{1l}u_1 + \gamma_{2l}u_2 + \cdots + \gamma_{kl}u_k + \beta_{1l}v_1 + \beta_{2l}v_2 + \cdots + \beta_{ll}v_l.
\end{gathered}$$

Із доведення теореми про розмірність трьох просторів слідує, що система векторів $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_l$ є базисом лінійного простору L над полем P. Через це, підсумовуючи все вище сказане, можна зробити висновок, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_l$ цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1l} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2l} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{kl} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \ldots & \beta_{ll}
\end{pmatrix}, \tag{2}$$

який компактно у блочному вигляді записують таким чином

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де 0 — нульова $l\times k$-матриця, а $C = \|\gamma_{ij}\|_{k\times l}$ — $k\times l$-матриця, складена з елементів γ_{ij}, де $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ l\}$.

Теорема 2. *Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ. Якщо M є деяким нетривіальним інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору*

L, то характеристичний многочлен лінійного оператора φ_M, який є обмеженням φ на підпростір M, є дільником характеристичного многочлена лінійного оператора φ лінійного простору L.

Доведення. Нехай справджуються умови теореми і M є деяким нетривіальним інваріантним відносно φ підпростором розмірності k лінійного простору L . Тоді із міркувань, які передують теоремі слідує існування базису $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ лінійного простору L, в якому матриця F лінійного оператора φ має вигляд (2), де $A = \|\alpha_{ij}\|_{k\times k}$ є матрицею обмеження φ_M лінійного оператора φ на підпростір M у базисі $u_1, u_2, \ldots, u_k$ цього простору. Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ лінійного оператора φ дорівнює детермінанту характеристичної матриці $F - \lambda E$, а характеристичний многочлен $g(\lambda)$ обмеження φ_M лінійного оператора φ — детермінанту характеристичної матриці $A - \lambda E'$, де E, E' — одиничні матриці відповідних розмірів. За теоремою Лапласа $|F - \lambda E| = |A - \lambda E'| \cdot |B - \lambda E''|$, де B — матриця лінійного оператора $\hat{\varphi}$ фактор-простору L/M, про який йде мова у теоремі 1, E'' — одинична матриця відповідного розміру. Тому $f(\lambda) = g(\lambda) \cdot |B - \lambda E''|$, що й потрібно було довести.

3.1.1 Циклічні простори

Твердження 2. *Нехай L є лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ, a — вектор лінійного простору L,*

$$\mathcal{C}(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N}; \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in P\}$$

— множина всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, … Множина $\mathcal{C}(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення. Оскільки сума будь-яких двох лінійних комбінацій скінченних підсистем нескінченної системи векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, $\varphi^3(a)$, … є знову ж таки лінійною комбінацією деякої підсистеми цієї системи векторів, так само, як і добуток будь-якого елемента поля P на лінійну комбінацію є лінійною комбінацією, то множина $\mathcal{C}(a)$ є підпростором лінійного простору L. Далі, нехай

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a)$$

— будь-який елемент із $\mathcal{C}(a)$. Тоді

$$\varphi(x) = \gamma_1\varphi\big(\varphi^{j_1}(a)\big) + \gamma_2\varphi\big(\varphi^{j_2}(a)\big) + \cdots + \gamma_k\varphi\big(\varphi^{j_k}(a)\big) = \\ = \gamma_1\varphi^{j_1+1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2+1}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k+1}(a).$$

Тому $\varphi(x) \in \mathcal{C}(a)$, що і потрібно було довести.

Означення 4. Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $\mathcal{C}(a)$ лінійного простору L, про який йде мова в твердженні 2, називається *циклічним простором, породженим вектором a.*

Кожен вектор b циклічного простору $\mathcal{C}(a)$, породженого вектором a, має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1\varphi(a) + \cdots + \beta_t\varphi^t(a),$$

де t є невід'ємним цілим числом, а β_0, β_1, …, β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ многочлен $\beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_t\lambda^t$ від змінної λ над полем P. Тоді $b = \big[f(\varphi)\big](a)$, де $f(\varphi) = \beta_0\mathrm{id}_L + {}+\beta_1\varphi + \cdots + \beta_t\varphi^t$.

Означення 5. Нехай a є вектором лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $\big[f(\varphi)\big](a) = \bar{0}$ називається *анулятором вектора a.*

Якщо L є скінченновимірним простором, то існує ненульовий анулятор для кожного вектора a із L. Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, …, $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, …, γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а отже,

$$\big[\gamma_0\mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\big](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3. *Нехай L є лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ, a — будь-який вектор із L. Сума будь-яких ануляторів вектора a і добуток довільного многочлен із $P[\lambda]$ на будь-який анулятор вектора a є знову таки ж ануляторами вектора a.*

Доведення. Нехай $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ — довільні анулятори вектора a. Тоді $\big[f(\varphi)\big](a) = \bar{0}$ і $\big[g(\varphi)\big](a) = \bar{0}$. Якщо $h(\lambda)$ є сумою многочленів $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, то $h(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$. За означенням суми лінійних операторів

$$\big[h(\varphi)\big](a) = \big[f(\varphi)\big](a) + \big[g(\varphi)\big](a) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

А це означає, що многочлен $h(\lambda)$ є анулятором вектора a.

Далі, для довільного многочлена $u(\lambda)$ із $P[\lambda]$ за означенням добутку лінійних операторів справджується рівність

$$\big[u(\varphi)f(\varphi)\big](a) = \big[u(\varphi)\big]\Big(\big[f(\varphi)\big](a)\Big) = \big[u(\varphi)\big](\bar{0}). \tag{3}$$

Оскільки образом нульового вектора будь-якого лінійного оператора є нульовий вектор, то права частина рівності (3) дорівнює $\bar{0}$. Тому добуток многочленів $u(\lambda)$ і $f(\lambda)$ є анулятором вектора a.

Означення 6. Нехай a є ненульовим вектором скінченновимірного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором вектора a називається його *мінімальним анулятором.*

Теорема 4. *Нехай a є ненульовим вектором лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Мінімальний анулятор вектора a ділить будь-який анулятор цього вектора.*

Доведення. Нехай L є лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ, a — будь-який вектор із L, $f(\lambda)$ — мінімальний анулятор вектора a. Розглянемо довільний анулятор $g(\lambda)$ вектора a. Доведемо від протилежного той факт, що многочлен $g(\lambda)$ ділиться на $f(\lambda)$. Припустимо, що $g(\lambda)$ не ділиться на $f(\lambda)$. Тоді, поділивши многочлен $g(\lambda)$ на многочлен $f(\lambda)$, одержимо деяку частку $q(\lambda)$ і ненульову остачу$r(\lambda)$, яка має степінь менший за степінь многочлена $f(\lambda)$. Оскільки $r(\lambda) = g(\lambda) - f(\lambda)q(\lambda)$, то за теоремою 3 многочлен $r(\lambda)$ є анулятором вектора a, який має степінь менший за степінь мінімального анулятора, що суперечить його означенню. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай a є ненульовим вектором лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Мінімальний анулятор вектора a визначається цим вектором однозначно.*

Доведення. Дійсно, якщо $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$ — мінімальні анулятори вектора a, то за теоремою 4 многочлен $f(\lambda)$ ділить многочлен $g(\lambda)$

і одночасно $g(\lambda)$ ділить $f(\lambda)$. Оскільки старші коефіцієнти їх дорівнюють 1, то за властивістю подільності многочленів звідси слідує, що $f(\lambda) = g(\lambda)$.

Теорема 5. *Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ, а многочлен $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ є спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису лінійного простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.*

Доведення. Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором розмірності n над полем P з лінійним оператором φ і a_1, a_2, $\ldots$, a_n — деякий базис цього простору. Далі, нехай для кожного $i \in \{1,\ 2\ , \ldots,\ n\}$ многочлен $f_i(\lambda)$ є анулятором вектора a_i, а многочлен $f(\lambda)$ є спільним кратним многочленів $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $\ldots$, $f_n(\lambda)$. Тоді для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ знайдеться многочлен $g_i(\lambda)$ із $P[\lambda]$ такий, що $f(\lambda) = g_i(\lambda)f_i(\lambda)$. Розглянемо довільний вектор a із L. Розкладемо вектор a за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L: $a = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$, де γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n — деякі елементи поля P. Обчислимо образ $\big[f(\varphi)\big](a)$, використовуючи розклад вектора a:

$$\begin{aligned}
\big[f(\varphi)\big](a) &= \big[f(\varphi)\big](\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n) = \\
&= \gamma_1\big[f(\varphi)\big](a_1) + \gamma_2\big[f(\varphi)\big](a_2) + \cdots + \gamma_n\big[f(\varphi)\big](a_n) = \\
&= \gamma_1\big[g_1(\varphi)f_1(\varphi)\big](a_1) + \cdots + \gamma_n\big[g_n(\varphi)f_n(\varphi)\big](a_n) = \\
&= \gamma_1\big[g_1(\varphi)\big]\Big(\big[f_1(\varphi)\big](a_1)\Big) + \cdots + \gamma_n\big[g_n(\varphi)\big]\Big(\big[f_n(\varphi)\big](a_n)\Big) = \\
&= \gamma_1\big[g_1(\varphi)\big](\bar{0}) + \cdots + \gamma_n\big[g_n(\varphi)\big](\bar{0}) = \bar{0} + \cdots + \bar{0} = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Як наслідок звідси одержуємо, що лінійний оператор $f(\varphi)$ лінійного простору L є нульовим оператором. Теорема доведена.

Із попередньої теореми випливає, що для будь-якого ненульового скінченновимірного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ існує ненульовий многочлен $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ такий, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$, тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$.

Означення 7. Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ такий, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ називається *анулятором лінійного простору L*.

Означення 8. Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором лінійного простору L називається *мінімальним многочленом лінійного оператора* φ.

Теорема 6. *Мінімальний многочлен лінійного оператора* φ *скінченновимірного лінійного простору* L *ділить любий многочлен, що є анулятором лінійного простору* L.

Наслідок 1. *Мінімальний многочлен лінійного оператора* φ *скінченновимірного лінійного простору* L *визначається цією парою однозначно.*

Доведення теореми 6 і її наслідку аналогічне доведенню відповідно теореми 4 і її наслідку. Через це залишаємо їх читачеві.

Теорема 7. *Мінімальний многочлен лінійного оператора* φ *скінченновимірного лінійного простору* L *є найменшим спільним кратним мінімальних ануляторів векторів, які складають базис лінійного простору* L.

Доведення. Нехай L є ненульовим скінченновимірним лінійним простором розмірності n над полем P з лінійним оператором φ і a_1, a_2, ..., a_n — деякий базис цього простору. Далі, нехай для кожного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ многочлен $f_i(\lambda)$ є мінімальним анулятором вектора a_i, а многочлен $f(\lambda)$ є найменшим спільним кратним многочленів $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ з старшим коефіцієнтом 1. За теоремою 5 многочлен $f(\lambda)$ є анулятором простору L. Якщо $g(\lambda)$ є деяким анулятором простору L, то він є анулятором кожного з векторів a_1, a_2, ..., a_n. Тому за теоремою 4 кожен із многочленів $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ ділить $g(\lambda)$, що в свою чергу означає, що многочлен $g(\lambda)$ є спільним кратним цих многочленів. Отже, $g(\lambda)$ ділиться на $f(\lambda)$ і його степінь не перевищує степінь $f(\lambda)$. Як наслідок одержуємо, що $f(\lambda)$ є мінімальним многочленом лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору L.

Теорема 8 (будова циклічного простору)**.** *Нехай* a *є ненульовим вектором скінченновимірного лінійного простору* L *з лінійним оператором* φ, $\mathcal{C}(a)$ *— циклічний простір, породжений вектором* a *і* $f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ *— мінімальний анулятор вектора* a, *де* $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1} \in P$. *Тоді:*

1) *система векторів* $a, \varphi(a), \dots, \varphi^{s-1}(a)$ *— базис циклічного простору* $\mathcal{C}(a)$;

2) *матриця обмеження* $\varphi_{\mathcal{C}(a)}$ *лінійного оператора* φ *на підпро-*

стір $\mathcal{C}(a)$ у цьому базисі має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix};$$

3) *характеристичний многочлен лінійного оператора $\varphi_{\mathcal{C}(a)}$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ з точністю до знаку співпадає з мінімальним многочленом лінійного оператора $\varphi_{\mathcal{C}(a)}$, який у свою чергу дорівнює многочлену $f(\lambda)$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Система векторів a, $\varphi(a)$, $\dots$, $\varphi^{s-1}(a)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку існували б елементи β_0, β_1, $\dots$, β_{s-1} поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\beta_0 a + \beta_1\varphi(a) + \dots + \beta_{s-1}\varphi^{s-1}(a) = \bar{0}.$$

А тому ненульовий многочлен $\beta_{s-1}\lambda^{s-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0$ був би анулятором вектора a. Це суперечить умові теореми, бо він має степінь менший за степінь даного в умові теореми мінімального анулятора вектора a.

Далі покажемо методом математичної індукції, що для довільного натурального числа i, більшого або рівного за s, вектор $\varphi^i(a)$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ є лінійною комбінацією системи векторів a, $\varphi(a)$, $\dots$, $\varphi^{s-1}(a)$. У випадку, коли $i = s$, це твердження справджується через те, що многочлен $f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ є анулятором вектора a і як наслідок

$$\varphi^s(a) = -\alpha_0 a - \alpha_1\varphi(a) - \dots - \alpha_{s-1}\varphi^{s-1}(a). \qquad (4)$$

Припустимо, що для деякого натурального числа k, більшого за s, вектор $\varphi^k(a)$ є лінійною комбінацією системи векторів a, $\varphi(a)$, $\dots$, $\varphi^{s-1}(a)$, тобто

$$\varphi^k(a) = \gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \dots + \gamma_{s-1}\varphi^{s-1}(a) \qquad (5)$$

для деяких елементів γ_0, γ_1, $\dots$, γ_{s-1} поля P. Тоді із рівностей (4) і

(5) випливає, що

$$\begin{aligned}\varphi^{k+1}(a) = \varphi\big(\varphi^k(a)\big) = \varphi\big(\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \dots + \gamma_{s-1}\varphi^{s-1}(a)\big) = \\ = \gamma_0\varphi(a) + \gamma_1\varphi^2(a) + \dots + \gamma_{s-2}\varphi^{s-1}(a) + \gamma_{s-1}\varphi^s(a) = \\ = -\gamma_{s-1}\alpha_0 a + (\gamma_0 - \gamma_{s-1}\alpha_1)\varphi(a) + \dots + (\gamma_{s-2} - \gamma_{s-1}\alpha_{s-1})\varphi^{s-1}(a).\end{aligned}$$

Отже, вектор $\varphi^{k+1}(a)$ також є лінійною комбінацією системи векторів a, $\varphi(a)$, …, $\varphi^{s-1}(a)$. За принципом математичної індукції для кожного натурального числа i, більшого або рівного за s, вектор $\varphi^i(a)$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ є лінійною комбінацією цієї системи векторів, а тому за його означенням будь-який вектор циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ є лінійною комбінацією цієї системи векторів a, $\varphi(a)$, …, $\varphi^{s-1}(a)$. Це завершує доведення першого твердження теореми.

Друге твердження теореми випливає із того, що образом кожного із векторів базису $a, \varphi(a), \dots, \varphi^{s-1}(a)$ окрім останнього є наступний, а образ останнього визначається рівністю (4).

Нарешті характеристичний многочлен лінійного оператора $\varphi_{\mathcal{C}(a)}$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ дорівнює детермінанту

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{s-1} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Обчислимо його, спочатку виконавши наступні елементарні перетворення. До кожного рядка, починаючи з передостаннього, додамо попередній рядок, помножений на λ. Одержимо детермінант

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 - \alpha_1\lambda - \dots - \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} - \lambda^s \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 - \alpha_2\lambda - \dots - \alpha_{s-1}\lambda^{s-2} - \lambda^{s-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 - \alpha_3\lambda - \dots - \alpha_{s-1}\lambda^{s-3} - \lambda^{s-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}\lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{s-1} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Тепер обчислимо детермінант (6) за теоремою Лапласа, розкладаючи його за першим рядком. Одержимо, що характеристичний многочлен лінійного оператора $\varphi_{\mathcal{C}(a)}$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ дорівнює $(-1)^s f(\lambda)$.

Насамкінець, многочлен $f(\lambda)$ є анулятором кожного з векторів базису a, $\varphi(a)$, ..., $\varphi^{s-1}(a)$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є мінімальним анулятором вектора a за умовою теореми, а для кожного натурального числа i справджуються рівності

$$\begin{aligned}\big[f(\varphi)\big]\big(\varphi^i(a)\big) = \big[f(\varphi)\cdot\varphi^i\big](a) = \\ = \big[\varphi^i\cdot f(\varphi)\big](a) = \varphi^i\big(\big[f(\varphi)\big](a)\big) = \varphi^i(\bar{0}) = \bar{0}.\end{aligned}$$

Як наслідок одержуємо, що многочлен $f(\lambda)$ є анулятором циклічного простору $\mathcal{C}(a)$. З іншого боку будь-який анулятор циклічного простору $\mathcal{C}(a)$ є зокрема анулятором вектора a, а тому ділиться на його мінімальний анулятор $f(\lambda)$. Це доводить, що $f(\lambda)$ є мінімальним многочленом лінійного оператора $\varphi_{\mathcal{C}(a)}$ циклічного простору $\mathcal{C}(a)$. Теорема доведена.

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)**.** *Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору L над полем P є анулятором цього простору.*

Доведення. Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ. Розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, де $n = \dim_P L$. За теоремою про будову циклічного простору для кожного натурального $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ мінімальний анулятор $f_i(\lambda)$ вектора a_i з точністю до знаку дорівнює характеристичному многочлену обмеження $\varphi_{\mathcal{C}(a_i)}$ лінійного оператора φ на циклічний простір $\mathcal{C}(a_i)$. У свою чергу за теоремою 2 цей характеристичний многочлен, а отже і мінімальний анулятор $f_i(\lambda)$ вектора a_i, є дільником характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L. Це означає, що многочлен $f(\lambda)$ є анулятором кожного з векторів базису a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тому за теоремою 5 характеристичний многочлен $f(\lambda)$ є анулятором лінійного простору L. Теорема доведена.

Означення 9. Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається *розкладним* (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним, якщо будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори L мають ненульовий перетин.

Лема 1. *Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що для деякого натурального числа s його мінімальний анулятор $f(\lambda)$ є s-им степенем незвідного над полем P многочлена $g(\lambda)$, тобто $f(\lambda) = g(\lambda)^s$, $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір циклічного простору $C(a)$. Тоді вектор $\left[g(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим вектором, що міститься в M.*

Доведення. Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[g(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Оскільки M є підпростором циклічного простору $C(a)$, то $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Через те, що $g(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $g(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $g(\lambda)^k$ для деякого $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Підкреслимо, що $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що $g(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = g(\lambda)^k$. Звідси $v(\lambda)h(\lambda) = g(\lambda)^k - u(\lambda)g(\lambda)^s$. Тому

$$\begin{aligned}
\left[v(\varphi)\right](b) &= \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) = \\
&= \left[g(\varphi)^k - u(\varphi)g(\varphi)^s\right](a) = \left[g(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[g(\varphi)^s\right](a)\right) = \\
&= \left[g(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right](\bar{0}) = \left[g(\varphi)^k\right](a).
\end{aligned}$$

Використовуючи останню рівність, одержимо, що

$$\begin{aligned}
\left[g^{s-1}(\varphi)\right](a) &= \left[g(\varphi)^{s-1-k}g(\varphi)^k\right](a) = \left[g(\varphi)^{s-1-k}\right]\left(\left[g(\varphi)^k\right](a)\right) = \\
&= \left[g(\varphi)^{s-1-k}\right]\left(\left[v(\varphi)\right](b)\right) = \left[g(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b).
\end{aligned}$$

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$\left[g^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[g(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$

Лема доведена.

3.1.2 Примарні простори

Означення 10. Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається *примарним простором*, якщо мінімальний многочлен оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена.

Із леми 1 слідує, що будь-які два нетривіальні інваріантні відносно φ підпростори примарного циклічного простору мають ненульовий перетин. Тому справджується наступна теорема.

Теорема 10. *Примарний циклічний простір є нерозкладним простором.*

Лема 2. *Нехай мінімальний многочлен $f(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є добутком многочленів $g_1(\lambda)$ і $g_2(\lambda)$ над полем P, кожен з яких є многочленом натурального степеня із старшим коефіцієнтом 1 і $L_1 = \big[g_2(\varphi)\big](L)$, $L_2 = \big[g_1(\varphi)\big](L)$. Тоді*

1) *L_i є ненульовим інваріантним відносно оператора φ підпростором простору L для кожного $i \in \{1,\, 2\}$;*
2) *мінімальний многочлен обмеження φ_{L_i} лінійного оператора φ на підпростір L_i дорівнює $g_i(\lambda)$ для кожного $i \in \{1,\, 2\}$;*
3) *якщо многочлени $g_1(\lambda)$ і $g_2(\lambda)$ є взаємно простими, то лінійний простір L є прямою сумою підпросторів L_1 і L_2.*

Доведення. Нехай справджуються умови леми. Через те, що обидва многочлени $g_1(\lambda)$ і $g_2(\lambda)$ мають натуральні степені і добуток їх дорівнює $f(\lambda)$, то степені цих многочленів менші за степінь многочлена $f(\lambda)$. За означенням мінімального многочлена лінійного оператора звідси слідує існування векторів a і b із L таких, що $\big[g_1(\varphi)\big](a) \neq \bar{0}$ і $\big[g_2(\varphi)\big](b) \neq \bar{0}$. Тому L_1 і L_2 є ненульовими підпросторами простору L.

Далі, для будь-якого вектора c лінійного простору L і будь-якого многочлена $h(\lambda)$ із кільця многочленів $P[\lambda]$ справджуються рівності

$$\varphi\big([h(\varphi)](c)\big) = \big[\varphi \cdot h(\varphi)\big](c) = \big[h(\varphi) \cdot \varphi\big](c) = [h(\varphi)]\big(\varphi(c)\big).$$

А тому $\varphi(L_1) = \varphi\big([g_2(\varphi)](L)\big) = [g_2(\varphi)]\big(\varphi(L)\big)$. Оскільки $\varphi(L)$ є підпростором L, то $\varphi(L_1) \subset [g_2(\varphi)](L) = L_1$. Аналогічно доводиться, що $\varphi(L_2) \subset [g_1(\varphi)](L) = L_2$. Це означає, що L_1 і L_2 є інваріантними підпросторами лінійного простору L відносно оператора φ.

Доведемо тепер, що мінімальний многочлен обмеження φ_{L_1} лінійного оператора φ на підпростір L_1 дорівнює $g_1(\lambda)$. Для цього спочатку переконуємося, що $g_1(\lambda)$ є анулятором підпростору L_1. Розглянемо довільний вектор u із L_1. Тоді знайдеться вектор v із L такий, що $u = \big[g_2(\varphi)\big](v)$. Тому справджуються рівності

$$\big[g_1(\varphi_{L_1})\big](u) = \big[g_1(\varphi)\big](u) = \big[g_1(\varphi)\big]\Big(\big[g_2(\varphi)\big](v)\Big) = \\ = \big[g_1(\varphi)\cdot g_2(\varphi)\big](v) = \big[f(\varphi)\big](v) = \bar{0},$$

остання з яких випливає із того, що $f(\lambda)$ є мінімальним многочленом лінійного оператора φ лінійного простору L. Якщо ж многочлен $h(\lambda)$ є анулятором підпростору L_1, то $\big[h(\varphi_{L_1})\big](L_1) = \{\bar{0}\}$. З іншого боку

$$\big[h(\varphi_{L_1})\big](L_1) = \big[h(\varphi)\big](L_1) = \big[h(\varphi)\big]\big(\big[g_2(\varphi)\big](L)\big) = \big[h(\varphi)\cdot g_2(\varphi)\big](L).$$

Тому $\big[h(\varphi)\cdot g_2(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ і, як наслідок, добуток $h(\lambda)g_2(\lambda)$ є анулятором простору L. За теоремою 6 цей добуток ділиться на мінімальний многочлен $f(\lambda)$ оператора φ лінійного простору L. а це означає, що многочлен $h(\lambda)$ ділиться на многочлен $g_1(\lambda)$. Останній факт завершує доведення того, що $g_1(\lambda)$ є мінімальним многочленом лінійного оператора φ_{L_1} підпростору L_1. Аналогічно доводиться, що $g_2(\lambda)$ є мінімальним многочленом лінійного оператора φ_{L_2} підпростору L_2.

