

ДВНЗ „УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ“

На правах рукопису

Варга Яна Володимирівна

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ
ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ

Дисертація

на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико–математичних наук

01.01.02 – диференціальні рівняння

Наукові керівники:

доктор фіз.–мат. наук, професор

Ронто Микола Йосипович

доктор фіз.–мат. наук

Ронто Андрій Миколайович

Ужгород–2016

ЗМІСТ

	<i>Стор</i>
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	4
ВСТУП	6
Розділ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ...	16
Висновки до першого розділу	31
Розділ 2 ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ	32
Висновки до другого розділу	39
Розділ 3 НОВИЙ ПІДХІД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕЛОКАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ	40
3.1 Постановка функціональної крайової задачі і зведення до модельного типу	40
3.2 Дослідження задачі модельного типу	42
3.3 Зв'язок граничної функції з розв'язком функціональної крайової за- дачі	47
3.4 Приклад з нелінійними інтегральними крайовими умовами та двома розв'язками	53
Висновки до третього розділу	59
Розділ 4 НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ	60
4.1 Постановка інтегральної крайової задачі та зведення до модельного типу	60
4.2 Збіжність послідовних наближень та зв'язок між розв'язками модель- ної та вихідної задачі	61
4.3 Дослідження розв'язності на основі наближеної системи визначальних рівнянь	65
4.4 Необхідні умови існування розв'язків	72
4.5 Конструктивна перевірка достатніх умов існування для приклада ін- тегральної крайової задачі з двома розв'язками	80
4.6 Приклад з двома розв'язками, де інтегральна крайові умови залежать і від похідної	84
Висновки до четвертого розділу	89
Розділ 5 ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДІЛЕННЯМ НА ПІДІНТЕРВАЛИ	90

5.1	Постановка задачі та зведення до двох модельних задач	90
5.2	Ділення відрізка інтегрування навпіл та послідовні наближення . . .	93
5.3	Збіжність послідовних наближень	94
5.4	Граничні функції і визначальні рівняння	98
5.5	Приклад з двома розв'язками та ділення відрізка інтегрування навпіл	104
5.6	Ділення відрізка інтегрування на скінчену кількість підінтервалів та зведення до модельних задач	109
5.7	Дослідження збіжності послідовних наближень та визначальні рів- няння	113
5.8	Приклад інтегральної крайової задачі з двома розв'язками та ділення відрізка інтегрування на три підінтервали	118
	Висновки до п'ятого розділу	125
	ВИСНОВКИ	126
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	128

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- Для будь-якого вектора $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ під абсолютною величиною $|x|$ розуміємо вектор $|x| = \text{col}(|x_1|, \dots, |x_n|)$ і нерівності $\leq, \geq, <, >$ між векторами розуміємо покомпонентно;
- Операції $\max, \min, \sup, \inf, \text{ess sup}, \text{ess inf}$ над векторами також розуміємо покомпонентно;
- I_k – одинична квадратна матриця розмірності k ;
- O_k – нульова квадратна матриця розмірності k ;
- $B(z, \rho)$ – для будь-якого невід’ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ і точки $z \in \mathbb{R}^n$ є покомпонентний векторний ρ – окіл точки $z \in \mathbb{R}^n$:

$$B(z, \rho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - z| \leq \rho\};$$

- $B(\Omega, \rho)$ – для обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і будь-якого невід’ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ є векторний ρ – окіл області Ω :

$$B(\Omega, \rho) = \bigcup_{z \in \Omega} B(z, \rho);$$

- $r(K)$ – спектральний радіус матриці K ;
- $f \in \text{Lip}(K, D)$ – означає, що для множини D , замкнутого інтервала $[a, b] \subset \mathbb{R}$, Каратеодорі функції $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \times n$ матриці K з невід’ємними елементами виконуються умови Ліпшиця

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K |u - v|$$

для всіх пар $\{u, v\} \subset D$ і майже всіх $t \in [a, b]$, а у випадку неперервної функції $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ для всіх $t \in [a, b]$;

- $\delta_{[a,b],D}(f)$ – вектор, який визначається Каратеодорі функцією $f : [a, b] \times$

$D \rightarrow \mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ess\,sup}_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t,x) - \operatorname{ess\,inf}_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t,x) \right],$$

а для неперервної функції

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t,x) \right];$$

- $\partial\Omega$ – границя області Ω ;
- $\deg(\Phi, \Omega, 0)$ – степінь Брауера векторного поля Φ над множиною Ω відносно нуля;
- $\triangleright_{\partial\Omega}$ – спеціальне співвідношення між двома вектор-функціями на границі області Ω (Див. Означення 2.3);
- \square – кінець доведення;
- КЗ – крайова задача;
- ІКЗ – інтегральна крайова задача.

ВСТУП

Теорія нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь є однією з найбільш бурхливо розвиваючихся розділів сучасної математики. Це зумовлено в першу чергу запитами практики при математичному моделюванні різних явищ і процесів в нелінійних системах і середовищах фізики, електротехніки, а також необхідністю отримання відповідей на ряд ще не вирішених або частково вирішених теоретичних питань. Ці теоретичні питання зв'язані, в першу чергу, з розробкою конструктивних універсальних методів дослідження існування розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, підпорядкованих загального вигляду обмеженням, які задані нероздільними лінійними, нелінійними двоточковими, багатоточковими або функціональними чи інтегральними крайовими умовами.

Основною характеристикою конструктивних методів повинна бути можливість з їх допомогою перевірити практичне виконання всіх теоретичних передумов і припущень, які гарантують можливість застосування цих методів до конкретних класів крайових задач, і вміти за їх допомогою доводити розв'язок задачі до кінцевого результату, а саме до числових значень.

Не менш важливим є розробка і строго математичне обґрунтування ефективних методів наближеної побудови розв'язків таких крайових задач. Значний інтерес представляють розробки, які націлені і придатні для одночасного дослідження розв'язності і наближеної побудови розв'язків широких класів нелінійних крайових задач.

Аналіз сучасного стану методів дослідження крайових задач показує, що із існуючого арсеналу аналітичних, функціонально-аналітичних, чисельно-аналітичних методів поступово найбільш поширені стають методи, які відносяться до класу чисельно-аналітичних. Чисельно-аналітичний метод дозволяє представити шуканий розв'язок у кінцевому результаті в аналітичному виді, хоча його деякі параметри чи коефіцієнти знаходяться чисельно, шляхом розв'язку системи певних алгебраїчних рівнянь.

Напевно, так звані прямі методи математичної фізики, під якими розуміють всі варіаційні і проєкційні методи, мають в певному сенсі чисельно-аналітичну структуру.

Проте, останнім часом найбільш активно розвиваються такі чисельно–аналітичні підходи, які основані на спеціальним чином в аналітичному виді побудованих послідовних наближеннях.

Тематика дисертаційної роботи безпосередньо пов'язана з розвитком сучасної теорії чисельно–аналітичних методів вивчення розв'язків нелінійних крайових задач.

При цьому дослідження проводяться в рамках підходів і традицій відомої Київської школи академіка А.М. Самойленка в області чисельно–аналітичних методів, які базуються на певним чином побудованих послідовних наближеннях. Зауважимо, що цей напрямок успішно розвивається також і за кордоном, зокрема в Угорщині (М. Ronto), Польщі (Т. Jankowski, М. Kwapisz).

В даній дисертації математично строго обґрунтований оригінальний метод побудови чисельно–аналітичної схеми дослідження розв'язків широких класів нелінійних крайових задач. Зауважимо, що цей підхід успішно може бути застосований, як до нелінійних систем диференціальних рівнянь з неперервною, локально ліпшицевою правою частиною, так і у випадку умов Каратеодорі.

Універсальність підтверджується тим, що розроблений метод може легко застосовуватися у випадку крайових умов більш складного вигляду, включаючи нелінійні функціональні та інтегральні обмеження.

Актуальність теми

При побудові чисельно–аналітичних схем значну роль відіграє вигляд заданих крайових умов.

Наприклад, у випадку лінійних нерозділених двоточкових крайових умов побудова підходящої послідовності суттєво ускладнюється, якщо матриці, які фігурують в умовах є виродженими. Ще більш складна ситуація виникає, коли крайові умови є багатоточковими, нелінійними, або задані деякими функціоналами чи представлені певними інтегралами, де підінтегральний вираз нелінійно залежить від невідомої функції і її похідної.

Слід зазначити, що в науковій літературі дослідження розв'язків інтегральних крайових задач проведено в окремих випадках диференціальних рівнянь і лише у випадку лінійних інтегральних крайових умов. Для систем диференціальних рівнянь лише в одиничних працях вивчаються інтегральні

крайові задачі чисельно–аналітичними методами.

Дана дисертація покликана в деякій мірі заповнити цю прогалину. В ній, на основі параметризації, розроблений і обґрунтований новий чисельно–аналітичний підхід, який з успіхом може застосовуватися для дослідження існування і наближеної побудови розв’язків загального вигляду нелінійних функціональних та інтегральних крайових задач:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b],$$

$$\Phi(x) = d,$$

де Φ є вектор-функціонал в просторі абсолютно неперервних вектор функцій.

В основі методу лежить перехід від заданих крайових умов до так званих параметризованих універсальних умов модельного типу, що мають вигляд початкових умов, які задані параметрично на лівому і правому кінці відрізка інтегрування

$$x(a) = z, x(b) = \eta.$$

Далі, для заданої системи диференціальних рівнянь досліджується модельна задача, яка складається з двох допоміжних задач Коші:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b],$$

$$x(a) = z,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b],$$

$$x(b) = \eta.$$

Для вивчення розв’язків цих двох задач Коші, на відміну від методу Пікара, пропонується оригінальна ітераційна схема, яка дозволяє досліджувати ці дві задачі Коші одночасно, однією і тією ж ітераційною схемою і крім того встановити існування їх розв’язків не локально, а на всьому інтервалі $[a, b]$. Зауважимо, що модельну задачу в певному сенсі можна трактувати і як пе-

ревизначену двоточкову параметризовану крайову задачу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b],$$

$$x(a) = z, x(b) = \eta.$$

Конкретний вигляд заданих інтегральних або функціональних крайових умов береться до уваги лише при побудові спеціальних систем алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких задають чисельні значення введених параметрів, які визначають шукані розв'язки.

Універсальність запропонованого підходу дає можливість встановлення необхідних і достатніх умов розв'язності нелінійних крайових задач загального вигляду, обґрунтовує доцільність дослідження в цій області.

Зв'язок роботи з науковими планами

Теоретичні результати дисертаційної роботи, отримані в рамках наукової тематики кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики ДВНЗ „Ужгородський національний університет“ та пов'язані з держбюджетною темою „Побудова нових модифікацій конструктивних методів дослідження крайових задач теорії диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь“, що виконувалася на кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики ДВНЗ „Ужгородський національний університет“ в 2013-2015 роки (номер державної реєстрації №0113U002366).

Мета і завдання дисертаційної роботи

Основною *метою* дисертаційної роботи є розробка та строге математичне обґрунтування нового підходу параметризації для зведення крайових задач з складними нелінійними функціональними та інтегральними крайовими умовами до простих параметризованих задач модельного типу.

Побудова підходящої чисельно-аналітичної схеми для дослідження розв'язків цієї перетвореної модельної задачі і встановлення зв'язку між розв'язками вихідної та перетвореної задачі.

Отримання конструктивних необхідних та достатніх умов існування розв'язків нелінійних інтегральних крайових задач.

Об'єктом дослідження є крайові задачі для систем нелінійних диферен-

ціальних рівнянь нормального вигляду з функціональними та інтегральними крайовими обмеженнями загального вигляду.

Предметом дослідження є обґрунтування переходу від крайових задач з складними крайовими умовами до більш простого модельного типу. Питання побудови підходящої чисельно-аналітичної схеми для дослідження розв'язків модельної задачі. Доведення рівномірної збіжності побудованої послідовності. Встановлення зв'язку між розв'язками вихідної та модельної задачі.

Методи дослідження ґрунтуються на ідеях параметризації та конструкціях і властивостях чисельно-аналітичних методів, які основані на послідовних наближеннях.

У випадку періодичних крайових задач оригінальний чисельно-аналітичний метод був запропонований академіком А.М. Самойленком.

Спеціальні узагальнення і модифікації для різних типів задач з двоточковими, багатоточковими лінійними і нелінійними та окремі випадки інтегральних крайових умов розроблені в роботах Перестюка М.О., Ронто М., Kwapisz M., Jankowski T., Augustynovich A., Vainov D., Sarafova G., Hristova S., Мартинюк С.В., Перов А.И, Ронто А., Лаптинський В.Н., Кенжебаев К.К., Ле Ліонг Тай, Евхута Н.А., Забрейко П.П., Щобак Н.М., Ронто В.А., Король І.І., Філіпчук М.П., Маринець К.В..

Наукова новизна одержаних результатів

- Обґрунтовано оригінальний ефективний підхід дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних крайових задач з складними функціональними та інтегральними обмеженнями.

- Запропонований простий метод переходу від заданих інтегральних та функціональних крайових умов до параметризованої задачі модельного типу.

- Для модельної параметризованої задачі побудована оригінальна конструктивна чисельно-аналітична схема, яка основана на послідовних наближеннях зі покращеними характеристиками рівномірної збіжності.

- Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайової задачі.

- Отримані конструктивні достатні та необхідні умови розв'язності розглядуваних класів нелінійних крайових задач.

- Показано, що діленням відрізка інтегрування навпіл в два рази можна покращити достатні умови збіжності послідовних наближень.

