МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

ВАРГА ЯНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ

01.01.02 — диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Чернівці—2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики Державного вищого навчального закладу "Ужгородський національний університет" Міністерства освіти і науки України

Наукові керівники: доктор фізико–математичних наук, професор
РОНТО Микола Йосипович
Мішкольцський університет, Угорщина,

доктор фізико–математичних наук
РОНТО Андрій Миколайович
науковий співробітник Інституту математики
Академії Наук Чехії

Офіційні опоненти: член–кореспондент НАН України,
доктор фізико–математичних наук, професор
БОЙЧУК Олександр Андрійович
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії крайових задач
теорії диференціальних рівнянь

доктор фізико–математичних наук, професор
ЧЕРЕВКО Ігор Михайлович
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
декан факультету математики та інформатики

Захист відбудеться «3» лютого 2017 р. о 14^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 76.051.02 у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича за адресою: 58012, м. Чернівці, вул. Університетська, 28, факультет математики та інформатики, аудиторія 39.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича за адресою: м. Чернівці, вул. Лесі Українки, 23.

Автореферат розісланий « » грудня 2016 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Я. Й. Бігун

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з основних задач теорії диференціальних рівнянь є дослідження питань існування, єдиності, багатозначності, додатності та наближеної побудови розв'язків нелінійних $n-$вимірних систем звичайних диференціальних рівнянь, які підпорядковані заданим крайовим умовам.

Аналіз наукової літератури показує, що поступово все частіше для дослідження розв'язків крайових задач використовуються методи, які відносяться до класу так званих чисельно–аналітичних, що основані на послідовних наближеннях.

Методи цієї групи дають змогу одночасно зробити висновок про існування розв'язку (розв'язків), а також побудувати наближений розв'язок в аналітичному виді.

Чисельно–аналітичні методи беруть свій початок з теорії коливань при вивченні періодичних розв'язків неавтономних систем звичайних диференціальних рівнянь в роботах L. Cesari, J. Hale, A.M. Самойленка. Одним з найбільш відомих таких методів є чисельно–аналітичний метод розроблений A. M. Самойленком і який отримав згодом назву „чисельно–аналітичний метод послідовних періодичних наближень“ або „чисельно–аналітичний метод A.M. Самойленко“.

Спеціальні узагальнення і модифікації цього метода у випадку системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),\, t \in [a, b]\,,$$

для різних типів задач з двоточковими, багатоточковими лінійними та нелінійними обмеженнями, та окремими випадками інтегральних крайових умов розроблені в роботах Перестюка М.О., M. Ronto, M. Kwapisz, T. Jankowski, A. Augustynowicz, D. Bainov, G. Sarafova, S. Hristova, Мартинюка Д.І., Перова А.І., Ronto A., Лаптинського В.Н., Кенжебаєва К.К., Le Lyong Tai, Євхути Н.А., Забрейка П.П., Щобак Н.М., Ronto V.A., Шлапака Ю.Д., Короля І.І., Філіпчука М.П., Маринець К.В. та ін.

Не дивлячись на достатньо велику кількість публікацій по тематиці дисертаційної роботи, питання існування та наближеної побудови розв'язків певних класів і типів функціональних та інтегральних крайових задач або зовсім не розглядалися, або вивчалися в неповній мірі. Дана дисертація покликана в деякій мірі заповнити цю прогалину.

У дисертаційній роботі на основі параметризації, розроблений і обґрунтований оригінальний конструктивний чисельно–аналітичний метод, який з успіхом може застосовуватися для дослідження існування і наближеної побудови розв'язків загального вигляду нелінійних функціональних та інтегральних крайових задач, як у випадку неперервної правої частини, так і у випадку умов Каратеодорі.

Вихідними є дві опуклі обмежені області D_a, $D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими неперервно диференційовними або абсолютно неперервними розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b.

На основі цих областей будується спеціальна обмежена область D, де і припускається локальна ліпшицевість функції $f(t, x)$.

В основі метода лежить перехід від заданих крайових умов до так званих параметризованих обмежень модельного типу, що мають вигляд початкових умов, які задані параметрично на лівому і правому кінці відрізку інтегрування $x(a) = z$, $x(b) = \eta$, де z, η вважаються n-вимірними параметрами.

Далі, для заданої системи диференціальних рівнянь досліджується параметризована модельна задача, яка складається з двох допоміжних задач Коші.

Для вивчення їх розв'язків, на відміну від методу Пікара, пропонується оригінальна ітераційна схема, яка дозволяє досліджувати ці дві задачі Коші одночасно, однією і тією ж ітераційною схемою і крім того встановити існування їх розв'язків не локально, а на всьому інтервалі $[a, b]$. А конкретний вигляд заданих інтегральних або функціональних крайових умов береться до уваги лише при побудові спеціальних систем визначальних алгебраїчних рівнянь розмірності $2n$, розв'язки яких задають чисельні значення введених параметрів, які визначають шукані розв'язки.

Універсальність запропонованого підходу, можливість встановлення необхідних та достатніх умов розв'язності нелінійних крайових задач загального вигляду обґрунтовує доцільність досліджень у цій області.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Теоретичні результати дисертаційної роботи, одержані у рамках наукової тематики кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики ДВНЗ "Ужгородський національний університет" та пов'язані з держбюджетною темою "Побудова нових модифікацій конструктивних методів дослідження крайових задач теорії диференціальних та диференціально–функціональних рівнянь", що виконувалася на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики ДВНЗ "Ужгородський національний університет" (номер державної реєстрації №0113U002366).