Для доведення третього твердження леми використаємо теорему про найбільший спільний дільник многочленів. Припустимо, що многочлени $g_1(\lambda)$ і $g_2(\lambda)$ є взаємно простими. Тоді існують многочлени $h_1(\lambda)$ і $h_2(\lambda)$ із кільця многочленів $P[\lambda]$ такі, що

$$g_1(\lambda)h_1(\lambda) + g_2(\lambda)h_2(\lambda) = 1.$$

Тому для тотожного оператора id_L лінійного простору L і для кожного вектора a із L справджуються рівності:

$$\mathrm{id}_L = g_1(\varphi)h_1(\varphi) + g_2(\varphi)h_2(\varphi),$$
$$a = \mathrm{id}_L(a) = \big[g_1(\varphi)h_1(\varphi) + g_2(\varphi)h_2(\varphi)\big](a) =$$
$$= \big[g_1(\varphi)\big]\Big(\big[h_1(\varphi)\big](a)\Big) + \big[g_2(\varphi)\big]\Big(\big[h_2(\varphi)\big](a)\Big).$$

Вектор $b_1 = \big[g_2(\varphi)\big]\Big(\big[h_2(\varphi)\big](a)\Big)$ належить підпростору L_1, а вектор $b_2 = \big[g_1(\varphi)\big]\Big(\big[h_1(\varphi)\big](a)\Big)$ — підпростору L_2. Таким чином, лінійний простір L є сумою підпросторів L_1 і L_2.

Якщо вектор c міститься в перетині підпросторів L_1 і L_2, то за доведеним раніше твердженням він анулюється кожним із многочленів $g_1(\lambda)$ і $g_2(\lambda)$. Тому

$$\begin{aligned} c = \mathrm{id}_L(c) &= \big[g_1(\varphi)h_1(\varphi) + g_2(\varphi)h_2(\varphi)\big](c) = \\ &= \big[h_1(\varphi)\big]\Big(\big[g_1(\varphi)\big](c)\Big) + \big[h_2(\varphi)\big]\Big(\big[g_2(\varphi)\big](c)\Big) = \\ &= \big[h_1(\varphi)\big](\bar{0}) + \big[h_2(\varphi)\big](\bar{0}) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Звідси за ознакою прямої суми сума $L_1 + L_2$ є прямою. Лема доведена.

Теорема 11 (про примарний розклад)**.** *Скінченновимірний лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є або примарним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних інваріантних відносно оператора φ підпросторів в L.*

Доведення. Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P з лінійним оператором φ. Далі, нехай $f(\lambda)$ — мінімальний многочлен лінійного оператора φ і

$$f(\lambda) = g_1(\lambda)^{s_1} g_2(\lambda)^{s_2} \cdots g_k(\lambda)^{s_k}$$

— розклад многочлена $f(\lambda)$ у добуток степенів незвідних над полем P попарно різних многочленів $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$, …, $g_k(\lambda)$, старші коефіцієнти яких дорівнюють 1, де k, s_1, s_2, …, s_k — деякі натуральні числа. Доведення теореми далі поведемо методом математичної індукції за числом k незвідних множників. Якщо $k = 1$, то твердження теореми є очевидним. Припустимо, що воно справджується для будь-яких натуральних чисел k, менших за деяке фіксоване натуральне число l, що більше за 1. У випадку, коли $k = l$, мінімальний анулятор $f(\lambda)$ лінійного оператора φ розкладається у добуток двох взаємно простих многочленів $g_1(\lambda)^{s_1}$ і $\tilde{g}_2(\lambda) = g_2(\lambda)^{s_2} \cdots g_l(\lambda)^{s_l}$. За лемою 2 лінійний простір L є прямою сумою підпросторів L_1 і $\tilde{L}_2$, обмеження лінійного оператора φ на які мають відповідно мінімальні многочлени $g_1(\lambda)^{s_1}$ і $\tilde{g}_2(\lambda)$. Підпростір L_1 є примарним простором. У свою чергу, оскільки многочлен $\tilde{g}_2(\lambda)$ розкладається у добуток степенів менше як l незвідних множників, за припущенням математичної індукції підпростір $\tilde{L}_2$ є або примарним простором, або прямою сумою примарних просторів. Таким чином, і лінійний простір L є або примарним простором, або прямою сумою примарних просторів. Теорема доведена.

Означення 11. Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається *вектором найбільшої висоти*, якщо мінімальний анулятор вектора a співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Існування такого вектора у примарному лінійному просторі L випливає з наступним міркувань. Мінімальним многочленом лінійного оператора φ примарного лінійного простору L є натуральний степінь деякого незвідного над полем P многочлена $g(\lambda)$, тобто многочлен $g(\lambda)^s$ для деякого натурального s. Тоді мінімальний анулятор будь-якого вектора a із L є дільником $g(\lambda)^s$ і як наслідок теж є деяким k-им степенем многочлена $g(\lambda)$ для деякого $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$. Якби не існувало вектора a із L такого, що його мінімальні анулятор дорівнює $g(\lambda)^s$, то $\big[g(\varphi)^{s-1}\big](b) = \bar{0}$ для кожного вектора b із L. Останнє неможливо через те, що многочлен $g(\lambda)^s$ є мінімальним многочленом лінійного оператора φ лінійного простору L.

Теорема 12 (про розклад примарного простору)**.** *Будь-який скінченновимірний примарний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.*

Доведення. Нехай L є скінченновимірним примарним лінійним простором над деяким полем P з лінійним оператором φ розмірності n. Доведемо теорему методом математичної індукції за розмірністю n. Якщо $n = 1$, то будь-який ненульовий вектор a лінійного простору є базисом L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого елемента α поля P. Тому L є примарним циклічним простором $\mathcal{C}(a)$, породженим вектором a з мінімальним анулятором $\lambda - \alpha$.

Нехай теорема справджується для будь-яких примарних лінійних просторів, розмірність яких менша за певне фіксоване натуральне число k. Розглянемо випадок, коли $n = k$. Нехай мінімальним многочленом лінійного простору L з лінійним оператором φ є s-вий степінь деякого незвідного над полем P многочлена $g(\lambda)$, тобто многочлен $g(\lambda)^s$ для деякого натурального числа s. Із міркувань, що передують формулюванню теореми, слідує існування вектора a_1 із L, який є вектором найбільшої висоти. Якщо лінійний простір L дорівнює циклічному простору $\mathcal{C}(a_1)$, то теорема доведена. У протилежному випадку $\mathcal{C}(a_1)$ є нетривіальним інваріантним підпростором простору L. Розглянемо фактор-простір $L/\mathcal{C}(a_1)$ з лінійним оператором $\widehat{\varphi}$, визначеним в теоремі 1 за правилом $\widehat{\varphi}(x + \mathcal{C}(a_1)) = \varphi(x) + \mathcal{C}(a_1)$

для кожного суміжного класу $x+\mathcal{C}(a_1)$ із фактор-простору $L/\mathcal{C}(a_1)$. Оскільки підпростір $\mathcal{C}(a_1)$ є нетривіальним підпростором L, то за теоремою про розмірність трьох просторів фактор-простір $L/\mathcal{C}(a_1)$ має розмірність меншу за k. Далі, цей фактор-простір є примарним простором через те, що для довільного суміжного класу $x+\mathcal{C}(a_1)$ із фактор-простору $L/\mathcal{C}(a_1)$, де x із L, справджуються рівності

$$\big[g(\widehat{\varphi})^s\big](x+\mathcal{C}(a_1)) = \big[g(\varphi)^s\big](x)+\mathcal{C}(a_1) = \bar{0}+\mathcal{C}(a_1) = \mathcal{C}(a_1).$$

Це означає, що многочлен $g(\lambda)^s$ є анулятором фактор-простору $L/\mathcal{C}(a_1)$. А оскільки мінімальний многочлен лінійного оператора є дільником будь-якого анулятора лінійного простору і $g(\lambda)$ є незвідним многочленом, то мінімальний многочлен лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ дорівнює $g(\lambda)^t$ для деякого натурального числа t, не більшого за s. За припущенням математичної індукції фактор-простір $L/\mathcal{C}(a_1)$ є або примарним циклічним простором $\mathcal{C}\big(a_2'+\mathcal{C}(a_1)\big)$, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів $\mathcal{C}\big(a_2'+\mathcal{C}(a_1)\big)$, $\mathcal{C}\big(a_3'+\mathcal{C}(a_1)\big)$, $\ldots$, $\mathcal{C}\big(a_q'+\mathcal{C}(a_1)\big)$ для деяких векторів a_2', a_3', $\ldots$, a_q' із L та деякого натурального числа q.

Доведемо, що для кожного кожного $i\in\{2,\ 3,\ \ldots,\ q\}$ у суміжному класі $a_i'+\mathcal{C}(a_1)$ знайдеться представник a_i, мінімальний анулятор якого співпадатиме з мінімальним анулятором самого суміжного класу як вектора фактор-простору $L/\mathcal{C}(a_1)$. Нехай $g(\lambda)^{t_i}$ є мінімальним анулятором суміжного класу $a_i'+\mathcal{C}(a_1)$ фактор-простору $L/\mathcal{C}(a_1)$, який є примарним простором з мінімальним анулятором $g(\lambda)^t$. Тоді за теоремою 4 многочлен $g(\lambda)^{t_i}$ ділить многочлен $g(\lambda)^t$ і, як наслідок, $t_i\le t$. Далі, оскільки $\big[g(\widehat{\varphi})^{t_i}\big](a_i'+\mathcal{C}(a_1)) = \mathcal{C}(a_1)$, то $\big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i')\in\mathcal{C}(a_1)$. Звідси $\big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i') = \big[h(\varphi)\big](a_1)$ для деякого многочлена $h(\lambda)$ із кільця многочленів $P[\lambda]$. Беручи до уваги той факт, що многочлен $g(\lambda)^s$ є анулятором кожного вектора із L, можна стверджувати, що з одного боку $\big[g(\varphi)^s\big](a_i')=\bar{0}$, а з іншого

$$\begin{aligned}\big[g(\varphi)^s\big](a_i') = \big[g(\varphi)^{s-t_i}g(\varphi)^{t_i}\big](a_i') = \big[g(\varphi)^{s-t_i}\big]\big(\big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i')\big) = \\ = \big[g(\varphi)^{s-t_i}\big]\big(\big[h(\varphi)\big](a_1)\big) = \big[g(\varphi)^{s-t_i}h(\varphi)\big](a_1).\end{aligned}$$

Тому $\big[g(\varphi)^{s-t_i}h(\varphi)\big](a_1)=\bar{0}$, а через це многочлен $g(\lambda)^{s-t_i}h(\lambda)$ є анулятором вектора a_1. Отже він ділиться на мінімальний анулятор цього вектора, тобто на $g(\lambda)^s$. Таке можливо лише у разі, коли многочлен $h(\lambda)$ є кратним многочлену $g(\lambda)^{t_i}$, тобто $h(\lambda)=g(\lambda)^{t_i}h_1(\lambda)$ для деякого многочлена $h_1(\lambda)$ із $P[\lambda]$. Таким чином,

$$\big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i') = \big[h(\varphi)\big](a_1) = \big[g(\varphi)^{t_i}\big]\big(\big[h_1(\varphi)\big](a_1)\big). \tag{7}$$

Розглянемо вектор $a_i = a_i' - \big[h_1(\varphi)\big](a_1)$ із L. Очевидно він належить суміжному класу $a_i' + \mathcal{C}(a_1)$ і тому $a_i' + \mathcal{C}(a_1) = a_i + \mathcal{C}(a_1)$. Враховуючи рівність (7), для вектора a_i справджується наступна рівність

$$\begin{aligned}\big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i) = \big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i' - \big[h_1(\varphi)\big](a_1)) = \\ = \big[g(\varphi)^{t_i}\big](a_i') - \big[g(\varphi)^{t_i}\big]\big(\big[h_1(\varphi)\big](a_1)\big) = \bar{0}.\end{aligned}$$

Це означає, що многочлен $g(\lambda)^{t_i}$ є анулятором вектора a_i. З іншого боку, очевидно, будь-який анулятор цього вектора є анулятором суміжного класу $a_i + \mathcal{C}(a_1)$, що теж саме суміжного класу $a_i' + \mathcal{C}(a_1)$. Тому мінімальний анулятор вектора a_i дорівнює мінімальному анулятора суміжного класу $a_i' + \mathcal{C}(a_1)$.

Тепер покажемо від протилежного, що із вибору представника a_i суміжного класу $a_i' + \mathcal{C}(a_1)$ для кожного $i \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ q\}$ слідує, що перетином циклічних просторів $\mathcal{C}(a_i)$ і $\mathcal{C}(a_1)$ є нульовий підпростір L. Нехай для деякого $i \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ q\}$ вектор b є ненульовим вектором із перетину $\mathcal{C}(a_i) \cap \mathcal{C}(a_1)$. Тоді за теоремою про будову циклічного простору існує ненульовий многочлен $u(\lambda)$ із $P[\lambda]$, степінь якого менший за степінь мінімального анулятора $g(\lambda)^{t_i}$ вектора a_i, що $b = \big[u(\varphi)\big](a_i)$. Оскільки $b \in \mathcal{C}(a_1)$, то з одного боку $b + \mathcal{C}(a_1) = \mathcal{C}(a_1)$, а з іншого

$$b + \mathcal{C}(a_1) = \big[u(\varphi)\big](a_i) + \mathcal{C}(a_1) = \big[u(\widehat{\varphi})\big]\big(a_i + \mathcal{C}(a_1)\big).$$

Отже, многочлен $u(\lambda)$ є анулятором суміжного класу $a_i + \mathcal{C}(a_1)$, що неможливо через вибір представника a_i цього класу. У свою чергу нульовий перетин $\mathcal{C}(a_i) \cap \mathcal{C}(a_1)$ означає, що будь-який вектор із суміжного класу, який належить циклічному простору $\mathcal{C}\big(a_i + \mathcal{C}(a_1)\big)$ однозначно представляється у вигляді суми вектора із $\mathcal{C}(a_i)$ та $\mathcal{C}(a_1)$.

Насамкінець доведемо, що L є прямою сумою

$$\mathcal{C}(a_1) \oplus \mathcal{C}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}(a_q)$$

примарних циклічних просторів $\mathcal{C}(a_1)$, $\mathcal{C}(a_2)$, $\ldots$, $\mathcal{C}(a_q)$. Оскільки

$$L/\mathcal{C}(a_1) = \mathcal{C}\big(a_2 + \mathcal{C}(a_1)\big) \oplus \mathcal{C}\big(a_3 + \mathcal{C}(a_1)\big) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}\big(a_q + \mathcal{C}(a_1)\big),$$

то для будь-якого вектора a із L суміжний клас $a + \mathcal{C}(a_1)$ однозначно представляється у вигляді суми суміжних класів

$$a + \mathcal{C}(a_1) = \big(b_2 + \mathcal{C}(a_1)\big) + \big(b_3 + \mathcal{C}(a_1)\big) + \cdots + \big(b_q + \mathcal{C}(a_1)\big),$$

де b_i деякий, як раніше зазначалося, однозначно визначений вектор із $\mathcal{C}(a_i)$ для кожного $i \in \{2,\ 3,\ \dots,\ q\}$. Звідси слідує, що вектор $b_1 = a - (b_2 + b_3 + \dots + b_q)$ належить циклічному простору $\mathcal{C}(a_1)$. Як наслідок

$$a = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_q \in \mathcal{C}(a_1) + \mathcal{C}(a_2) + \dots + \mathcal{C}(a_q),$$

тобто L є прямою сумою примарних циклічних просторів $\mathcal{C}(a_1), \mathcal{C}(a_2), \dots, \mathcal{C}(a_q)$. Теорема доведена.

Із двох попередніх теорем про примарний розклад та про розклад примарного простору, як наслідок, випливає наступна теорема.

Теорема 13 (основна теорема про лінійні простори з оператором)**.** *Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.*

Вправи для самостійної роботи

1. Вияснити, чи існує базис дійсного чотиривимірного векторного простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів лінійного оператора φ цього простору, якщо

$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = (4x_4, 3x_3, 2x_2, x_1)$$

для кожного вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) із $\mathbb{R}^4$. Якщо такий базис існує, то вкажіть його.

2. Вияснити, чи існує базис дійсного чотиривимірного векторного простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів лінійного оператора φ цього простору, якщо

$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_3, 2x_4)$$

для кожного вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) із $\mathbb{R}^4$. Якщо ж такий базис існує, то вкажіть його.

3. Нехай φ є лінійним оператором чотиривимірного векторного простору $\mathbb{R}^4$, який задається матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

у канонічному базисі $\mathbb{R}^4$. Вияснити, чи існує базис векторного простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів лінійного оператора φ. Якщо ж такий базис існує, то вкажіть його.

4. Нехай φ є лінійним оператором лінійного простору L над полем P. Довести, що сума і перетин інваріантних відносно φ підпросторів в L є також інваріантним підпростором відносно φ.

5. Довести, що ядро і образ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є інваріантними підпросторами відносно φ.

6. Довести, що лінійна оболонка будь-якої системи векторів, що складається з власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є інваріантними підпросторами відносно φ.

7. Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то підпростір M лінійного простору L є інваріантним відносно φ тоді і тільки тоді, коли він є інваріантним відносно оберненого лінійного оператора φ^{-1}.

8. Довести, що якщо підпростір M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ є інваріантним, то для будь-якого многочлена $f(\lambda)$ над полем P підпростір M є інваріантним відносно лінійного оператора $f(\varphi)$.

9. Нехай для лінійних операторів φ і ψ лінійного простору L справджується рівність $\varphi\psi = \psi\varphi$. Довести, що ядро і образ лінійного оператора ψ є інваріантними підпросторами відносно лінійного оператора φ.

10. Нехай для лінійних операторів φ і ψ лінійного простору L над полем комплексних чисел справджується рівність $\varphi\psi = \psi\varphi$. Довести, що лінійні оператори φ і ψ мають спільний власний вектор.

11. Знайти всі інваріантні підпростори лінійного простору $\mathbb{R}[x]_n$ всіх многочленів від змінної x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує деяке невід'ємне ціле число n, відносно лінійного оператора диференціювання.

12. Знайти всі інваріантні відносно лінійного оператора A тривимірного евклідового простору L, такого шо $A(x) = [x, a]$, де a — фіксований вектор із L, $[x, a]$ — векторний добуток векторів x і a із L. Для кожного інваріантного підпростору M відносно лінійного оператора A визначити індукований лінійний оператор $\widehat{A}$ фактор-простору L/M, який визначається за правилом із теореми 1.

13. Знайти інваріантний підпростір розмірності 2 дійсного тривимірного векторного $\mathbb{R}^3$ з лінійним оператором φ, який у канонічному базисі цього простору задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Знайти всі інваріантні підпростори дійсного тривимірного векторного $\mathbb{R}^3$ з лінійним оператором φ, який у канонічному базисі цього простору задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Знайти мінімальний многочлен $g(\lambda)$ лінійного оператора φ тривимірного векторного $\mathbb{R}^3$, який у канонічному базисі цього простору задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розкласти векторний просір $\mathbb{R}^3$ у пряму суму інваріантних підпросторів відповідно до розкладу многочлена $g(\lambda)$ на взаємно прості множники вигляду $(\lambda - \alpha)^k$.

16. Нехай скінченновимірний лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_q, \qquad L = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r.$$

Довести, що тоді $r = q$ і між множиною $\{M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_q\}$ прямих доданків одного розкладу і множиною $\{N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_q\}$ прямих доданків другого розкладу існує бієктивне відображення (взаємно однозначна відповідність), при якому характеристичні многочлени обмеження оператора φ на відповідних доданках співпадають.

3.2 Нормальні форми Фробеніуса і Жордана

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число, A і B — деякі квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо (див. стор. 79), що матриця B називається подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P така, що $B = S^{-1}AS$. А також те, що матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць задовольняє наступним властивостям:

1) $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;
2) якщо $A \simeq B$, то $B \simeq A$;
3) якщо $A \simeq B$ і $B \simeq C$, то $A \simeq C$,

Тому це відношення є відношенням еквівалентності (див. вправу 1 для самостійної роботи у кінці цього пункту). Таким чином множина всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються, тобто їх перетин є порожньою множиною. Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати по одній матриці, то домовляємося говорити, що нами задана множина, так званих *нормальних форм*. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм. Однією із нормальних форм матриць є *нормальна форма Фробеніуса* (НФФ). Перейдемо до її визначення.

Означення 1. Нехай

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

— многочлен над полем P натурального степеня s із старшим коефіцієнтом 1 та іншими коефіцієнтами α_0, α_1, $\ldots$, α_{s-1} із поля P. Матриця порядку s над полем P

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix}$$

називається *супровідною матрицею многочлена* $f(\lambda)$.

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$ будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2. Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається *кліткою Фробеніуса.*

Означення 3. *Нормальною формою Фробеніуса* називається матриця блочно-діагонального вигляду

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}} \end{pmatrix},$$

де $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_k(\lambda)$ — незвідні над полем P многочлени із старшими коефіцієнтами 1, а $t_1, t_2, \dots, t_k$ — деякі натуральні числа.

Теорема 1. *Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.*

Доведення. Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P, наприклад n-вимірний векторний простір P^n. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L такий, що матриця цього оператора у базисі a_1, $a_2, \dots, a_n$ співпадала б з матрицею A. За основною теоремою про лінійні простори з оператором ми можемо розкласти лінійний простір L з лінійним оператором φ у пряму суму примарних циклічних підпросторів

$$L = C(b_1) \oplus C(b_2) \oplus \dots \oplus C(b_s),$$

породжених відповідно деякими векторами $b_1, b_2, \dots, b_s$ із L для деякого натурального s.

Виберемо новий базис лінійного простору L, так би мовити, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, $C(b_3), \dots, C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \dots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),\ b_2,\ \varphi(b_2),\ \dots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),\ \dots$$
$$\dots,\ b_s,\ \varphi(b_s),\ \dots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

За теоремою про будову циклічного простору матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса для кожного натурального числа i, що не перевищує s. Тому матриця оператора φ у новому базисі є нормальною формою Фробеніуса, яка подібна матриці A. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нормальна форма Фробеніуса подібна деякій іншій нормальній формі Фробеніуса тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакових кліток Фробеніуса, розташованих можливо по різному вздовж діагоналей.*

Доведення. Нехай A і B — дві нормальні форми Фробеніуса порядку n, друга з яких подібна першій і S — оборотна матриця така, що $B = S^{-1}AS$. Аналогічно доведенню теореми 1 розглянемо лінійний простір розмірності n над полем P з лінійним оператором φ, який задається матрицею A у деякому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору. У лінійному просторі L розглянемо ще один базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, матрицею переходу до якого від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є матриця S. Тоді матриця B є матрицею лінійного оператора φ у новому базисі. Оскільки обидві матриці A і B є нормальними формами Фробеніуса, то із доведення попередньої теореми слідує, що обидва базиси $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ визначають два розклади лінійного простору L з оператором φ у прямі суми примарних циклічних підпросторів. Матриці обмежень лінійного оператора φ на цих підпросторах є клітками Фробеніуса, з яких складаються матриці A і B. У свою чергу нагадаємо (див. теорему про будову циклічного простору), що клітка Фробеніуса визначається своїм характеристичним многочленом однозначно. Завершення доведення слідує із теореми про однозначність розкладу простору з операторами в пряму суму примарних циклічних підпросторів (див. останню вправу для самостійної роботи попереднього пункту).

З усього вище сказаного випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Дві квадратні матриці над полем P подібні одна одній тоді і тільки тоді, коли нормальні форми Фробеніуса цих матриць співпадають з точністю до порядку слідування кліток Фробеніуса вздовж діагоналей цих нормальних форм.*

Означення 4. Нехай α — деякий елемент поля P, s — деяке натуральне число. Матриця порядку s над полем P вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

називається *кліткою Жордна.*

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5. Нехай k, s_1, s_2, ..., s_k — деякі натуральні числа; α_1, α_2, ... α_k — деякі елементи поля P (не обов'язково всі попарно різні, причому як s_1, s_2, ..., s_k, так і α_1, α_2, ... α_k). Матриця блочно-діагонального вигляду

$$\begin{pmatrix} J_{s_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{s_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{s_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

називається *нормальною формою Жордана.*

Теорема 4. *Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від змінної λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі a_1, a_2, ..., a_s має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

де $f(\lambda)=(\lambda-\alpha)^s=\lambda^s+\alpha_{s-1}\lambda^{s-1}+\dots+\alpha_1\lambda+\alpha_0$. Тоді $\varphi(a_1)=a_2$, $\varphi(a_2)=a_3$, ..., $\varphi(a_{s-1})=a_s$, $\varphi(a_s)=-\alpha_0a_1-\alpha_1a_2-\dots-\alpha_{s-1}a_s$.

Це означає, що L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\big[(\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_L)^s\big](a_1) = \bar{0}, \qquad \big[(\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_L)^{s-1}\big](a_1) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$b_1 = \big[(\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_L)^{s-1}\big](a_1),\ b_2 = \big[(\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_L)^{s-2}\big](a_1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ b_{s-1} = \big[(\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_L)\big](a_1),\ b_s = a_1.$$

Ця система векторів є базисом лінійного простору L. Матрицею оператора φ в цьому базисі є клітка Жордана $J_s(\alpha)$. Оскільки супровідна матриця $\widetilde{f(\lambda)}$ многочлена $(\lambda - \alpha)^s$ так само, як і жорданова клітка $J_s(\alpha)$, є матрицею лінійного оператора φ лінійного простору L, то ці матриці подібні одна одній. Теорема доведена.