- Розроблена методика легко може бути застосована до локально ліпшицевих систем диференціальних рівнянь як з неперервною, так і з правою частиною, яка задовольняє умови Каратеодорі.

- Показана можливість дослідження крайових задач з не єдиними розв'язками.

Практичне значення одержаних результатів

Результати, що одержані в дисертаційній роботі носять як теоретичний, так і практичний характер. Вони доповнюють попередні дослідження в теорії конструктивних методів. Дають змогу вивчати розв'язки таких класів крайових задач з нелінійними функціональними та інтегральними крайовими умовами, які раніше викликали значні труднощі або взагалі були неможливі.

Запропоновані підходи можуть бути застосовані до математичного моделювання різних прикладних задач науки і техніки, які зводяться до крайових задач для систем диференціальних рівнянь нормального вигляду.

Метод легко може бути реалізований на практиці з використанням пакету програм символічної математики типу Maple.

Особистий внесок здобувача

Результати дисертації є новими, добре апробовані і належать автору.

Публікації [4, 18, 105, 109–111, 123], що відображають зміст роботи, написані у співавторстві та одноосібно. Загальний план роботи та постановка задач визначені науковими керівниками професором Ронто М.Й. та Ронто А.

Результати спільних праць одержані при рівноправній участі всіх авторів.

У дисертацію включено та на захист виносяться лише результати, отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації

Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на таких міжнародних семінарах і конференціях:

- Семінари інститута математики Мішкольцьського університету (Угорщина, Мішкольц, 26 лютого, 2014 р.);

- Міжнародній науковій конференції „Szeged Dynamics Days“ (Угорщина, 28 лютого–1 березня, 2014 р.);
- Семінарі інститута математики університета Ниредьхаза (Угорщина, Ниредьхаза, 16 вересня, 2014 р.);
- Науковому семінарі інститута математики університета Оломовц (Чехія, Оломовц, 11 листопада, 2014 р.);
- Міжнародній науковій конференції „Conference on Differential and Difference Equations and Applications“ (Словацьчина, Ясна, 23–27 червня, 2014 р.);
- Шостій міжнародній конференції „Constructive methods for non-linear boundary value problems“ (Угорщина, Мішкольц, 9–12 липня, 2015 р.);
- Міжнародній конференції „International conference on nonlinear operators, Differential equations and applications“ (ICNODEA-2015) (Румунія, Клуж-Напока, 14–17 липня 2015 р.);
- Міжнародній науковій школі-семінарі „Питання оптимізації обчислень“ (ПОО-ХЛІІ) (Україна, Закарпатська обл., смт. Чинадійово, 21–25 вересня, 2015 р.);
- Міжнародній науковій конференції „Методика викладання та методи дослідження в математиці“ (Україна, Закарпатська обл., м. Берегово, 21–23 квітня, 2016 р.);
- Міжнародній науковій конференції „Диференціальні рівняння та їх застосування“ (Україна, Закарпатська обл., смт. Чинадійово, 19–21 травня, 2016р.).

Публікації

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 7 наукових статей [4, 18, 105, 109–111, 123] у фахових вітчизняних та провідних закордонних виданнях, серед яких 5 статей [105, 109–111, 123] англомовні.

Закордонні публікації [105, 109, 110] опубліковані у виданнях з імпакт-фактором, відповідно: 1.551; 0.229; 0.229. А також 7 праць надруковані у збірниках тез доповідей міжнародних наукових форумів [5, 6, 47, 120–122, 124].

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається із переліку позначень, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Три останні розділи розбиті

на підрозділи і містять основні результати. Загальний обсяг дисертації становить 140 стор., основний текст — 112 стор. Робота містить 9 рисунків та 130 найменувань у списку використаних джерел.

Перший розділ присвячений огляду літератури. Розглянуто основні напрями досліджень в області конструктивних методів, які сприяли появі сучасних чисельно-аналітичних методів. Наведено основні проблеми і задачі, які досліджувались вітчизняними та зарубіжними математиками по темі дисертації.

У *другому розділі* сформульовано базові визначення та допоміжні твердження, які використовуються при постановці задач, обґрунтуванні основних результатів. Дається означення умов Каратеодорі, які необхідні при дослідженні абсолютно неперервних розв'язків. Детально обговорюється поняття топологічного степеня Брауера і його основні властивості. Всі ці відомості потрібні при побудові відповідних послідовностей, доведенні їх збіжності, а також встановленні достатніх та необхідних умов розв'язності розглядуваних класів функціональних та інтегральних крайових задач.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню розв'язків функціональної крайової задачі у випадку, коли права частина системи нелінійних диференціальних рівнянь є локально ліпшицевою та задовольняє умови Каратеодорі, а крайові умови задані нелінійним функціоналом загального вигляду. Під розв'язком задачі розуміємо абсолютно неперервну функцію, яка задовольняє функціональні крайові умови, а задану систему диференціальних рівнянь задовольняє майже всюди на відрізку інтегрування.

Насамперед, здійснюється перехід від функціональних крайових умов до так званих параметризованих умов модельного типу $x(a) = z$, $x(b) = \eta$. Фактично, модельні умови означають, що значення невідомого розв'язку в кінцевих точках відрізка інтегрування вважаються параметрами.

Для дослідження розв'язків модельної задачі, яка складається з двох задач Коші, запропоновано підходящу параметризовану чисельно-аналітичну схему, що базується на послідовних наближеннях. Доведена рівномірна збіжність побудованої параметризованої послідовності функцій до граничної, яка при певних числових значеннях параметрів приводить до абсолютно неперервного розв'язку вихідної функціональної крайової задачі.

Теоретичні викладки продемонстровано на прикладі задачі з нелінійними інтегральними крайовими умовами, яка має два розв'язки.

У *четвертому розділі* розглянуто нелінійну задачу, підпорядковану нелінійним інтегральним крайовим умовам, які залежать як від невідомої функції так і її похідної. Мова іде також про абсолютно неперервний розв'язок. Показано доцільність зведення заданої інтегральної крайової задачі до параметризованого модельного типу.

Цікаво відзначити, що модельна параметризована задача має один і той же вигляд при будь-яких заданих крайових умовах. Для вивчення перетвореної параметризованої задачі можна застосувати одну і ту ж чисельно-аналітичну схему, яка орієнтована спеціально на модельну задачу.

Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної задачі. Отримані, з використанням топологічної степені Брауера, конструктивні достатні умови розв'язності інтегральної крайової задачі на базі вивчення властивостей так званих наближених визначальних рівнянь, які є алгебраїчними, скінченної розмірності.

Встановлено також, необхідні умови розв'язності, а саме отримані нерівності, які необхідні для того, щоб якась підмножина могла містити точку, яка визначає початкове значення розв'язку. Зауважимо, що перевірка виконання цієї нерівності конструктивно може бути виконана на основі побудованої послідовності функцій та властивостей правої частини диференціальних рівнянь і функцій, що фігурують в крайових умовах. Одержані теоретичні результати апробовано на прикладі з нелінійними інтегральними крайовими умовами, що залежать як від невідомої функції, так і її похідної. Показано існування двох розв'язків.

У *п'ятому розділі* вивчається нелінійна інтегральна крайова задача, яка розглядалася в попередньому розділі. Показано, що у тих випадках коли не виконуються достатні умови збіжності для модельної параметризованої послідовності функцій, а саме коли найбільше власне значення певної матриці, що визначається локальними умовами Ліпшиця, більше за одиницю, тоді доцільно застосовувати техніку ділення відрізка інтегрування на підінтервали.

Так, у випадку ділення відрізка інтегрування $[a, b]$ навпіл, вихідна нелінійна інтегральна крайова задача зводиться до двох модельних параметри-

зованих задач, які визначені і вивчаються відповідно на відрізках $[a, \frac{b+a}{2}]$ та $[\frac{b+a}{2}, b]$.

Просто будуються дві модельні параметризовані послідовності. Доводиться їх рівномірна збіжність. Встановлюється зв'язок розв'язків модельних задач з розв'язком вихідної інтегральної задачі.

Доведено, що у випадку ділення відрізка інтегрування навпіл в два рази вдається покращити достатні умови збіжності побудованих послідовностей.

Показано, якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ поділити, наприклад, з рівномірним кроком h на N підінтервалів $[a, a + h]$, $[a + h, a + 2h]$, ..., $[a + (N - 1)h, a + Nh]$, легко побудувати N простих модельних параметризованих задач на цих підінтервалах. Їх дослідження показує, що умови збіжності модельних послідовностей можна покращити в N разів.

Цей метод і його переваги продемонстровані на прикладах інтегральних крайових задач, в яких для виконання достатніх умов збіжності потрібно поділити відрізок інтегрування, відповідно на два і три підінтервала.

Автор дисертації висловлює щирі подяку науковим керівникам доктору фізико–математичних наук, професорові Ронто Миколі Йосиповичу та доктору фізико–математичних наук Ронто Андрію Миколайовичу за постановку розглянутих у дисертації проблем, постійну увагу та підтримку у роботі.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Однією з основних задач теорії диференціальних рівнянь є дослідження питань існування, єдиності, багатозначності, додатності та побудова наближених розв'язків систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих заданим крайовим умовам [1, 2, 7, 11, 16, 32, 41, 130].

Фундаментальні результати в теорії нелінійних сингулярних диференціальних рівнянь з функціональними, двох- і багатоточковими крайовими умовами викладені в відомих монографіях та працях І.Т. Кігурадзе [10–12].

Важливі та цікаві результати отримані для нелокальних крайових задач на основі узагальнено обернених операторів Бойчуком О.А. [1–3, 55], з використанням асимптотичної декомпозиції та апроксимації Черевко І. М. [59, 67, 79], на основі усереднення Бігун Я.Й. [53, 54, 62, 126, 129], а з використанням теорії багаточастотних коливань Петришин Р.І. [66, 128]. Інтерес до теорії крайових задач обумовлений важливістю їх практичного застосування і необхідністю одержання відповідей на ряд ще не розв'язаних або частково розв'язаних теоретичних питань [7, 33, 37, 38, 48, 65, 74, 80, 82, 107, 127].

Звичайно, що різновид крайових задач визначається як видом і типом диференціальних рівнянь так і формою крайових умов. Наприклад, скалярне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx(t)}{dt}\right), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

найчастіше [63, 64] на практиці вивчається при крайових умовах Діріхле

$$x(a) = 0, \quad x(b) = 0.$$

Система нелінійних диференціальних рівнянь нормального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad x, f \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

може розглядатися при досить різномаїтних крайових умовах. Найбільш типові види крайових умов наступні:

періодичні

$$x(a) = x(b) ;$$

двоточкові лінійні нероздільні

$$A x(a) + Cx(b) = d, \quad (1.2)$$

де $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}, d \in \mathbb{R}^n$;

багатоточкові лінійні

$$\sum_{j=0}^m B_j x(t_j) = d, \quad (1.3)$$

де $B_j \in \mathbb{R}^{n \times n}, d \in \mathbb{R}^n, a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$;

умови, які залежать від одного або декількох скалярних керуючих параметрів λ_1, λ_2 , наприклад такого вигляду

$$A x(a) + \lambda_1 Cx(b) = d, x_1(a) = x_{1a}, n \geq 2,$$

$$\lambda_1 A x(a) + Cx(\lambda_2) = d, x_1(a) = x_{1a}, x_2(a) = x_{2a}, n \geq 3,$$

$$\lambda_1 A x(a) + \lambda_2 Cx(b) = d, x_1(a) = x_{1a}, x_2(a) = x_{2a}, n \geq 3;$$

обмеження, задане лінійним функціоналом

$$l(x) = d, l : C^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

або інтегралом Стілтєса

$$\int_a^b [d\Phi(t)] x(t) = c;$$

двоточкові нелінійні

$$g(x(a), x(b)) = d, g : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n ; \quad (1.5)$$

багатоточкові нелінійні

$$g(x(a), x(t_1), \dots, x(t_m), x(b)) = d, a < t_1 < t_2 < \dots < t_m < b, g : D^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^n ;$$

умови вигляду Коші-Ніколетті

$$x_i(t_i) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad a = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b;$$

інтерполяційного вигляду

$$x_j(t_i) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b;$$

різні лінійні та нелінійні інтегральні крайові умови

$$Ax(a) + \int_a^b B(s)x(s)ds + Cx(b) = d,$$

$$g \left(x(a), \int_a^b B(s)x(s)ds, x(b) \right) = d,$$

$$\int_a^b g(s, x(s))ds = d,$$

$$\int_a^b \left[g(s, x(s)) + h \left(s, \frac{dx(s)}{ds} \right) \right] ds = d,$$

$$g \left(x(a), x(b), \int_a^c B(s)x(s)ds, \right) = d, \quad a < c \leq b,$$

$$\int_a^b g(t, x(t), x'(t))dt = d.$$

При вищезгаданих крайових умовах в останні роки починають вивчати також розв'язки рівнянь більш загального вигляду ніж (1.1), наприклад диференціальні рівняння, які частково розв'язні відносно похідної, функціонально-диференціальні рівняння, алгебро-диференціальні рівняння.

Зрозуміло, чим складніша задана система рівнянь і тип крайових умов тим важче піддаються конструктивному дослідженню розв'язки таких крайових задач. Під дослідженням розв'язків ми розуміємо встановлення його

(чи їх) існування та обґрунтування ефективних методів їх наближеної побудови.

Аналіз наукової літератури показує, що поступово все частіше для дослідження розв'язків крайових задач застосовуються методи, що відносяться до класу так званих чисельно-аналітичних.