Мета і завдання дисертаційної роботи. Основною *метою* дисертаційної роботи є розробка та строге математичне обґрунтування нового підходу параметризації для зведення крайових задач з складними нелінійними функціональними та інтегральними крайовими умовами до параметризованих задач модельного типу.

Побудова підходящої чисельно–аналітичної схеми для дослідження розв'язків цієї модельної крайової задачі і встановлення зв'язку між розв'язками вихідної та перетвореної задачі.

Отримання конструктивних достатніх та необхідних умов існування розв'язків нелінійних інтегральних крайових задач.

Об'єктом дослідження є крайові задачі для n-вимірних систем нелінійних диференціальних рівнянь нормального вигляду з функціональними та інтегральними крайовими обмеженнями загального вигляду.

Предметом дослідження є обґрунтування переходу від крайових задач з складними крайовими умовами до більш простого модельного типу. Питання побудови підходящої чисельно–аналітичної схеми, яка заснована на послідовних наближеннях, для дослідження розв'язків модельної задачі. Доведення рівномірної збіжності побудованої послідовності. Встановлення зв'язку між розв'язками вихідної та модельної задачі.

Методи дослідження ґрунтуються на ідеях параметризації та конструкціях і властивостях чисельно–аналітичних методів, які основані на послідовних наближеннях.

Наукова новизна одержаних результатів У дисертаційній роботі отримано наступні нові результати:

- Обґрунтовано оригінальний чисельно–аналітичний підхід дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь нормального вигляду з складними функціональними та інтегральними обмеженнями.

- Запропонований простий метод переходу від заданих інтегральних та функціональних крайових умов до параметризованої задачі модельного типу.

- Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайової задачі.

- Отримані конструктивні достатні та необхідні умови розв'язності розглядуваних класів нелінійних крайових задач.

- Доведено, якщо системи визначальних алгебраїчних рівнянь має декілька розв'язків в області $D_{a,b}$, то стільки розв'язків буде і у заданої крайової задачі.

- Показано, що діленням відрізку інтегрування навпіл в два рази можна покращити достатні умови рівномірної збіжності послідовних наближень.

- Розроблена методика легко може бути застосована до локально ліпшицевих систем диференціальних рівнянь, як з неперервною, так і з правою частиною, яка задовольняє умови Каратеодорі.

- Конструктивність розробленого методу та його переваги продемонстровані на прикладах нелінійних крайових задач з не єдиними розв'язками.

Практичне значення одержаних результатів Результати, що одержані в дисертаційній роботі носять як теоретичний, так і практичний характер. Вони доповняють попередні дослідження в теорії конструктивних методів.

Метод легко може бути реалізований на практиці з використанням пакету програм символьної математики типу Maple.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертації є новими добре апробовані і належать автору. Публікації [1–7], що відображають зміст роботи, написані у співавторстві з науковими керівниками та одноосібно. Загальний план роботи та постановка задач визначені науковими керівниками док. фіз.-мат. наук, професором Ронто М. Й. та док. фіз.-мат. наук Ронто А. Результати спільних праць одержані при рівноправній участі всіх авторів. У дисертацію включено та на захист виносяться лише результати, які отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на таких міжнародних семінарах і конференціях:

- Семінарі інститута математики Мішкольцського університету (Угорщина, Мішкольц, 26 лютого, 2014 р.);

- Міжнародній науковій конференції „Szeged Dynamics Days“ (Угорщина, 28 лютого–1 березня, 2014 р.);

- Семінарі інститута математики університета Ніредьхаза (Угорщина, Ніредьхаза, 16 вересня, 2014 р.);

- Науковому семінарі інститута математики університета Оломовц (Чехія, Оломовц, 11 листопада, 2014 р.);

- Міжнародній науковій конференції „Conference on Differential and Difference Equations and Applications“ (Словаччина, Ясна, 23–27 червня, 2014 р.);

- Шостій міжнародній конференції „Constructive methods for nonlinear boundary value problems“ (Угорщина, Мішкольц, 9–12 липня, 2015 р.);

- Міжнародній конференції „International conference on nonlinear operators, Differential equations and applications“ (ICNODEA-2015) (Румунія, Клуж-Напока, 14–17 липня 2015 р.);

- Міжнародній науковій школі-семінарі „Питання оптимізації обчислень“ (ПОО-XLII) (Україна, Закарпатська обл., смт. Чинадійово, 21–25 вересня, 2015 р.);

- Міжнародній науковій конференції „Методика викладання та методи дослідження в математиці“ (Україна, Закарпатська обл., м. Берегово, 21–23 квітня, 2016 р.);

- Міжнародній науковій конференції „Диференціальні рівняння та їх застосування“ (Україна, Закарпатська обл., смт. Чинадійово, 19–21 травня, 2016 р.).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 7 статей у фахових вітчизняних та провідних закордонних виданнях [1–7]. Серед яких 5 статей англомовні.

Закордонні публікації [1,2,3] опубліковані у виданнях з імпакт-фактором, відповідно: 1.551; 0.229; 0.229. А також 7 праць надруковані у збірниках тез доповідей міжнародних наукових форумів [8–14].