Означення 6. Базис скінченновимірного лінійного простору L з лінійним оператором φ називається *жордановим базисом*, якщо матриця лінійного оператора φ у цьому базисі є нормальною формою Жордана.

Наслідок 1. *Якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною нормальною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.*

Наслідок 2. *Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем у добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.*

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана матриць над алгебраїчно замкненим полем.

Теорема 5 (основна теорема про нормальну форму Жордана)**.** *Нехай P є алгебраїчно замкненим полем. Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Жордана. Дві матриці над полем P подібні тоді і тільки тоді, коли їхні нормальні форми Жордана співпадають з точністю до порядку розташування кліток Жордана вздовж діагоналей цих нормальних форм.*

Приведемо алгоритм відшукання нормальної форми Жордана квадратної матриці над полем P. Нехай n — деяке натуральне число і A — квадратна матриця порядку n над полем P. Якщо для матриці A існує подібна їй нормальна форма Жордана, то позначатимемо її через НФЖ(A). Очевидно у випадку коли $n = 1$, то НФЖ$(A) = A$. Припустимо, що $n > 1$ і, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а $k, t_1, t_2, \ldots, t_k$ — деякі натуральні числа.

Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2, \quad (A - \alpha_i E)^3, \quad \ldots\ ,$$

де E — одинична матриця порядку n. Обчислення рангів цих матриць зупиняємо на першому такому кроці $l_i + 1$, що

$$\operatorname{rank}(A - \alpha E)^{l_i+1} = \operatorname{rank}(A - \alpha E)^{l_i}.$$

Нехай

$$r_{i1} = \operatorname{rank}(A - \alpha_i E),\ r_{i2} = \operatorname{rank}(A - \alpha_i E)^2,\ \ldots,\ r_{i\,l_i} = \operatorname{rank}(A - \alpha_i E)^{l_i}.$$

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i):\ \begin{array}{ccccccccc} * & * & \ldots & * & & & & & \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & \ldots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n - r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1} - r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти стовпців цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці, h_{i2} — кількість зірок у 2-му стовпці і т. д.). Поставимо у відповідність діаграмі $\mathcal{D}(\alpha_i)$ наступну нормальну форму Жордана:

$$J(\alpha_i) = \begin{pmatrix} J_{h_{i1}}(\alpha_i) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{h_{i2}}(\alpha_i) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{h_{iq_i}}(\alpha_i) \end{pmatrix},$$

де q_i — число стовпців діаграми $\mathcal{D}(\alpha_i)$. Матриця $J(\alpha_i)$ містить всі клітки Жордана НФЖ(A), в яких на діагоналі знаходиться елемент α_i. Тому блочно-діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Зокрема розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Характеристичний многочлен матриці A має три корені, враховуючи їх кратність. Нехай α_1, α_2, α_3 — корені характеристичного многочлена матриці A. В залежності від кратностей цих коренів будемо мати три випадки, кожен з яких відповідно матиме один, два, три підвипадки:

1) α_1, α_2, α_3 — попарно різні. Тоді

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. Якщо $\operatorname{rank}(A - \alpha_1 E) = 1$, то

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Якщо ж $\operatorname{rank}(A - \alpha_1 E) = 2$, то

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Тоді або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $\mathrm{rank}(A-\alpha E)=1$, або

$$\text{НФЖ}(A)=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $\mathrm{rank}(A-\alpha E)=2$.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що відношення «бути подібними» на множині всіх квадратних матриць над деяким полем є відношенням еквівалентності.

2. Нехай A і B дві квадратні матриці над полем P не обов'язково однакового порядку. Показати, що:

1) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$;

2) якщо $A \simeq A'$, то $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

3. Довести, що характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}$, $\widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}$, $\ldots$, $\widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ дорівнює добутку $p_1(\lambda)^{t_1}p_2(\lambda)^{t_2}\cdots p_k(\lambda)^{t_k}$.

4. Довести, що дійсний двовимірний векторний простір $\mathbb{R}^2$, в якому діє лінійний оператор φ такий, що

$$\varphi\big((x_1,x_2)\big)=(11x_1+4x_2,\ -4x_1+3x_2)$$

для будь-якого вектора (x_1,x_2) із $\mathbb{R}^2$, має жордановий базис. Знайти цей базис і матрицю лінійного оператора φ у цьому базисі.

5. Довести, що дійсний тривимірний векторний простір $\mathbb{R}^3$, в якому діє лінійний оператор φ такий, що

$$\varphi\big((x_1,x_2,x_3)\big)=(5x_1-9x_2-4x_3,\ 6x_1-11x_2-5x_3,\ -7x_1+13x_2+6x_3)$$

для будь-якого вектора (x_1,x_2,x_3) із $\mathbb{R}^3$, має жордановий базис. Знайти цей базис і матрицю лінійного оператора φ у цьому базисі.

6. Довести, що дійсний чотиривимірний векторний простір $\mathbb{R}^4$, в якому діє лінійний оператор φ такий, що

$$\varphi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big)=(3x_1+x_2,\ 2x_2+x_3,\ 2x_3+x_4,\ -x_1-x_2-x_3-x_4)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) із $\mathbb{R}^4$, має жордановий базис. Знайти цей базис і матрицю лінійного оператора φ у цьому базисі.

7. Знайти жордановий базис комплексного тривимірного векторного простору $\mathbb{C}^3$, в якому діє лінійний оператор ψ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (4x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_1 + x_2 - 2x_3,\ x_1 + x_2 + 4x_3)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{C}^3$.

8. Знайти жордановий базис раціонального тривимірного векторного простору $\mathbb{Q}^3$, в якому діє лінійний оператор τ такий, що

$$\tau\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ 5x_1 - x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + x_2 + 2x_3)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{Q}^3$. Виписати матрицю лінійного оператора τ у знайденому базисі.

9. Знайти жордановий базис раціонального тривимірного векторного простору $\mathbb{Q}^3$, в якому діє лінійний оператор τ такий, що

$$\tau\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (3x_1 - x_2 + x_3,\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3,\ -2x_1 + 2x_2)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{Q}^3$. Виписати матрицю лінійного оператора τ у знайденому базисі.

10. Знайти жордановий базис раціонального чотиривимірного векторного простору $\mathbb{Q}^4$, в якому діє лінійний оператор τ такий, що

$$\tau\big((x_1, x_2, x_3, x_4)\big) = (-5x_3 + 3x_4,\ -3x_3 + x_4,\ -5x_1 + 3x_2,\ -3x_1 + x_2)$$

для будь-якого вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) із $\mathbb{Q}^4$. Виписати матрицю лінійного оператора τ у знайденому базисі.

3.3 λ-матриці і їх використання для знаходження нормальних форм

3.3.1 Еквівалентність λ-матриць

Нехай P — деяке поле, $P[\lambda]$ — кільце многочленів над полем P від змінної λ.

Означення 1. Матрицю, елементами якої є многочлени із $P[\lambda]$, будемо називати *многочленною матрицею* або ж λ-*матрицею.*

Надалі будемо розглядати тільки квадратні λ-матриці. Аналогічно, як у випадку з матрицями над числовими полями, введемо в розгляд елементарні перетворення над рядками чи стовпцями λ-матриць.

Будемо говорити, що λ-матриця B отримана із λ-матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (I), якщо всі рядки (стовпці) λ-матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) λ-матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) поміняли місцями.

Якщо в λ-матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в λ-матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) λ-матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке многочлен із $P[\lambda]$, то будемо говорити, що λ-матриця B отримана із λ-матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (II).

Нарешті, будемо говорити, що λ-матриця B отримана із λ-матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (III), якщо всі рядки (стовпці) λ-матриці B, крім i-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) λ-матриці A, а i-ий рядок (стовпець) λ-матриці B є добутком деякого ненульового елемента поля P на i-ий рядок (стовпець) λ-матриці A.

Означення 2. λ-матриця B називається *еквівалентною* λ-матриці A, якщо її можна одержати із λ-матриці A шляхом скінченного числа послідовних елементарних перетворень.

Якщо λ-матриця B еквівалентна деякій λ-матриці A, то писатимемо $B \sim A$.

Зауваження 1. Бінарне відношення еквівалентності λ-матриць, аналогічно подібності квадратних матриць, задовольняє рефлексивній, симетричній та транзитивній властивостям. Тому множина всіх квадратних λ-матриць порядку n над полем P розбивається на класи еквівалентності, що не перетинаються.

Означення 3. Нехай P — поле, n — деяке натуральне число. λ-матриця порядку n над полем P називається *нормальною формою Сміта* або *канонічною λ-матрицею*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1) λ-матриця є діагональною, тобто матрицею вигляду

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{n-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

   де $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ..., $e_n(\lambda) \in P[\lambda]$;

2) кожен ненульовий многочлен серед многочленів $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, $e_3(\lambda)$, ..., $e_{n-1}(\lambda)$ ділить наступний, розміщений за ним на діагоналі, тобто для довільного $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, якщо $e_i(\lambda) \neq 0$, то $e_i(\lambda) | e_{i+1}(\lambda)$;

3) старший коефіцієнт кожного з ненульових многочленів серед $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, ..., $e_n(\lambda)$ дорівнює 1.

Прикладами нормальних форм Сміта над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел є нульова матриця, одинична матриця довільних порядків або така λ-матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3-9\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Будь-яка квадратна λ-матриця над полем P є еквівалентною деякій нормальній формі Сміта.*

Доведення. Теорему будемо доводити методом математичної індукції за порядком, розглядуваних λ-матриць. Розглянемо довільну λ-матрицю першого порядку $A = (a(\lambda))$, де $a(\lambda)$ — деякий многочлен із $P[\lambda]$. Якщо $a(\lambda) = 0$ або ж старший коефіцієнт многочлена $a(\lambda)$ дорівнює 1, то A вже є λ-матрицею нормальної форми Сміта. У іншому випадку помножимо рядок матриці A на обернений елемент до старшого коефіцієнта многочлена $a(\lambda)$ і ми одержимо за допомогою елементарного перетворення нормальну форму Сміта.

Припустимо, що твердження теореми справджується для всіх λ-матриць, порядок яких менший за деяке фіксоване натуральне число n. Розглянемо довільну λ-матрицю A порядку n. Якщо A є нульовою матрицею, то вона вже є канонічною λ-матрицею. Нехай A — ненульова матриця, тобто деякий елемент матриці, скажімо, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю, не дорівнює нулю, де $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Якщо поміняти спочатку 1-й та i-ий рядки λ-матриці A, а потім у одержаній матриці — 1-й та j-ий стовпці, ми отримаємо матрицю, що еквівалентна λ-матриці A і яка містить у першому рядку і першому стовпцю ненульовий елемент.

Позначимо через Ω множину всіх матриць, що еквівалентні λ-матриці A. А через ω — множину всіх степенів ненульових многочленів, що знаходиться у першому рядку і першому стовпцю всеможливих λ-матриць із множини Ω. Оскільки множина ω є підмножиною множини невід'ємних цілих чисел, то в ній існує найменший елемент k. Нехай B — матриця із множини Ω, яка містить у першому рядку і першому стовпцю многочлен степеня k і

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажемо від протилежного, що для довільного $i \in \{2,\ 3,\ \dots,\ n\}$ многочлени $b_{i1}(\lambda)$ та $b_{1i}(\lambda)$ діляться на $b_{11}(\lambda)$. Припустимо, що для деякого $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ многочлени $b_{i1}(\lambda)$ не ділиться на $b_{11}(\lambda)$. Нехай $q(\lambda)$ — частка, а $r(\lambda)$ — остача при діленні $b_{i1}(\lambda)$ на $b_{11}(\lambda)$. Тоді $b_{i1}(\lambda) = b_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$, де $r(\lambda) \neq 0$ і степінь многочлена $r(\lambda)$ менша за k. Додамо до i-го рядка λ-матриці B перший, помножений на $-q(\lambda)$, а далі у одержаній матриці поміняємо місцями перший та i-ий рядки. Одержимо матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} r(\lambda) & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна λ-матриці B, а отже за транзитивною властивістю еквівалентності і λ-матриці A. Тому ця матриця належить множині

Ω, а це суперечить вибору матриці B. Аналогічно одержимо суперечність, якщо для деякого $i \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ многочлени $b_{1i}(\lambda)$ не ділиться на $b_{11}(\lambda)$.

Далі додамо до 2-го рядка λ-матриці B перший, помножений на многочлен, протилежний до частки при діленні $b_{21}(\lambda)$ на $b_{11}(\lambda)$. Потім у одержаній матриці додамо до 3-го рядка перший, помножений на многочлен, протилежний до частки при діленні $b_{31}(\lambda)$ на $b_{11}(\lambda)$ і т. д. Аналогічні перетворення виконаємо над стовпцями. У результаті одержимо матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \ldots & b'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(\lambda) & \ldots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Помножимо перший рядок цієї матриці на обернений елемент до старшого коефіцієнта многочлена $b_{11}(\lambda)$. Одержимо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \ldots & b'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(\lambda) & \ldots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \in \Omega,$$

де $e_1(\lambda)$ — многочлен степеня k із $P[\lambda]$ із старшим коефіцієнтом 1.

За індуктивним припущенням λ-матриця

$$\begin{pmatrix} b'_{22}(\lambda) & \ldots & b'_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_{n2}(\lambda) & \ldots & b'_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1}$$

порядку $n-1$ еквівалентна деякій нормальній формі Сміта

$$\begin{pmatrix} e_2(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Починаючи з другого рядка та другого стовпця λ-матриці C, здійснимо елементарні перетворення над відповідними її рядками та стовпцями, аналогічні то тих елементарних перетворень, за допомогою яких можна одержати матрицю (2) із матриці (1). Тоді одержимо матрицю

$$K = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Для завершення доведення теореми досить показати, що многочлен $e_1(\lambda)$ ділить многочлен $e_2(\lambda)$. Якщо це не так, то знову ж таки нехай $\bar{q}(\lambda)$ — частка, а $\bar{r}(\lambda)$ — остача при діленні $e_2(\lambda)$ на $e_1(\lambda)$. Тоді $e_2(\lambda) = e_1(\lambda)\bar{q}(\lambda) + \bar{r}(\lambda)$, де $\bar{r}(\lambda) \neq 0$ і степінь многочлена $\bar{r}(\lambda)$ менша за k. Додамо до першого рядка матриці K другий, а далі до другого стовпця нової матриці перший, помножений на $-\bar{q}(\lambda)$ і поміняємо місцями перший і другий стопці. Одержимо λ-матрицю

$$\begin{pmatrix} \bar{r}(\lambda) & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна λ-матриці A. Тому ця матриця належить множині Ω, а це знову ж таки суперечить вибору матриці B. Теорема доведена.

Нехай A — деяка λ-матриця порядку n над полем P, k — деяке натуральне число, не більше за n. Якщо хоча б один із мінорів k-го порядку λ-матриці A не дорівнює нулю, то позначимо через $\mathcal{D}_k(A)$ найбільший спільний дільник всіх мінорів k-го порядку λ-матриці A. Вважатимемо, що многочлен $\mathcal{D}_k(A)$ має старший коефіцієнт 1. Якщо ж всі мінори k-го порядку λ-матриці A дорівнюють нулю, то за означенням $\mathcal{D}_k(A) = 0$.

Очевидно, якщо для деякого $k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n-1\}$ справджується рівність $\mathcal{D}_k(A) = 0$, то за теоремою Лапласа також справджуються рівності

$$\mathcal{D}_{k+1}(A) = \ldots = \mathcal{D}_n(A) = 0.$$

Теорема 2. *Нехай A і B — деякі λ-матриці порядку n над полем P. Якщо λ-матриця B еквівалентна λ-матриці A, то для довільного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ справджується рівність $\mathcal{D}_k(B) = \mathcal{D}_k(A)$.*

Доведення. Зрозуміло, що теорему досить довести у випадку, коли матриця B одержана із матриці A шляхом одного елементарного перетворення. У подальшому ідея доведення теореми базується на властивостях детермінантів та властивостях подільності многочленів. Розглянемо деякі мінори M_A і M_B порядку k λ-матриць A

і B, що знаходяться у рядках і стовпцях з однаковими номерами відповідно у A і B. Якщо елементарне перетворення здійснено над рядками чи стовпцями, що у входять у згаданий вище перелік рядків чи стовпців, то M_A можливо відрізняється від M_B лише ненульовим множником із поля P. У протилежному випадку мінор M_B можна представити у вигляді суми деяких мінорів M'_A і M''_A матриці A. Добре відомо, що спільний дільник мінорів M'_A і M''_A є дільником їх суми, а отже і мінору M_B. Через це найбільший спільний дільник всіх мінорів порядку k матриці A ділить кожен із мінорів порядку k матриці B. Оскільки для будь-якого елементарного перетворення λ-матриці існує обернене, то справджується і обернене твердження. Рекомендуємо читачеві ретельніше самостійно звершити доведення теореми.

Теорема 3. *Будь-яка λ-матриця порядку n над полем P еквівалентна єдиній нормальній формі Сміта. Причому, якщо*

$$K = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

— нормальна форма Сміта, що еквівалентна λ-матриці A, то

$$e_1(\lambda) = \mathcal{D}_1(A), \quad e_2(\lambda) = \frac{\mathcal{D}_2(A)}{\mathcal{D}_1(A)}, \quad \dots, \quad e_k(\lambda) = \frac{\mathcal{D}_k(A)}{\mathcal{D}_{k-1}(A)},$$
$$e_{k+1}(\lambda) = \dots = e_n(\lambda) = 0,$$

де k — таке натуральне число, що $\mathcal{D}_k(A) \neq 0$, а $\mathcal{D}_{k+1}(A) = 0$.

Доведення. Нехай A — деяка задана λ-матриця порядку n над полем P. За теоремою 1 λ-матриця A еквівалентна деякій канонічній матриці. Нехай цією нормальною формою Сміта є матриця (3). За теоремою 2 для довільного натурального i не більшого за n справджується рівність $\mathcal{D}_i(K) = \mathcal{D}_i(A)$. Для будь-якого натурального i не більшого за n мінор i-го порядку матриці K або дорівнює 0, або дорівнює

$$e_{j_1}(\lambda)e_{j_2}(\lambda)\cdots e_{j_i}(\lambda),$$

для деяких натуральних j_1, j_2, $\dots j_i$ таких що

$$j_1 < j_2 < \dots j_i \leq n.$$

Нехай k — таке натуральне число, що $e_k(\lambda) \neq 0$, а $e_{k+1}(\lambda) = 0$. Тоді, оскільки

$$e_1(\lambda) \mid e_{j_1}(\lambda), \quad e_2(\lambda) \mid e_{j_2}(\lambda), \quad \ldots, \quad e_i(\lambda) \mid e_{j_i}(\lambda)$$

для довільного натурального i, не більшого за k, то

$$\mathcal{D}_i(K) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_i(\lambda).$$

Звідси

$$e_1(\lambda) = \mathcal{D}_1(K) = \mathcal{D}_1(A),$$
$$e_2(\lambda) = \frac{\mathcal{D}_2(K)}{\mathcal{D}_1(K)} = \frac{\mathcal{D}_2(A)}{\mathcal{D}_1(A)}, \ \ldots, \ e_k(\lambda) = \frac{\mathcal{D}_k(K)}{\mathcal{D}_{k-1}(K)} = \frac{\mathcal{D}_k(A)}{\mathcal{D}_{k-1}(A)},$$
$$e_{k+1}(\lambda) = \mathcal{D}_k(A) = 0, \ \ldots, \ e_n(\lambda) = \mathcal{D}_n(A) = 0.$$

Теорема доведена.

Означення 4. Нехай

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

— нормальна форма Сміта, що еквівалентна деякій заданій λ-матриці A порядку n над полем P. Многочлени $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda)$, $\ldots$, $e_n(\lambda)$ називаються *інваріантними множниками матриці* A.

3.3.2 Унімодулярні λ-матриці

Означення 5. Квадратна λ-матриця A порядку n називається *унімодулярною λ-матрицею*, якщо вона еквівалентна одиничній матриці або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Прикладами унімодулярних λ-матриць є наступні матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3\lambda^2 + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так звані, матриці елементарних перетворень λ-матриць також є прикладами унімодулярних λ-матриць.

Означення 6. *Матрицями елементарних перетворень* називаються наступні матриці:

1) S_{ij} — квадратна матриця порядку n, що одержується із одиничної матриці порядку n перестановкою i-го та j-го рядків, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ та $i \neq j$;

2) $T_{ij}(f(\lambda))$ — квадратна матриця порядку n, в i-му рядку та j-му стовпці якої стоїть многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$, де $i \neq j$, а всі інші елементи цієї матриці такі самі як відповідні елементи одиничної матриці порядку n;

3) $Q_i(\alpha)$ — квадратна матриця порядку n, на діагоналі якої на i-му місці стоїть ненульовий елемент α поля P, а всі інші елементи матриці $Q_i(\alpha)$ такі ж як відповідні елементи одиничної матриці порядку n.

Не складно показати, що для довільної λ-матриці A порядку n, будь-яких різних індексів i, j із $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, будь-якого многочлена $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ та будь-якого ненульового елемента α поля P справджуються наступні твердження:

1) добуток $S_{ij}A$ (добуток AS_{ij}) є матрицею, що одержується з матриці A перестановкою i-го та j-го рядків (стовпців) матриці A;

2) добуток $T_{ij}(f(\lambda))A$ є матрицею, що одержується з матриці A додаванням до i-го рядка матриці A її j-го рядка, помноженого на $f(\lambda)$;

3) добуток $AT_{ij}(f(\lambda))$ є матрицею, що одержується з матриці A додаванням до j-го стовпця матриці A її i-го стовпця, помноженого на $f(\lambda)$;

4) добуток $Q_i(\alpha)A$ (добуток $AQ_i(\alpha)$) є матрицею, що одержується з матриці A множенням на α рядка (стовпця) з номером i матриці A;

5) $S_{ij} = T_{ij}(1)T_{ij}(-1)T_{ij}(1)Q_i(-1)$.

Рекомендуємо читачеві самостійно переконатися у істинності цих тверджень.

Теорема 4. *Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли цю матрицю можна представити у вигляді добутку матриць елементарних перетворень.*

Доведення. Доведемо спочатку достатність. Нехай λ-матриця A є добутком деяких матриць елементарних перетворень U_1, U_2, U_3, …, U_k. Тоді матрицю A можна представити у вигляді добутку

$$A = \Big(\cdots \big((E \cdot U_1) U_2 \big) \cdots U_{k-1} \Big) U_k, \tag{4}$$

де E — одинична матриця такого ж порядку як і матриця A. Із рівності (4) слідує, що матрицю A можна одержати із одиничної матриці E шляхом послідовного виконання елементарних перетворень над стовпцями, що відповідають матрицям $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Це в свою чергу означає, що λ-матриця A еквівалентна одиничній матриці E. Отже, за означенням A є унімодулярною λ-матрицею.

Доведемо тепер необхідність. Нехай λ-матриця A є унімодулярною λ-матрицею. За означенням унімодулярної λ-матриці A еквівалентна одиничній матриці і навпаки. Тому за допомогою деяких елементарних перетворень над рядками або стовпцями λ-матриць із одиничної матриці E можна одержати λ-матрицю A. Нехай U_1, U_2, …, U_k — матриці відповідних елементарних перетворень над рядками, а V_1, V_2, …, V_l — матриці відповідних елементарних перетворень над стовпцями, за допомогою яких послідовно одержали матрицю A із E. Незважаючи на порядок виконання елементарних перетворень (чи спочатку над рядками, а потім над стовпцями, чи, скажімо, почергово над рядками та стовпцями), але при цьому зберігаючи порядок послідовності перетворень окремо над рядками та окремо над стовпцями, через те що операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості, ми можемо записати

$$A = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1 E V_1 V_2 \cdots V_{l-1} V_l.$$

Таким чином, A є добутком деяких матриць елементарних перетворень. Теорема доведена.

Теорема 5. *Квадратна λ-матриця A над полем P є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці A є ненульовим елементом поля P.*

Доведення. Якщо A є унімодулярною λ-матрицею порядку n, то A еквівалентна одиничній матриці цього ж порядку. Тому кожен із n інваріантних множників матриці λ-матриці A дорівнює 1. З іншого боку n-й інваріантний множник матриці A дорівнює добутку детермінанта $|A|$ на обернений елемент до старшого коефіцієнта a_0 многочлена $|A|$. Тобто $a_0^{-1}|A| = 1$. Звідси $|A| = a_0 \in P$. Навпаки, якщо $|A| \in P \setminus \{0\}$, то n-й інваріантний множник λ-матриці A, а отже і всі інші її інваріантні множники, дорівнюють 1. Тобто нормальною формою Сміта λ-матриці A є одинична матриця порядку n. Це означає λ-матриця A еквівалентна одиничній матриці.