Методи цієї групи характеризуються тим, що на основі заданої системи диференціальних рівнянь і крайових умов в аналітичній формі будується спеціальна послідовність функцій $\{x_m(t, z)\}_{m=0}^{\infty}$, яка містить відповідну кількість невідомих параметрів z . При природніх умовах встановлюється рівномірна збіжність цієї послідовності до деякої граничної параметризованої функції $x_{\infty}(t, z)$. А чисельні значення параметрів z при яких гранична параметризована функція породжує розв'язок (або розв'язки) заданої крайової задачі отримуються як корені відповідної, так званої „системи визначальних рівнянь“ $\Delta(z) = 0$, які є алгебраїчними чи трансцендентними, в залежності від вигляду нелінійності, що фігурує в правій частині заданої системи диференціальних рівнянь.

Вивчаючи розв'язність „системи визначальних рівнянь“ або його відповідного наближення $\Delta_m(z) = 0$ вдається зробити висновок про існування розв'язку (розв'язків) заданої крайової задачі.

Таким чином, методи цієї групи дають можливість одночасно зробити висновок про існування розв'язку (розв'язків) і побудувати наближений розв'язок в аналітичному виді.

Як слідує з монографій [37, 41, 107] найбільш просто реалізувати такий підхід у випадку, коли (1.1) розглядається при лінійних крайових умовах, наприклад вигляду (1.2) або (1.3) або (1.4).

А чисельні методи [49, 72], при відповідних умовах гладкості правої частини заданої системи диференціальних рівнянь, виходячи з існування розв'язку дають лише алгоритм для його наближеної побудови.

Зауважимо, що перші розробки по чисельно-аналітичним методам, які ґрунтуються на послідовних наближеннях, беруть свій початок з теорії коливань

при вивченні періодичної крайової задачі

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x), t \in [0, T], x, f \in \mathbb{R}^n, f(t, x) = f(t + T, x), \\ x(0) &= x(T) \end{aligned} \quad (1.6)$$

у працях L. Cesari [56–58], J. Hale [46] А. М. Самойленка [39, 40].

Так в методі Cesari-Hale для слаболінійних систем диференціальних рівнянь у випадку періодичної крайової задачі (1.6) робляться наступні припущення [22]:

Н1. Функція $f(t, x) = \text{col}(f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ визначена, неперервна і T -періодична по t в області $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$, де D – задана підобласть \mathbb{R}^n ,

Н2. Функція $|f(t, x)| := \text{col}(|f_1(t, x)|, \dots, |f_n(t, x)|)$ в області визначення обмежена вектором M з невід’ємними компонентами і $f \in \text{Lip}(K, D)$,

Н3. Множина

$$D_\beta := \{x \in \mathbb{R}^n : S(x, \beta) \subset D\} \neq \emptyset,$$

тобто множина точок $x \in \mathbb{R}^n$, які містяться в D разом з своїм $\beta := \frac{T}{2}M$ – оточенням, непорожня,

Н4. $T \cdot r(K) < q$, де q – певна константа.

Метод базується на використанні послідовності T -періодичних функцій, що залежать від параметра $z \in \mathbb{R}^n$ і які визначені рекурентним співвідношенням

$$x_m(t, z) = z + \int_{\xi_{m-1}}^t f(s, x_{m-1}(s, z)) ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z)) ds, m = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

$$x_0(t, z) = z,$$

де вектор ξ_{m-1} вибирається на кожному кроці так, щоб інтегральне середнє

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z)) ds = z. \quad (1.8)$$

Зауважимо, щоб у (1.7) компоненти вектора ξ_{m-1} задають нижні границі інтегрування для відповідних компонент вектора $f(t, x)$ і існування таких середніх з властивістю (1.8) доведено на ст. 51 в [46].

Теорема 8 ([22], ст. 111) у редакції авторів містить основні твердження Теорем 6.1 і 6.2 із [46] про збіжність послідовності (1.7) і властивостях його граничної функції у випадку, коли в Н4 $q = 2$.

Для дослідження T -періодичних розв'язків істотно нелінійних систем рівнянь використовується метод Cesari [56]. Суть метода викладена в книгах [46, 125], а також в статті Н. Knobloch [73].

В методі Cesari параметрами являються не $z \in \mathbb{R}^n$, а $(2m + 1) \times n$ -вимірні вектора

$$(a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) = \mathbf{a},$$

які визначають початкову функцію

$$x_0(t, \mathbf{a}) = a_0 + \sum_{k=1}^m \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right)$$

і послідовні наближення

$$x_{m+1}(t, \mathbf{a}) = x_0(t, \mathbf{a}) + [I - P_m] L f x_m, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

де

$$[P_m y](t) = \sum_{k=1}^m \left(A_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right)$$

є початковий відрізок ряду Фур'є функції $y(t)$,

$$[L f x](t) = \int_0^t f(s, x(s)) ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds$$

і

$$f x(t) = f(t, x(t))$$

оператор Немицького, породжений функцією $f(t, x)$.

В статті [73] встановлені умови, при яких ітераційний процес (1.9) коре-

ктно визначений і рівномірно збігається в просторі неперервних T -періодичних вектор-функцій.

Дж. Хейл ([46], ст. 131) відзначає крайню складність вивчення граничної функції послідовності (1.9) і дослідження відповідної системи „визначальних алгебраїчних рівнянь“.

Проте, ці роботи в значній мірі стимулювали появу нових, ефективних, більш простих методів дослідження існування і наближеної побудови T -періодичних розв'язків неавтономних систем (1.6).

Однією з таких розробок є чисельно-аналітичний метод запропонований А.М. Самойленком [39, 40], який отримав згодом назву „чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень“ або „чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленко“.

В цьому методі для дослідження розв'язків T -періодичної крайової задачі (1.6) вводиться в розгляд більш проста послідовність параметризованих T -періодичних функцій вигляду

$$\begin{aligned}
 x_m(t, z) &= z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, z)) ds - \\
 &\quad - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z)) ds, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.10) \\
 x_0(t, z) &= z.
 \end{aligned}$$

При припущеннях Н1-Н4, для різних значень q в статтях [39, 40], а також в монографії А. М. Самойленка і Н. И. Ронто [38, 107], А. Ronto, М. Ronto [100], дається обґрунтування рівномірної збіжності послідовності (1.10) до деякої параметризованої граничної функції

$$x_\infty(t, z) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z), \quad (1.11)$$

що належить області D . Показано, що (1.11) буде T -періодичним розв'язком (1.6) в області D тоді і тільки тоді, коли параметр $z \in \mathbb{R}^n$ зодовольняє систему

„визначальних рівнянь“

$$\Delta(z) = \int_0^T f(s, x_\infty(s, z)) ds = 0.$$

Зауважимо, що ряд математиків різними підходами займалися поліпшенням константи q в умові Н4:

- 1965 р. А. М. Самойленко в роботах [39, 40], $q \approx 3.1$;
- 1976 р. А. М. Самойленко і Н. И. Ронто [37, 38], $q = \pi$;
- 1982 р. А. М. Самойленко і В. Н. Лаптинський [36], $q = 3.416\dots$;
- 1985 р. Н. А. Евхута і П. П. Забрейко [8, 9], $q = 3.416\dots$;
- 1985 р. Е. П. Трофімчук [45], $q = 3.416\dots$;
- 1992 р. М. Kwapisz [76], $q = \sqrt{10} \approx 3.1622$;
- 1996 р. М. Ронто і Й. Месарош [21], $q = \frac{10}{3}$;
- 2001 р. А. N. Ronto, M. Ronto, A. M. Samoilenko, S. I. Trofimchuk [95], $q = 3.4161306\dots$;

В останній роботі показано, що максимальне значення $q = q_\infty$, при якому ітераційний процес збігається дається найменшим додатнім коренем рівняння

$$\frac{1}{q_\infty} = \int_0^{1/2} e^{\tau(\tau-1)q_\infty} d\tau.$$

-2003 р. А.М. Самойленко [35] показав і обчислив непокритуване значення $q = 3.4161306263927879\dots$

-2012 р. А. Ronto, M. Ronto [96], A. Ronto, M. Ronto, N. Shchobak [97, 98], M. Ronto, Y. Varha [109], $q = \frac{20}{3}$.

Питання збіжності методу послідовних періодичних наближень (1.10) і деякі модифікації досліджуються і в роботах Евхути Н. А., Забрейко П. П. [8, 9, 60], Kwapisz М. [75, 76], Bainov D. D., Sarafova G. H. [51], Перова А. И. [15], Ronto А., Ronto М. [94], Ronto М., Mészáros J. [21], Ronto А. [85] Ronto А., Ronto М., Samoilenko А. М., Trofimchuk S. I. [95], Самойленка А. М., Ронто Н. И. [38] .

Метод послідовних періодичних наближень стимулював появу нових чи-

сельно–аналітичних методів дослідження розв’язків нелінійних систем диференціальних рівнянь (1.6) у випадку неперіодичних, а загального вигляду крайових умов. Огляд цих узагальнень і нових розробок можна знайти в серії статей Н. И. Ронто, А. М. Самойленко і С. И. Трофимчук [22–28].

В роботі А. М. Самойленка, В. А. Ронто [42] була вперше обґрунтована підходяща чисельно–аналітична схема для дослідження розв’язків системи (1.1) не при періодичних, а при лінійних двоточкових крайових умовах (1.2). Проте, аналіз двоточкової крайової задачі (1.1), (1.2), а згодом багатоточкової задачі (1.1), (1.3) показав їх ряд специфічних особливостей.

Показано, що якщо $\det C \neq 0$, то дослідження розв’язків крайової задачі (1.1), (1.2) можна здійснити на основі послідовності параметризованих функцій $\{x_m(t, z)\}_{m=0}^{\infty}$ вигляду

$$x_m(t, z) = z + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s, z)) ds - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x_{m-1}(s, z)) ds + \\ + \frac{t-a}{b-a} [C^{-1}d - (C^{-1}A + I)z], m = 1, 2, \dots, x_0(t, z) = z$$

при умові, що в співвідношенні НЗ

$$\beta = \frac{T}{2}M + |C^{-1}d - (C^{-1}A + I)z|.$$

В монографії А. М. Самойленка і Н. И. Ронто [37, 41] та М. Ronto, А. М. Samoilenko [107] показана залежність вигляду послідовних наближень від типу крайових умов.

Так, в статті А. Ronto [83] підходяща послідовність функцій і відповідний ітераційний процес для крайової задачі (1.1), (1.2) був побудований при умові

$$\det(AK_1 + CK_2) \neq 0$$

у якій K_1, K_2 спеціальним чином підібрані $n \times n$ матриці.

Зрозуміло, що двоточкова задача (1.1), (1.5), де нелінійними є як система диференціальних рівнянь, так і крайові умови уже вимагає інших підходів. У

роботі [34] задача (1.1), (1.5) за допомогою заміни змінних загального вигляду

$$x(t) = y(t) + h(t, \eta), \quad (1.12)$$

зводиться в кінцевому рахунку до крайової задачі

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + h(t, u)) - \frac{\partial h(t, \eta)}{\partial t}, \quad (1.13)$$

$$Ay(a) + Cy(b) = 0, \quad (1.14)$$

де функція h визначена, неперервна і неперервно диференційовна в деякій області

$$(t, \eta) \in [a, b] \times D_1, \quad D_1 \subset \mathbb{R}^n,$$

η – n -вимірний параметр, A і C деякі фіксовані сталі $n \times n$ матриці, такі що $\det C \neq 0$. Розв'язок задачі (1.13), (1.14), у якій крайові умови уже лінійні, досліджується з використанням рекурентної параметризованої послідовності

$$y_m(t, z, \eta) = z + \int_a^t \left[f(s, y_{m-1}(s, z, \eta) + h(s, \eta)) - \frac{\partial h(s, \eta)}{\partial s} \right] ds - \quad (1.15)$$

$$- \frac{t-a}{b-a} \int_a^b \left[f(s, y_{m-1}(s, z, \eta) + h(s, \eta)) - \frac{\partial h(s, \eta)}{\partial s} \right] ds + \frac{t-a}{b-a} [C^{-1}A + I_n] z,$$

$$y_0(z, \eta) = z, \quad m = 1, 2, \dots$$

Гранична функція $y_\infty(t, z, \eta)$ послідовності (1.15) визначає розв'язок вихідної крайової задачі (1.1), (1.5)

$$x_\infty(t) = y_\infty(t, z, \eta) + h(t, \eta)$$

тоді і тільки тоді, коли n -вимірні векторні параметри η і z є розв'язками „визначальної системи“ алгебраїчних рівнянь

$$g(z + h(a, \eta), y(T) + h(T, \eta)) = 0,$$

$$[C^{-1}A + I_n] z - \int_a^b \left[f(s, y_{m-1}(s, z, \eta) + h(s, \eta)) - \frac{\partial h(s, \eta)}{\partial s} \right] ds = 0.$$

Зрозуміло, що для забезпечення збіжності послідовності (1.15) відповідні умови доводиться припускати вже на праву частину системи (1.13), а не на початкову (1.1), що більш незручно.

В статті А. Ronto, М. Ronto [91] у випадку крайової задачі (1.1), (1.5) замість (1.12) запропоновано використовувати більш просту заміну змінних вигляду

$$y(t) = x(t) + \eta, \quad (1.16)$$

де η – n -вимірний параметр. За допомогою (1.16) задача (1.1), (1.2) перетвориться в наступну:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \eta), \\ Ay(a) + Cy(b) &= 0, \end{aligned}$$

де A і C довільні $n \times n$ матриці такі, що $\det C \neq 0$.