Структура та обсяг дисертації.Дисертаційна робота складається із переліку позначень, вступу, п’яти основних розділів, висновків та списку використаних джерел. Три останні розділи розбиті на підрозділи і містять основні результати. Загальний обсяг дисертації становить 140 стор., основний текст — 112 стор. Робота містить 9 рисунків та 130 найменувань у списку використаних джерел.

Автор дисертації висловлює щиру подяку науковим керівникам доктору фізико–математичних наук, професорові Ронто Миколі Йосиповичу та доктору фізико–математичних наук Ронто Андрію Миколайовичу за постановку розглянутих у дисертації проблем, постійну увагу та підтримку у роботі.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** сформульовано актуальність теми, визначено мету, завдання, предмет, об'єкт та мету дослідження. Висвітлено наукову новизну одержаних результатів, їх теоретичне і практичне значення. Вказано особистий внесок здобувача, а також викладено основний зміст дисертаційної роботи.

Перший розділ присвячений огляду літератури. Розглянуто основні напрями досліджень в області конструктивних методів, які сприяли появі сучасних чисельно–аналітичних методів. Наведено основні проблеми і задачі, які досліджувались вітчизняними та зарубіжними математиками по темі дисертації. Проведено аналіз робіт, які безпосередньо стосуються дисертаційної проблематики.

У *другому розділі* сформульовано базові визначення та допоміжні твердження, які використовуються при постановці задач, обґрунтуванні основних результатів.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджено нелінійну функціональну крайову задачу загального вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b]\,, \tag{1}$$

$$\Phi(x) = d, \tag{2}$$

де $\Phi : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ заданий функціонал (можливо нелінійний), $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ функція, яка задовольняє умови Каратеодорі та локальну умову Ліпшиця у деякій обмеженій області, d – заданий вектор.

Під розв'язком задачі розуміється така абсолютно неперервна функція з властивістю (2), яка задовольняє систему рівнянь (1) майже всюди на відрізку $[a, b]$.

Насамперед, для спрощення, від (1), (2) перейдемо до сімейства більш простих допоміжних модельних задач.

Вихідними є дві опуклі обмежені області D_a, $D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b. Будується опукла множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta,\ z \in D_a,\ \eta \in D_b, \theta \in [0, 1] \tag{3}$$

і її покомпонентний векторний ρ – окіл

$$D = B\left(D_{a,b}, \rho\right), \tag{4}$$

причому вектор ρ в (4) вибирається таким, щоб виконувалась покомпонентно нерівність

$$\rho \geq \frac{b-a}{2} \cdot \delta_{[a,b],D}(f), \tag{5}$$

де

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2}\left[\underset{(t,x)\in[a,b]\times D}{ess\sup} f(t,x) - \underset{(t,x)\in[a,b]\times D}{\operatorname{ess\,inf}} f(t,x) \right]. \tag{6}$$

Локальна ліпшицевість $f \in Lip(K, D)$ для правої частини $f(t, x)$ в (1) припускається в області D, яка задається в (4).

Далі, за допомогою параметризації замість заданих функціональних крайових умов (2) вводяться в розгляд параметризовані „модельні“ умови наступного вигляду:

$$x(a) := z = col(z_1, ..., z_n), \quad x(b) := \eta = col(\eta_1, ..., \eta_n), \tag{7}$$

де z і η вважаються $n-$вимірними параметрами. І замість заданої задачі (1), (2) досліджується сімейство більш простих „модельних“ параметризованих задач, які складаються з двох допоміжних задач Коші:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b]\,,\ x(a) = z, \tag{8}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b]\,,\ x(b) = \eta. \tag{9}$$

Для одночасного вивчення розв'язків двох початкових задач, які входять до модельної параметризованої задачі (8)–(9) введемо в розгляд одну і ту же параметризовану послідовність функцій

$$x_0\,(t, z, \eta) = z + \frac{t-a}{b-a}\,[\eta - z] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a}\right] z + \frac{t-a}{b-a}\eta,\ t \in [a, b]\,,$$

$$x_m\,(t, z, \eta) = z + \int\limits_a^t f\,(s, x_{m-1}\,(s, z, \eta))\,ds- \tag{10}$$

$$-\frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f\,(s, x_{m-1}\,(s, z, \eta))\,ds + \frac{t-a}{b-a}\,[\eta - z]\,, t \in [a, b]\,, m = 1, 2, ...,$$

де $z \in D_a, \eta \in D_b$ вважаються параметрами. Зауважимо, що всі функції $x_m\,(t, z, \eta)$ задовольняють (7) для будь-яких $z, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (10) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 3.1. *Припустимо, що існує невід'ємний вектор ρ з властивістю (5) і $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$ – функція, що задовольняє умови Каратеодорі і є локально ліпшицевою: $f \in Lip(K,D)$ в області D вигляду (4) з матрицею K для якої*

$$r(Q) < 1,\, Q = \frac{3\,(b-a)}{10}K. \tag{11}$$

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z,\eta) \in D_a \times D_b$:

1. Всі функції послідовності (10) є абсолютно неперервні на відрізку $t \in [a,b]$ мають значення в область D і задовольняють умовам (7).