Теорема 6. *λ-матриця B еквівалентна λ-матриці A тоді і тільки тоді, коли існують унімодулярні λ-матриці S і T такі, що $B = SAT$.*

Доведення. Нехай λ-матриця B еквівалентна λ-матриці A. Тоді за допомогою деяких елементарних перетворень над рядками або стовпцями λ-матриць із λ-матриці A можна одержати λ-матрицю B. Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — матриці відповідних елементарних перетворень над рядками, а $V_1, V_2, \ldots, V_l$ — матриці відповідних елементарних перетворень над стовпцями, за допомогою яких послідовно одержали матрицю B із A. Аналогічно доведенню теореми 4 можна записати

$$B = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1 A V_1 V_2 \cdots V_{l-1} V_l = SAT,$$

де $S = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1$, $T = V_1 V_2 \cdots V_{l-1} V_l$ за теоремою 4 є унімодулярними λ-матрицями.

Достатність теореми доводиться аналогічно необхідності лише у зворотному напрямку. Теорема доведена.

Далі для деякого натурального числа n визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання і множення матриць, та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{5}$$

де k — деяке невід'ємне ціле число, $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (5) є λ-матрицею.

Означення 7. Алгебраїчний вираз вигляду (5) називається *матричним многочленом порядку n над полем P*. Якщо A_k — ненульова матриця, то k називається *степенем* цього *матричного многочлена*, а матриця A_k називається його *старшим матричним коефіцієнтом.*

Наведемо приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки:

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda & 0 & 5\lambda \\ 3\lambda & \lambda^2 & -7\lambda \\ 5\lambda & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 7. *Нехай*

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина четвірка матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ порядку n, для якої справджуються рівності:

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda), \quad A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda)$$

і або степінь кожного з матричних многочлена $R_1(\lambda)$ $R_2(\lambda)$ менша ніж l, або $R_1(\lambda) = 0$ і $R_2(\lambda) = 0$.

Теорема 8 (ознака подібності матриць над полем)**.** *Нехай A і B — деякі квадратні матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ еквівалентна характеристичний λ-матриці $A - \lambda E$.*

Доведення. Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Тому

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки матриця C є оборотною матрицею над полем P, то вона є невиродженою, отже детермінанти $|C|$ і $|C^{-1}|$ є ненульовими елементами поля P. Через це матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями. За ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай характеристична матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Тоді існують унімодулярні λ-матриці S і T такі, що

$$S(A-\lambda E)T = B-\lambda E. \tag{6}$$

Оскільки S і T є унімодулярними λ-матрицями, то до них існують обернені матриці S^{-1} і T^{-1} відповідно. Як наслідок із рівності (6) можна одержати наступні дві рівності, помноживши цю рівність по черзі спочатку справа на T^{-1}, а потім зліва на S^{-1}:

$$S(A-\lambda E) = (B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T = S^{-1}(B-\lambda E). \tag{7}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 7 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S = (B-\lambda E)Q_1(\lambda) + R_1, \quad T = Q_2(\lambda)(B-\lambda E) + R_2, \tag{8}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (8), із (6) одержимо

$$\begin{aligned} R_1(A-\lambda E)R_2 &= \big(S-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)\big)(A-\lambda E)\big(T-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\big) = \\ &= S(A-\lambda E)T - S(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) - (B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)T + \\ &\quad + (B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E). \end{aligned}$$

Далі, враховуючи рівності (6) і (7), звідси слідує, що

$$\begin{aligned} R_1(A-\lambda E)R_2 &= (B-\lambda E) - (B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E) - \\ &- (B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E) + (B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) = \\ &= (B-\lambda E) - \\ &- \Big[(B-\lambda E)\Big(T^{-1}Q_2(\lambda) + Q_1(\lambda)S^{-1} - Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B-\lambda E)\Big]. \end{aligned}$$

Матричний многочлен, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу у квадратних дужках дорівнює 0. У протилежному випадку цей матричний многочлен повинен мати степінь щонайменше 2, а це суперечить тому, що матричний многочлен $R_1(A-\lambda E)R_2$ має степінь 1. Таким чином $R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)$ і, як наслідок,

$$R_1 A R_2 = B, \qquad R_1 R_2 = E.$$

Із останньої рівності слідує, що матриці R_1 і R_2 є оборотними над полем P і $R_2^{-1} = R_1$. А тому $R_2^{-1} A R_2 = B$. Це означає, що матриця B подібна матриці A. Теорема доведена.

3.3.3 Знаходження нормальної форми Жордана

Нехай α — деякий елемент поля P. Знайдемо нормальну форму Сміта характеристичної матриці клітки Жордна порядку n з елементом α на головній діагоналі, тобто матриці

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Нехай $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, …, $d_n(\lambda)$ — найбільші спільні дільники мінорів відповідно 1-го, 2-го, …, n-го порядків характеристичної матриці $J_n(\alpha)-\lambda E$, старші коефіцієнти яких дорівнюють 1. Оскільки

$$J_n(\alpha)-\lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно $d_n(\lambda) = (\lambda-\alpha)^n$. З іншого боку, мінор $(n-1)$-го порядку матриці $J_n(\alpha)-\lambda E$, що знаходиться у перших $n-1$ рядках і останніх $n-1$ стовпцях дорівнює 1, тому $d_{n-1}(\lambda) = 1$. Як наслідок звідси одержимо, що

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \ldots = d_{n-2}(\lambda) = 1.$$

Таким чином многочлени $e_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1$,

$$e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = 1, \quad \ldots, \quad e_{n-1}(\lambda) = \frac{d_{n-1}(\lambda)}{d_{n-2}(\lambda)} = 1,$$

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, а сама ця матриця еквівалентна нормальній формі Сміта

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (\lambda - \alpha)^n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Лема 1. *Нехай s — деяке натуральне число, $f_1(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$ — деякі попарно взаємно прості многочлени над полем P. Тоді справджується наступна еквівалентність діагональних λ-матриць*

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & f_s(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & f_1(\lambda) f_2(\lambda) \cdots f_s(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Лему доведемо у випадку, коли $s = 2$. Загальний випадок не складно довести методом математичної індукції, використовуючи доведення для матриць 2-го порядку.

Нехай $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — деякі взаємно прості многочлени над полем P. За ознакою взаємної простоти многочленів існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ із $P[\lambda]$ такі, що $f_1(\lambda)u(\lambda) + f_2(\lambda)v(\lambda) = 1$. Розглянемо унімодулярні λ-матриці

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f_2(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & u(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -f_1(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Той факт, що

$$U \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_1(\lambda) f_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

завершує доведення леми.

Знайдемо тепер нормальну форму Сміта характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана, відповідно у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться елемент α_i, та має порядок n_i, де $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in P$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_i — одинична матриця порядку n_i, $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$. Зауважимо, що серед елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці, у якої на діагоналі стоять $n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k$ одиниць та многочлени

$$(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \quad \ldots, \quad (\lambda - \alpha_k)^{n_k}, \tag{10}$$

які у подальшому називатимемо *елементарними дільниками матриці* J.

Утворимо із цих многочленів таблицю за наступним алгоритмом. Спочатку перенумеруємо елементи $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ так, що перші l з них попарно різні, а всі інші починаючи з $l+1$ дорівнюють хоча б одному з l перших. Далі, нехай $n_{i1},\ n_{i2},\ \ldots,\ n_{iq_i}$ — степені тих многочленів із (10), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто $n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i}$, де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Розташуємо у i-ий рядок та j-ий стовпець таблиці елементарний дільник $(\lambda - \alpha_i)^{n_{ij}}$, а у порожні місця, якщо такі є, запишемо 1. Якщо q — максимальне серед чисел $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_l$, то таблиця матиме вигляд

$$\begin{matrix} (\lambda - \alpha_1)^{n_{11}} & (\lambda - \alpha_1)^{n_{12}} & \ldots & (\lambda - \alpha_1)^{n_{1q}} \\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{21}} & (\lambda - \alpha_2)^{n_{22}} & \ldots & (\lambda - \alpha_2)^{n_{2q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{l1}} & (\lambda - \alpha_l)^{n_{l2}} & \ldots & (\lambda - \alpha_l)^{n_{lq}} \end{matrix}$$

де показник n_{ij} рівний нулю, якщо він не визначений. Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij}, \qquad e_{n-j+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \alpha_i)^{n_{ij}},$$

де $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, тобто $e_n(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 1-го стовпця вище згаданої таблиці, $e_{n-1}(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 2-го стовпця цієї таблиці, і т. д.

Із леми 1 випливає, що характеристична матриця $J - \lambda E$ еквівалентна нормальній формі Сміта

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Оскільки дві нормальні форми Сміта еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони рівні, то із однозначності розкладу на незвідні множники многочлена з точністю до порядку слідування цих множників та із ознаки подібності матриць нами в інший спосіб доведено, що дві нормальні форми Жордана подібні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же кліток Жордана, розміщених лише можливо по-різному на головних діагоналях даних нормальних форм.

Наведемо приклад знаходження нормальної форми Сміта характеристичної матриці наступної нормальної форми Жордана

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 5 & 1 & & & & & \mathbf{0} & & \\ 0 & 0 & 5 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & 2 & & & & \\ & & & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 5 & & \\ & & \mathbf{0} & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця елементарних дільників матриці J виглядає так:

$$\begin{array}{ccc} \lambda - 1 & \lambda - 1 & 1 \\ (\lambda - 2)^2 & 1 & 1 \\ (\lambda - 5)^3 & (\lambda - 5)^2 & \lambda - 5 \end{array}$$

Тому нормальною формою Сміта характеристичної матриці $J - \lambda E$

є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & (\lambda-5) & & \\ & \mathbf{0} & & & (\lambda-1)(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 9. *Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.*

Теорема 10. *Нехай A — квадратна матриця над деяким полем P. Матриця A подібна нормальній формі Жордана тоді і тільки тоді, коли характеристичний многочлен матриці A розкладається на лінійні множники над полем P.*

Таким чином, щоб знайти нормальну форму Жордана квадратної матриці A над полем P потрібно виконати поетапно наступні кроки:

1) знайти нормальну форму Сміта характеристичної λ-матриці $A-\lambda E$;
2) нехай $e_1(\lambda)$, …, $e_q(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, інваріантні множники λ-матриці $A-\lambda E$. Для кожного $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ розкладемо, якщо це можливо, інваріантний множник $e_i(\lambda)$ у добуток степенів лінійних многочленів
$$e_i(\lambda) = (\lambda-\alpha_{i1})^{n_{i1}}(\lambda-\alpha_{i2})^{n_{i2}}\cdots(\lambda-\alpha_{ir_i})^{n_{ir_i}};$$
3) блочно-діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться клітки Жордана $J_{n_{11}}(\alpha_{11})$, …, $J_{n_{1r_1}}(\alpha_{1r_1})$, …, $J_{n_{qr_q}}(\alpha_{qr_q})$ є шуканою нормальною формою Жордана.

Вправи для самостійної роботи

За допомогою елементарних перетворень знайти нормальну форму Сміта для наступних λ-матриць.

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)^3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda - 1 & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 - \lambda & \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + \lambda & 3\lambda^3 + 3\lambda \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda + 1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

Знайти для наступних матриць нормальну форму Сміта, попередньо знайшовши найбільші спільні дільники мінорів відповідних порядків.

10. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda - 3) \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5\lambda+2 & 0 & 3\lambda^2-6\lambda+3 \\ 2\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda-1 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ 2\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

Вияснити, чи є еквівалентними між собою наступні λ-матриці.

17. $A = \begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & 2\lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

У наступних вправах для даної λ-матриці A знайти деякі унімодулярні λ-матриці P і Q такі, що матриця $B = PAQ$ є матрицею нормальної форми Сміта.

19. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+4 & \lambda^2+3 \\ \lambda^2-2\lambda+3 & \lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} \lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda \\ \lambda^4+5\lambda^3+8\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4 \end{pmatrix}.$

Для даних λ-матриць A і B знайти деякі унімодулярні λ-матриці P і Q такі, що задовольняють рівності $B = PAQ$.

21. $A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda+1 & 3\lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 3\lambda^3+7\lambda+2 & 3\lambda^3+4\lambda-1 \\ 2\lambda^3+5\lambda+1 & 2\lambda^3+3\lambda-1 \end{pmatrix}.$

22. $A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \\ \lambda^3-\lambda^2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}.$

23. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda-1 & \lambda+1 & \lambda^2-2 \\ \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ \lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda+1 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 2\lambda^2-2\lambda-3 \\ 10\lambda+2 & 5\lambda+5 & 5\lambda^2-5\lambda-2 \\ 4\lambda^2-7\lambda-8 & 2\lambda^2-3\lambda-5 & 2\lambda^3-7\lambda^2+2\lambda+8 \end{pmatrix}.$

24. $A = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & 2\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2 & 5\lambda^2+5\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \\ \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 2\lambda^2+3\lambda+1 & \lambda^3+3\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 3\lambda^2+5\lambda+2 & 2\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \end{pmatrix}.$

Знайти інваріантні множники та елементарні дільники наступних λ-матриць.

25. $\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

Знайти нормальну форму Сміта квадратної λ-матриці, якщо відомі її елементарні дільники, ранг r і порядок n.

28. $\lambda+1$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$; $r=4$, $n=5$.

29. $\lambda+2$, $(\lambda+2)^2$, $(\lambda+2)^3$, $\lambda-2$, $(\lambda-2)^3$; $r=n=4$.

Записати жорданову форму матриці A порядку n над полем дійсних чисел, якщо задані інваріантні множники $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$ її характеристичної матриці $A-\lambda E$.

30. $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=1$, $e_3(\lambda)=e_4(\lambda)=\lambda-1$, $e_5(\lambda)=e_6(\lambda)=$ $=(\lambda-1)(\lambda+2)$.

31. $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=1$, $e_4(\lambda)=\lambda+1$, $e_5(\lambda)=(\lambda+1)^2$, $e_6(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$.

32. $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=1$, $e_3(\lambda)=\lambda-2$, $e_4(\lambda)=\lambda^2-4$.

Знайти нормальну форму Жордана наступних матриць над полем дійсних чисел.

33. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

34. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

35. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

39. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

41. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

42. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

43. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

44. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Розділ 4

Лінійні простори із скалярним добутком

У курсі елементарної математики учнів поступово привчають до поняття *міра*. *Кількісна міра* елементів деякої множини X — це не що інше, як відповідність із множини X у множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел. З часом учні у школі на уроках математики знайомляться з такими мірами, як *довжина відрізка*, *градусна* та *радіанна міри кутів*, *модуль вектора*. Це також є відповідностями відповідно із множин відрізків, кутів, векторів у множину дійсних чисел, які задовольняють певним властивостям. Наприклад, якщо A, B і C є точками деякої прямої і точка B лежить між точками A і B, то довжина відрізка AC дорівнює сумі довжин відрізків AB і BC. Розвиваючи поняття модуля вектора, кута між векторами було побудовано відображення із множини всеможливих пар векторів у множину дійсних чисел, яке назвали *скалярним добутком*. Нагадаємо, що у курсі елементарної математики *скалярним добутком векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається добуток модулів цих векторів і косинуса кута між ними, тобто значення виразу $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$. У цьому розділі пропонується інший підхід до визначення скалярного добутку на лінійному просторі над полем дійсних чисел. Поняття модуля вектора узагальнюють до поняття, так званої, *норми вектора* й до того ж воно є похідним поняттям від поняття скалярного добутку векторів.

4.1 Евклідів та унітарний простори

4.1.1 Евклідів простір

Означення 1. Нехай L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. *Скалярним добутком, заданим або визначеним на лінійному просторі* L, називається відображення $\sigma : L \times L \to \mathbb{R}$, яке задовольняє наступним умовам або ще кажуть *аксіомам скалярного добутку*:

1) $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, y із L;
2) $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, y із L;
3) $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, y із L і довільного дійсного числа α;
4) $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора x із L.

Прикладом скалярного добутку, заданого на дійсному n-вимірному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ є відображення $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які дійсні n-вимірні вектори. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \\
&\qquad = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x), \\
&\sigma(x + x', y) = \\
&\qquad = (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n = \\
&\qquad = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) = \\
&\qquad = \sigma(x, y) + \sigma(x', y), \\
&\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n = \\
&\qquad = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \alpha\sigma(x, y),
\end{aligned}$$

$$\sigma(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Нарешті, добре відомо, що $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$ для будь-яких дійсних чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Виносимо на самостійну роботу читача довести, що відображення $\varsigma : C_{[0;1]} \times C_{[0;1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \tag{2}$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0;1]}$ всіх неперервних на проміжку $[0; 1]$ функцій.

Зауваження 1. Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$, яке називається *скалярним добутком векторів* x *і* y. Скалярний добуток векторів x і y у різноманітній навчальній літературі позначають різними способами, але в основному через: $x \cdot y$, (x, y), $(x|\, y)$, $\langle x, y\rangle$, $\langle x|\, y\rangle$. Ми ж домовимося надалі у цьому і наступних пунктах навчального посібника використовувати передостаннє з перерахованих позначень. Хоча цей вибір не є цілком влучним, адже раніше, нагадаємо, схожим чином позначалася лінійна оболонка системи векторів. Зміст вживаного позначення буде зрозумілим із контексту написаного перед ним.

Означення 2. Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається *евклідовим простором*, якщо на L задано скалярний добуток.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ та лінійний простір $C_{[0,1]}$ всіх неперервних на проміжку $[0, 1]$ функцій відповідно з скалярними добутками (1) і (2) є прикладами евклідових просторів. Перший з них називають *n-вимірним евклідовим простором.*

Твердження 1. *Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:*

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \quad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \quad \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle.$$

Доведення. Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x\rangle = 0,$$
$$\langle x, y + y'\rangle = \langle y + y', x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle y', x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$
$$\langle x, \alpha y\rangle = \langle \alpha y, x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle = \alpha\langle x, y\rangle.$$

Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів евклідового простору L, вектори x і y із L є лінійними комбінаціями цієї системи векторів, причому*

$$x = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_sa_s, \qquad y = y_1a_1 + y_2a_2 + \dots + y_sa_s,$$

де x_1, x_2, ..., x_s, y_1, y_2, ..., $y_s \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} x_iy_j\langle a_i, a_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{s} x_iy_j\langle a_i, a_j\rangle. \tag{3}$$

Доведення. Нехай виконуються умови твердження. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s векторів заданої системи векторів a_1, a_2, ..., a_s евклідового простору L. Якщо $s = 1$, то за третьою аксіомою скалярного добутку і попереднім твердженням справджуються рівності

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1a_1, y_1a_1\rangle = x_1\langle a_1, y_1a_1\rangle = x_1y_1\langle a_1, a_1\rangle.$$

Припустимо, що твердження справджується для всіх натуральних чисел s, менших за фіксоване натуральне число t. Розглянемо систему із t векторів a_1, a_2, ..., a_t та нехай вектори x і y із L є лінійними комбінаціями цієї системи векторів, причому $x = \sum_{i=1}^{t} x_ia_i$, $y = \sum_{j=1}^{t} y_ja_j$, де x_1, x_2, ..., x_t, y_1, y_2, ..., $y_t \in \mathbb{R}$. Тоді за аксіомами скалярного добутку, попереднім твердженням і індуктивним припущенням справджуються наступні рівності

$$\begin{gathered}
\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{t-1} x_ia_i + x_ta_t, \sum_{j=1}^{t-1} y_ja_j + y_ta_t \right\rangle = \\
= \left\langle \sum_{i=1}^{t-1} x_ia_i, \sum_{j=1}^{t-1} y_ja_j + y_ta_t \right\rangle + \left\langle x_ta_t, \sum_{j=1}^{t-1} y_ja_j + y_ta_t \right\rangle = \\
= \left\langle \sum_{i=1}^{t-1} x_ia_i, \sum_{j=1}^{t-1} y_ja_j \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{t-1} x_ia_i, y_ta_t \right\rangle + \left\langle x_ta_t, \sum_{j=1}^{t-1} y_ja_j \right\rangle + \\
+ \langle x_ta_t, y_ta_t\rangle = \sum_{i,j=1}^{t-1} x_iy_j\,\langle a_i, a_j\rangle + \sum_{i=1}^{t-1} x_iy_t\,\langle a_i, a_t\rangle + \\
+ \sum_{j=1}^{t-1} x_ty_j\,\langle a_t, a_j\rangle + x_ty_t\,\langle a_t, a_t\rangle = \sum_{i,j=1}^{t} x_iy_j\langle a_i, a_j\rangle.
\end{gathered}$$

Твердження доведено.

Означення 3. Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \ldots & \langle a_1, a_s \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \ldots & \langle a_2, a_s \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1 \rangle & \langle a_s, a_2 \rangle & \ldots & \langle a_s, a_s \rangle \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Ґрама системи векторів* a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L, то рівність (3) встановлює *скалярний добуток векторів у координатній формі.*

Означення 4. Базис a_1, a_2, $\ldots$, a_s скінченновимірного евклідового простору L називається *ортонормованим базисом*, якщо матриця Ґрама системи векторів a_1, $\ldots$, a_s є одиничною матрицею.

Цілком очевидно, якщо система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є ортонормованим базисом скінченновимірного евклідового просторі L, то скалярний добуток векторів x та y із L у координатній формі обчислюється за формулою $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_s y_s$, де $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ — координатні рядки відповідно векторів x та y у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_s евклідового простору L.

Означення 5. Вектори a і b евклідового простору L називаються *ортогональними*, якщо $\langle a, b \rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається *ортогональною системою векторів.*

Зауваження 2. Підкреслимо, що ортогональність векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів. Якщо вектори a і b евклідового простору L є ортогональними, то інколи кажуть, що вектор a — ортогональний вектору b. Із першої аксіоми скалярного добутку слідує, що якщо вектор a — ортогональний вектору b, то вектор b — ортогональний вектору a.

Теорема 1. *Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.*

Доведення. Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (3) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а з іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то $\langle a_1, a_1 \rangle = 0$, що можливо лише у випадку, коли $a_1 = \bar{0}$. Це суперечить умові теореми через те, що a_1, a_2, ..., a_s є системою ненульових векторів. Одержана суперечність доводить теорему.

Наслідок 1. *Ортогональна система із n ненульових векторів скінченновимірного евклідового простору L розмірності n є його базисом.*

Нехай a_1, a_2, ..., a_s є лінійно незалежною системою векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка еквівалентна системі векторів a_1, a_2, ..., a_s, за наступним алгоритмом.

- В якості вектора b_1 беремо вектор a_1, тобто $b_1 = a_1$. Вектор a_1, а отже і b_1 є ненульовим вектором, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, то можемо розглянути вектор

  $$b_2 = a_2 - \tfrac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

  Вектори b_1 і b_2 є ортогональними, бо

  $$\langle b_1, b_2 \rangle = \langle b_1, a_2 - \tfrac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle - \tfrac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

  Вектор b_2 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, причому коефіцієнт при a_2 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2 є лінійно незалежною системою векторів, то $b_2 \neq \bar{0}$.

- Знову ж таки, враховуючи, що $\langle b_1, b_1\rangle \neq 0$ і $\langle b_2, b_2\rangle \neq 0$, розглянемо вектор
$$b_3 = a_3 - \tfrac{\langle b_1,a_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \tfrac{\langle b_2,a_3\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} b_2.$$
Вектор b_3 є ортогональним до кожного з векторів b_1, b_2, бо
$$\langle b_1, b_3\rangle = \langle b_1, a_3 - \tfrac{\langle b_1,a_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \tfrac{\langle b_2,a_3\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} b_2\rangle = \\ = \langle b_1, a_3\rangle - \tfrac{\langle b_1,a_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\langle b_1, b_1\rangle - \tfrac{\langle b_2,a_3\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}\langle b_1, b_2\rangle = 0,$$
$$\langle b_2, b_3\rangle = \langle b_2, a_3 - \tfrac{\langle b_1,a_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \tfrac{\langle b_2,a_3\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} b_2\rangle = \\ = \langle b_2, a_3\rangle - \tfrac{\langle b_1,a_3\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\langle b_2, b_1\rangle - \tfrac{\langle b_2,a_3\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}\langle b_2, b_2\rangle = 0.$$
Вектор b_3 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3, причому коефіцієнт при a_3 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2, a_3 є лінійно незалежною системою векторів, то $b_3 \neq \bar{0}$.

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що
$$b_s = a_s - \tfrac{\langle b_1,a_s\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle} b_1 - \tfrac{\langle b_2,a_s\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle} b_2 - \cdots - \tfrac{\langle b_{s-1},a_s\rangle}{\langle b_{s-1},b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Очевидно, кожна із систем векторів a_1, a_2, ..., a_s та b_1, b_2, ..., b_s лінійно виражаються одна через іншу, тому вони є еквівалентними системами векторів, а їх лінійні оболонки співпадають.

Означення 6. Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, b_3, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій даній лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом, називається *процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.*

Із можливості побудови ортогональної системи векторів, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів, одразу слідує істинність наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує базис, який є ортогональною системою векторів.*

Означення 7. Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається *нормою* або *довжиною* вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 3 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)**.** *Для довільних векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

Доведення. Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle\bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор $z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x$. Вектори x і z є ортогональними. Дійсно

$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x\rangle = \langle x, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, x\rangle = 0.$$

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$
$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \geq 0.$$

Оскільки $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle y, y\rangle \geq 0$, то звідси одержуємо, що

$$\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2 \geq 0$$

і, як наслідок,

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \geq \sqrt{\langle x, y\rangle^2},$$

тобто

$$\|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y\rangle|,$$

що й потрібно було довести.