Використовуючи ітераційну схему

$$\begin{aligned} y_m(t, z, \eta) &= z + \int_a^t f(s, y_{m-1}(s, z, \eta)) ds - \\ &- \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, y_{m-1}(s, z, \eta)) ds + \frac{t-a}{b-a} [C^{-1}A + I_n] z, \end{aligned} \quad (1.17)$$

показано, що функція

$$x_\infty(t, z, \eta) = y_\infty(t, z, \eta) + \eta,$$

де $y_\infty(t, z, \eta)$ рівномірна границя послідовності (1.17) буде розв'язком вихідної крайової задачі (1.1), (1.2) в області D тоді і тільки тоді, коли параметри z і η задовільняють „визначальну систему“ алгебраїчних рівнянь

$$[C^{-1}A + I_n] z - \int_a^b f(s, y_\infty(s, z, \eta) + \eta) ds = 0,$$

$$g(z + \eta, -C^{-1}A z + \eta) = 0.$$

Зауважимо, що підхід запропонований в [91] забезпечує можливість перевіряти умови збіжності послідовності (1.17) безпосередньо на праву частину системи (1.1).

Слід зазначити, що техніка аналізованого тут чисельно–аналітичного методу послідовних наближень і його різноманітні модифікації з успіхом застосовувались і розвивалися при дослідженні різного вигляду крайових задач з багатоточковими лінійними та нелінійними крайовими умовами в роботах Перестюка Н. А. і Ронто А. Н. [19, 81], Ronto M., Schobak N. [112, 117, 118], Ronto A., Ronto M., Schobak N. [20, 97, 98], Ronto M. [29, 30, 106, 108, 113, 114], Ронто Н. И., Короля И. И. [31], Ronto A. [83, 84, 89], Самойленка А. М., Ронто Н. И. [43], Самойленка А. М., Ронто Н. И., Ронто В. А. [44] Ronto A., Ronto M. [86, 91, 96], Ronto M., Samoilenko A. M. [107], T. Jankowski [68–71], Ronto M., Marynets K. [115, 116], Ronto A., Ronto M., Holubova G., Necesal P. [101], Короля I. I., Перестюка Н. О. [14], Короля I. I. [13], Marynets K. [17, 78], Маринець К., Варга Я. [18].

Метод успішно застосовується і розвивається також у випадку крайових задач для функціонально–диференціальних рівнянь в статтях Ronto A., Ronto M. [87, 88, 92, 99, 103], Ronto A., Ronto M., Shchobak N. [102], Augustynowicz A., Kwapisz M. [50].

Слід зазначити, що література по крайовим задачам для систем диференціальних рівнянь вигляду (1.1) у випадку інтегральних умов не дуже обширна. Вивчаються тільки задачі у часткових випадках, наприклад [52, 77]. Лише в роботі Ronto M., Marynets K. [119] досліджується інтегральна крайова задача на $[0, T]$ загального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [0, T], x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

$$Ax(0) + \int_0^T B(s)x(s)ds + Cx(T) = d, \quad (1.19)$$

з виродженою матрицею C спеціальної структури

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & O_{n-p} \end{bmatrix}, \det C_{11} \neq 0$$

де $\det(I_{n-p} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}) \neq 0$.

Використовуючи певну техніку параметризації, інтегральні крайові умови перетворюються в параметризовані лінійні двоточкові, вигляду

$$Ax(0) + C_1x(T) = d - \lambda - \eta, \quad (1.20)$$

де

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

$\det C_1 \neq 0$,

$$\lambda = \int_0^T B(s)x(s)ds = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

$$\eta = \text{col}(0, 0, \dots, 0, \eta_{p+1}, \dots, \eta_n).$$

Далі, для дослідження розв'язку перетвореної крайової задачі (1.18), (1.20) будується послідовність функцій типу (1.17), а потім через розв'язок відповідної „визначальної системи“ алгебраїчних рівнянь робиться повернення до розв'язку (розв'язків) вихідної інтегральної крайової задачі (1.18), (1.19).

Зауважимо, що права частина системи диференціальних рівнянь (1.1) в усіх згаданих вище роботах була визначена, неперервна і локально ліпшицева по другій змінній в обмеженій області

$$(t, x) \in [a, b] \times D,$$

де $D \subset \mathbb{R}^n$ відкрита обмежена область (виняток становлять роботи Т. Janowski, де виконання цих умов вимагалось у всьому просторі \mathbb{R}^n).

І ставилася задача дослідження існування і наближеної побудови таких неперервно диференційовних розв'язків, які належать області D . При цьому передбачалося існування такої непорожньої підмножини $D_\beta \subset D$, всі точки

якої містяться в області D разом зі своїм певним векторним β -околом, що залежить від $f(t, x)$ і заданих крайових умов. При цьому початкові значення всіх можливих розв'язків належать множині D_β , а розв'язки належать області D .

В 2015 р. у роботі Ronto A., Ronto M., Varha J. [105] для дослідження існування і наближеного знаходження розв'язку, у випадку нелокальної крайової задачі загального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t \in [a, b], \quad (1.21)$$

$$\Phi(x) = 0, \quad (1.22)$$

де $\Phi : C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ заданий функціонал (можливо нелінійний), $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ функція, що задовільняє умови Каратеодорі в певній обмеженій області, d — заданий вектор, був запропонований новий більш ефективний і конструктивний чисельно–аналітичний метод. Під розв'язком крайової задачі (1.21), (1.22) розуміється така абсолютно неперервна функція з властивістю (1.22), яка задовольняє на відрізку $[a, b]$ рівняння (1.21) майже всюди.

Вихідними являються дві опуклі обмежені області $D_a, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належать множинам D_a і D_b , відповідно. Будується опукла множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_b, \quad \theta \in [0, 1]$$

і її покомпонентний векторний ρ – окіл

$$D = B(D_{a,b}, \rho), \quad (1.23)$$

причому, вектор ρ в (1.23) вибирається таким, щоб виконувалась нерівність

$$\rho \geq \frac{b - a}{2} \cdot \delta_{[a,b], D}(f), \quad (1.24)$$

де

$$\delta_{[a,b], D}(f) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ess\,sup}_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t, x) - \operatorname{ess\,inf}_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t, x) \right]. \quad (1.25)$$

Локальна ліпшицевість $f(t, x)$ в (1.21) передбачається в області D , яка визначена в (1.23).

Далі, за допомогою параметризації замість заданих крайових умов (1.22) вводяться в розгляд „модельні умови“, які складаються з двох початкових умов

$$x(a) = z, \quad x(b) = \eta,$$

де

$$z = \text{col}(z_1, \dots, z_n), \quad \eta = \text{col}(\eta_1, \dots, \eta_n)$$

і замість (1.21), (1.22) досліджується більш проста „модельна“ задача, яка складається з двох допоміжних задач Коші:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b],$$

$$x(a) = z,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b],$$

$$x(b) = \eta.$$

Для вивчення розв'язків модельної задачі використовується наступна параметризована послідовність функцій, яка визначена на відрізку $t \in [a, b]$:

$$x_0(t, z, \eta) = z + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a} \right] z + \frac{t-a}{b-a} \eta, \quad t \in [a, b],$$

$$x_m(t, z, \eta) = z + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s, z, \eta)) ds -$$

$$- \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x_{m-1}(s, z, \eta)) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z], \quad t \in [a, b], \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

Найдені прості умови збіжності послідовності (1.26) до деякої абсолютно неперервної параметризованої функції $x_\infty(t, z, \eta)$. Показано, що гранична функція буде розв'язком задачі (1.21), (1.22) тоді і тільки тоді, коли параметри z

і η задовільняють наступну систему „визначальних“ алгебраїчних рівнянь

$$\eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds = 0, \quad (1.27)$$

$$\Phi(x_\infty(\cdot, z, \eta)) = 0. \quad (1.28)$$

Таким чином, у випадку будь-яких коректно поставлених лінійних, нелінійних багатоточкових, інтегральних або функціональних крайових умов завжди використовується послідовність функцій одного і того же вигляду (1.26). А конкретний вигляд крайових умов слід врахувати лише в (1.28).

Такий підхід успішно застосовується в роботах Ronto M., Varha Y [109, 110, 123], Ronto M., Varha Y., Marynets K. [111].

Висновки до першого розділу

Проведений аналіз основних наукових напрямків і публікацій по чисельно-аналітичним методам дослідження питань існування і наближеної побудови розв'язків нелінійних крайових задач у випадку різноманітних типів багатоточкових і функціональних крайових умов.

Детально аналізуються можливості і складності застосування ряду відомих методів із публікацій вітчизняних і зарубіжних авторів для дослідження розв'язків різних класів нелінійних крайових задач.

Дана дисертація націлена на поповнення і розвиток серії цих досліджень з особливою увагою на конструктивність результатів.

Розділ 2

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Потрібні в подальшому для обґрунтування наших результатів деякі означення та допоміжні твердження, які для зручності наведені нижче.

Означення 2.1. Для будь-якого невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ і точки $z \in \mathbb{R}^n$ під компонентним векторним ρ – околom точки $z \in \mathbb{R}^n$ розуміємо множину

$$B(z, \rho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - z| \leq \rho\}.$$

Аналогічно, для будь-якої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і будь-якого невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ під векторним ρ – околom області Ω розуміємо множину

$$B(\Omega, \rho) = \bigcup_{z \in \Omega} B(z, \rho).$$

Означення 2.2. На основі двох обмежених множин $D_a \subset \mathbb{R}^n$ і $D_b \subset \mathbb{R}^n$ визначимо множину

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_b, \quad \theta \in [0, 1] \quad (2.1)$$

і її векторний ρ – окіл

$$D = B(D_{a,b}, \rho). \quad (2.2)$$

Таким чином, множину $D_{a,b}$ формують всі можливі „відрізки“, що з'єднують точки множин D_a та D_b .

Наведемо одне спеціальне співвідношення між двома вектор-функціями.

Означення 2.3. ([21], Означення 3) Нехай $H \subset \mathbb{R}^p$ деяка непорожня множина. Для будь-якої пари вектор-функцій

$$f_j(x) = \text{col}(f_{j,1}(x), \dots, f_{j,k}(x)) : H \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad j = 1, 2$$

будемо писати, що має місце співвідношення

$$f_1 \triangleright_H f_2$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція $k : H \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, така що

$$f_{1,k(x)} > f_{2,k(x)},$$

для всіх $x \in H$.

Зауважимо, що (2.3) означає, що в кожній точці $x \in H$ принаймні одна з компонент вектора $f_1(x)$, а саме $k(x)$ -ва компонента, більша ніж відповідна компонента вектора $f_2(x)$. Бачимо, що цей номер компоненти залежить від точки x .

Означення 2.4. (Умови Каратеодорі) Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ відкрита множина і $[a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$. Кажемо, що функція $f : [a, b] \times G$ задовольняє умови Каратеодорі на множині $[a, b] \times G$ і записуємо це так $f \in Car([a, b], G)$, якщо виконуються наступні умови:

1. $f(\cdot, x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ вимірна функція для всіх $x \in G$, тобто f є вимірною функцією по змінній t для всіх фіксованих x ;
2. $f(t, \cdot) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервною функцією майже для всіх $t \in [a, b]$, тобто f неперервна по змінній x майже для всіх $t \in [a, b]$;
3. Для будь-якої компактної множини $S \subset G$ функція

$$h_S(t) = \sup \{ \|f(t, x)\| : x \in S \}$$

є інтегрованою по Лебегу на відрізку $[a, b]$, де $\|\cdot\|$ означає норму в просторі \mathbb{R}^n .

В зв'язку з тим, що в дисертаційній роботі досліджується як неперервно диференційовні розв'язки так і абсолютно неперервні розв'язки, корисно навести деякі відомості із їх теорії.

Означення 2.5. (Абсолютно неперервна функція) Функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається абсолютно неперервною на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої скінченної послідовності підінтервалів $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$, таких що

$$\sum_{j=1}^k (y_j - x_j) < \delta,$$

має місце

$$\sum_{j=1}^k |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon.$$

Корисно пам'ятати наступні основні властивості абсолютно неперервних функцій:

- Абсолютно неперервна на інтервалі $[a, b]$ функція f майже всюди диференційовна на $[a, b]$ і її похідна f' інтегровна по Лебегу і для кожного $x \in [a, b]$ справедливо

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

- Ліпшиц-неперервні функції є абсолютно неперервні.
- Абсолютно неперервні функції є рівномірно неперервні, отже і неперервні.
- Якщо функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно неперервна, то вона є функцією обмеженої варіації на $[a, b]$.

Означення 2.6. (Істотний супремум) Істотний супремум, що позначають *ess sup* або *vrai sup* функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ це таке найменше число a , що

$$f(x) < a, x \in X$$

майже всюди (за винятком множини точок міри нуль).

Іншими словами

$$\text{ess sup } f = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\},$$

де μ - міра на множині X .

Аналогічно визначається істотний інфімум:

$$\text{ess inf } f = \sup\{b \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > b\}) = 0\}.$$

Властивість

$$\inf f \leq \text{ess inf } f \leq \text{ess sup } f \leq \sup f.$$

Лема 2.1. ([105], Лема 2) Для будь-якої обмеженої функції $f : [\tau, \tau + I] \rightarrow \mathbb{R}^n$, має місце оцінка

$$\left| \int_{\tau}^t \left[f(\tau) - \frac{1}{I} \int_{\tau}^{\tau+I} f(s) ds \right] d\tau \right| \leq \alpha_1(t, \tau, I) \frac{\operatorname{ess\,sup}_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s) - \operatorname{ess\,inf}_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s)}{2} \quad (2.3)$$

для майже всіх $t \in [\tau, \tau + I]$, де

$$\alpha_1(t, \tau, I) = 2(t - \tau) \left(1 - \frac{t - \tau}{I} \right), \quad |\alpha_1(t, \tau, I)| \leq \frac{I}{2}, \quad t \in [\tau, \tau + I]. \quad (2.4)$$

Лему 2.1 у випадку неперервної функції f можна перефразувати у наступному вигляді.