2. Послідовність функцій (10) рівномірно збігається відносно $t \in [a,b]$ при $m \to \infty$ до граничної функції

$$x_\infty\,(t,z,\eta) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\eta).$$

3. Гранична функція задовольняє умови:

$$x_\infty\,(a,z,\eta) = z,\ \ x_\infty\,(b,z,\eta) = \eta.$$

4. Функція $x_\infty\,(t,z,\eta)$ є единим абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int\limits_a^t f(s,x(s))ds - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f(s,x(s))ds + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right].$$

Іншими словами, $x_\infty\,(t,z,\eta)$ задовольняє задачу Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \frac{1}{b-a}\Delta(z,\eta), \tag{12}$$

$$x\,(a) = z, \tag{13}$$

де $\Delta(z,\eta)) : D_a \times D_b \to \mathbb{R}^n$ відображення, яке визначене формулою:

$$\Delta(z,\eta) = \eta - z - \int\limits_a^b f(s,x_\infty\,(s,z,\eta))ds.$$

5. Справедлива оцінка

$$|x_\infty\,(t,z,\eta) - x_m\,(t,z,\eta)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{10}{9}\alpha_1(t,a,b-a)Q^m\,(I_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f),$$

для будь-якого $t \in [a,b]$ *і* $m \geq 0$, *де* $\delta_{[a,b],D}(f)$ *задається формулою (6) і*

$$\alpha_1(t,a,b-a) = 2(t-a)\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right), \tag{14}$$

для якого $\alpha_1(t,a,b-a) \leq \frac{b-a}{2}$.

Для встановлення зв'язку граничної функції $x_\infty(\cdot,z,\eta)$ з розв'язком функціональної крайової задачі (1), (2) розглядається спочатку наступна задача Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu, \; x(a) = z, \tag{15}$$

де $t \in [a,b]$, а $\mu = col(\mu_1,...,\mu_n)$ є керуючим параметром.

Теорема 3.2. *Нехай* $z \in D_a$ *і* $\eta \in D_b$ *– довільно задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1) мають місце умови Теореми 3.1.*

Тоді для того, щоб розв'язок $x(\cdot,a,z)$ *задачі Коші (12), (13) задовольняв також і умові* $x(b,a,z) = \eta$, *необхідно і достатньо, щоб параметр* μ *в (15) був заданий рівністю:*

$$\mu = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s,z,\eta))ds, \tag{16}$$

де $x_\infty(\cdot,z,\eta)$ *– гранична функція послідовності (10). Крім того, в цьому випадку* $x(\cdot,a,z) = x_\infty(\cdot,z,\eta)$.

Теорема 3.3. *В умовах Теореми 3.1 гранична функція*

$$x_\infty(t,z^*,\eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z^*,\eta^*)$$

послідовності (10) є абсолютно неперервним розв'язком функціональної крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*,η^*) *задовольняє систему* $2n$ *алгебраїчних визначальних рівнянь*

$$\begin{aligned} \Delta(z,\eta) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s,z,\eta))ds = 0, \\ \Lambda(z,\eta) &= \Phi(x_\infty(\cdot,z,\eta)) - d = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Наступне твердження показує, що система алгебраїчних визначальних рівнянь визначає всі можливі розв'язки функціональної крайової задачі (1), (2), які належать області D і значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належать відповідно множинам D_a і D_b.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються всі умови Теореми 3.1. Крім того, існують вектори* $\left(z^0,\eta^0\right)\in D_a\times D_b$, *які задовольняють систему визначальних рівнянь (17), тоді функціональна крайова задача (1), (2) має розв'язок* $x^0(\cdot)$ *такий, що*

$$x^0(a)=z^0, x^0(b)=\eta^0 \ \text{ і } \ \Phi(x_\infty\left(\cdot,z^0,\eta^0\right))-d=0.$$

Крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (10):

$$x^0(t)=x_\infty\left(t,z^0,\eta^0\right)=\lim_{m\to\infty}x_m(t,z^0,\eta^0),\ t\in[a,b]\,.$$

І навпаки, якщо функціональна крайова задача (1), (2) має розв'язок $x^0(\cdot)$, *в області* D, *то система визначальних рівнянь (17) задовольняється при*

$$z=x^0(a),\eta=x^0\left(b\right).$$

У **четвертому розділі** дисертаційної роботи розглядається система диференціальних рівнянь (1), підпорядкована інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$\int\limits_a^b\left[g(s,x(s))+h(s,x'(s))\right]ds=d. \tag{18}$$

Як і в третьому розділі, нехай D_a і D_b – опуклі підмножини $\mathbb{R}^n$, де шукаємо значення $x(a)$, $x(b)$, розв'язку крайової задачі (1), (18) відповідно. На основі областей D_a і D_b введемо область $D_{a,b}$ відповідно до (3) і її покомпоний ρ – окіл, як і в (4). Таким чином, область D визначається відповідно до (4).

Припускаємо, що функції $f:[a,b]\times D\to\mathbb{R}^n$, $g:[a,b]\times D\to\mathbb{R}^n$ і $h:[a,b]\times D'\to\mathbb{R}^n$ задовольняють умови Каратеодорі, де $D':=\{f(t,x): t\in[a,b],x\in D\}$. Нехай, крім того $f\in Lip(K,D)$, $g\in Lip(K_g,D)$, $h\in Lip(K_h,D')$, ρ задовольняє нерівність (5) і для максимального по модулю власного значення матриці

$$Q=\frac{3(b-a)}{10}K \tag{19}$$

виконується нерівність

$$r(Q)<1. \tag{20}$$

Задача полягає у знаходженні абсолютно неперервного розв'язку $x:[a,b]\to D$ задачі (1), (18) з значеннями $x(a)\in D_a$ і $x(b)\in D_b$.