Наслідок 1. *Для довільних дійсних чисел x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n справджується нерівність*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 2. *Для будь-яких неперервних функцій f і g на сегменті $[0, 1]$ справджується нерівність*

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Доведення обох наслідків є нічим іншим, як переформулюванням теореми про нерівність Коші-Буняковського-Шварца для окремих випадків евклідових просторів, а саме n-вимірного евклідового простору і простору неперервних на проміжку $[0; 1]$ функцій.

Теорема 4 (властивості норми)**.** *Для будь-якого дійсного числа α та будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджуються рівність та наступні дві нерівності (так звані нерівності трикутника):*

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\|$.

Доведення. Нехай α — будь-яке дійсне число, x — довільний вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y також є довільним вектором евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца $\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Тому

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} =$$

$$= \sqrt{\big(\|x\| + \|y\|\big)^2} = \|x\| + \|y\|.$$

Аналогічно доводиться, що $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\|$.

Теорема 5. *Нехай L є скінченновимірним евклідовим простором. Тоді в L існує ортонормований базис.*

Доведення. Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, a_2,..., a_n — деякий ортогональний базис простору L. Такий базис існує за теоремою 2. Очевидно для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ норма вектора a_i не дорівнює нулю і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті *нормування* вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left|\frac{1}{\|a_i\|}\right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, ...,b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\langle b_i, b_j\rangle = \left\langle \frac{1}{\|a_i\|} a_i, \frac{1}{\|a_j\|} a_j \right\rangle = \frac{1}{\|a_i\|\|a_j\|} \langle a_i, a_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j; \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Теорема доведена.

4.1.2 Унітарний простір

Означення 8. Нехай L є лінійним простором над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. *Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі* L, називається відображення $\sigma : L \times L \to \mathbb{C}$, яке задовольняє наступним умовам (*аксіомам скалярного добутку*):

1) $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, y із L, де $\overline{\sigma(y, x)}$ є комплексно спряжене до $\sigma(y, x)$;
2) $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, y із L;
3) $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, y із L і довільного комплексного числа α;
4) $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора x із L.

Прикладом скалярного добутку, заданого на комплексному n-вимірному векторному просторі $\mathbb{C}^n$ є відображення $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}, \tag{4}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які комплексні n-вимірні вектори. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Оскільки модуль будь-якого комплексного числа є невід'ємним дійсним числом, то з останньої рівності слідує, що $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора x із $\mathbb{C}^n$.

Означення 9. Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається *унітарним простором*, якщо на L задано скалярний добуток.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ із скалярним добутком (4) є прикладом унітарного простору. Цей унітарний простір називається *n-вимірним унітарним простором.*

Сформульовані у попередньому підпункті означення для понять евклідового простору переносяться і на випадок унітарного простору. Через це ми їх не будемо переформулювати. Так само, як і більшість теорем і тверджень попереднього підпункту. Виділимо лише одне з цих тверджень

Твердження 3. *Нехай L є унітарним простором. Тоді для довільних векторів x, y із L та довільного комплексного числа α справджується рівність $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.*

Дійсно, $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

4.1.3 Ізометрія евклідових просторів

Означення 10. Нехай L і L' є евклідовими просторами, які водночас є ізоморфними лінійними простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' називається *ізометрією* евклідових просторів L і L', якщо $\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для будь-яких векторів x, y із L.

Означення 11. Евклідів простір L називається *ізометричним* евклідовому простору L', якщо існує ізометрія евклідових просторів L і L'.

Теорема 6 (класифікаційна теорема)**.** *Нехай L і L' є скінченновимірними евклідовими просторами. Евклідів простір L є ізометричним евклідовому простору L' тоді і тільки тоді, коли розмірність евклідового простору L дорівнює розмірності евклідового простору L'.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому їх розмірності рівні, тобто $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$.

Навпаки, нехай розмірності евклідових просторів L і L' рівні. Цілком зрозумілим є те, що у випадку нульових просторів L і L' вони є ізометричними просторами. Припустимо, що L і L' є ненульовими просторами і $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$ для деякого натурального числа n. За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному евклідовому просторі в L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно a_1, a_2, $\ldots$, a_n та a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L, є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ та $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — відповідно їх координатні рядки у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L. Оскільки цей базис є ортонормованим, то $\langle b, c\rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n$. Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n, \quad \varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

і базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' теж є ортонормованим, то $\langle\varphi(b), \varphi(c)\rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n$. Отже, $\langle\varphi(b), \varphi(c)\rangle = \langle b, c\rangle$ для довільних векторів b, c із L. За означенням φ є ізометрією евклідових просторів L і L'. Таким чином евклідів простір L ізометричний евклідовому простору L'. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Будь-який скінченновимірний евклідів простір розмірності n ізометричний n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$. Якщо $n \neq m$, то n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ не ізометричний m-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^m$.*

4.1.4 Ортогональне доповнення

Означення 12. Нехай A є підпростором евклідового (унітарного) простору L. Множина $A^\perp$ всіх векторів x із L таких, що ортогональні до кожного вектора підпростору A називається *ортогональним доповненням підпростору A*.

Твердження 4. *Нехай A є підпростором евклідового (унітарного) простору L. Ортогональне доповнення $A^\perp$ підпростору A є підпростором евклідового (унітарного) простору L. Причому кожен із тривіальних підпросторів є ортогональним доповненням іншого, тобто $\{\bar{0}\}^\perp = L$ і $L^\perp = \{\bar{0}\}$.*

Доведення. Нехай виконуються умови твердження. Для довільних дійсних (комплексних) чисел α, β та будь-яких векторів x і y із ортогонального доповнення $A^\perp$ підпростору A евклідового (унітарного) простору L і довільного вектора a із A справджуються рівності

$$\langle \alpha x + \beta y, a\rangle = \alpha\langle x, a\rangle + \beta\langle y, a\rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Через це вектор $\alpha x + \beta y$ є ортогональним до довільного вектора підпростору A, а тому міститься у ортогональному доповненні $A^{\perp}$ підпростору A. За ознакою підпростору лінійного простору ортогональне доповнення $A^{\perp}$ є підпростором евклідового (унітарного) простору L.

За властивістю скалярного добутку нульовий вектор $\bar{0}$ є ортогональним до кожного вектора евклідового (унітарного) простору L. Тому $\{\bar{0}\}^{\perp} = L$. Нарешті, якщо вектор z належить ортогональному доповненню $L^{\perp}$, то цей вектор ортогональний до всіх векторів із L, зокрема сам собі, тобто $\langle z, z\rangle = 0$. Таке можливо лише коли вектор z є нульовим. Отже, $L^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Твердження доведене.

Теорема 7 (про ортогональний розклад)**.** *Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.*

Доведення. Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Доведемо теорему лише для евклідового простору. Доведення для унітарного цілком аналогічне. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і розмірності k. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай a_1, a_2, …, a_k — деякий ортогональний базис підпростору A. За теоремою 2 такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор b із $L \setminus A$. Система векторів a_1, a_2, …, a_k, b є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів a_1, $a_2, \ldots, a_k$. Останнє суперечило б тому, що $b \notin A$. Проортогоналізуємо систему векторів a_1, a_2, …, a_k, b методом Ґрама-Шмідта. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональна система векторів, то у результаті ортогоналізації одержимо ортогональну систему векторів a_1, a_2, …, a_k, c де c — деякий вектор евклідового простору L, що не належить A.

Будь-який вектор a із A є ортогональним вектору c, бо $a = \alpha_1 a_1 + {} + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$ для деяких дійсних чисел α_1, α_2, …, α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$

Це означає, що $c \in A^\perp$, а тому $A^\perp \neq \{0\}$. Через те що $A^\perp$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис $c_1, c_2, \ldots, c_l$. Покажемо, що система векторів

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, c_2, \ldots, c_l \tag{5}$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна, а тому лінійно незалежна, система векторів. Якщо деякий вектор d евклідового простору L не є лінійною комбінацією системи векторів (5), то система векторів

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, c_2, \ldots, c_l, d \tag{6}$$

є лінійно незалежною. Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (6), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, c_2, \ldots, c_l, e, \tag{7}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^\perp$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1, a_2, \ldots, a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^\perp$, бо підсистема $c_1, c_2, \ldots, c_l, e$ лінійно незалежної векторів (7) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1, c_2, \ldots, c_l$, яка є базисом $A^\perp$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (5).

Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (5). Якщо x — деякий довільний вектор евклідового простору L, то

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l,$$

для деяких дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_l$. Тому вектор x можна представити у вигляді суми елементів із A і $A^\perp$, а саме

$$x = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) + (\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l) = u + v,$$

де $u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in A$, $v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^\perp$. Отже, $L = A + A^\perp$. Якщо вектор a належить перетину $A \cap A^\perp$, то $\langle a, a\rangle = 0$, як наслідок $a = \bar{0}$. Тому $A \cap A^\perp = \{\bar{0}\}$ і $L = A \oplus A^\perp$. Теорему доведено.

Означення 13. Нехай A є підпростором евклідового простору L, x є деяким вектором із L, а рівність $x = u + v$ є представленням вектора x у вигляді суми векторів u і v відповідно із підпросторів A і $A^{\perp}$. Тоді вектор u називається *ортогональною проекцією вектора x на підпростір A*.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що в евклідовому просторі L нульовий вектор є єдиним вектором, ортогональним до всіх векторів із L.

2. Довести, що якщо вектор a ортогональний до кожного з векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_n евклідового простору L, то він ортогональний до любої лінійної комбінації цієї системи векторів.

3. Ввести скалярний добуток у лінійному просторі $\mathbb{R}[x]_n$ всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують натуральне число n.

4. Застосувати процес ортогоналізації Ґрама-Шмідта до наступної системи векторів тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$: $a_1 = (1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 0, -1)$, $a_3 = (5, -3, -7)$.

5. Довести, що якщо $\langle\ ,\ \rangle_1$ і $\langle\ ,\ \rangle_2$ два різних скалярних добутки одного і того ж лінійного простору L над полем дійсних чисел, то для будь-яких невід'ємних дійних чисел μ і ν, одночасно не рівних 0, відображення $\langle\ ,\ \rangle : L \times L \to \mathbb{R}$, задане за правилом $\langle a, b\rangle = \mu \cdot \langle a, b\rangle_1 + \nu \cdot \langle a, b\rangle_2$ для будь-яких a, b із L, є скалярним добутком, заданим на L.

6. Нехай L є лінійним простором над полем дійсних чисел, який розкладається у пряму суму підпросторів L_1 і L_2. Для кожного $i \in \{1, 2\}$ у підпросторі L_i визначено скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle_i$. Довести, що у лінійному просторі L можна задати скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ наступним чином: якщо a і b — будь-які вектори із L з розкладами за підпросторами L_1, L_2 відповідно $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, то $\langle a, b\rangle = \langle a_1, b_1\rangle_1 + \langle a_2, b_2\rangle_2$.

7. У підпросторі $L_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ чотиривимірного векторного простору $\mathbb{R}^4$ задано скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle_1$ за правилом $\langle a, b\rangle_1 = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2$, де $a = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$, $b = (\beta_1, \beta_2, 0, 0) \in L_1$. А у підпросторі $L_2 = \{(0, 0, \gamma_3, \gamma_4) \mid \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R}\}$ цього ж векторного простору задано скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle_2$ за правилом $\langle c, d\rangle_2 = \gamma_3\delta_3 + \gamma_3\delta_4 + \gamma_4\delta_3 + 2\gamma_4\delta_4$, де $c = (0, 0, \gamma_3, \gamma_4)$, $d = (0, 0, \delta_3, \delta_4) \in L_2$.

Задайте скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ у всьому векторному просторі $\mathbb{R}^4$ за допомогою способу, який описано у попередній задачі. Обчислити скалярний добуток $\langle u, v\rangle$ векторів $u = (1, 2, 3, 4)$ і $v = (-3, 1, -3, 2)$.

8. Довести, що якщо для векторів a і b евклідового простору L рівність $\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle$ справджується для довільного вектора x із L, то $a = b$.

9. Застосувати процес ортогоналізації Ґрама-Шмідта до наступної системи векторів чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 3, -1, -1)$, $a_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

10. Доповнити систему векторів $a_1 = (-\frac{11}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{3})$, $a_2 = (-\frac{2}{15}, -\frac{14}{15}, -\frac{1}{3})$ до ортонормованого базису тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$.

11. Доповнити систему векторів $a_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $a_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ до ортонормованого базису чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$.

12. Довести, що координати α_1, α_2, $\ldots$, α_n вектора a скінченновимірного евклідового простору L у ортонормованому базисі e_1, e_2, $\ldots$, e_n цього простору обчислюються за формулами $\alpha_i = \langle a, e_i\rangle$, де $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

13. Нехай a — ненульовий вектор скінченновимірного евклідового простору L розмірності n. Знайти розмірність підпростору лінійного простору L, який складається з усіх векторів x із L таких, що $\langle a, x\rangle$.

14. Застосовуючи процес ортогоналізації Ґрама-Шмідта, побудувати ортогональний базис підпростору чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$, що є лінійною оболонкою системи векторів $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (1, 8, -2, -16)$, $a_3 = (12, 5, -14, 5)$, $a_4 = (3, 11, 4, -7)$.

15. Застосовуючи процес ортогоналізації Ґрама-Шмідта, побудувати ортогональний базис підпростору чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$, що є лінійною оболонкою системи векторів: $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $a_3 = (0, 3, 3, 7)$, $a_4 = (3, -3, -3, -9)$.

16. Довести, що для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується рівність $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

17. Довести, що для будь-якої ортогональної системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s евклідового простору L справджується рівність $\|a_1 + a_2 + \cdots + a_s\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_s\|^2$.

18. Довести, що вектори x, y унітарного простору L ортогональні тоді і тільки тоді, коли справджується рівність $\|\alpha x+\beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для будь-яких комплексних чисел α і β.

19. Нехай A — підпростір розмірності k скінченновимірного евклідового простору L розмірності n і $k < n$. Довести, що в L знайдеться ненульовий вектор, який ортогональний до всіх векторів із A.

20. Нехай A і B є підпросторами евклідового простору L. Довести, що: 1) $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$; 2) якщо $A \subset B$, то $B^{\perp} \subset A^{\perp}$; 3) $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$; 4) $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$.

21. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ лінійної оболонки L наступної системи векторів чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (1,3,0,2)$, $a_3 = (3,7,-1,2)$, $a_3 = (2,4,-1,0)$.

22. Довести, що будь-який підпростір n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ можна задати системою лінійних однорідних рівнянь з n невідомими. Тобто для підпростору L знайдеться система лінійних однорідних рівнянь така, що вектор x тоді і тільки тоді належить підпростору L, коли x є розв'язком цієї системи рівнянь.

23. У лінійному просторі $\mathbb{R}[x]_n$ всіх многочленів від невідомої x над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує деяке невід'мне ціле число n, введено скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ за правилом $\langle f,g\rangle = a_nb_n+a_{n-1}b_{n-1}+\cdots+a_1b_1+a_0b_0$, де $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $g(x) = b_nx^n+b_{n-1}b^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$. Знайти ортогональне доповнення до підпростору всіх многочленів, коренем яких є 1.

24. Знайти системи лінійних однорідних рівнянь, що описують підпростір L, що заданий у попередній задачі, та його ортогональне доповнення $L^{\perp}$.

25. Знайти ортогональну проекцію вектора $a = (14,-3,-6,-7)$ на підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$, якщо L є лінійною оболонкою системи векторів $b_1 = (-3,0,7,6)$, $b_2 = (1,4,3,2)$, $b_3 = (2,2,-2,-2)$.

26. Знайти ортогональну проекцію вектора $a = (-3,0,-5,9)$ на підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$, якщо підпростір L задано системою рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-2x_4=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+10x_4=0. \end{cases}$$

4.2 Ортогональні і унітарні оператори

4.2.1 Ортогональні матриці

Нехай n є деяким натуральним числом, A є квадратною матрицею порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Всюди надалі через A^T будемо позначати матрицю, транспоновану до матриці A.

Означення 1. Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається *ортогональною матрицею*, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Прикладами ортогональних матриць є наступні матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена до неї матриця дорівнює транспонованій до A матриці, тобто $A^{-1} = A^T$.*

Доведення. Якщо A є ортогональною матрицею, то

$$A \cdot A^T = E. \tag{1}$$

Оскільки добуток матриць A і A^T є невиродженою матрицею, то матриця A є невиродженою, а отже, — оборотною. Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$ або $A^{-1} = A^T$. Необхідність доведена. Для доведення достатності, досить помножити рівність $A^T = A^{-1}$ зліва на A. Теорема доведена.

Теорема 2. *Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E — одинична матриця порядку n.*

Доведення. Якщо A є ортогональною матрицею, то за попередньою ознакою $A^T = A^{-1}$. Помножимо цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$.

Якщо ж $A^T \cdot A = E$, то аналогічно доведенню попередньої ознаки A є оборотною матрицею і $(A^T \cdot A)A^{-1} = A^{-1}$. Звідси $A^T = A^{-1}$, а тому A є ортогональною матрицею. Теорема доведена.

Надалі вважатимемо рядки і стовпці дійсної $n \times n$-матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Тоді *скалярний добуток i-го та j-го рядків* матриці A дорівнює

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn},$$

а *скалярний добуток i-го та j-го стовпців* —

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \dots + \alpha_{ni}\alpha_{nj},$$

де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$

Теорема 3. *Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.*

Доведення. Нехай A є матрицею вигляду (2). Якщо A — ортогональна матриця, то за означенням $A \cdot A^T = E$, тобто

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена.

Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена.

Теорема 4. *Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких стовпців A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого стовпця матриці A дорівнює одиниці.*

Доведення цієї теореми майже цілком повторює доведення попередньої за винятком того, що слід скористатися рівністю $A^T \cdot A = E$ для ортогональної матриці A.

Теорема 5. *Нехай L є скінченновимірним евклідовим простором розмірності n, системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису a_1, $a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Матриця S є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ евклідового простору L є ортонормованим.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і

$$S = \begin{pmatrix} \varsigma_{11} & \varsigma_{12} & \cdots & \varsigma_{1n} \\ \varsigma_{21} & \varsigma_{22} & \cdots & \varsigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varsigma_{n1} & \varsigma_{n2} & \cdots & \varsigma_{nn} \end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею. Тому для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність $\varsigma_{1i}\varsigma_{1j} + \varsigma_{2i}\varsigma_{2j} + \cdots + \varsigma_{ni}\varsigma_{nj} = \delta_{ij}$. Через те, що S є матрицею переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису b_1, $b_2, \ldots, b_n$ простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність $b_i = \varsigma_{1i}a_1 + \varsigma_{2i}a_2 + \cdots + \varsigma_{ni}a_n$. Нарешті, оскільки базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \varsigma_{1i}\varsigma_{1j} + \varsigma_{2i}\varsigma_{2j} + \cdots + \varsigma_{ni}\varsigma_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена.

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)**.** *Для будь-якої ортогональної матриці A справджуються наступні властивості:*

1) *детермінант матриці A дорівнює 1 або -1;*

2) *обернена матриця A^{-1} є ортогональною матрицею;*

3) *для будь-якої ортогональної матриці B того ж порядку, що і A, добуток AB є ортогональною матрицею.*

Доведення. 1) Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку детермінант добутку $A \cdot A^T$ дорівнює детермінанту одиничної матриці E, тобто 1, а з іншого за властивістю детермінантів $|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2$. Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.

2) Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T .$$

За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.

3) Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T.$$

Тому AB є ортогональною матрицею. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.*

Означення 2. Група $O(n)$ називається *ортогональною групою степеня n.*

4.2.2 Унітарні матриці

Нехай n є деяким натуральним числом, A є квадратною матрицею порядку n над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Всюди надалі через A^* будемо позначати, так звану, *ермітово-спряжену матрицю* до матриці A, тобто матрицю, що отримується у результаті транспонування матриці, одержаної із A заміною кожного її елемента на комплексно-спряжений. Формально ще пишуть $A^* = \overline{A}^T$.

Означення 3. Квадратна матриця A порядку n над полем комплексних чисел називається *унітарною матрицею*, якщо $A \cdot A^* = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Очевидними прикладами унітарних матриць є ортогональні матриці. Всі теореми за винятком першого твердження теореми 6 справджуються, якщо в їх формулюваннях замінити поняття ортогональної матриці на унітарну матрицю, поле дійсних чисел на поле комплексних чисел і відповідно евклідів простір на унітарний простір.

Доведення цих теорем аналогічні доведенню теорем про ортогональні матриці. Щодо винятку, то не складно переконатися, що модуль детермінанта унітарної матриці так само, як і модуль ортогональної матриці дорівнює 1.

4.2.3 Ортогональні оператори

Означення 4. Нехай L є евклідовим простором. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається *ортогональним оператором*, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто $\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ для довільного x із L.

Оскільки норма будь-якого вектора x із евклідового L дорівнює $\sqrt{\langle x, x \rangle}$, то ортогональний оператор евклідового простору L можна було б визначити, як такий лінійний оператор φ, що зберігає норму кожного вектора із L, тобто $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ для довільного x із L.

Теорема 7. *Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто*

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \tag{3}$$

для довільних векторів x, y із L.

Доведення. Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджуються рівності

$$\langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \tag{4}$$

З іншого боку, враховуючи лінійність оператора φ, можемо стверджувати, що

$$\begin{aligned}\langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle &= \langle \varphi(x)+\varphi(y), \varphi(x)+\varphi(y) \rangle = \\ &= \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle + 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle + \langle \varphi(y), \varphi(y) \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle + \langle y, y \rangle.\end{aligned} \tag{5}$$

Із рівності лівих частин рівностей (4) і (5) слідує рівність правих їх частин

$$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Звідси слідує рівність (3) для довільних векторів x, y із L. Необхідність доведена. Доведення ж достатності є очевидним, бо у рівності (3) у якості вектора y можна взяти вектор x. Теорема доведена.

Прикладом ортогонального оператора є наступний лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де γ — деяке фіксоване дійсне число, а (x_1, x_2) довільний вектор із $\mathbb{R}^2$. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджуються рівності

$$\begin{gathered}\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 = \\ = x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1 x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma + \\ + x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1 x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x\rangle.\end{gathered}$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є матриця

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{6}$$

яка є, як нескладно перевірити, ортогональною матрицею. Ортогональний оператор ρ_γ називається *оператором повороту на кут* γ.

Теорема 8. *Добуток ортогональних операторів евклідового простору є ортогональним оператором.*

Доведення. Нехай φ і ψ є ортогональними операторами евклідового простору L. Тоді для довільного вектора x із L справджуються рівності

$$\langle [\varphi\psi](x), [\varphi\psi](x)\rangle = \langle \varphi\big(\psi(x)\big), \varphi\big(\psi(x)\big)\rangle = \langle \psi(x), \psi(x)\rangle = \langle x, x\rangle.$$

Тому за означенням добуток $\varphi\psi$ є ортогональним оператором. Теорема доведена.

Теорема 9. *Нехай L є ненульовим скінченновимірним евклідовим простором, а φ є лінійним оператором цього простору. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L, то матриця лінійного оператора φ у будь-якому ортонормованому базисі цього простору є ортогональною матрицею. Навпаки, якщо матриця лінійного оператора φ евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі простору L є ортогональною, то лінійний оператор φ є ортогональним.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то $\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$. Отже,

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. За ознакою ортогональної матриці звідси слідує, що A є ортогональною матрицею. Необхідність доведена.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай для деяких дійсних чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора x за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x \rangle.$$

Це означає, що лінійний оператор φ є ортогональним. Теорема доведена.

Теорема 10. *Нехай L є ненульовим скінченновимірним евклідовим простором розмірності n, а φ є лінійним оператором цього простору. Якщо φ є ортогональним оператором L, то образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ будь-якого ортонормованого базису a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає деякий ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому лінійно незалежною системою векторів. Через те, що $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, звідси слідує, що система векторів є базисом простору L, причому ортонормованим. Необхідність доведена.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L його образ $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розглянемо довільний вектор x із L і припустимо, що $x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$, де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$, є розкладом вектора x за базисом a_1, a_2, ..., a_n. Тоді

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x \rangle.$$

Це означає, що лінійний оператор φ є ортогональним. Теорема доведена.

Теорема 11. *Нехай L є евклідовим простором, а φ є ортогональним оператором цього простору. Тоді:*

1) *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = 1$ або $\alpha = -1$;*

2) *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами;*

3) *ортогональний оператор φ є оборотним і обернений до нього оператор φ^{-1} також є ортогональним оператором.*

Доведення. 1) Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle\varphi(a), \varphi(a)\rangle = \langle a, a\rangle$, а з іншого $\langle\varphi(a), \varphi(a)\rangle = = \langle\alpha a, \alpha a\rangle = \alpha^2\langle a, a\rangle$. Тому $\alpha^2\langle a, a\rangle = \langle a, a\rangle$. Через те, що a є власним вектором ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$, а через це $\langle a, a\rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і, як наслідок, $\alpha = 1$ або $\alpha = -1$.