Лема 2.2. ([21], Лема 1) Для будь-якої неперервної функції $f : [\tau, \tau + I] \rightarrow \mathbb{R}^n$, має місце оцінка

$$\left| \int_{\tau}^t \left[f(\tau) - \frac{1}{I} \int_{\tau}^{\tau+I} f(s) ds \right] d\tau \right| \leq \alpha_1(t, \tau, I) \frac{\max_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s) - \min_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s)}{2} \quad (2.5)$$

для всіх $t \in [\tau, \tau + I]$, де

$$\alpha_1(t, \tau, I) = 2(t - \tau) \left(1 - \frac{t - \tau}{I} \right), \quad |\alpha_1(t, \tau, I)| \leq \frac{I}{2}, \quad t \in [\tau, \tau + I].$$

Лема 2.3. ([100], Лема 3.16) Нехай послідовність неперервних функцій, $\{\alpha_m(t, \tau, I)\}_{m=0}^{\infty}$, для $t \in [\tau, \tau + I]$ визначається рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}(t, \tau, I) = & \left(1 - \frac{t - \tau}{I} \right) \int_{\tau}^t \alpha_m(s, \tau, I) ds + \\ & + \frac{t - \tau}{I} \int_t^{\tau+I} \alpha_m(s, \tau, I) ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де $\alpha_0(t, \tau, I) = 1$, тоді мають місце наступні оцінки для всіх $t \in [\tau, \tau + I]$:

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \leq \frac{10}{9} \left(\frac{3I}{10} \right)^m \alpha_1(t, \tau, I), \quad m \geq 0, \quad (2.7)$$

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \leq \frac{3I}{10} \alpha_m(t, \tau, I), \quad m \geq 2,$$

де $\alpha_1(t, \tau, I)$ задається в (2.4).

Ми використовуємо також поняття топологічної степені Брауера. Спочатку визначимо топологічну степінь Брауера для неперервно диференційовного відображення в скінченно вимірному просторі \mathbb{R}^n .

Для строгого визначення необхідно ввести наступне поняття: нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ відкрита і обмежена множина, $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ неперервне відображення, $f \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n)$ (\bar{G} : замикання множини G). **Множину нулів** відображення f в області \bar{G} позначимо через

$$A_f = \{x \in \bar{G} : f(x) = 0\}.$$

Якщо, крім того, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, то позначимо через

$$Jf(x) = \det f'_x(x)$$

детермінант матриці **Якобі** $f'_x(x)$ відображення f в точці $x \in G$. Точка $x \in G$, де $Jf(x) \neq 0$ називається **регулярною точкою**, а точка $x \in G$, де $Jf(x) = 0$ називається **сингулярною точкою**.

Множину сингулярних точок відображення f позначимо через

$$B_f = \{x \in G : Jf(x) = 0\}.$$

А *нуль* відображення f в G називається невивродженою відповідно вивродженою, якщо вона є регулярною, відповідно, сингулярною точкою f .

Якщо f не має нулів на границі ∂G і якщо кожний нуль f в області D є невивроджений, то f називається **невивродженою**.

Означення 2.7. (Топологічна степінь Брауера для **невивродженого неперервного диференційовного** відображення, ([61], Означення A2.1))

Нехай $f \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ і $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, крім того f є не виродженою, то топологічна степінь Брауера f відносно множини G (і відносно 0) - це ціле число

$$\deg [f, G, 0] = \sum_{x \in A_f} \text{sign } Jf(x) \text{ якщо } A_f \neq \emptyset,$$

$$\deg [f, G, 0] = 0 \text{ якщо } A_f = \emptyset.$$

Введемо поняття топологічної степені Брауера для **загального вигляду** $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ відображення. Нехай f вироджене відображення, тобто

$$A_f \cap B_f \neq \emptyset,$$

і нехай послідовність точок $\{y^k, y^k \notin f(B_f)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$ така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = 0.$$

Існування такої послідовності випливає з Лема Sard ([61], Лема A2.2).

Введемо в розгляд відображення

$$f^k : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f^k(x) = f(x) - y^k.$$

Зрозуміло, що

$$B_{f^k} = B_f \text{ і } A_{f^k} \cap B_{f^k} \neq \emptyset.$$

Означення 2.8. (Топологічна степінь Брауера для **загального вигляду неперервно диференційовного** відображення ([61], Означення A2.2)).

Нехай $f \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ і $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Крім того

$$f(x) \neq 0, \quad x \in \partial G.$$

Тоді, топологічна степінь Брауера f відносно множини G (і відносно 0) - це ціле число

$$\deg [f, G, 0] = \lim_{k \rightarrow \infty} \deg [f^k, G, 0].$$

Зауважимо, що ця границя є цілим числом і не залежить від вигляду послідовності $\{y^k, y^k \notin f(B_f)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$.

Перейдемо до визначення топологічної степені Брауера для **неперервного** відображення. Нехай $f \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ і $g \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ довільне відображення, яке задовольняє нерівність

$$|g(x) - f(x)| \leq \min_{x \in \partial G} |f(x)|. \quad (2.8)$$

Відомо, що за першою теоремою Веєрштраса таке відображення g завжди існує.

Означення 2.9. (Топологічна степінь Брауера для **загального вигляду неперервного** відображення ([61], Означення А2.3)) Нехай відображення $f \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ таке, що $f(x) \neq 0$, $x \in \partial G$.

Тоді топологічна степінь Брауера f відносно множини G (і відносно 0) - це ціле число

$$\deg [f, G, 0] = \deg [f, g, 0], \quad (2.9)$$

де $g \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ довільне відображення, яке задовольняє умову (2.8).

Нам будуть потрібні наступні властивості топологічної степені Брауера.

Теорема 2.1. ([61], Теорема А2.4)

1. Якщо f - тотожне відображення, тобто $f(x) = x$, $x \in G$, то має місце співвідношення

$$\deg [f, G, 0] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \in G, \\ 0, & \text{якщо } 0 \notin G. \end{cases}$$

2. Нехай $f \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ таке відображення, що $f(x) \neq 0$, $x \in \partial G$ і $\deg [f, G, 0] \neq 0$, тоді існує точка $x^0 \in G$ така, що $f(x^0) = 0$.

Теорема 2.2. (Про інваріантність степені Брауера при гомотопії ([61], Теорема А2.5)). Нехай однопараметрична сім'я відображень $f \in C^0([0, 1] \times \overline{G})$ така, що

$$f(\xi, x) \neq 0, \text{ при } \xi \in [0, 1], x \in \partial G.$$

Тоді

$$\deg(f(\xi, x), G, 0) = \text{const}, \text{ для всіх } \xi \in [0, 1].$$

Теорема 2.3. (Теорема Борсука ([61], Теорема A2.12)) Припустимо, що обмежена, відкрита множина G містить початок координат і симетрична відносно нього, тобто з $x \in G$ слідує, що $-x \in G$ і крім того $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ деяка непарна функція, тобто $f(-x) = -f(x)$ для всіх $x \in \overline{G}$ і $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial G$.

Тоді топологічна степінь Брауера $\deg [f, G, 0]$ приймає непарне значення, тобто відмінна від нуля.

Висновки до другого розділу

Наведені основні і допоміжні означення, які надалі використовуються в дисертаційній роботі при переході до так званих умов і задач модельного типу. Сформульовано леми, які необхідні для побудови і доведення рівномірної збіжності послідовності функцій, на основі яких робиться висновок про властивості розв'язків заданих крайових задач.

Дається означення умов Каратеодорі, які необхідні при дослідженні абсолютно неперервних розв'язків. Детально обговорюється поняття топологічної степені Брауера і його основні властивості. Наводяться твердження про інваріантності степені Брауера. Ці знання будуть використані при доведенні достатніх умов розв'язності заданих функціональних та інтегральних крайових задач.

Розділ 3

НОВИЙ ПІДХІД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕЛОКАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

У даному розділі розглядається функціональна крайова задача. Насамперед, здійснюється перехід від функціональних крайових умов до так званих параметризованих умов модельного типу. Для дослідження розв'язків модельної задачі запропоновано підходящу параметризовану чисельно-аналітичну схему, що базується на послідовних наближеннях. Теоретичні викладки продемонстровано на прикладі задачі з нелінійними інтегральними крайовими умовами.

3.1 Постановка функціональної крайової задачі і зведення до модельного типу

Розглянемо функціональну крайову задачу загального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (3.1)$$

$$\Phi(x) = d, \quad (3.2)$$

де $\Phi : C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ заданий функціонал (можливо нелінійний), $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ функція, яка задовольняє умови Каратеодорі (див. Означення 2.4), а також локальній умові Ліпшиця $f \in Lip(K, D)$:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K |u - v| \quad (3.3)$$

у деякій обмеженій області D , d – заданий n -вимірний вектор.

Вихідними є дві опуклі обмежені області $D_a, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b . Будується множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_b, \quad \theta \in [0, 1]$$

і її покомпонентний векторний ρ – окіл (Див. Означення 2.2)

$$D = B(D_{a,b}, \rho),$$

причому вектор ρ в (2.2) вибирається таким, щоб виконувалась покомпонентно нерівність

$$\rho \geq \frac{b-a}{2} \cdot \delta_{[a,b],D}(f), \quad (3.4)$$

де

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ess\,sup}_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t,x) - \operatorname{ess\,inf}_{(t,x) \in [a,b] \times D} f(t,x) \right] \quad (3.5)$$

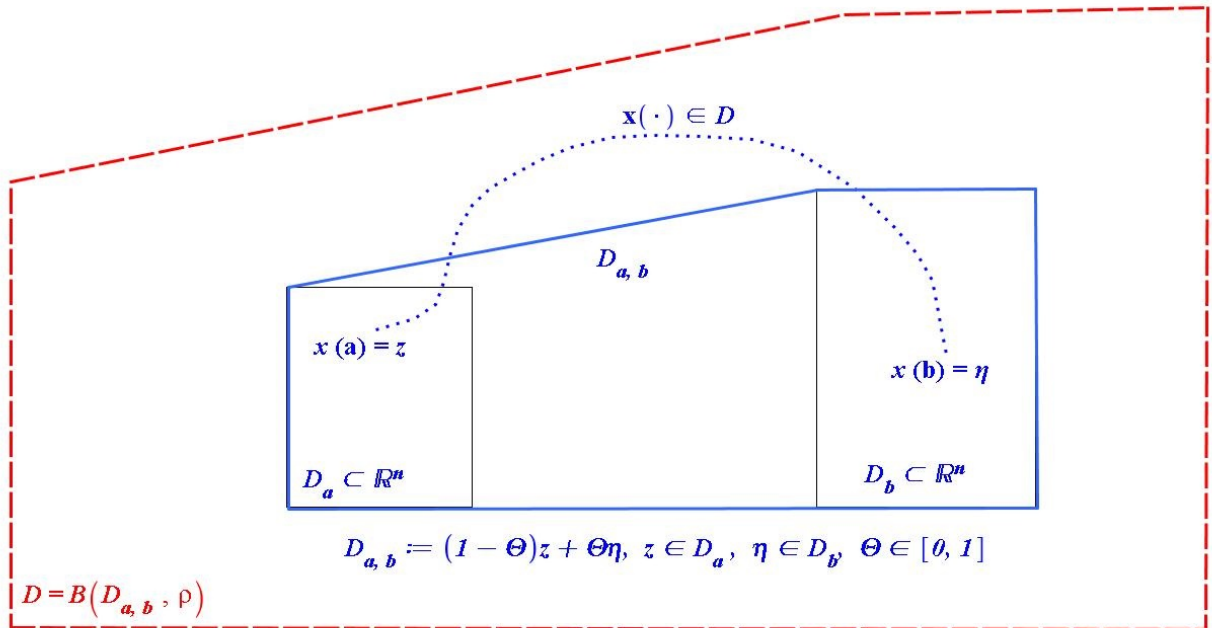
і для максимального по модулю власного значення матриці

$$Q = \frac{3(b-a)}{10} K \quad (3.6)$$

виконується

$$r(Q) < 1. \quad (3.7)$$

На наведеному нище малюнку показано взаємозв'язок областей $D_a, D_b, D_{a,b}, D$.



Локальна ліпшицевість $f \in Lip(K, D)$ для правої частини $f(t, x)$ в (3.1) припускається в області D , яка задається в (2.2).

Під розв'язком задачі розуміємо таку абсолютно неперервну функцію з властивістю (3.2), яка задовольняє систему рівнянь (3.1) майже всюди на відрізку $[a, b]$.

Насамперед, для спрощення, від (3.1), (3.2) перейдемо до сімейства більш простих допоміжних модельних задач. За допомогою параметризації замість заданих функціональних крайових умов (3.2) вводяться в розгляд „модельні умови“

$$x(a) = z, \quad x(b) = \eta, \quad (3.8)$$

де

$$z = \text{col}(z_1, \dots, z_n), \quad \eta = \text{col}(\eta_1, \dots, \eta_n)$$

і замість заданої задачі (3.1), (3.2) досліджується сімейство більш простих „модельних“ параметризованих задач Коші:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (3.9)$$

$$x(a) = z,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (3.10)$$

$$x(b) = \eta.$$

Зауважимо, що інтегрування задач (3.9) відбувається з ліва на право, а в (3.10) з права на ліво.