Замість інтегральної крайової задачі спочатку вивчається сімейство більш простих модельних параметризованих задач (8)–(9). Для цього використовується послідовність параметризованих функцій (10). Для модельної задачі і послідовності (10) мають місце Теореми 3.1, 3.2.

Зв'язок між розв'язками модельної і заданої інтегральної крайової задачі встановлюють наступні твердження.

Теорема 4.1. *В умовах Теореми 3.1 гранична функція*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*)$$

послідовності (10) є абсолютно неперервним розв'язком інтегральної крайової задачі (1), (18) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) *задовольняє систему* $2n$ *алгебраїчних визначальних рівнянь*

$$\begin{aligned} \Delta(z,\eta) &= \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_\infty(s,z,\eta))ds = 0, \\ \Lambda(z,\eta) &= \int\limits_a^b \left[g(s, x_\infty(s,z,\eta)) + h(s, x'_\infty(s,z,\eta)) \right] ds - d = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Зауважимо, що розв'язність системи визначальних рівнянь (21) може бути встановлена на основі властивостей наближеної визначальної алгебраїчної системи

$$\begin{aligned} \Delta_m(z,\eta) &= \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds = 0, \\ \Lambda_m(z,\eta) &= \int\limits_a^b \left[g(s, x_m(s,z,\eta)) + h(s, x'_m(s,z,\eta)) \right] ds - d = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

яка явно може бути побудована.

Для оцінок відхилення точних і наближених визначальних функцій має місце

Лема 4.1. *Припустимо, що мають місце умови Теореми 3.1 і крім того* $g \in Lip(K_g, D)$ *і* $h \in Lip(K_h, D')$*, де* $D' := \{f(t,x) : t \in [a,b], x \in D\}$ *з деякими невід'ємними квадратними матрицями* K_g, K_h *розмірності* n:

$$|g(t,u) - g(t,v)| \le K_g |u - v|,$$

$$|h(t, f(t,u)) - h(t, f(t,v))| \le K_h |f(t,u) - f(t,v)| \le K_h K |u - v|,$$

для всіх пар $\{u, v\} \subset D$ *і всіх* $t \in [a,b]$.

Тоді, для точної і наближеної визначальних функцій (21) і (22) мають місце наступні оцінки для будь-яких $(z,\eta) \in D_a \times D_b$ *і* $m \ge 1$:

$$|\Delta(z,\eta) - \Delta_m(z,\eta)| \le \frac{10\,(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f),$$

$$|\Lambda(z,\eta)-\Lambda_m(z,\eta)| \leq \frac{10\,(b-a)^2}{27}(K_g+K_hK)Q^m\,(I_n-Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f),$$

де матриця Q і вектор $\delta_{[a,b],D}(f)$ задані відповідно в (19) і (5).

На основі точної та наближеної визначальних систем (21) і (22) для деякого фіксованого m введемо в розгляд відображення

$$H : D_a \times D_b \to \mathbb{R}^{2n} \text{ and } H_m : D_a \times D_b \to \mathbb{R}^{2n},$$

поклавши

$$H(z,\eta) = \begin{pmatrix} \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_\infty(s,z,\eta))ds \\ \int\limits_a^b \left[g(s, x_\infty(s,z,\eta)) + h(s, x_\infty'(s,z,\eta))\right] ds - d \end{pmatrix}$$

і

$$H_m(z,\eta) = \begin{pmatrix} \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds \\ \int\limits_a^b \left[g(s, x_m(s,z,\eta)) + h(s, x_m'(s,z,\eta))\right] ds - d \end{pmatrix} \qquad (23)$$

для будь-яких $(z,\eta) \in D_a \times D_b$.

Наступна теорема дає конструктивні достатні умови для розв'язності інтегральної крайової задачі (1), (18) на основі властивостей наближеної визначальної функції.

Теорема 4.2. *Припустимо, що виконуються умови Леми 4.1. Крім того, можна вказати таке $m \geq 1$ і множину $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ вигляду*

$$\Omega := D_1 \times D_2,$$

де $D_1 \subset D_a$, $D_2 \subset D_b$ є певні обмежені відкриті множини, такі що відображення $H_m(z,\eta)$, яке задане формулою (23) задовольняє співвідношення

$$|H_m(z,\eta)| \rhd_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m\,(I_n-Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f) \\ \frac{10(b-a)^2}{27}(K_g+K_hK)Q^m\,(I_n-Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f) \end{bmatrix}$$

на границі $\partial\Omega$. Якщо крім того, степінь Брауера відображення H_m не дорівнює нулеві:

$$\deg(H_m, \Omega, 0) \neq 0,$$

тоді, існує пара $(z^*, \eta^*) \in D_1 \times D_2$ *така, що функція* $x^*(\cdot) = x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)$ *є абсолютно неперервним розв'язком інтегральної крайової задачі (1), (18), де* $x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)$ *– гранична функція послідовності (10)*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*), t \in [a, b]\,.$$

Перейдемо до одержання необхідних умов розв'язності інтегральної крайової задачі (1), (18).