2) Із вище сказаного випливає, шо у випадку існування двох різних власних значень ортогонального оператора, то вони відповідно дорівнюють 1 і -1. Нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Тому з одного боку $\langle\varphi(b), \varphi(c)\rangle = \langle b, c\rangle$, а з іншого $\langle\varphi(b), \varphi(c)\rangle = \langle b, -c\rangle = -\langle b, c\rangle$. Звідси $\langle b, c\rangle = -\langle b, c\rangle$, що можливо лише, коли $\langle b, c\rangle = 0$.

3) Доведення третього твердження слідує із зв'язку між ортогональними операторами та їх матрицями і раніше доведеною аналогічною властивістю для ортогональних матриць. Теорема доведена.

Теорема 12 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)**.** *Нехай φ є ортогональним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у евклідовому просторі L існує ортонормований базис, в якому матриця A оператора φ має блочно-діагональний вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} E_k & & & & \\ & -E_l & & \mathbf{0} & \\ & & R_{\gamma_1} & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & R_{\gamma_m} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де k, l, m — деякі невід'ємні цілі числа; $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — деякі дійсні числа; E_q — одинична матриця порядку q; R_γ — матриця оператора повороту на кут γ вигляду (6).

Доведення. Нехай L — ненульовий скінченновимірний евклідів простір розмірності n, а φ ортогональний оператор цього простору. Доведемо теорему методом математичної індукції за розмірністю n

евклідового простору L. Нехай $n = 1$. Тоді в евклідовому просторі L існує ортонормаваний базис з одного вектора, припустимо a. Тому $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого дійсного числа α. Таким чином, α є власним значенням, а a є власним вектором, що йому належить, ортогонального оператора φ. За теоремою 11 власне значення α дорівнює 1 або -1, тобто матрицею ортогонального оператора φ у ортонормованому базисі a є (1) або (-1), що доводить базу математичної індукції.

Припустимо тепер, що твердження теореми справджується для всіх ортогональних операторів евклідових просторів, розмірність яких менша за деяке фіксоване натуральне число n'. Далі, нехай $n = n'$. Розглянемо випадки, коли ортогональний оператор φ має деякий власний вектор a_1 і коли такого вектора не існує. У свою чергу перший з випадків розбивається на підвипадки, коли власний вектор a_1 належить відповідно власному значенню 1 або -1. Спочатку будемо вважати, що $\varphi(a_1) = a_1$ і норма вектора a_1 дорівнює 1. У протилежному випадку розглянемо вектор $\frac{1}{\|a_1\|}a_1$, який також є власним вектором з нормою 1. Позначимо через L_1 лінійну оболонку, породжену вектором a_1. За теоремою про ортогональний розклад евклідів простір L є прямою сумою підпростору L_1 та його ортогонального доповнення $L_1^\perp$. Розглянемо довільний вектор b із $L_1^\perp$. Обчислимо скалярний добуток вектора a_1 і образу вектора b, враховуючи ортогональність оператора φ: $\langle a_1, \varphi(b)\rangle = \langle \varphi(a_1), \varphi(b)\rangle = \langle a_1, b\rangle = 0$. Це означає, що образ $\varphi(b)$ будь-якого вектора b із $L_1^\perp$ належить $L_1^\perp$, тобто ортогональне доповнення $L_1^\perp$ є інваріантним підпростором відносно ортогонального оператора φ. Очевидно обмеження $\varphi_{L_1^\perp}$ ортогонального оператора φ на підпростір $L_1^\perp$ є ортогональним оператором цього підпростору. Оскільки $L = L_1 \oplus L_1^\perp$, то розмірність ортогональне доповнення $L_1^\perp$ дорівнює $n' - 1$. За припущенням математичної індукції у підпросторі $L_1^\perp$ для деяких невід'ємних цілих чисел k, l, m таких, що $(k-1) + l + 2m = n' - 1$, існує ортонормований базис $a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l}, a_{k+l+1}, \ldots, a_{n'}$, у якому матриця ортогонального оператора $\varphi_{L_1^\perp}$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} E_{k-1} & & & & \\ & -E_l & & \mathbf{0} & \\ & & R_{\gamma_1} & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & R_{\gamma_m} \end{pmatrix}.$$

Не складно бачити, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_{n'}$ є ортонормованим базисом евклідового простору L, в якому ортогональний оператор φ має матрицю вигляду (7).

Якщо a_1 є власним вектором ортогонального оператора φ, що належить власному значенню -1, то доведення теореми аналогічне попередньому підвипадку. Відмінність полягає лише у побудові ортонормованого базису евклідового простору L. У якості нього можна розглянути систему векторів $a_2, \ldots, a_k, a_1, a_{k+1}, \ldots, a_{n'}$.

Розглянемо тепер випадок, коли ортогональний оператор φ евклідового простору L не має власного вектора. Нехай $f(\lambda)$ є характеристичним многочленом лінійного оператора φ. Цей многочлен є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Але його можна також вважати многочленом над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел з дійсними коефіцієнтами. За основною теоремою алгебри многочлен $f(\lambda)$ має деякий комплексний корінь $\alpha+\beta i$. Нехай A є матрицею ортогонального оператора φ у деякому базисі $c_1, c_2, \ldots, c_{n'}$ евклідового простору L. Через те, що $\alpha+\beta i$ є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$, то система лінійних однорідних рівнянь з матрицею $A-(\alpha+\beta i)E_{n'}$ має ненульовий розв'язок

$$\bar{d} = (\alpha_1+\beta_1 i,\ \alpha_2+\beta_2 i,\ \ldots,\ \alpha_{n'}+\beta_{n'} i),$$

який є деяким комплексним n'-вимірним вектором. Розглянемо вектори a, b евклідового простору L, координатні вектори-рядки яких у базисі $c_1, c_2, \ldots, c_{n'}$ відповідно співпадають з дійсними n'-вимірними векторами

$$\bar{a} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n'}), \quad \bar{b} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{n'}).$$

Тоді $\bar{d} = \bar{a} + i\bar{b}$ і оскільки $\big(A-(\alpha+\beta i)E_{n'}\big)\bar{d}^T = 0$, то

$$A(\bar{a}+i\bar{b})^T = (\alpha+\beta i)(\bar{a}+i\bar{b})^T.$$

Звідси

$$A\bar{a}^T = \alpha\bar{a}^T - \beta\bar{b}^T, \quad A\bar{b}^T = \beta\bar{a}^T + \alpha\bar{b}^T.$$

Це означає, що

$$\varphi(a) = \alpha a - \beta b, \quad \varphi(b) = \beta a + \alpha b. \tag{8}$$

Нехай M є лінійною оболонкою системи векторів a, b. Із рівностей (8) випливає, що M є інваріантним підпростором евклідового простору L відносно ортогонального оператора φ. Розмірність підпростору M дорівнює 2, бо у протилежному випадку ортогональний оператор φ мав би власний вектор, що не можливо. За теоремою про існування ортонормованого базису в підпросторі M можна вибрати деякий ортонормований базис u_1, u_2. Нехай

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

є матрицею обмеження φ_M ортогонального оператора φ на підпростір M у базисі u_1, u_2. Лінійний оператор φ_M, як обмеження ортогонального оператора φ, також є ортогональним оператором інваріантного підпростору M. За теоремою про матрицю ортогонального оператора матриця C є ортогональною матрицею, а тому справджуються рівності

$$\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 = 1, \quad \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2 = 1, \quad \gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22} = 0.$$

Залишаємо читачу на самостійну роботу показати, що із вказаних рівностей слідує існування дійсного числа γ_1, що

$$\gamma_{11} = \cos\gamma_1, \quad \gamma_{12} = \sin\gamma_1, \quad \gamma_{21} = -\sin\gamma_1, \quad \gamma_{22} = \cos\gamma_1.$$

Таким чином, $C = R_{\gamma_1}$ є матрицею оператору повороту на кут γ_1. За теоремою про ортогональний розклад евклідів простір L є прямою сумою підпростору M і його ортогонального доповнення $M^\perp$. Тому розмірність ортогонального доповнення $M^\perp$ дорівнює $n' - 2$. Далі, ортогональне доповнення $M^\perp$ є інваріантним підпростором евклідового простору L відносно ортогонального оператора φ. Дійсно, для будь-якого вектора v із $M^\perp$ образ $\varphi(v)$ міститься у $M^\perp$, бо

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi\big(\varphi^{-1}(u)\big), \varphi(v)\rangle = \langle \varphi^{-1}(u), v\rangle = 0$$

для будь-якого вектора u із M. З індуктивного припущення звідси слідує існування ортонормованого базису u_3, ..., $u_{n'}$ підпростору $M^\perp$, в якому матриця обмеження ортогонального оператора φ має вигляд (7), але без 1 та -1 на діагоналі, оскільки ортогональний оператор φ не має власного вектора. Підсумувавши вище сказане можемо стверджувати, що матриця ортогонального оператора φ у ортонормованому базисі u_1, u_2, u_3, ..., $u_{n'}$ евклідового простору L має вигляд

$$\begin{pmatrix} R_{\gamma_1} & & & \\ & R_{\gamma_2} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & R_{\gamma_m} \end{pmatrix}$$

для деяких дійсних чисел γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_m, де $m = \frac{n'}{2}$. Теорема доведена.

4.2.4 Унітарні оператори

Означення 5. Нехай L є унітарним простором. Лінійний оператор φ унітарного простору L називається *унітарним оператором*, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора унітарного простору L, тобто $\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ для довільного x із L.

Так само, як у випадку із аналогією між ортогональними і унітарними матрицями існує подібна аналогія між властивостями ортогональних і унітарних операторів. Більшість із тверджень попереднього підпункту залишаються істинним після заміни понять ортогональний оператор, евклідів простір, ортогональна матриця відповідно на унітарний оператор, унітарний простір, унітарна матриця. Виділимо окремо той факт, *що модуль будь-якого власного значенням унітарного оператора дорівнює одиниці.* Доведення цього твердження таке ж, як і доведення подібного твердження про власні значення ортогонального оператора. Також замість теореми про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора сформулюємо та доведемо наступну ознаку унітарного оператора скінченновимірного унітарного простору.

Теорема 13. *Нехай L є ненульовим скінченновимірним унітарним простором, а φ є лінійним оператором цього простору. Лінійний оператор φ є унітарним оператором тоді і тільки тоді, коли в унітарному просторі L існує ортонормований базис, що складається з власних векторів лінійного оператора φ, кожен із яких належить власному значенню з модулем рівним одиниці.*

Доведення. Нехай L є ненульовим скінченновимірним унітарним простором розмірності n, а φ є лінійним оператором цього простору. Доведемо необхідність теореми методом математичної індукції за розмірністю n унітарного простору L. Припустимо спочатку, що лінійний оператор φ є унітарним оператором. Якщо $n = 1$, то будь-який ненульовий вектор простору L є власним вектором, який належить власному значенню, як зазначалося вище, з модулем рівним одиниці. Вибираючи серед цих векторів вектор з нормою рівною одиниці, ми тим самим доводимо існування ортонормованого базису, про який стверджується у теоремі.

Далі, припустимо що твердження теореми є істинним для всіх унітарних операторів всіх унітарних просторів, розмірність яких менша за деяке фіксоване натуральне число n'. Розглянемо випадок, коли $n = n'$. Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ унітарного оператора φ є многочленом над полем комплексних чисел. За основною теоремою алгебри многочлен $f(\lambda)$ має деякий корінь α_1. У свою чергу за ознакою власного значення лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору комплексне число α_1 є власним значення унітарного оператора φ. У подальшому доведення необхідності цієї теореми таке, як і доведення теореми про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора у випадку, коли $\alpha_1 = 1$ або $\alpha_1 = -1$. Повторимо основні етапи цього доведення. Нехай a_1 є деяким власним вектором унітарного оператора φ, що належить власному значенню α_1 і який має норму рівну одиниці. Унітарний простір L є прямою сумою підпросторів L_1, породженого вектором a_1, та ортогонального доповнення $L_1^{\perp}$. Обидва підпростори L_1 і $L_1^{\perp}$ є інваріантними відносно унітарного оператора φ. Через те, що розмірність ортогонального доповнення $L_1^{\perp}$ дорівнює $n' - 1$ для обмеження $\varphi_{L_1^{\perp}}$ справджується індуктивне припущення. Тобто існує ортонормований базис $a_2, a_3, \ldots, a_{n'}$ ортогонального доповнення $L_1^{\perp}$, який складається з власних векторів унітарного оператора $\varphi_{L_1^{\perp}}$. Тому система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_{n'}$ є ортонормованим базисом унітарного простору L, що складається з власних векторів лінійного оператора φ. Всі власні значення, яким відповідно належать ці власні вектори, як зазначалося вище, мають модуль рівний одиниці.

Достатність теореми слідує із теореми про зв'язок між унітарним оператором і унітарною матрицею цього оператора у ортонормованому базисі і того факту, що оберненим до комплексного числа γ з модулем рівним одиниці є комплексно-спряжене до нього число $\overline{\gamma}$. Матриця A лінійного оператора φ у базисі, що складається з власних векторів лінійного оператора φ, кожен із яких належить власному значенню з модулем рівним одиниці, є діагональною матрицею. А тому ермітово-спряжена матриця A^* дорівнює оберненій матриці A^{-1}, тобто є унітарною матрицею. Теорема доведена.

Вправи для самостійної роботи

1. Показати, що сума ортогональних операторів, взагалі кажучи, не є ортогональним оператором.

2. Довести, що добуток дійсного числа α на ортогональний оператор є ортогональним оператором тоді і тільки тоді, коли $|\alpha| = 1$.

3. Описати ортогональні оператори одновимірного евклідового простору.

4. Чи є ортогональним оператором оператор A тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, визначений за правилом $A(x) = [x, a]$ для довільного вектора $x \in \mathbb{R}^3$, де a — фіксований вектор із $\mathbb{R}^3$.

5. Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що $\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$, для кожного x із L. Ортогональний оператор π_a називається *оператором відбиття відносно гіперплощини* $\{a\}^\perp$*, ортогональної вектору* a. У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

6. Показати, що ортогональний оператор двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є або оператором відбиття, або оператором повороту.

7. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ — евклідовий простір всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують натуральне число n, в якому скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ заданий за формулою

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i, \tag{9}$$

де $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}[x]_n$. Чи є ортогональним лінійний оператор φ евклідового простору $\mathbb{R}[x]_n$ такий, що $\varphi(f(x)) = f(-x)$ для будь-якого $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$.

8. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ — евклідовий простір всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують натуральне число n, в якому скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ заданий за формулою (9). Чи є ортогональним лінійний оператор ψ евклідового простору $\mathbb{R}[x]_n$ такий, що $\psi(f(x)) = x^n f(\frac{1}{x})$ для будь-якого $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$.

9. Довести, що лінійний оператор із попередньої задачі є ортогональним оператором відбиття відносно деякої гіперплощини. Знайти цю гіперплощину.

10. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ — евклідовий простір всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують натуральне число n, в якому скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ заданий за формулою

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \tag{10}$$

де $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{R}[x]_n$. Чи є ортогональним лінійний оператор φ евклідового простору $\mathbb{R}[x]_n$ такий, що $\varphi(f(x)) = f(-x)$ для будь-якого $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$.

11. Нехай $\mathbb{R}[x]_n$ — евклідовий простір всіх многочленів над полем дійсних чисел, степені яких не перевищують натуральне число n, в якому скалярний добуток $\langle\ ,\ \rangle$ заданий за формулою (10). Чи є ортогональним лінійний оператор ψ евклідового простору $\mathbb{R}[x]_n$ такий, що $\psi(f(x)) = x^n f(\frac{1}{x})$ для будь-якого $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$.

12. Лінійний оператор чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$ відображає вектори $x_1 = (2,2,2,2)$, $x_2 = (2,0,2,2)$, $x_3 = (2,2,0,2)$, $x_4 = (2,2,2,0)$ відповідно вектори $y_1 = (4,0,0,0)$, $y_2 = (3,-1,1,1)$, $y_3 = (3,1,-1,1)$, $y_4 = (3,1,1,-1)$. Чи є цей оператор ортогональним?

13. Для ортогонального оператора φ тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, заданого у канонічному базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

знайти деякий ортонормований базис, в якому матриця B ортогонального оператора φ матиме канонічний вигляд (7).

14. Для ортогонального оператора φ тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, заданого у канонічному базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

знайти деякий ортонормований базис, в якому матриця B ортогонального оператора φ матиме канонічний вигляд (7).

15. Для ортогонального оператора φ тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, заданого у канонічному базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

знайти деякий ортонормований базис, в якому матриця B ортогонального оператора φ матиме канонічний вигляд (7).

16. Для даної унітарної матриці

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix},$$

знайти діагональну матрицю B і унітарну матрицю Q такі, що $B = Q^{-1}AQ$.

17. Нехай φ є унітарним оператором унітарного простору L. Довести, що ортогональне доповнення $M^{\perp}$ будь-якого інваріантного підпростору M простору L відносно опертора φ є інварінатним підпростором відносно φ.

4.3 Симетричні і ермітові оператори

4.3.1 Симетричні матриці

Нехай n є деяким натуральним числом.

Означення 1. Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається *симетричною*, якщо вона дорівнює своїй транспонованій.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, або коротко, якщо $A^T = A$. Прикладами симетричних матриць є такі матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.*

Доведення. Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем дійсних чисел. Оскільки транспонована до суми матриць порядку n дорівнює сумі транспонованих до кожного доданку, то

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

Це означає, що сума матриць A і B є симетричною матрицею. Аналогічно за властивістю трансонування матриць для будь-якого дійсного числа α справджуються рівності $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$. Тому добуток αA є також симетричною матрицею. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Інакше* *кажучи, число дійсних коренів многочлена $f(x)$, враховуючи їх кратність, дорівнює n.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, є симетричною матрицею. Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійних множників вигляду $\lambda - \gamma$, де γ — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.

Нехай β є деяким коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Тоді детермінант $|A - \beta E|$, де E — одинична матриця порядку n, дорівнює значенню $f(\beta)$ характеристичного многочлена, тобто 0. Це у свою чергу означає, що система лінійних однорідних рівнянь з матрицею $A - \beta E$ має деякий ненульовий розв'язок $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ із комплексного n-вимірного векторного простору $\mathbb{C}^n$. Тоді істинною є матрична рівність $(A - \beta E)c^T = \bar{0}^T$, де $\bar{0}$ є нульовим n-вимірним вектором. Звідси $Ac^T = \beta c^T$ або ж

$$\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \dots + \alpha_{2n}\gamma_n = \beta\gamma_2, \\ \qquad \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \dots + \alpha_{nn}\gamma_n = \beta\gamma_n. \end{cases} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на число $\overline{\gamma_1}$, яке є комплексно-спряженим до γ_1, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$. Опісля додамо всі одержані рівності. Отримаємо рівність

$$\begin{gathered} (\alpha_{11}\gamma_1\overline{\gamma_1} + \alpha_{12}\gamma_2\overline{\gamma_1} + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n\overline{\gamma_1}) + \\ +(\alpha_{21}\gamma_1\overline{\gamma_2} + \alpha_{22}\gamma_2\overline{\gamma_2} + \dots + \alpha_{2n}\gamma_n\overline{\gamma_2}) + \\ \dots\dots\dots \\ +(\alpha_{n1}\gamma_1\overline{\gamma_n} + \alpha_{n2}\gamma_2\overline{\gamma_n} + \dots + \alpha_{nn}\gamma_n\overline{\gamma_n}) = \\ = \beta\gamma_1\overline{\gamma_1} + \beta\gamma_2\overline{\gamma_2} + \dots + \beta\gamma_n\overline{\gamma_n}, \end{gathered}$$

або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i} = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\overline{\gamma_i}. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно-спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β на ненульове дійсне число

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\overline{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^2.$$

Це число не дорівнює нулю через те, що $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ є ненульовим n-вимірним вектором. Тому β є також дійсним числом. Оскільки нами доведено, що будь-який комплексний корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$ симетричної матриці A є дійсним числом, то теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай A є дійсною симетричною матрицею. Тоді*

1) *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
2) *існує оборотна дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
3) *існує невироджена дійсна матриця Q така, що Q^TAQ є діагональною матрицею;*
4) *існує ортогональна матриця Q така, що Q^TAQ є діагональною матрицею.*

Доведення цієї теореми методами матричної алгебри є занадто складним. Тим не менше ця теорема буде нами доведена нижче, як наслідок із ознак, так званого, симетричного оператора скінченновимірного евклідового простору.

4.3.2 Ермітові матриці

Означення 2. Матриця A порядку n над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел називається *ермітовою* або *самоспряженою*, якщо вона дорівнює своїй ермітово-спряженій.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є ермітовою матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, або коротко, якщо $A^* = A$. Прикладом ермітової матриці є така матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-2i & 5+i \\ 1+2i & 4i & 7 \\ 5-i & 7 & -2+6i \end{pmatrix}.$$

Для ермітових матриць справджуються такі ж теореми, як для і для симетричних матриць, якщо замінити поняття симетрична матриця, поле дійсних чисел, ортогональна матриця відповідно на ермітова матриця, поле комплексних чисел, унітарна матриця. Невеликим винятком є формулювання теореми аналогічної теоремі 2. Її слід переформулювати у такий спосіб.

Теорема 4. *Всі корені характеристичного многочлена ермітової матриці є дійсними числами.*

Доведення усіх згаданих теорем для ермітових матриць також подібні до доведень відповідних теорем для симетричних матриць.

4.3.3 Симетричні оператори

Означення 3. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається *симетричним оператором* простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$.

Теорема 5. *Сума симетричних операторів евклідового простору є симетричним оператором. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричний оператор є симетричним оператором.*

Доведення. Нехай φ і ψ є симетричними операторами евклідового простору L. Тоді для довільних векторів x і y із L справджуються рівності

$$\langle[\varphi+\psi](x), y\rangle = \langle\varphi(x)+\psi(x), y\rangle = \langle\varphi(x), y\rangle + \langle\psi(x), y\rangle = \\ = \langle x, \varphi(y)\rangle + \langle x, \psi(y)\rangle = \langle x, \varphi(y)+\psi(y)\rangle = \langle x, [\varphi+\psi](y)\rangle.$$

Тому за означенням сума $\varphi+\psi$ є симетричним оператором. Аналогічно доводиться і друге твердження теореми, оскільки для будь-якого дійсного числа α і симетричного оператора φ евклідового простору L справджуються рівності

$$\langle[\alpha\varphi](x), y\rangle = \langle\alpha\varphi(x), y\rangle = \alpha\langle\varphi(x), y\rangle = \\ = \alpha\langle x, \varphi(y)\rangle = \langle x, \alpha\varphi(y)\rangle = \langle x, [\alpha\varphi](y)\rangle.$$

Теорема 6. *Власні вектори симетричного оператора φ евклідового простору L, що належать різним власним значенням, ортогональні.*

Доведення. Нехай L є евклідовим простором, а φ є симетричним оператором цього простору. Припустимо, що симетричний оператор має деякі власні вектори a і b, що відповідно належать різним власним значенням α і β. Тоді істинними є рівності

$$\alpha\langle a, b\rangle = \langle\alpha a, b\rangle = \langle\varphi(a), b\rangle = \langle a, \varphi(b)\rangle = \langle a, \beta b\rangle = \beta\langle a, b\rangle.$$

Звідси слідує, що $(\alpha-\beta)\langle a, b\rangle = 0$. Оскільки α і β є різними дійсними числами, то останні рівність можлива лише у випадку, коли скалярний добуток векторів a і b дорівнює нулю. Теорема доведена.

Теорема 7. *Симетричний оператор φ ненульового скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.*

Доведення. Нехай L є ненульовим скінченновимірним евклідовим простором розмірності n, а φ є лінійним оператором цього простору. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис a_1, a_2, …, a_n евклідового простору L. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця симетричного оператора φ у цьому базисі, де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ для всіх i, $j \in \{1,$

$2, \ldots, n\}$. Тоді $\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} a_i$ для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Для довільних різних значень i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \left\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею. Тобто справджується рівність $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Тоді навпаки із рівності правих частин рівностей (3) і (4) слідує рівність їх лівих частин. Тобто $\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle$ для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L: $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$, $c = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j$. Враховуючи вище сказане справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \right), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi(a_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \right) \right\rangle = \langle b, \varphi(c) \rangle.$$

Це означає, що φ є симетричним оператором. Теорема доведена.

Теорема 8. *Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.*

Доведення. Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ є характеристичним многочленом матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. Многочлен $f(\lambda)$ має натуральний степінь n і за теоремою 2 про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена.

Теорема 9 (основна теорема про симетричні оператори)**.** *Лінійний оператор φ ненульового скінченновимірного евклідового простору L є симетричним оператором тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора φ.*

Доведення. Нехай L є скінченновимірним евклідовим простором розмірності n, а φ є лінійним оператором цього простору. Достатність теореми слідує із попередньої ознаки симетричного оператора і того факту, що матриця лінійного оператора φ у базисі, що складається з його власних векторів, є діагональною, а заодно і симетричною матрицею.

Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L. Нехай тепер лінійний оператор φ є симетричним. Ідея доведення у цілому дуже схожа на ідеї доведення теорем про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора та ознаку унітарного оператора із попереднього пункту. Зокрема база індукції цілком очевидна. Дійсно, якщо $n = 1$, то будь-який ненульовий вектор евклідового простору L є власним вектором симетричного оператора φ і серед них завжди можна знайти вектор з нормою рівною одиниці.

Припустимо, що у випадку, коли n менше за деяке фіксоване натуральне число n' будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L. Розглянемо випадок, коли $n = n'$. За теоремою 8 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Позначимо через a_1 вектор $\frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором симетричного оператора φ з нормою рівною одиниці. Далі, нехай L_1 є лінійною оболонкою породженою вектором a_1. За теоремою про ортогональний розклад евклідовий простір L є прямою сумою підпростору

L_1 і ортогонального доповнення $L_1^{\perp}$. Звідси за однією з ознак прямої суми підпросторів скінченновимірного лінійного простору слідує, що розмірність ортогонального доповнення дорівнює $n' - 1$. Покажемо, що ортогональне доповнення $L_1^{\perp}$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ. Для цього досить довести, що образ $\varphi(b)$ будь-якого вектора b із ортогонального доповнення $L_1^{\perp}$ міститься в $L_1^{\perp}$. Розглянемо довільний вектор c із підпростору L_1. Враховуючи те, що кожен ненульовий вектор із L_1 є власним вектором симетричного оператора φ, обчислимо скалярний добуток векторів c і $\varphi(b)$

$$\langle c, \varphi(b)\rangle = \langle \varphi(c), b\rangle = \langle \alpha_1 c, b\rangle = \alpha_1\langle c, b\rangle = 0.$$

Таким чином, вектори c і $\varphi(b)$ ортогональні для довільних c із L_1 і b із $L_1^{\perp}$, що і потрібно було довести.

За припущенням математичної індукції у ортогональному доповненні $L_1^{\perp}$ існує ортонормований базис a_2, a_3, $\ldots$, $a_{n'}$, що складається з власних векторів обмеження $\varphi_{L_1^{\perp}}$ симетричного оператора φ. Тому система векторів a_1, a_2, a_3, $\ldots$, $a_{n'}$ є ортонормованим базисом евклідового простору L, що складається з власних векторів оператора φ. Теорема доведена.

***Доведення теореми* 3.** Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору. Наприклад, за L можна взяти n-вимірний евклідів $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$. За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис b_1, b_2, $\ldots$, b_n, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ у цьому базисі є діагональною матрицею і $B = Q^{-1}AQ$, де Q — матриця переходу від базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n до базису b_1, b_2, $\ldots$, b_n. Оскільки обидва базиси є ортонормованими, то Q є ортогональною матрицею. Через це також справджується рівність $B = Q^T AQ$.

Теорема 10. *Будь-яку дійсну оборотну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої симетричної та деякої ортогональної матриць.*

Доведення. Нехай A є деякою дійсною оборотною матрицею порядку n, де n є натуральним числом. Розглянемо матрицю $B = A\cdot A^T$. Матриця B є симетричною, бо $B^T = (A\cdot A^T)^T = (A^T)^T\cdot A^T = A\cdot A^T = B$. За теоремою 3 існує ортогональна матриця S така, що матриця $D = S^{-1}BS$ є діагональною матрицею. Тоді

$$D = S^{-1}BS = S^T(A \cdot A^T)S = (S^TA)(A^TS) = (A^TS)^T(A^TS) = C^TC,$$

де $C = A^TS$. Якщо через $d_1, d_2, \ldots, d_n$ позначити елементи на діагоналі матриці C, то із рівності $D = C^TC$ випливає, що d_i дорівнює скалярному квадрату i-го стовпця матриці C для кожного i із $\{1, 2, \ldots, n\}$. Матриця C є оборотною матрицею, бо такими є матриці A і S. Тому кожен її стовпець є ненульовим n-вимірним вектором і як наслідок $d_i > 0$ для кожного i із $\{1, 2, \ldots, n\}$. Це дає нам можливість розглянути діагональну матрицю

$$\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{d_n} \end{pmatrix},$$

яку позначимо символом $\sqrt{D}$. Очевидно $\sqrt{D}$ є оборотною симетричною матрицею і $\sqrt{D}^2 = D$. Позначимо через P добуток $S\sqrt{D}S^{-1}$. Матриця P є симетричною матрицею, бо

$$P^T = \left(S\sqrt{D}S^{-1}\right)^T = \left(S\sqrt{D}S^T\right)^T = (S^T)^T\sqrt{D}^TS^T = \\ = S\sqrt{D}S^T = S\sqrt{D}S^{-1} = P$$

і для матриці P справджується рівність

$$P^2 = (S\sqrt{D}S^{-1})^2 = (S\sqrt{D}S^{-1})(S\sqrt{D}S^{-1}) = \\ = S\sqrt{D}^2S^{-1} = SDS^{-1} = B. \quad (5)$$

Нарешті, розглянемо матрицю $Q = P^{-1}A$. Очевидно $A = PQ$. Для завершення доведення теореми залишися показати, що Q є ортогональною матрицею. Використаємо для цього одну із ознак ортогональної матриці і рівність (5):

$$Q^{-1} = (P^{-1}A)^{-1} = A^{-1}P = A^{-1}P^2P^{-1} = \\ = A^{-1}BP^{-1} = A^{-1}AA^TP^{-1} = A^TP^{-1} = \left(\left(P^{-1}\right)^TA\right)^T = \\ = \left(\left(P^T\right)^{-1}A\right)^T = \left(P^{-1}A\right)^T = Q^T.$$

Зауваження 1. Представлення дійсної оборотної матриці у вигляді добутку симетричної і ортогональної матриць називають *полярним розкладом*. Залишаємо читачеві на самостійну роботу той факт, що таке представлення єдине для кожної оборотної матриці над полем дійсних чисел, якщо на симетричну матрицю накласти додаткову умову, а саме її власні значення повинні бути додатними числами. Також справджується і наступне твердження. *Будь-яку дійсну оборотну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої ортогональної та деякої симетричної матриць.*

Теорема 11. *Будь-який оборотний лінійний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору L можна представити у вигляді добутку деякого симетричного і деякого ортогонального операторів цього простору.*

Доведення. Нехай L є ненульовим скінченновимірним евклідовим простором розмірності n, а φ є оборотним оператором цього простору. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Нехай A є матрицею лінійного оператора φ у розглядуваному базисі. За теоремою 10 про полярний розклад знайдуться такі симетрична матриця P та ортогональна матриця Q порядку n, що $A = PQ$. Нехай ρ і σ лінійні оператори евклідового простору L, які відповідно задаються матрицями P і Q у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Оскільки цей базис ортонормований, а матриці P і Q відповідно є симетричною і ортогональною, то лінійні оператори ρ і σ відповідно є симетричним та ортогональним. Нарешті за теоремою про зв'язок між матрицею добутку лінійних операторів та матрицями множників одержуємо істинність рівності $\varphi = \rho\sigma$. Теорема доведена.

4.3.4 Ермітові оператори

Означення 4. Лінійний оператор φ унітарного простору L називається *ермітовим оператором* або *самоспряженим оператором* простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Через схожість означень симетричного оператора евклідового простору і ермітового оператора унітарного простору всі вище сформульовані і доведені теореми про симетричні оператори легко трансформуються у відповідні теореми про ермітові оператори.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що лінійна комбінація з дійсними коефіцієнтами симетричних операторів евклідового простору L є симетричним оператором.

2. Довести, що добуток симетричних операторів φ і ψ евклідового простору L є симетричним оператором тоді і тільки тоді, коли ці оператори комутують, тобто $\varphi\psi = \psi\varphi$.

3. Довести, що лінійний оператор обернений до оборотного симетричного оператора є симетричним оператором.

4. Нехай φ — лінійний оператор двовимірного евклідового простору L. Довести, що якщо для деяких двох непропорційних векторів x і y із L справджується рівність $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$, то φ є симетричним оператором.

5. Довести, що лінійний оператор φ дійсного двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що $\varphi\big((x_1, x_2)\big) = \big(\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2\big)$ для будь-якого $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є симетричним оператором.

6. Лінійний оператор φ дійсного чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$ відображає вектори $x_1 = (0, 1, 1, 1)$, $x_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $x_3 = (-1, -1, 0, 1)$, $x_4 = (-1, -1, -1, 0)$ відповідно у вектори $y_1 = (3, -1, -1, -1)$, $y_2 = (1, -3, -1, -1)$, $y_3 = (-1, -3, -1, 1)$, $y_4 = (-3, -1, -1, 1)$. Чи є лінійний оператор φ симетричним?

7. Знайти деякий ортонормований базис тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, що складається з власних векторів лінійного оператора φ цього простору, а також його матрицю у знайденому базисі, якщо відомо, що лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

у канонічному базисі $\mathbb{R}^3$.

8. Знайти деякий ортонормований базис тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, що складається з власних векторів лінійного оператора φ цього простору, а також його матрицю у знайденому базисі, якщо відомо, що лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

у канонічному базисі $\mathbb{R}^3$.

9. Довести, що якщо φ і ψ є ермітовими операторами унітарного простору L, то лінійні оператори $\varphi\psi + \psi\varphi$ та $i(\varphi\psi - \psi\varphi)$ також є ермітовими операторами цього простору.

10. Довести, що якщо лінійний оператор φ унітарного простору L володіє двома із наступних трьох властивостей:

1) φ — унітарний оператор;
2) φ — ермітів оператор;
3) φ — інволютивний оператор, тобто $\varphi^2 = \mathrm{id}_L$, де id_L — тотожний оператор унітарного простору L,

то він володіє і третьою властивістю.

11. Знайти деякий ортонормований базис тривимірного унітарного простору $\mathbb{C}^3$, що складається з власних векторів лінійного оператора φ цього простору, а також його матрицю у знайденому базисі, якщо відомо, що лінійний оператор φ задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

у канонічному базисі $\mathbb{C}^3$.

12. Розкласти дійсну матрицю

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

у добуток симетричної матриці з додатними власними значеннями і ортогональної матриці.

13. Розкласти дійсну матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

у добуток симетричної матриці з додатними власними значеннями і ортогональної матриці.

Розділ 5

Квадратичні форми

У попередньому розділі навчального посібника вивчалися лінійні простори над полем дійсних або комплексних чисел, на яких було задано скалярний добуток. У випадку скінченновимірних лінійних просторів було встановлено, що для того, щоб визначити деякий скалярний добуток на скінченновимірному лінійному просторі досить задати скалярний добуток векторів деякого базису цього простору, тобто задати матрицю Ґрамма деякого базису. У цьому ж розділі вивчаються питання пов'язані з необхідними і достатніми умовами, яким ця матриця повинна задовольняти, щоб рівність (3) із першого пункту попереднього розділу була б формулою саме скалярного добутку у координатній формі.

Означення 1. Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. *Білінійною формою на лінійному просторі* L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$, яке задовольняє наступним умовам лінійності за кожним із аргументів:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y), \quad \sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$
$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2), \quad \sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

для довільних векторів x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 із L та довільного елемента α поля P.

Якщо L є евклідовим або унітарним простором, то заданий на L скалярний добуток є прикладом білінійної форми, до того ж прикладом, так званої, симетричної білінійної форми у розумінні наступного означення.

Означення 2. Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається *симетричною*, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, y із L.

Виділяють також, так звані, кососимтеричні білінійні форми.

Означення 3. Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається *кососиметричною*, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, y із L.

Виявляється, що за певних умов будь-яку білінійну форму можна представити у вигляді суми симетричної і кососиметричної білінійних форм. Суму білінійних форм визначають природним чином. Нагадаємо, що характеристикою поля P називається найменше натуральне число n, якщо таке існує, що сума n разів одиниці поля P дорівнює нулю цього поля. Якщо ж такого натурального числа не існує, то характеристика поля вважається рівною нулеві. Скажімо, якщо поле P з одиницею 1 і нулем 0 має характеристику 2, то $1 + 1 = 0$. У полі P з одиницею 1 і характеристикою відмінною від 2 формально позначимо суму $1 + 1$ також через 2. Тоді 2 є ненульовим елементом поля і для нього існує обернений 2^{-1}.

Твердження 1. *Нехай P є полем, характеристика якого не дорівнює 2. Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних форм на просторі L.*

Доведення. Нехай L є лінійним простором над полем P, характеристика якого не дорівнює 2, а $\sigma : L \times L \to P$ є деякою білінійною формою на L. Розглянемо відображення $\mu : L \times L \to P$ і $\nu : L \times L \to P$, задані відповідно формулами

$$\mu(x, y) = 2^{-1}\big(\sigma(x, y) + \sigma(y, x)\big), \quad \nu(x, y) = 2^{-1}\big(\sigma(x, y) - \sigma(y, x)\big)$$

для будь-яких векторів x і y із L. Не складно перевірити, що обидва ці відображення є білінійними формами, причому μ є симетричною, а ν є кососимтричною білінійною формою. Оскільки для будь-який векторів x, y із лінійного простору L справджується рівність $\sigma(x, y) = \mu(x, y) + \nu(x, y)$, то σ є сумою відображень μ і ν.

Означення 4. Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається *невиродженою*, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для кожного вектора x із L випливає, що a є нульовим вектором, тобто $a = \bar{0}$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, …, a_n. Якщо будь-які вектори x та y лінійного простору L розкласти за вибраним базисом відповідно $x = x_1a_1 + \dots + x_na_n$ та $y = y_1a_1 + \dots + y_na_n$, де $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ є елементами поля P, то

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \sigma(a_i, a_j),$$

або в матричному вигляді $\sigma(x, y) = X^T AY$, де X, Y — координатні стовпці векторів x і y,

$$A = \begin{pmatrix} \sigma(a_1, a_1) & \sigma(a_1, a_2) & \dots & \sigma(a_1, a_n) \\ \sigma(a_2, a_1) & \sigma(a_2, a_2) & \dots & \sigma(a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(a_n, a_1) & \sigma(a_n, a_2) & \dots & \sigma(a_n, a_n) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Означення 5. Матрицю (1) будемо називати *матрицею білінійної форми σ у базисі a_1, a_2, …, a_n*.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$. Радимо читачеві самостійно переконатися у тому, що білінійна форма σ є невиродженою тоді і тільки тоді, коли матриця A цієї форми є невиродженою.

Означення 6. Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається *квадратичною формою на L*, якщо існує симетрична білінійна форма σ на L така, що $k(x) = \sigma(x, x)$ для будь-якого вектора x із L. При цьому симетричну білінійну форму σ будемо називати *полярною до квадратичної форми k*.

Твердження 2. *Нехай P є полем, характеристика якого не дорівнює 2, а $k : L \to P$ є деякою квадратичною формою на деякому скінченновимірному лінійному просторі L над полем P. Білінійна форма, полярна до квадратичної форми k, визначається нею однозначно.*

Доведення. Нехай справджуються умови твердження, а σ і δ є симетричними білінійними формами, які є полярними до квадратичної форми k. Тоді для будь-яких векторів x і y із L є істинними рівності

$$\sigma(x,y) = 2^{-1}\big(\sigma(x+y,x+y) - \sigma(x,x) - \sigma(y,y)\big) = \\ = 2^{-1}\big(k(x+y) - k(x) - k(y)\big) = \\ = 2^{-1}\big(\delta(x+y,x+y) - \delta(x,x) - \delta(y,y)\big) = \delta(x,y).$$

Це означає $\sigma = \delta$. Твердження доведено.

Твердження 3. *Квадратична форма $k : L \to \mathbb{R}$ на деякому скінченновимірному лінійному просторі L над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається додатно визначеною, якщо $k(x) > 0$ для кожного ненульового вектора x із L.*

Таким чином, підсумовуючи все вище сказане, для того, щоб задати скалярний добуток на скінченновимірному лінійному просторі розмірності n над полем дійсних чисел досить задати симетричну білінійну форму σ, за допомогою деякої симетричної матриці порядку n, необхідною умовою якої є додатна визначеність квадратичної форми з полярною до неї білінійною формою σ.

Також домовимося всюди у цьому розділі розглядати поля з обмеженням на характеристику, а саме тільки ті поля, характеристика яких не дорівнює 2. Будь-яке числове поле, яке є підмножиною поля $\mathbb{C}$ комплексних чисел задовольняє цій умові.

5.1 Еквівалентність квадратичних форм

У цьому пункті поняттю *квадратична форма* ми надамо рису дещо «самостійного поняття», а не породженого поняттям *білінійна форма*.

Означення 1. Нехай P є деяким полем, n є деяким натуральним числом, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ є впорядкованим набором якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних i, j із множини індексів $\{1, 2, \dots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \dots + \alpha_{ij} x_i x_j + \dots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається *квадратичною формою над полем P від n змінних x_1, x_2, ..., x_n*. Елемент α_{ij} поля P називатимемо *коефіцієнтом квадратичної форми* при добутку змінних x_i та x_j, де i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Це означення не суперечить даному раніше визначенню квадратичної форми, заданої на скінченновимірному лінійному просторі L над полем P. Дійсно, якщо a_1, a_2, ..., a_n — деякий базис лінійного простору L над полем P, то ми можемо побудувати відображення $k : L \to P$ за таким правилом: кожному вектору x з координатним рядком $x_1, x_2, \dots, x_n$ у базисі a_1, a_2, ..., a_n ставимо у відповідність елемент поля $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$. Відображення $\sigma : L \times L \to P$ таке, що $\sigma(x, y) = 2^{-1}\big(k(x + y) - k(x) - k(y)\big)$ для довільних векторів x, y із L, є симетричною білінійною формою. Не складно переконатися у тому, що $k(x) = \sigma(x, x)$ для будь-якого вектора x із L. Це означає, що k є квадратичною формою з полярною до неї білінійною формою σ за раніше сформульованим означенням квадратичної форми.

Зауважимо, що квадратичну форму можна трактувати, як однорідний многочлен над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n степеня 2.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$ можна міняти місцями у записі квадратичної форми f. Ці доданки будемо також називати членами квадратичної форми. Окрім цього, домовимося у випадку різних індексів i та j замість виразу $\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i$ інколи писати $2a_{ij} x_i x_j$ і навпаки.

Означення 2. Матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ порядку n, складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається *матрицею квадратичної форми* f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то матриця A є симетричною матрицею.

Означення 3. *Рангом квадратичної форми* f називається ранг матриці A цієї квадратичної форми.

Позначатимемо ранг квадратичної форми f через $\operatorname{rank} f$. Отже, $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$. Алгебраїчні вирази

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3 над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є відповідно матрицями квадратичних форм f, g і h. Нескладно переконатися, що $\operatorname{rank} f = 3$, $\operatorname{rank} g = 1$, $\operatorname{rank} h = 3$.

Розглянемо стовпець X, складений з змінних x_1, x_2, $\ldots x_n$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи змінні x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, одержаний транспонуванням стовпця X, на результат добутку $A \cdot X$

$$X^T \cdot A \cdot X = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j. \qquad (2)$$

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме вираз $X^T AX$, називають *матричним записом квадратичної форми* f.

Поряд із змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$ є квадратичною формою із змінними $y_1, y_2, \dots, y_n$. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Означення 4. *Лінійним перетворенням змінних* $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем P у нові змінні $y_1, y_2, \dots, y_n$ над цим же полем називається упорядкована сукупність рівностей вигляду:

$$\begin{array}{c} x_1 = \tau_{11} y_1 + \tau_{12} y_2 + \dots + \tau_{1n} y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \tau_{n1} y_1 + \tau_{n2} y_2 + \dots + \tau_{nn} y_n, \end{array} \qquad (3)$$

де $\tau_{ij} \in P$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. При цьому кажуть, що перейшли нових змінних, виразивши старі змінні лінійно через нові з деякими коефіцієнтами із поля P. Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається *матрицею лінійного перетворення змінних.*

Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних $y_1, y_2, \dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається *невиродженим,* якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є *оберненим лінійним перетворенням змінних* Y *в* X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових змінних до початкових змінних.

Означення 5. Послідовне виконання лінійних перетворень змінних $X = Q_1Y$ і $Y = Q_2Z$, записаних у матричній формі, називається *добутком цих перетворень.*

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. *Виконати* в даній квадратичній формі $f(x_1, \dots, x_n)$ *лінійне перетворення змінних* (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j$$

замість змінних x_1, $\dots$, x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{k1}y_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} \tau_{kn}y_k\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{ki}y_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \tau_{lj}y_l\right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \tau_{ki}\alpha_{ij}\tau_{lj}\right) y_ky_l = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{kl}y_ky_l,$$

для деяких β_{kl} із поля P, k, $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми)**.** *Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення змінних з матрицею Q, то у результаті ми одержимо квадратичну форму від нових змінних, причому матрицею цієї квадратичної форми є добуток Q^TAQ.*

Доведення. Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^TAX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\dots$, y_n

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (QY)^TA(QY) = Y^TQ^TAQY$$

або теж саме, що $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY$, де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ = B.$$

Це означає, що у результаті лінійного перетворення змінних з матрицею Q у квадратичній формі $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ми одержали квадратичну форму $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y^T BY$ з матрицею B, що дорівнює $Q^T AQ$. Теорема доведена.

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 6. Будемо говорити, що квадратична форма f від змінних x_1, x_2, …, x_n над полем P *еквівалентна* квадратичній формі g від змінних y_1, y_2, …, y_n, якщо існує невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, …, x_n у змінні y_1, y_2, …, y_n, за допомогою якого із квадратичної форми $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна одержати квадратичну форму $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Квадратична форма f від змінних x_1, x_2, …, x_n називається *еквівалентною* квадратичній формі g від тих же змінних, якщо f еквівалентна квадратичній формі, одержаній із g за допомогою лінійного перетворення змінних з одиничною матрицею.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо знаком $\sim$. Із закону зміни квадратичної форми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P. Квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B тоді і тільки тоді, коли існує така невироджена матриця S над полем P, що $B = S^T AS$.*

Виносимо на самостійну роботу читачеві переконатися у тому, що відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1) будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);
3) якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичні формі g, яка в свою чергу еквівалентна квадратичні формі h, то квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі h (транзитивна властивість).

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n над полем P розбивається на *класи еквівалентних квадратичних форм.* Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. У наступній теоремі сформульовано необхідну умову належності двох квадратичних форм одному й тому ж із вказаних класів.

Теорема 2 (про інваріантність рангу)**.** *Еквівалентні квадратичні форми мають однакові ранги.*

Доведення. Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n відповідно з матрицями A і B. Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$. Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank}(Q^T(AQ)) = \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} g.$$

Теорема доведена.

Провести класифікацію квадратичних форм означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, яка б мала найпростіший вигляд і по якому можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Наприклад найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \tag{4}$$

де α_1, $\dots$, α_n — деякі елементи поля P, серед яких можуть бути і нульові елементи.

Означення 7. Квадратична форма вигляду (4) називається квадратичною формою *канонічного вигляду.*

Матриця квадратичної форми канонічного вигляду (4) є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів матриці A, тобто дорівнює числу квадратів змінних квадратичної форми цього вигляду з ненульовими коефіцієнтами.

Теорема 3 (основна теорема про квадратичні форми)**.** *Будь-яка квадратична форма над числовим полем P еквівалентна квадратичній формі канонічного вигляду.*

Доведення. Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k. Розглянемо квадратичну форму $f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$ над полем P від k змінних x_1, x_2, $\dots$, x_k. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду. У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.

У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{kk}$, що знаходяться біля квадратів змінних, відмінний від 0. Нехай, наприклад, $\alpha_{11} \neq 0$. Тоді алгебраїчний вираз

$$f - \tfrac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k)^2 \tag{5}$$

є квадратичною формою, яку можна трактувати як квадратичну форму лише від змінних $x_2, \dots, x_k$. Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

$$f - \tfrac{1}{\alpha_{ii}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k)^2,$$

ми одержимо квадратичну форму лише від змінних x_1, $\dots$, x_{i-1}, x_{i+1}, $\dots x_k$ і проводимо подальші міркування аналогічно, як у випадку $\alpha_{11} \neq 0$. Далі, із (5) слідує, що

$$f = \tfrac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k)^2 + g.$$

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} &y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k, \\ &y_2 = x_2, \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &y_k = x_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}. Тому лінійне перетворення змінних (7) є невиродженим. Виконаємо обернене до (7) лінійне перетворення змінних у квадратичній формі f, тобто лінійне перетворення

$$\begin{aligned} &x_1 = \tfrac{1}{a_{11}}y_1 - \tfrac{\alpha_{12}}{a_{11}}y_2 - \dots - \tfrac{\alpha_{1k}}{a_{11}}y_k, \\ &x_2 = y_2, \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &x_k = y_k. \end{aligned}$$

У результаті ми одержимо квадратичну форму

$$h = \tfrac{1}{\alpha_{11}}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij}y_iy_j$$

(див. позначення (6)). За припущенням індукції існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} y_2 &= \tau_{22}z_2 + \dots + \tau_{2n}z_k, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_k &= \tau_{k2}z_2 + \dots + \tau_{kk}z_k \end{aligned}$$

для деяких $\tau_{ij} \in P$, за допомогою якого із квадратичної форми g можна одержати квадратичну форму канонічного вигляду

$$\gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \dots + \gamma_k z_k^2,$$

де γ_2, γ_3, ..., γ_k є деякими числами поля P. Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \tau_{22}z_2 + \dots + \tau_{2n}z_k, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_k &= \tau_{k2}z_2 + \dots + \tau_{kk}z_k, \end{aligned}$$

яке, очевидно, є невиродженим лінійним перетворенням змінних. Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.