3.2 Дослідження задачі модельного типу

Для одночасного вивчення розв'язків двох початкових задач, які входять до модельної параметризованої задачі (3.9)–(3.10) введемо в розгляд одну і ту ж параметризовану послідовність функцій

$$\begin{aligned} x_m(t, z, \eta) = z + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s, z, \eta)) ds - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x_{m-1}(s, z, \eta)) ds + \\ + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z], \quad t \in [a, b], \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

яка задовольняє початкові умови $x(a) = z$, $x(b) = \eta$ для всіх $z, \eta \in \mathbb{R}^n$, де

$$x_0(t, z, \eta) = z + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a} \right] z + \frac{t-a}{b-a} \eta, \quad t \in [a, b],$$

де $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ вважаються параметрами.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (3.11) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 3.1. *Припустимо, що існує невід'ємний вектор ρ з властивістю (3.4) і $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функція, що задовольняє умови Каратеодорі і є локально ліпшицевою: $f \in Lip(K, D)$ в області D вигляду (2.2) з матрицею K для якої*

$$r(Q) < 1, \quad Q = \frac{3(b-a)}{10} K. \quad (3.12)$$

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z, \eta) \in D_a \times D_b$:

1. *Всі функції послідовності (3.11) є абсолютно неперервними на відрізку $t \in [a, b]$ мають значення в області D і задовольняють умовам (3.8).*

2. *Послідовність функцій (3.11) рівномірно збігається відносно $t \in [a, b]$ при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції*

$$x_\infty(t, z, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z, \eta). \quad (3.13)$$

3. *Гранична функція задовольняє умови:*

$$x_\infty(a, z, \eta) = z, \quad x_\infty(b, z, \eta) = \eta.$$

4. *Функція $x_\infty(t, z, \eta)$ є єдиним абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int_a^t f(s, x(s)) ds - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x(s)) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z]. \quad (3.14)$$

Іншими словами, $x_\infty(t, z, \eta)$ задовольняє задачу Коші для модифікованої си-

стеми диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{1}{b-a} \Delta(z, \eta), \quad (3.15)$$

$$x(a) = z, \quad (3.16)$$

де $\Delta(z, \eta) : D_a \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ відображення, яке визначене формулою:

$$\Delta(z, \eta) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds. \quad (3.17)$$

5. Справедлива оцінка

$$\begin{aligned} |x_\infty(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| &\leq \\ &\leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b-a) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \end{aligned} \quad (3.18)$$

для будь-якого $t \in [a, b]$ і $m \geq 0$, де $\delta_{[a,b],D}(f)$ задається формулою (3.5) і

$$\alpha_1(t, a, b-a) = 2(t-a) \left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right)$$

визначається (2.4), для якого

$$\alpha_1(t, a, b-a) \leq \frac{b-a}{2}.$$

Доведення. Справедливість твердження 1 перевіряється прямим обчисленням. Аналогічно [105] доведемо, що при умовах теореми для фіксованих $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ і $t \in [a, b]$, послідовність функцій (3.11) належить області D і є послідовністю Коші у банаховому просторі $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ з стандартною рівномірною нормою.

Дійсно, з використанням оцінки (2.3) з Лема 2.1 для $\tau = a$, $I = b - a$, співвідношення (3.11) при $m = 0$, $t \in [a, b]$ впливає що

$$|x_1(t, z, \eta) - x_0(t, z, \eta)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}\alpha_1(t, a, b - a) \left[\operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} f(t, x_0(t, z, \eta)) - \operatorname{ess\,inf}_{t \in [a, b]} f(t, x_0(t, z, \eta)) \right] \\ &\leq \alpha_1(t, a, b - a)\delta_{[a, b], D}(f) \leq \frac{b - a}{2}\delta_{[a, b], D}(f), \end{aligned} \quad (3.19)$$

приходимо до висновку, що $x_1(t, z, \eta) \in D$, при $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_b$.

Використовуючи це і міркуючи за індукцією згідно Лема 2.1 легко встановити, що

$$|x_m(t, z, \eta) - x_0(t, z, \eta)| \leq \alpha_1(t, a, b - a)\delta_{[a, b], D}(f) \leq \frac{b - a}{2}\delta_{[a, b], D}(f), \quad m = 2, 3, \dots,$$

це означає, що всі функції послідовності (3.11) містяться в області D , для всіх $m = 1, 2, 3, \dots$ та $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_b$.

Розглянемо різницю функцій

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta) &= \\ &= \int_a^t [f(s, x_m(s, z, \eta)) - f(s, x_{m-1}(s, z, \eta))] ds - \\ &- \frac{t - a}{b - a} \int_a^b [f(s, x_m(s, z, \eta)) - f(s, x_{m-1}(s, z, \eta))] ds, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

і введемо позначення

$$r_m(t, z, \eta) = |x_m(t, z, \eta) - x_{m-1}(t, z, \eta)|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Відповідно до рекурентного співвідношення (2.6) Лема 2.3, використовуючи умову Ліпшиця (3.3) і умову (2.7), для $m = 1$ з (3.20) і (3.19) випливає, що

$$\begin{aligned} &r_2(t, z, \eta) \leq \\ &\leq K \left[\left(1 - \frac{t - a}{b - a}\right) \int_a^t \alpha_1(s, a, b - a) ds + \frac{t - a}{b - a} \int_t^b \alpha_1(s, a, b - a) ds \right] \delta_{[a, b], D}(f) \leq \end{aligned}$$

$$\leq K\alpha_2(t, a, b - a)\delta_{[a,b],D}(f) \leq \frac{10}{9}Q\alpha_1(t, a, b - a)\delta_{[a,b],D}(f),$$

де матриця Q має вигляд (3.6). За індукцією легко встановити, що

$$r_{m+1}(t, z, \eta) \leq K^m\alpha_{m+1}(t, a, b - a)\delta_{[a,b],D}(f) \leq \frac{10}{9}Q^m\alpha_1(t, a, b - a)\delta_{[a,b],D}(f),$$

Таким чином, з урахуванням останньої нерівності

$$|x_{m+j}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| \leq \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} &\leq |x_{m+j}(t, z, \eta) - x_{m+j-1}(t, z, \eta)| + |x_{m+j-1}(t, z, \eta) - x_{m+j-2}(t, z, \eta)| + \dots + \\ &\quad + |x_{m+1}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| = \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t, z, \eta) \leq \\ &\leq \frac{10}{9}\alpha_1(t, a, b - a) \sum_{i=1}^j Q^{m+i-1}\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{10}{9}\alpha_1(t, a, b - a)Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i\delta_{[a,b],D}(f), \end{aligned}$$

де $\delta_{[a,b],D}(f)$ має вигляд (3.5). Оскільки, максимальне власне значення матриці Q вигляду (3.6) не перевищує одиницю, то

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (I_n - Q)^{-1}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0_n.$$

Таким чином, згідно з критерієм Коші, з нерівності (3.21) випливає що, послідовність функцій $\{x_m(t, z, \eta)\}_{m=0}^{\infty}$ вигляду (3.11) рівномірно збігається в області $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_b$ до граничної функції $x_{\infty}(t, z, \eta)$.

Так як всі функції послідовності (3.11) задовольняють умови $x_m(a, z, \eta) = z$, $x_m(b, z, \eta) = \eta$ для всіх значень введених параметрів $z \in D_a$, $\eta \in D_b$, можна зробити висновок, що гранична функція $x_{\infty}(t, z, \eta)$ також їх задовольняє. Перейшовши у рівності (3.11) до границі при $m \rightarrow \infty$ отримаємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (3.14) або що те ж саме є розв'язком задачі Коші (3.15), (3.16), де $\Delta(z, \eta)$ задається формулою (3.17). При переході до границі при $j \rightarrow \infty$ у (3.21) отримаємо оцінку (3.18), що і завершує доведення.

□

3.3 Зв'язок граничної функції $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ з розв'язком функціональної крайової задачі

Поряд із системою (3.1) розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{1}{b-a}\mu, \quad t \in [a, b], \quad (3.22)$$

з початковою умовою

$$x(a) = z, \quad (3.23)$$

де $\mu = \text{col}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ є керуючим параметром.

Теорема 3.2. *Нехай $z \in D_a$ і $\eta \in D_b$ – довільно задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (3.1) мають місце умови Теорему 3.1.*

Тоді для того, щоб розв'язок $x(\cdot, a, z)$ задачі Коші (3.22), (3.23) задовольняв також і умову $x(b, a, z) = \eta$, необхідно і достатньо, щоб параметр μ був заданий рівністю

$$\mu = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds, \quad (3.24)$$

де $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ – гранична функція послідовності (3.11). Крім того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty(\cdot, z, \eta). \quad (3.25)$$

Доведення. Достатність. Нехай у правій частині системи диференціальних рівнянь μ в (3.22) має вигляд (3.24). З Теорему 3.1 випливає, що гранична функція $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ послідовності (3.11), яка задовольняє параметризовані умови (3.8), є єдиним розв'язком задачі (3.15), (3.16), де $\Delta(z, \eta) = \mu$ дається формулою (3.24), тобто є розв'язком задачі Коші (3.22), (3.23) при μ , яке задається формулою (3.24).

Таким чином, знайдено значення μ вигляду (3.24), для якого має місце (3.25).

Необхідність. Покажемо, що значення параметра μ (3.24) єдине, оскільки для будь-яких інших

$$\mu = \tilde{\mu} \neq \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds \quad (3.26)$$

розв'язок $\tilde{x}(\cdot, a, z)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{1}{b-a} \tilde{\mu}, \quad t \in [a, b], \quad (3.27)$$

з початковою умовою

$$x(a) = z, \quad (3.28)$$

не задовольняє умову $x(b) = \eta$.

Припустимо супротивне, що розв'язок $\tilde{x}(\cdot, a, z)$ початкової задачі (3.27), (3.28) задовольняє крайові умови (3.10). Як видно з (3.22), (3.23) і з (3.24) та (3.27), (3.28), що функції $x(\cdot, a, z)$ і $\tilde{x}(\cdot, a, z)$ задовольняють інтегральні рівняння Вольтера

$$x(t, a, z) = z + \int_a^t f(s, x(s, a, z)) ds + \mu \frac{t-a}{b-a}, \quad t \in [a, b] \quad (3.29)$$

і

$$\tilde{x}(t, a, z) = z + \int_a^t f(s, \tilde{x}(s, a, z)) ds + \tilde{\mu} \frac{t-a}{b-a}, \quad t \in [a, b]. \quad (3.30)$$

За припущенням, функції $x(\cdot, a, z)$, $\tilde{x}(\cdot, a, z)$ задовольняють умови (3.8)

$$\begin{aligned} x(a, a, z) &= z, \quad \tilde{x}(a, a, z) = z, \\ x(b, a, z) &= \eta, \quad \tilde{x}(b, a, z) = \eta. \end{aligned} \quad (3.31)$$

На основі (3.29), (3.30), (3.31) при $t = b$ маємо

$$\mu = \eta - z - \int_a^b f(s, x(s, a, z)) ds, \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mu} = \eta - z - \int_a^b f(s, \tilde{x}(s, a, z)) ds. \quad (3.33)$$

Підставивши (3.32), (3.33) в інтегральні рівняння (3.29), (3.30), одержуємо, що для всіх $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} x(t, a, z) = & z + \int_a^t f(s, x(s, a, z)) ds - \\ & - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x(s, a, z)) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t, a, z) = & z + \int_a^t f(s, \tilde{x}(s, a, z)) ds - \\ & - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, \tilde{x}(s, a, z)) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Так як $z \in D_a$ and $\eta \in D_b$, то аналогічно доведенню Теорема 3.1, виходячи з вигляду рівнянь (3.34), (3.35) та визначення множини D і вектора $\delta_{[a,b],D}(f)$ відповідно, в (2.2) та (3.5), можна показати, що всі значення функцій $x(\cdot, a, z)$, $\tilde{x}(\cdot, a, z)$ містяться в області D . Із співвідношення (3.34), (3.35) очевидно, що

$$\begin{aligned} x(t, a, z) - \tilde{x}(t, a, z) = & \int_a^t [f(s, x(s, a, z)) - f(s, \tilde{x}(s, a, z))] ds - \\ & - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b [f(s, x(s, a, z)) - f(s, \tilde{x}(s, a, z))] ds, \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

З формули (3.36), з урахуванням умови Ліпшиця (3.3), маємо, що функція

$$\omega(t) = |x(t, a, z) - \tilde{x}(t, a, z)| \quad (3.37)$$

задовольняє інтегральну нерівність

$$\begin{aligned}\omega(t) &\leq K \left[\int_a^t \omega(s) ds + \frac{t-a}{b-a} \int_a^b \omega(s) ds \right] \leq \\ &\leq K\alpha_1(t, a, b-a) \max_{s \in [a, b]} \omega(s), \quad t \in [a, b],\end{aligned}\quad (3.38)$$

де $\alpha_1(t, a, b-a)$ має вигляд (2.4). Використовуючи (3.38) рекурентно, приходимо до нерівності

$$\omega(t) \leq K^{m+1} \alpha_{m+1}(t, a, b-a), \max_{s \in [a, b]} \omega(s), \quad t \in [a, b], \quad (3.39)$$

де $m \in \mathbb{N}$ довільне натуральне число, а функції $\alpha_{m+1}(t, a, b-a)$, $m \geq 1$ задаються за допомогою співвідношення (3.14), де $\tau = a$, $I = b-a$. З урахуванням оцінок (2.7), з нерівності (3.39) для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\omega(t) \leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b-a) K \left(\frac{3(b-a)}{10} K \right)^m \max_{s \in [a, b]} \omega(s), \quad t \in [a, b]. \quad (3.40)$$

Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$ в останній нерівності і в силу (3.12), приходимо до висновку, що

$$\omega(t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Згідно з (3.37), це означає, що функції $x(t, a, z)$ співпадає з функцією $\tilde{x}(t, a, z)$. На основі (3.33) та (3.34) маємо, що

$$\mu = \tilde{\mu} = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми. □

Встановимо зв'язок граничної функції $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ послідовності функцій (3.11) з розв'язком вихідної крайової задачі (3.1), (3.2).