Теорема 4.3. *Нехай справедливі умови Теореми 3.1. Тоді, для того, щоб деякі підобласті* $G_a \subset D_a$ *і* $G_b \subset D_b$ *могли містити точки* z^* *і* η^*, *які при* $t = a$ *і* $t = b$, *задають відповідно значення*

$$x(a) = z^* \text{ і } x(b) = \eta^* \tag{24}$$

розв'язку $x(\cdot)$ *крайової задачі (1), (18) необхідно, щоб при всіх* m *і довільних* $\widetilde{z} \in G_a, \widetilde{\eta} \in G_b$ *виконувались нерівності*

$$|\Delta_m(\widetilde{z}, \widetilde{\eta})| \le \sup_{z\in G_a, \eta\in G_b} \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K\,(I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] \times$$
$$\times\,[|\widetilde{z} - z| + |\widetilde{\eta} - \eta|] + \frac{10\,(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \tag{25}$$

$$|\Lambda_m(\widetilde{z}, \widetilde{\eta})| \le$$

$$\le \sup_{z\in G_a, \eta\in G_b} \left[(b-a)\,(K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b-a)^2 K\,(I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times$$

$$\times\,[|\widetilde{z} - z| + |\widetilde{\eta} - \eta|] + \frac{10(b-a)^2}{27}\,(K_g + K_h K)\,Q^m\,(I_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f).$$

У **п'ятому розділі** дисертації вивчається нелінійна інтегральна крайова задача

$$\frac{du(t)}{dt} = f\,(t, u(t))\,, t \in [a, b]\,, \tag{26}$$

$$\int_a^b g(s, u(s))ds = d, \tag{27}$$

де $f : [a, b] \times D \to \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times D \to \mathbb{R}^n$ є неперервні функції в певній обмеженій області D і $d \in \mathbb{R}^n$ заданий постійний вектор.

Показано, що в тих випадках коли не виконуються достатні умови збіжності (11) для модельної параметризованої послідовності функцій, а саме коли найбільше власне значення матриці Q вигляду (19) більше за одиницю, тоді доцільно застосовувати техніку ділення відрізку інтегрування навпіл.

Зафіксуємо деякі відкриті обмежені області D_a, $D_{\frac{a+b}{2}}$, $D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося неперервно диференційовними розв'язками u крайової задачі (26), (27) такими, що

$$u(a) \in D_a,\ u\left(\frac{a+b}{2}\right) \in D_{\frac{a+b}{2}} \text{ і } u(b) \in D_b.$$

В загальному можемо вибрати D_a, $D_{\frac{a+b}{2}}$, D_b опуклими множинами.

На основі множин D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$ введемо в розгляд множину $D_{a,\frac{a+b}{2}}$ згідно (3) і її покомпонентний векторний ρ^x – окіл $D^x = B(D_{a,\frac{a+b}{2}}, \rho^x)$ на основі (4). Аналогічно, на основі множин $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b визначимо множину $D_{\frac{a+b}{2},b}$ і її покомпонентним векторний ρ^y – окіл $D^y = B(D_{a,\frac{a+b}{2}}, \rho^y)$.

Насамперед, спростимо інтегральні крайові умови (27) і зведемо їх до підходящих умов модельного типу, аналогічно, як в попередніх розділах. Для цього введемо в розгляд векторні параметри

$$z = col(z_1, z_2, ..., z_n),\ \lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),\ \eta = col(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$$

формально поклавши

$$z = u(a),\ \lambda = u\left(\frac{a+b}{2}\right),\ \eta = u(b). \tag{28}$$

Після цього, замість крайової задачі (26), (27), використовуючи техніку ділення відрізку навпіл, будемо розглядати відповідно на інтервалах $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ та $t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, наступні дві „модельного типу“ параметризовані задачі (29)–(30) та (31)–(32):

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],\ x(a) = z, \tag{29}$$

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],\ x\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \tag{30}$$

та

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y\right), t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right],\ y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \tag{31}$$

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, y\right), t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right],\ y\left(b\right) = \eta, \tag{32}$$

кожна з яких складається з двох задач Коші, де $z, \lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$ вважаються параметрами. Зауважимо, що довжина інтервалу в задачах (29)–(30) та (31)–(32) є $\frac{b-a}{2}$ в протилежність $b-a$ у випадку вихідної задачі(26), (27).

Отже, ми пропонуємо замість ІКЗ (26), (27) досліджувати спочатку окремо дві допоміжні модельні задачі (29)–(30) та (31)–(32). Для цього побудуємо підходящі ітераційні процеси відповідно за формулами:

$$x_0(t,z,\lambda) = z + \frac{2(t-a)}{b-a}[\lambda - z] = \left[1 - \frac{2(t-a)}{b-a}\right] z + \frac{2(t-a)}{b-a}\lambda,$$

$$x_m(t,z,\lambda) = z + \int\limits_a^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))\,ds - \qquad (33)$$

$$-\frac{2(t-a)}{b-a}\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))\,ds + \frac{2(t-a)}{b-a}[\lambda - z], t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right],$$

$$y_0(t,\lambda,\eta) = \lambda + \frac{2t-a-b}{b-a}[\eta - \lambda] = \left[1 - \frac{2t-a-b}{b-a}\right] \lambda + \frac{2t-a-b}{b-a}\eta,$$

$$y_m(t,\lambda,\eta) = \lambda + \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^t f(s, y_{m-1}(s,\lambda,\eta))\,ds - \qquad (34)$$

$$-\frac{2t-a-b}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s, x_{m-1}(s,\lambda,\eta))\,ds + \frac{2t-a-b}{b-a}[\eta - \lambda],\ t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