Насамкінець доведемо теорему у випадку, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів змінних квадратичної форми f дорівнюють 0. Тоді знайдуться різні q та r із множини індексів $\{1, 2, \ldots, k\}$ такі, що $\alpha_{qr} \neq 0$. Не зменшуючи загальності доведення теореми вважатимемо, що $\alpha_{12} \neq 0$. Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_1 + u_2, \quad x_3 = u_3, \quad \ldots, \quad x_k = u_k.$$

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює 1. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом змінного. Цей член «не скоротиться» після спрощення ні з одним з інших членів, оскільки у кожному з них присутня хоча б одна із змінних u_3, u_4, $\ldots$, u_k. Отже, доведення теореми у цьому випадку звелося до випадку, що розглядався раніше. Теорема доведена.

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.

Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тім, що різні квадратичні форми канонічного вигляду можуть бути еквівалентними одна одній. Інакше кажучи, одну і ту ж квадратичну форму можна звести до декількох канонічних виглядів за допомогою невироджених лінійних перетворень змінних. Відмітимо, що у всіх цих квадратичних формах канонічного вигляду спільним буде число квадратів з ненульовими коефіцієнтами. Продовження класифікації квадратичних форм над полем P залежить від специфіки поля P.

5.1.1 Нормальний вигляд комплексної квадратичної форми

Розглянемо комплексну, тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, квадратичну форму канонічного вигляду $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$ від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ із поля $\mathbb{C}$. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не дорівнюють 0. Можна вважати, що $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0, \ldots, \alpha_r \neq 0$. У протилежному випадку легко вказати невироджене лінійне перетворення змінних, після виконання якого одержимо квадратичну форму канонічного вигляду, в якій ненульовими будуть будуть тільки коефіцієнти біля перших r квадратів змінних. Таким чином, $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2$. У квадратичній формі f виконаємо лінійне перетворення змінних

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\ x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n, \end{array} \tag{8}$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α. Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює добутку $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{\alpha_r}}$, відмінному від нуля. У результаті перетворення змінних (8) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів змінних $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$.

Означення 8. Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних називається *комплексною квадратичною формою нормального вигляду.*

Підсумуємо вище сказане у вигляді наступної теореми.

Теорема 4. *Будь-яка дана комплексна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів змінних.*

Теорема 5. *Комплексні квадратичні форми від одного й того ж числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих квадратичних форм рівні.*

Доведення. Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги і $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів змінних:

$$f \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2, \qquad g \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.$$

Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Теорема доведена.

5.1.2 Нормальний вигляд дійсної квадратичної форми

Розглянемо дійсну, тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, квадратичну форму канонічного вигляду $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ із поля $\mathbb{R}$. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

$$\alpha_1 > 0, \quad \dots, \quad \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1} < 0, \quad \dots, \quad \alpha_r < 0,$$

де $p \in \{0, 1, \dots, r\}$. Природно, якщо $p = 0$, то додатних коефіцієнтів не існує, якщо ж $p = r$, то немає від'ємних коефіцієнтів. Беручи до уваги сказане, квадратичну форму f можна записати у вигляді

$$f = \beta_1 x_1^2 + \dots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

де $\beta_1, \dots, \beta_{p+q}$ є додатними дійсними числами, а $q = r - p$. Виконаємо у квадратичній формі f лінійне перетворення змінних

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r, \\ x_{r+1} = y_{r+1} \ (\text{якщо } r < n), \\ \dots\dots\dots \\ x_n = y_n. \end{array}$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця з числами $\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\beta_r}}$ та $n - r$ одиницями на діагоналі. А детермінант такої матриці дорівнює ненульовому числу $\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\beta_r}}$. У результаті лінійного перетворення змінних одержимо квадратичну форму

$$\beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1 \right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p \right)^2 -$$
$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1} \right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q} \right)^2 =$$
$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2.$$

Означення 9. Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних з коефієнтом 1 та деякого числа квадратів змінних з коефіцієнтом -1 називається *дійсною квадратичною формою нормального вигляду.*

Таким чином, нами доведена наступна теорема.

Теорема 6. *Будь-яка дана дійсна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою деякого числа p квадратів змінних з коефіцієнтом 1 і $r-p$ квадратів змінних з коефіцієнтом -1.*

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 7 (закон інерції)**.** *Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число квадратів змінних з коефіцієнтом 1 однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу квадратів змінних з коефіцієнтом 1 другої квадратичної форми нормального вигляду, так само число квадратів змінних з коефіцієнтом -1 однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу квадратів змінних з коефіцієнтом -1 другої квадратичної форми нормального вигляду.*

Інакше кажучи теорема про закон інерції квадратичних форм стверджує що, якщо дійсна квадратична форма f рангу r еквівалентна як дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

так і дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$z_1^2 + \cdots + z_{p'}^2 - z_{p'+1}^2 - \cdots - z_{p'+q'}^2,$$

то $p = p'$, а $q = q'$. Зауважимо, що раніше нами було доведено те, що $p + q = p' + q' = \operatorname{rank} f$. Тому у законі інерції квадратичних форм досить вимагати рівність кількостей квадратів змінних з коефіцієнтом 1.

Доведення. Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i x_j$ від n змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

$$\begin{array}{ll} x_1 = \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n}y_n, & x_1 = \gamma_{11}z_1 + \cdots + \gamma_{1n}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_{n1}y_1 + \cdots + \beta_{nn}y_n; & x_n = \gamma_{n1}z_1 + \cdots + \gamma_{nn}z_n, \end{array} \tag{9}$$

у результаті яких одержали відповідно квадратичні форми нормального вигляду:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2, \quad z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2. \tag{10}$$

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно). Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \tag{11}$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (9). Підкреслимо, що якщо виконати відповідно ці лінійні перетворення змінних у квадратичних формах (10) нормального вигляду, то у обох випадках одержимо квадратичну форму f.

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{p1}x_1 + \cdots + \delta_{pn}x_n = 0, \\ \varepsilon_{s+1\,1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{s+1\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Це система із $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь із n невідомими. Оскільки $p < s$, то $n + p - s < n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (12) менше за число невідомих, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1^* = \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* = \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^* = \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* = \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{array}$$

Із рівностей (11) і (12) слідує, що $y_1^* = 0, \ldots, y_p^* = 0, z_{s+1}^* = 0, \ldots, z_n^* = 0$. Через це істинними є наступні рівності:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^* x_j^* = {y_1^*}^2 + \dots + {y_p^*}^2 - {y_{p+1}^*}^2 - \dots - {y_r^*}^2 =$$
$$= -{y_{p+1}^*}^2 - \dots - {y_r^*}^2,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^* x_j^* = {z_1^*}^2 + \dots + {z_s^*}^2 - {z_{s+1}^*}^2 - \dots - {z_r^*}^2 =$$
$$= {z_1^*}^2 + \dots + {z_s^*}^2.$$

З рівності лівих частин останніх двох рівностей випливає рівність правих їх частин:

$$-{y_{p+1}^*}^2 - \dots - {y_r^*}^2 = {z_1^*}^2 + \dots + {z_s^*}^2. \tag{13}$$

Оскільки $y_{p+1}^*, \dots, y_r^*, z_1^*, \dots, z_s^*$ є дійсними числами, то рівність (13) можлива лише у випадку, коли $y_{p+1}^* = 0, \dots, y_r^* = 0$ та $z_1^* = 0, \dots, z_s^* = 0$. Таким чином, $z_i^* = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ і, як наслідок, виконуються рівності:

$$\begin{gathered} x_1^* = \gamma_{11} z_1^* + \dots + \gamma_{1n} z_n^* = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* = \gamma_{n1} z_1^* + \dots + \gamma_{nn} z_n^* = 0. \end{gathered}$$

Це суперечить тому, що $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (12). Отже, припущення того, що $p < s$, так само як і $p > s$ є неправильним. А тому $p = s$. Теорема доведена.

Означення 10. Нехай деяка дійсна квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p квадратів змінних з коефіцієнтом 1 цієї квадратичної форми нормального вигляду називається *додатним індексом інерції* квадратичної форми f. Число q квадратів змінних з коефіцієнтом -1 у квадратичні формі нормальному вигляді називається *від'ємним індексом інерції* квадратичної форми f. Різниця $p-q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається *сигнатурою* даної квадратичної форми f.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\operatorname{sign} f$.

Теорема 8. *Дві дійсні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки тоді, коли співпадають ранги цих квадратичних форм і співпадають сигнатури обох квадратичних форм.*

Доведення. Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де $p + q = r = p' + q'$, $p - q = s = p' - q'$. Звідси $p = \frac{r+s}{2} = p'$, $q = \frac{r-s}{2} = q'$, тобто квадратичні форми f і g еквівалентні одній і тій ж дійсній квадратичній формі нормального вигляду. Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Теорема доведена.

Вправи для самостійної роботи

1. Показати, що білінійна форма σ є невиродженою тоді і тільки тоді, коли матриця A цієї форми є невиродженою.

У наступних завданнях знайти канонічний вигляд раціональної квадратичної форми.

2. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

3. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.

4. $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

У наступних завданнях знайти нормальний вигляд дійсної квадратичної форми

5. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

6. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

7. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

8. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

У наступних завданнях знайти нормальний вигляд комплексної квадратичної форми

9. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

10. $(3+4i)x_1^2 - (11+10i)x_2^2 - (111+270i)x_3^2 + (8-6i)x_1x_2 + (12 - 34i)x_1x_3 + (22+80i)x_2x_3$.

У наступних завданнях знайти нормальний вигляд дійсної квадратичної форми та деяке невироджене лінійне перетворення змінних, за допомогою якого можна одержати цей нормальний вигляд.

11. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

12. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

13. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

14. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

15. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

У наступних завданнях знайти нормальний вигляд комплексної квадратичної форми та деяке невироджене лінійне перетворення змінних, за допомогою якого можна одержати цей нормальний вигляд.

16. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

17. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

У наступних завданнях для заданих дійсних квадратичних форм f і g знайти деяке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 в y_1, y_2, y_3, за допомогою якого можна одержати із квадратичної форми f квадратичну форму g.

18. $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$, $g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

19. $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$, $g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

20. $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$, $g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3$.

21. Вияснити, які з наступних дійсних квадратичних форм еквівалентні між собою: $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$.

22. Вияснити, які з наступних дійсних квадратичних форм еквівалентні між собою: $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$, $f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$, $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

5.2 Додатно визначені квадратичні форми

У цьому пункті обмежимося розглядом квадратичних форм над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Означення 1. Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n з коефіцієнтами α_{ij}, де i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Якщо замість змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n підставити відповідно дійсні числа γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n, то дійсне число, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$ називається *значенням квадратичної форми* f для даних значень змінних і позначається через $f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

Означення 2. Дійсна квадратична форма f називається *додатно визначеною*, якщо $f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Найпростішим прикладом додатно визначеної квадратичної форми від змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n є квадратична форма нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Виявляється додатно визначеними квадратичними формами від n змінних є ті і тільки ті дійсні квадратичні форми, які еквівалентні квадратичній формі (1). Це стверджується у наступній ознаці додатної визначеності дійсної квадратичної форми.

Теорема 1. *Дійсна квадратична форма від n змінних є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її додатний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг цієї квадратичної форми дорівнює n, а також додатний індекс інерції дорівнює n, або що теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду (1). Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{array}{l} x_1 = \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{array} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду, у якій коефіцієнт біля квадрату деякої змінної, наприклад y_j, дорівнює 0 або -1:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \cdots + \gamma y_j^2 + \cdots ,$$

де $\gamma \in \{0, -1\}$. Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо $x_1 = \beta_{1j}, x_2 = \beta_{2j}, \ldots, x_n = \beta_{nj}$. Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{значення } j\text{-ї змінної}}}{1}, 0, \ldots, 0) = \gamma \leq 0.$$

Але це суперечить тому, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Отже, квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду (1). Необхідність теореми доведена.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду (1). Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11} y_1 + \cdots + \gamma_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1} y_1 + \cdots + \gamma_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$. Нехай $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — довільні дійсні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Розглянемо систему лінійних рівнянь із невідомими $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\begin{cases} \gamma_{11} y_1 + \cdots + \gamma_{1n} y_n = \delta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1} y_1 + \cdots + \gamma_{nn} y_n = \delta_n. \end{cases}$$

Ця система рівнянь є системою n лінійних рівнянь із n невідомими і відмінним від нуля детермінантом матриці цієї системи рівнянь. Тому за теоремою Крамера вона має єдиний розв'язок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Хоча б одне з чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 > 0.$$

Таким чином, $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Це означає, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Теорема доведена.

Означення 3. Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (критерій Сільвестра)**.** *Дійсна квадратична форма є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори додатні.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел. Доведемо теорему методом математичної індукції за числом n змінних.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх дійсних квадратичних форм, число змінних n якої менше за певне фіксоване натуральне число k. Розглянемо тепер випадок, коли це число дорівнює k. Припустимо спочатку, що квадратична форма $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_{k-1} вигляду $g = \sum_{i,j=1}^{k-1} \alpha_{ij} x_i x_j$. Ця квадратична форма є також додатно визначеною, оскільки для довільних дійсних чисел γ_1, γ_2, $\dots$, γ_{k-1}, хоча б одне з яких не дорівнює нулю,

$$g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}) = f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, 0) > 0.$$

Тоді за індуктивним припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k-1\,1} & \dots & \alpha_{k-1k-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор k-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку k над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку k. Звідси $|Q^T AQ| = 1$. З іншого боку

$$|Q^T AQ| = |Q^T| \cdot |A| \cdot |Q| = |A| \cdot |Q|^2.$$

Отже, $|A| = \frac{1}{|Q|^2} > 0$, що завершує доведення необхідності.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними дійсними числами. Тоді всі головні мінори квадратичної форми $g = \sum_{i,j=1}^{k-1} \alpha_{ij} x_i x_j$ також є додатними, а тому, за припущенням математичної індукції, g є додатно визначеною квадратичною формою. Через це існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} &x_1 = \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1k-1} y_{k-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{k-1} = \beta_{k-1\,1} y_1 + \cdots + \beta_{k-1k-1} y_{k-1} \end{aligned} \tag{4}$$

таке, що якщо виконати його у квадратичній формі g ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k-1}^2$.

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} &x_1 = \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1k-1} y_{k-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{k-1} = \beta_{k-1\,1} y_1 + \cdots + \beta_{k-1k-1} y_{k-1}, \\ &x_k = y_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1k-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k-1\,1} & \dots & \beta_{k-1k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона є невиродженою матрицею, позаяк

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k-1\,1} & \dots & \beta_{k-1k-1} \end{pmatrix}$$

є матрицею невиродженого лінійного перетворення змінних (4).

Виконаємо лінійне перетворення змінних (5) у квадратичні формі f, попередньо записавши f у вигляді

$$f = g + 2\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik}x_i x_k + \alpha_{kk}x_k^2.$$

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{k-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1} \delta_{ik}y_i y_k + \delta_{kk}y_k^2,$$

де δ_{ik} є деяким дійсним числом для кожного $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{ik}y_i y_k = (y_i + \delta_{ik}y_k)^2 - \delta_{ik}^2 y_k^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1k}y_k, \quad \dots, \quad z_{k-1} = y_{k-1} + \delta_{k-1k}y_k, \quad z_k = y_k,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{k-1}^2 + \varepsilon z_k^2,$$

де ε — деяке дійсне число. Це число є додатним числом, позаяк детермінант матриці A квадратичної форми f є додатним числом і існує невироджена матриця Q порядку k над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що $\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0$. Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{k-1}^2 + \varepsilon z_k^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{k-1} = u_{k-1}, \quad z_k = \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}u_k,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2$. За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми це в свою чергу означає, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Теорема доведена.

Зауваження 1. Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається *від'ємно визначеною*, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Справджуються також теореми аналогічні ознакам додатної визначеності квадратичної форми.

Теорема 3. *Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.*

Теорема 4. *Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки всіх її головних мінорів чергуються, починаючи з знаку $-$ і переходячи від мінорів менших порядків до більших.*

Доведення цих теорем залишаємо читачеві для самостійної роботи.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що квадратична форма f є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли її матриця F представляється у вигляді $F = S^T S$, де S — невироджена матриця, а S^T — матриця транспонована до S.

2. Довести, що у додатно визначеної дійсної квадратичної форми всі коефіцієнти при квадратах невідомих додатні і що ця умова не є достатньою для додатної визначеності квадратичної форми.

3. Знайти всі значення параметра λ, для яких є додатно визначена дійсна квадратична форма $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. Знайти всі значення параметра λ, для яких є додатно визначена дійсна квадратична форма $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

5. Знайти всі значення параметра λ, для яких є додатно визначена дійсна квадратична форма $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

6. Знайти всі значення параметра λ, для яких є додатно визначена дійсна квадратична форма $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

7. Нехай всі головні мінори Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n квадратичної форми f від n змінних не дорівнюють нулю. Довести, що додатний (від'ємний) індекс інерції квадратичної форми f дорівнює числу збережень (змін) знаку у числовій послідовності $1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

5.3 Зведення дійсної квадратичної форми до головних осей

У подальшому ми застосуємо теорію скінченновимірних евклідових просторів та їх лінійних операторів до вивчення дійсних квадратичних форм. Нехай f — деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n, а

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— її матриця, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Розглянемо деякий скінченновимірний евклідів простір L розмірності n. Виберемо довільним чином ортонормований базис e_1, e_2, $\dots$, e_n в L. Наприклад, за L можна взяти n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$. Нехай φ — лінійний оператор евклідового простору L, який задається матрицею A у базисі e_1, $e_2, \dots, e_n$. Оскільки A є симетричною матрицею, то φ є симетричним оператором евклідового простору L. За основною теоремою про симетричні оператори в L існує ортонормований базис b_1, b_2, $\dots$, b_n, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Нехай β_i є власним значенням лінійного оператора φ, якому належить власний вектор b_i для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Зауважимо, що серед чисел β_1, β_2, $\dots$, β_n можуть бути однакові. Також нагадаємо, що многочлен $(-1)^n(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2) \cdots (\lambda - \beta_n)$ є характеристичним многочленом лінійного оператора φ і, отже, дорівнює детермінанту $|A - \lambda E|$, де E — одинична матриця порядку n. Матриця B симетричного оператора φ у базисі b_1, b_2, $\dots$, b_n має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Далі, нехай Q — матриця переходу від базису e_1, $e_2, \dots, e_n$ до базису b_1, b_2, $\dots$, b_n. Тоді для матриць A і B, як матриць одного й того ж лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору L у різних базисах цього простору, справджується рівність

$$B = Q^{-1}AQ. \tag{1}$$

З іншого боку, позаяк обидва базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є ортонормованими базисами, то матриця Q є ортогональною. А тому $Q^{-1} = Q^T$. Тому рівність (1) можна переписати у вигляді

$$B = Q^T AQ. \tag{2}$$

Розглянемо тепер лінійне перетворення змінних

$$X = QY \tag{3}$$

з матрицею Q, де X — стовпець змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а Y — стовпець змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, бо матриця цього перетворення є ортогональною. Більш того воно є ортогональним у розумінні наступного означення.

Означення 1. Лінійне перетворення змінних називають *ортогональними перетвореннями*, якщо його матриця є ортогональною матрицею.

Виконаємо лінійне перетворення змінних (3) у квадратичній формі f. З рівності (1) і закону зміни квадратичної форми слідує, що в результаті ортогонального перетворення (3) ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду $\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \cdots + \beta_n y_n^2$.

Нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Будь-яку дійсну квадратичну форму від n змінних з матрицею A деяким ортогональним перетворенням змінних можна звести до канонічного вигляду $\beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \cdots + \beta_n y_n^2$. Коефіцієнтами цього вигляду є корені характеристичного многочлена $|A - \lambda E|$ матриці A, кожний з яких повторюється у канонічному вигляді стільки раз, яка його кратність.*

Приведений вище алгоритм знаходження квадратичної форми канонічного вигляду, що еквівалентна деякій даній дійсній квадратичній формі називається *зведенням дійсної квадратичної форми до головних осей.*

Наведемо приклад знаходження канонічного вигляду дійсної квадратичної форми зведенням її до головних осей. Розглянемо наступну квадратичну форму $6x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$. Для початку випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо корені характеристичного многочлена матриці A, спочатку обчисливши його, а потім розклавши на лінійні множники:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = \\ = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9).$$

Таким чином, задана квадратична форма еквівалентна квадратичній формі канонічного вигляду $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$.

Далі знаходимо ортонормований базис евклідового простору $\mathbb{R}^3$, який складається з власних векторів симетричного оператора, який у канонічному базисі $\mathbb{R}^3$ має матрицю A. Таким базисом, наприклад, є наступна система векторів $b_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $b_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $b_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Тому матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

є матрицею ортогонального перетворення змінних x_1, x_2, x_3 у нові змінні y_1, y_2, y_3, за допомогою якого можна одержати квадратичну форму канонічного вигляду із даної квадратичної форми.

Представлена вище теорія має широке застосування у різних розділах математики, фізики, інженерії і т. д. Зокрема розглянемо таку задачу аналітичної геометрії: визначити тип поверхні другого порядку, а також канонічну систему координат, заданої рівнянням $6x^2 + 7y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz = 3$.

Нехай O, i, j, k є відповідно початком координат та базисними ортами системи координат $Oxyz$, в якій задано рівняння поверхні. Використовуючи проведені нами обчислення можемо стверджувати, що однією з канонічних систем координат даної поверхні є система координат $Ox'y'z'$ з базисними ортами

$$i' = \tfrac{2}{3}i - \tfrac{1}{3}i - \tfrac{2}{3}k, \quad j' = \tfrac{1}{3}i - \tfrac{2}{3}j + \tfrac{2}{3}k, \quad k' = \tfrac{2}{3}i + \tfrac{2}{3}j + \tfrac{1}{3}k.$$

Рівнянням розглянутої поверхні у цій системі є $3{x'}^2 + 6{y'}^2 + 9{z'}^2 = 3$. Тому канонічним рівнянням поверхні у системі координат $Ox'y'z'$ є рівняння

$$\frac{{x'}^2}{1^2} + \frac{{y'}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{{z'}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1,$$

а сама поверхня є еліпсоїдом.

Вправи для самостійної роботи

У наступних завданнях знайти деякий канонічний вигляд, до якого зводиться задана квадратична форма, за допомогою ортогонального перетворення, не знаходячи самого перетворення.

1. $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2. $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3. $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

У наступних завданнях знайти деяке ортогональне перетворення, що зводить до канонічного вигляду квадратичну форму і вказати цей канонічний вигляд.

5. $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

6. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

7. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

9. $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

Перелік джерел посилань

1. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина I / Завало С. Т., Левищенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Київ: Вища школа, 1983. 232 с.
2. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра: начальний посібник. Львів: Львів. нац. ун-т імен Івана Франка, 2008. 226 с.
3. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори). Київ: ВПЦ «Київський університет», 2010. 257 с.
4. Завало С. Т. Курс алгебри. Київ: Вища школа, 1985. 503 с.
5. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. 320 с.
6. Калужнін Л. А., Вишенський В. В., Шуб Ц. О. Лінійні простори. Київ: Вища школа, 1971. 343 с.
7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. 9-е изд. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 383 с.
8. Романів О. М. Лінійна алгебра. Частина 2: підручник. Львів: Видавець І. Е. Чижиков, 2014. 279 с.
9. Чарін В. С. Лінійна алгебра. Київ: Техніка, 2005. 416 с.
10. Шапочка І. В. Лінійна алгебра. Навчальний посібник для індивідуальних робіт. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. 95 с.
11. Axler Sh. Linear Algebra Done Right. Undergraduate Texts in Mathematics. 3rd edit. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. 340 p.

Предметний покажчик

ШАПОЧКА Ігор Валерійович

Лінійна алгебра.

Навчальний посібник

Формат $60 \times 84/16$. Умов. друк. арк. 13,2.
Замовлення №38. Наклад 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ ДВНЗ «УжНУ»
88000, м.Ужгород, вул. Заньковецької, 89
E-mail: dep-editors@uzhnu.edu.ua

Видавництво Ужгородського національного університету «Говерла».
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції —
Серія Зт №32 від 31 травня 2006 року

Шапочка І. В.
Ш24 Лінійна алгебра. Навчальний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2023. 224 с.
ISBN 978-617-7825-88-2.

У навчальному посібнику викладено основи лінійної алгебри. Він уособлює собою курс лекцій з однойменної навчальної дисципліни, який читався протягом останніх кількох десятиліть викладачами кафедри алгебри Ужгородського державного, а пізніше національного університету. Для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей 014.04 Середня освіта (Математика), 111 Математика.

УДК 512.64