Теорема 3.3. *В умовах Теорему 3.1 гранична функція*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z^*, \eta^*) \quad (3.41)$$

послідовності (3.11) є абсолютно неперервним розв'язком функціональної крайової задачі (3.1), (3.2) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) задовольняє систему $2n$ алгебраїчних визначальних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta(z, \eta) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds = 0, \\ \Lambda(z, \eta) &= \Phi(x_\infty(\cdot, z, \eta)) - d = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Доведення. Для доведення достатньо застосувати Теорему 3.2 і зауважити, що диференціальне рівняння (3.15) співпадає з (3.1) тоді і тільки тоді коли (z^*, η^*) задовольняє рівняння:

$$\Delta(z^*, \eta^*) = \eta^* - z^* - \int_a^b f(s, x_\infty(z^*, \eta^*)) ds = 0.$$

Очевидно, що гранична функція $x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)$ збігається з розв'язком функціональної крайової задачі (3.1), (3.2) тоді і тільки тоді, коли $x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)$ задовольняє рівняння:

$$\Phi(x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)) = d.$$

Це означає, що гранична функція $x_\infty(z^*, \eta^*)$ є розв'язком функціональної крайової задачі (3.1), (3.2) тоді і тільки тоді, коли виконуться (3.42). Останнє твердження і доводить теорему. \square

Покажемо, що система визначальних рівнянь (3.42) виявляє всі можливі розв'язки вихідної функціональної крайової задачі (3.1), (3.2).

Теорема 3.4. *Нехай виконуються всі умови Теорему 3.1. Крім того, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (3.42), тоді функціональна крайова задача (3.1), (3.2) має розв'язок $x^0(\cdot)$ такий, що*

$$x^0(a) = z^0, x^0(b) = \eta^0$$

i

$$\Phi(x^0(\cdot)) = d, \quad (3.43)$$

крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (3.11):

$$x^0(t) = x_\infty(t, z^0, \eta^0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(\cdot, z^0, \eta^0), \quad t \in [a, b]. \quad (3.44)$$

І навпаки, якщо функціональна крайова задача (3.1), (3.2) має розв'язок $x^0(\cdot)$, то система визначальних рівнянь (3.42) задовольняється при

$$z = x^0(a), \quad \eta = x^0(b). \quad (3.45)$$

Доведення. Якщо існує пара $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$, яка задовольняє систему визначальних рівнянь (3.43), то на основі Теорема 3.3 функція (3.44) є розв'язком вихідної функціональної крайової задачі (3.1), (3.2).

З іншого боку, якщо $x^0(\cdot)$ є розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2), то ця функція є розв'язком задачі Коші (3.22), (3.23) при

$$\mu = 0 \text{ і } z = x^0(a).$$

Так як $x^0(\cdot)$ задовольняє функціональні крайові умови (3.2) тоді з Теорема 3.3 в силу рівності (3.42) випливає, що має місце рівність (3.44).

Крім того,

$$\mu = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds = 0, \quad (3.46)$$

де пара векторів (z, η) визначаються співвідношенням (3.45). З (3.46) маємо, що перше рівняння визначальної системи (3.42) виконуться, якщо (z, η) визначається згідно з (3.45). З використанням крайових умов (3.2), отримуємо, що друге рівняння (3.42) визначальної системи також має місце.

Таким чином ми визначили в (3.45) такі значення (z, η) які задовольняють систему визначальних рівнянь (3.42), що і доводить теорему. □

Для дослідження розв'язності визначальної системи (3.42) аналогічно [87] можна вивчати наближену визначальну систему

$$\begin{aligned}\Delta_m(z, \eta) &:= \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s, z, \eta)) ds = 0, \\ \Phi(x_m(\cdot, z, \eta)) - d &= 0,\end{aligned}\tag{3.47}$$

яка може бути побудована явно.

3.4 Приклад з нелінійними інтегральними крайовими умовами та двома розв'язками

Застосуємо чисельно-аналітичний підхід, описаний вище для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^2(t) - \frac{t}{5}x_1(t) + \frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{25} := f_1(t, x_1, x_2), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_2'(t) = \frac{t^2}{10}x_2(t) + \frac{t}{8}x_1(t) - \frac{21}{800}t^3 + \frac{1}{16}t + \frac{1}{5} := f_2(t, x_1, x_2), \end{cases}\tag{3.48}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{1}{2}} s x_1(s) x_2(s) ds = -\frac{197}{48000}, \\ \int_0^{\frac{1}{2}} s^2 x_2^2(s) ds = \frac{1}{4000}, \end{cases}\tag{3.49}$$

де

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -197/48000 \\ 1/4000 \end{bmatrix}.$$

Можна перевірити, що один з розв'язків задачі (3.48), (3.49) має вигляд:

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{5}.\tag{3.50}$$

Виходячи з (3.8), введемо наступні параметри:

$$\begin{aligned}z &:= x(0) = \text{col}(x_1(0), x_2(0)) = \text{col}(z_1, z_2), \\ \eta &:= x\left(\frac{1}{2}\right) = \text{col}\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \text{col}(\eta_1, \eta_2).\end{aligned}$$

Нехай опуклі підмножини D_a і D_b , де шукаємо значення розв'язку $x(a)$ та $x(b)$, мають вигляд:

$$D_a = D_b = \{(x_1, x_2) : -0.55 \leq x_1 \leq 0.45, -0.2 \leq x_2 \leq 0.15\}.$$

У цьому випадку

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

У нерівності (3.4) виберемо

$$\rho = \text{col}(0.2; 0.2).$$

Отже, ρ -окіл $D = B(D_{a,b}, \rho)$ дається наступним чином

$$D = \{(x_1, x_2) : -0.75 \leq x_1 \leq 0.65, -0.4 \leq x_2 \leq 0.35\}. \quad (3.51)$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (3.3) для правої частини (3.48) в області D виконується з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 1/10 & 9/10 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix}$$

і маємо

$$Q = \frac{3}{20} \begin{bmatrix} 1/10 & 9/10 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix}, \quad r(Q) = 0.045 < 1,$$

$$\delta_{[a,b],D}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D} f(t, x) \right] = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.053125 \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{2} \delta_{[a,b],D}(f) = \begin{bmatrix} 0.0375 \\ 0.01328125 \end{bmatrix}.$$

Так, ми перевірили, що всі умови Теорема 3.1 виконуються і тому послідовність функцій (3.11) для цього прикладу є збіжною.

На першому кроці ($m = 1$) на основі послідовних наближень (3.11), використовуючи пакет символної математики Maple отримаємо для першої і другої

	m=0	m=1	m=2	m=3
z_1	-0.5018743329	-0.5000145056	-0.4999999582	-0.4999999993
z_2	$-2.568969 \cdot 10^{-6}$	$-5.7500267 \cdot 10^{-7}$	$-1.1456853 \cdot 10^{-8}$	$-9.745268634 \cdot 10^{-11}$
η_1	-0.4893794933	-0.4875143149	-0.4874999580	-0.4874999992
η_2	0.1000006422	0.1000004007	0.09999998851	0.09999999995

Табл. 3.1: Наближені значення параметрів для першого (3.50) розв'язку

КОМПОНЕНТ наступні результати:

$$\begin{aligned}
x_{11}(t, z, \eta) &= z_1 + \frac{1}{400}t^4 + \frac{1}{3} \left((-2z_2 + 2\eta_2)^2 + \frac{2}{5}z_1 - \frac{2}{5}\eta_1 - \frac{1}{25} \right) t^3 + \\
&+ \frac{1}{2} \left(2z_2(-2z_2 + 2\eta_2) - \frac{1}{5}z_1 \right) t^2 + z_2^2 t - \\
&- 2t \left(-\frac{29}{19200} + \frac{1}{24}(-2z_2 + 2\eta_2)^2 - \frac{1}{200}z_1 - \frac{1}{60}\eta_1 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4}z_2(-2z_2 + 2\eta_2) + \frac{1}{2}z_2^2 \right) + 2t(\eta_1 - z_1), \\
x_{12}(t, z, \eta) &= z_2 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{5}z_2 + \frac{1}{5}\eta_2 - \frac{21}{800} \right) t^4 + \\
&+ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}z_1 + \frac{1}{4}\eta_1 + \frac{1}{10}z_2 \right) t^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}z_1 + \frac{1}{16} \right) t^2 - \\
&- 2t \left(\frac{5499}{51200} + \frac{1}{960}z_2 + \frac{1}{320}\eta_2 + \frac{1}{192}z_1 + \frac{1}{96}\eta_1 \right) + 2t(\eta_2 - z_2).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Чисельні розрахунки показують, що розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь вигляду (3.47) при $m = 0, 1, 2, 3$ є числові значення, що представлені в Табл. 3.1.

Підставивши значення другого стовпчику Табл. 3.1. в (3.52), отримаємо перше наближення, першої та другої компонент відповідно, до розв'язку крайової задачі (3.48), (3.49):

$$\begin{aligned}
x_{11}(t) &= -0.5000145056 + \frac{1}{400}t^4 - 0.001666738533t^3 + \\
&+ 0.0500015655t^2 + 0.00010378326t, \\
x_{12}(t) &= 5.750026703 \cdot 10^{-7} + 0.1999349926t - 0.001562508715t^4 + \\
&+ 0.001041701733t^3 - 9.066000000 \cdot 10^{-7}t^2.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Максимальне відхилення компонент першого (3.50) та наближеного (3.53) розв'язків:

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \leq 2 \cdot 10^{-5},$$

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \leq 6 \cdot 10^{-6}.$$

Похибка другої апроксимації ($m = 2$) є наступною:

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{21}(t)| \leq 6 \cdot 10^{-8},$$

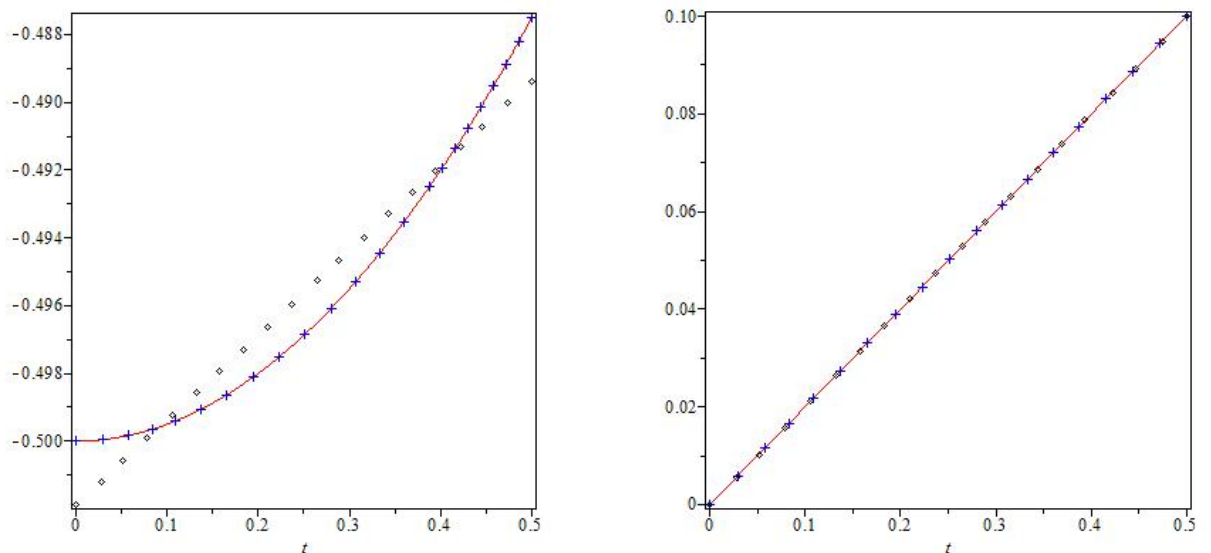
$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{22}(t)| \leq 1.5 \cdot 10^{-8}.$$

Похибка третьої апроксимації ($m = 3$):

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \leq 8 \cdot 10^{-10},$$

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \leq 1.5 \cdot 10^{-10}.$$

На Рис. 3.1 зображено графіки компонент першого (3.50) та наближеного розв'язків на нульовій і третій ітерації.



а) перша компонента

б) друга компонента

Рис. 3.1: Перший розв'язок (3.50) (лінія) та його нульове (\diamond) і третє наближення (\times).

Згідно Теорем 3.3 і 3.4 число розв'язків алгебраїчної визначальної системи

	m=0	m=1	m=2	m=3
\tilde{z}_1	0.3954059502	0.3923536713	0.3923271761	0.3923269704
\tilde{z}_2	-0.1592025648	-0.1570525052	-0.1570509845	-0.1570509371
$\tilde{\eta}_1$	0.389899163	0.386849396	0.3868231849	0.3868229825
$\tilde{\eta}_2$	-0.0459889168	-0.04383992217	-0.04383842530	-0.04383837835

Табл. 3.2: Наближені значення параметрів для другого розв'язку КЗ

(3.47) співпадає з числом розв'язків даної функціональної крайової задачі.