для всіх $m = 1, 2, ...,$ $z \in \mathbb{R}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Для послідовностей (33), (34) доведені аналоги Теореми 3.1 про рівномірну збіжність для всіх $(z,\lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$, $(\lambda,\eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$,

$$x_\infty(t,z,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\lambda),\ y_\infty(t,\lambda,\eta) = \lim_{m\to\infty} y_m(t,\lambda,\eta).$$

Теорема 5.3. *Нехай виконуються умови Теорем (в дисертації Теореми 5.1, 5.2), які забезпечують рівномірну збіжність послідовностей (33), (34).*

Тоді:

1. Функція

$$u_\infty(t,z,\lambda,\eta) = \begin{cases} x_\infty(t,z,\lambda), \text{якщо } t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ y_\infty(t,\lambda,\eta), \text{якщо } t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} \qquad (35)$$

є неперервно диференційовним розв'язком ІКЗ (26), (27) тоді і тільки тоді, коли трійка векторів (z,λ,η) задовольняє систему $3n$ алгебраїчних рівнянь

$$\Delta(z,\lambda) = \lambda - z - \int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_\infty(s,z,\lambda))ds = 0,$$

$$H(\lambda,\eta) = \eta - \lambda - \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(s, y_\infty(s,\lambda,\eta))ds = 0,$$

$$P(z,\lambda,\eta) = \int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} g\left(s, x_\infty(s,z,\lambda)\right) ds + \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} g\left(s, y_\infty(s,\lambda,\eta)\right) ds - d = 0.$$

2. Для будь-якого розв'язку $U(\cdot)$ задачі(26), (27) з властивістю

$$\left(U(a), U\left(\frac{a+b}{2}\right), U(b)\right) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b,$$

існує така трійка векторів (z_0, λ_0, η_0), що $U(\cdot) = u_\infty(t, z_0, \lambda_0, \eta_0)$, де функція $u_\infty(t, z_0, \lambda_0, \eta_0)$ задана згідно (35).

Показано, якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ поділити, наприклад, рівномірним кроком h на N підінтервалів $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, ..., $[a+(N-1)h, a+Nh]$, легко побудувати N простих модельних параметризованих задач на цих підінтервалах. Їх дослідження показує, що умови збіжності модельних послідовностей можна покращити рівно в N разів. Ця техніка і її переваги продемонстровані на прикладах інтегральної крайової задачі, в яких для виконання достатніх умов збіжності потрібно поділити відрізок інтегрування, відповідно, на два і три підінтервала.

ВИСНОВКИ

В роботі основна увага приділялася маловивченим до цих пір задачам для системи нелінійних диференціальних рівнянь розмірності n, коли крайові умови представлені функціоналом або нелінійними інтегралами, які залежать як від невідомої функції так і її похідної.

У дисертації для таких „не зручних“ крайових умов, на основі параметризації, розроблений і обґрунтований універсальний чисельно–аналітичний метод, який з успіхом може застосовуватися для дослідження існування і наближеної побудови розв'язків загального вигляду функціональних та інтегральних крайових задач.

Нові результати, які отримані у дисертаційній роботі детально описані вище в підрозділі: **Наукова новизна одержаних результатів**.

Конструктивність та ефективність отриманих теоретичних результатів детально проілюстровано на прикладах нелінійних інтегральних крайових задач з не єдиними розв'язками.

Запропоновані підходи можуть бути застосовані до математичного моделювання різних прикладних задач науки і техніки, які зводяться до крайових задач для систем диференціальних рівнянь нормального вигляду.

Метод легко може бути реалізований на практиці з використанням пакету символьної математики типу Maple.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Rontó A.* A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems / A. Rontó, M. Rontó, J. Varha // Applied Mathematics and Computation. — 2015. — 250. — P. 689-700, doi:10.1016/j.amc.2014.11.021.
2. *Rontó M.* Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems /M. Rontó, Y. Varha // Miskolc Mathematical Notes. — 2014. — Vol.15, №2. — P. 725-742.
3. *Rontó M.* Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems / M. Rontó, Y. Varha // Miskolc Mathematical Notes. — 2015. — Vol.16, №2. — P. 1129-1152, DOI: 10.181514/MMN.2015.1192.
4. *Rontó M.* Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems / M. Rontó, Y. Varha, K. Marynets // Tatra Mountains, Mathematical Publications. — 2015. — 63. — P. 247-267, doi 10515/tmmp-2015-0035.
5. *Rontó M.* Integral boundary value problems and division into subintervals / M. Rontó, Y. Varha // Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Series mathematics and informatics. — 2015.—27, №2. — P. 144–153.
6. *Варга Я. В.* Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач / Я. В. Варга // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика. — 2015.—26, №1. — С. 23–34.
7. *Маринець К. В.* Про один підхід дослідження розв'язків нелінійних крайових задач з інтегральними крайовими умовами / К. В. Маринець, Я. В. Варга // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика. — 2013.—23, №1. — С. 101–115.
8. *Варга Я. В.* Про один новий підхід дослідження розв'язків нелінійних інтегральних крайових задач / Я. В. Варга // Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, Ужгород, 19-21 травня 2016. — С.50.

9. *Варга Я. В.* Дослідження розв'язків деяких нелінійних інтегральних крайових задач / Я. В. Варга // Методика викладання та методи дослідження в математиці: міжнар. наук. конф., м. Берегове, 21-23 квітня 2016, матеріали міжнар. матем. конф. — С. 68.
10. *Щобак Н. М.* Багатоточкові крайові задачі для системи лінійних функціонально-диференціальних рівнянь/ Н. М. Щобак, Я. В. Варга // Диференціальні рівняння та їх застосування: міжнар. наук. конф., 27-29 вер. 2012 р. : матер. конф. — Ужгород, 2012. — С. 87.
11. *Rontó M.* Reduction of integral boundary value problems to a certain model type / M. Rontó, Y. Varha // Conference on Differential and Difference Equations and Applications: intern. scient. conf., 23-27 June 2014. : conf. materials. — Jasna, Slovak Republic, 2014. — P. 44.
12. *Rontó M.* Constructive existence analysis of two solutions of some nonlinear integral BVS / M. Rontó, Y. Varha // The Issues of Calculations Optimization (ISCOPT-XLII): International Scientific Workshop , 21-25 September 2015. : conf. materials. — K., 2015. — P. 76.
13. *Rontó M.* On the investigation of integral boundary value problems / M. Rontó, J. Varha // Методика викладання та методи дослідження в математиці: міжнар. наук. конф., м. Берегове, 21-23 квітня 2016. : матеріали міжнар. матем. конф. — С. 14.
14. *Rontó M.* On analysis of solutions of some nonlinear integral boundary-value problems / M. Rontó, K. Marynets, Y. Varha // The Issues of Calculations Optimization (ПОО-XL): intern. scient. conf., 30 September-4 October 2013. : conf. materials. — K., 2013. — T. 2. — P. 222–223.

АНОТАЦІЯ

Варга Я. В. Дослідження розв'язків деяких нелінійних функціональних та інтегральних крайових задач на основі параметризації. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук зі спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2016.

Дисертаційна робота присвячена розробці та математичному обгрунтуванню оригінального конструктивного чисельно–аналітичного методу дослідження існування та наближеної побудови розв'язків крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь розмірності n з локально ліпшицевими нелінійностями у випадку складних нелінійних функціональних та інтегральних крайових умов.

В основі метода лежить перехід від заданих функціональних чи інтегральних крайових умов до параметризованих умов модельного типу, які мають простий вигляд початкових умов.

Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно–аналітична схема, яка базується на параметризованих послідовних наближеннях з покращеними характеристиками збіжності. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайової задачі. Отримані конструктивні достатні та необхідні умови розв'язності розглядуваних класів нелінійних крайових задач.

Доведено, що діленням відрізка інтегрування навпіл, в два рази можна покращити достатні умови рівномірної збіжності параметризованих послідовних наближень.

Ключові слова: функціональні та нелінійні інтегральні крайові задачі, параметризація, чисельно–аналітичний метод послідовних наближень, абсолютно неперервний розв'язок, умови Каратеодорі, топологічна степінь Брауера.

АННОТАЦИЯ

Варга Я. В. Исследование решений некоторых нелинейных функциональных и интегральных краевых задач при помощи параметризации. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02. — дифференциальные уравнения. Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Черновцы, 2016.

Диссертационная работа посвящена исследованию и математическому обоснованию конструктивного численно–аналитического метода исследования существования и приближенного построения решений краевой задачи для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений размерности n с локально липшицевыми нелинейностями в случае сложных нелинейных функциональных и интегральных краевых условий.

В основе метода лежит переход от заданных функциональных или интегральных краевых условий к параметризованим условиям модельного типа, которые имеют простой вид начальных условий.

Для модельной параметризованной задачи построена конструктивная численно–аналитическая схема, основанная на параметризованных последовательных приближениях с улучшенными характеристиками сходимости. Установлена связь между решениями модельной и исходной краевой задачи. Получены конструктивные достаточные и необходимые условия разрешимости рассматриваемых классов нелинейных краевых задач.

Доказано, что делением отрезка интегрирования пополам, в два раза можно улучшить достаточные условия равномерной сходимости параметризованных последовательных приближений.

Ключевые слова: функциональные и нелинейные интегральные краевые задачи, параметризация, численно–аналитический метод последовательных приближений, абсолютно непрерывное решение, условия Каратеодори, топологическая степень Брауэра.

ABSTRACT

Varha J. V. Investigation of solutions of some non-linear functional and integral boundary value problems using parametrization. — Manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences from speciality 01.01.02–Differential Equations. Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2016.

The dissertation is devoted to elaboration and mathematical justification of a constructive numerical–analytic approach for the solvability analysis and approximate solution of general non-local boundary value problems with complicated functional or integral restrictions in the case of non-linear systems of ordinary differential equations with locally lipschitzian non-linearities.

The method based upon the reduction of the given functional or integral boundary conditions to the parameterized model type of a very simply form of initial ones.

It was built a constructive numerical-analytic scheme for the model type problem, based on the parameterized successive approximations with improved uniformly convergence conditions. It was established a connection between the solutions of model type and original problem. It were obtained a constructive necessary and sufficient conditions for the solvability analysis of the considered classes of boundary value problems.

It was established that using the interval halving the sufficient uniformly convergence conditions can be weakened by its half.

Key words: functional and non-linear integral boundary value problems, parameterization, numerical analytic method of successive approximations, absolutely continuous solution, Caratheodory conditions, Brouwer's topological degree.