Розрахунки показують, що система наближених визначальних алгебраїчних рівнянь (3.47) при $m = 0, 1, 2, 3$ окрім розв'язків представлених в Табл. 3.1. має ще інші розв'язки, які наведено в Табл. 3.2.

При $m = 1$ отримаємо перше наближення до другого розв'язку даної крайової задачі (3.48), (3.49):

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{11}(t) &= 0.3923536713 + \frac{1}{400}t^4 + 0.004490021967t^3 - 0.07479600670t^2 + \\ &\quad + 0.02495444725t, \\ \tilde{x}_{12}(t) &= -0.1570525052 + 0.2000752910t - 0.0009018708475t^4 - \\ &\quad - 0.005693773113t^3 + 0.05577210445t^2.\end{aligned}$$

За аналогією отримано третє наближення ($m = 3$) до другого розв'язку:

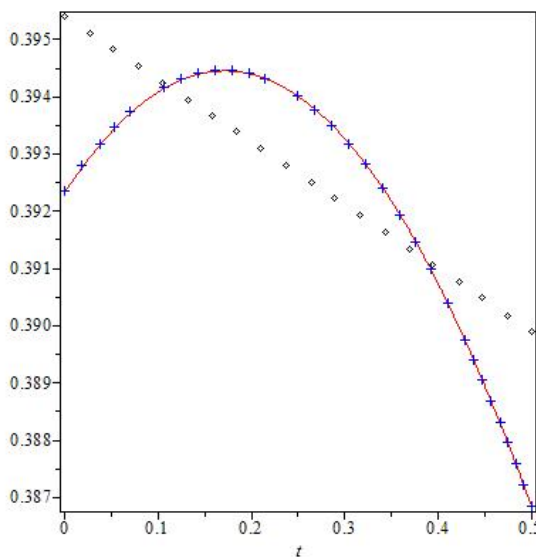
$$\begin{aligned}\tilde{x}_{31}(t) &= 0.3923269706 + 1.106630226 \cdot 10^{-11}t^{15} + 7.879714253 \cdot 10^{-11}t^{14} - \\ &\quad - 2.29239859 \cdot 10^{-9}t^{13} - 3.89699425 \cdot 10^{-10}t^{12} + 1.7553837 \cdot 10^{-7}t^{11} - \\ &\quad - 0.000001090513960t^{10} - 3.431360411 \cdot 10^{-7}t^9 - 0.00002580341034t^8 + \\ &\quad + 0.00001123554886t^7 - 0.0008109829273t^6 + 0.0008310140856t^5 + \\ &\quad + 0.00033996448t^5 + 0.00634405846t^4 - 0.00149463484t^3 - \\ &\quad - 0.06940774540t^2 + 0.02241968655t + 0.01193924453t^4 - \\ &\quad - 0.007483401567t^3 - 0.07064300545t^2 + 0.02466500215t, \\ \tilde{x}_{32}(t) &= -0.1570509371 + 0.2000000050t + 1.026986386 \cdot 10^{-9}t^{11} - \\ &\quad - 1.127920340 \cdot 10^{-7}t^{10} - 6.109572563 \cdot 10^{-7}t^9 + 0.00001144998193t^8 - \\ &\quad - 0.00005490798177t^7 + 0.0001856181722t^6 + 0.0009280931090t^5 - \\ &\quad - 0.003770444160t^4 - 0.004207340707t^3 + 0.05577043565t^2.\end{aligned}$$

Підставивши третє наближення $\tilde{x}_3(t) = \text{col}(\tilde{x}_{31}(t), \tilde{x}_{32}(t))$ в систему диференціальних рівнянь (3.48) отримаємо наступну нев'язку:

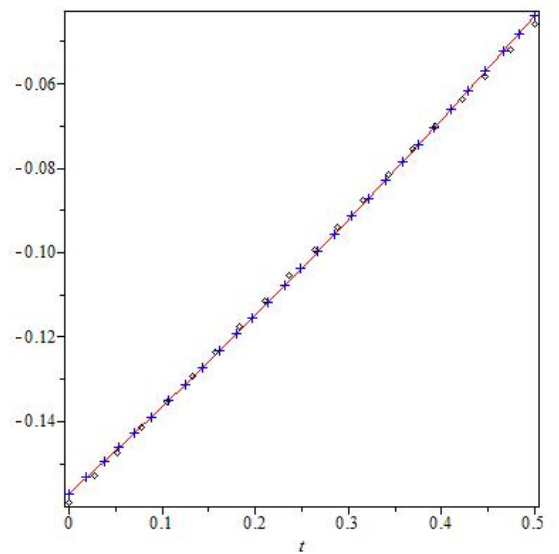
$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \tilde{x}'_{31}(t) - \tilde{x}_{32}^2(t) + \frac{t}{5} \tilde{x}_{31}(t) - \frac{t^3}{100} + \frac{t^2}{25} \right| \approx 1.530806 \cdot 10^{-9},$$

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \tilde{x}'_{32}(t) - \frac{t^2}{10} \tilde{x}_{32}(t) - \frac{t}{8} \tilde{x}_{31}(t) + \frac{21}{800} t^3 - \frac{1}{16} t - \frac{1}{5} \right| \approx 9.9868 \cdot 10^{-11}.$$

На Рис. 3.2 показано графіки нульового, першого та третього наближення до другого розв'язку КЗ.



а) перша компонента



б) друга компонента

Рис. 3.2: Нульове (\diamond), перше (\times) та третє (лінія) наближення другого розв'язку.

Висновки до третього розділу

Досліджено розв'язки функціональної крайової задачі у випадку, коли права частина системи нелінійних диференціальних рівнянь є локально ліпшицевою та задовольняє умови Каратеодорі, а крайові умови задані нелінійним функціоналом загального вигляду. Здійснюється перехід від функціональних крайових умов до так званих параметризованих умов модельного типу (3.8), які мають простий вигляд початкових умов. Для дослідження розв'язків модельної задачі (3.9)–(3.10) запропоновано підходящу параметризовану чисельно–аналітичну схему, що базується на послідовних наближеннях. Доведена рівномірна збіжність побудованої параметризованої послідовності функцій до граничної, яка при певних значеннях параметрів приводить до абсолютно неперервного розв'язку вихідної функціональної крайової задачі. Також доведено теорему про керуючий параметр та відношення граничної функції до розв'язку вихідної крайової задачі. Теоретичні викладки продемонстровано на прикладі задачі з нелійними інтегральними крайовими умовами і знайдено два розв'язки. Основні результати опубліковано у роботі [105].

Розділ 4

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Досліджуються розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь (3.1) з нелінійними інтегральними крайовими умовами, які залежать і від похідної. Встановлено умови розв'язності, а також обґрунтована схема наближеної побудови розв'язків. Конструктивність методу продемонстрована на прикладах крайових задач з двома розв'язками.

4.1 Постановка інтегральної крайової задачі та зведення до модельного типу

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь (3.1), підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$\int_a^b [g(s, x(s)) + h(s, x'(s))] ds = d. \quad (4.1)$$

Нехай області D_a і D_b – опуклі підмножини \mathbb{R}^n , де шукаємо значення $x(a)$, $x(b)$ розв'язку крайової задачі (3.1), (4.1) відповідно. На основі областей D_a і D_b введемо область $D_{a,b}$ відповідно до (2.1) і її покомпонентний ρ -окіл як і в (2.2). Таким чином, область D визначається відповідно до (2.2).

Припускаємо, що функції $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ і $h : [a, b] \times D' \rightarrow \mathbb{R}^n$ задовольняють умови Каратеодорі, де $D' := \{f(t, x) : t \in [a, b], x \in D\}$. Нехай, крім того $f \in Lip(K, D)$, $g \in Lip(K_g, D)$, $h \in Lip(K_h, D')$ і ρ задовольняє нерівність (3.4), і для максимального по модулю власного значення матриці

$$Q = \frac{3(b-a)}{10} K$$

виконується нерівність

$$r(Q) < 1. \quad (4.2)$$

Задача полягає у знаходженні абсолютно неперервного розв'язку $x : [a, b] \rightarrow$

D задачі (3.1), (4.1) з значеннями $x(a) \in D_a$ і $x(b) \in D_b$.

Покажемо, що замість інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1) доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (3.1) при певних параметризованих модельних умовах вигляду (3.8). Для спрощення інтегральних крайових умов (4.1), аналогічно [90, 104, 112, 115–117, 119] застосуємо певну техніку „заморожування“. А саме, аналогічно як в попередньому розділі вводимо векторні параметри

$$z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

формально поклавши

$$z := x(a), \quad \eta := x(b).$$

І замість вихідної інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1) будемо розглядати задачу „модельного типу“ (3.9)–(3.10).

Зауваження 4.1. Множина розв’язків інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1) співпадає з множиною тих розв’язків задачі (3.9)–(3.10), які задовольняють додатковим умовам (3.8).

4.2 Збіжність послідовних наближень та зв’язок між розв’язками модельної та вихідної задач

Пов’яжемо з задачею модельного типу (3.9)–(3.10) послідовність функцій

$$\begin{aligned} x_m(t, z, \eta) = z + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s, z, \eta)) ds - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x_{m-1}(s, z, \eta)) ds + \\ + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z], \quad t \in [a, b], m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.3)$$

яка задовольняє умови (3.8) для всіх $z, \eta \in \mathbb{R}^n$, де

$$x_0(t, z, \eta) = z + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z] = \left[1 - \frac{t}{b-a} \right] z + \frac{t-a}{b-a} \eta, \quad t \in [a, b], \quad (4.4)$$

де $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ вважаються параметрами.

З формули (4.4) бачимо, що $x_0(t, z, \eta) \in D$ є лінійна комбінація векторів z і η , де $z \in D_a$, $\eta \in D_b$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (4.3) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 4.1. *Припустимо, що існує невід'ємний вектор ρ з властивістю (3.4) і $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функція, що задовольняє умови Каратеодорі і є локально ліпшицевою: $f \in Lip(K, D)$ в області D вигляду (2.2) з матрицею K для якої*

$$r(Q) < 1, \quad Q = \frac{3(b-a)}{10}K. \quad (4.5)$$

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z, \eta) \in D_a \times D_b$:

1. *Всі функції послідовності (4.3) є абсолютно неперервні на відріжку $t \in [a, b]$, мають значення в області D і задовольняють модельним умовам (3.8).*

2. *Послідовність функцій (4.3) рівномірно збігається відносно $t \in [a, b]$ при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції*

$$x_\infty(t, z, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z, \eta). \quad (4.6)$$

3. *Гранична функція задовольняє умови:*

$$x_\infty(a, z, \eta) = z, \quad x_\infty(b, z, \eta) = \eta.$$

4. *Функція $x_\infty(t, z, \eta)$ є єдиним абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int_a^t f(s, x(s))ds - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x(s))ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z]. \quad (4.7)$$

Іншими словами, $x_\infty(t, z, \eta)$ задовольняє задачу Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{1}{b-a} \Delta(z, \eta), \quad (4.8)$$

$$x(a) = z \quad (4.9)$$

де $\Delta(z, \eta) : D_a \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ відображення, визначене формулою:

$$\Delta(z, \eta) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds. \quad (4.10)$$

5. Справедлива оцінка

$$\begin{aligned} |x_\infty(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| &\leq \\ &\leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b-a) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \end{aligned} \quad (4.11)$$

для будь-якого $t \in [a, b]$ і $m \geq 0$, де $\delta_{[a,b],D}(f)$ задається формулою (3.5) і

$$\alpha_1(t, a, b-a) = 2(t-a) \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) \quad (4.12)$$

визначається згідно (2.4), для якого $\alpha_1(t, a, b-a) \leq \frac{b-a}{2}$.

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню Теорема 3.1 з попереднього розділу. \square

Поряд із системою (3.1) розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{1}{b-a} \mu, \quad t \in [a, b], \quad (4.13)$$

з початковою умовою

$$x(a) = z, \quad (4.14)$$

де $\mu = \text{col}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ є керуючим параметром.

Теорема 4.2. *Нехай $z \in D_a$ і $\eta \in D_b$ – довільно задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (3.1) мають місце умови Теорема 4.1.*

Тоді для того, щоб розв'язок $x(\cdot, a, z)$ задачі Коші (4.13), (4.14) задовольняв також і параметризовані модельні умови (3.8), необхідно і достатньо,

щоб параметр μ був заданий рівністю:

$$\mu = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds, \quad (4.15)$$

де $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ – гранична функція послідовності (4.3). Крім того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty(\cdot, z, \eta). \quad (4.16)$$

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню Теорема 3.2 з попереднього розділу. \square

Встановимо зв'язок граничної функції $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ послідовності функцій (4.3) з розв'язком вихідної крайової задачі (3.1), (4.1).

Теорема 4.3. *В умовах Теорема 4.1 гранична функція*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z^*, \eta^*) \quad (4.17)$$

послідовності (4.3) є абсолютно неперервним розв'язком інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1) тоді і тільки тоді, коли пара (z^, η^*) задовольняє систему $2n$ алгебраїчних визначальних рівнянь*

$$\Delta(z, \eta) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds = 0, \quad (4.18)$$

$$\Lambda(z, \eta) = \int_a^b [g(s, x_\infty(s, z, \eta)) + h(s, f(s, x_\infty(s, z, \eta)))] ds - d = 0. \quad (4.19)$$

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню Теорема 3.3 з попереднього розділу. \square

Покажемо, що система визначальних рівнянь (4.18), (4.19) виявляє всі можливі розв'язки вихідної функціональної крайової задачі (3.1), (4.1).

Теорема 4.4. *Нехай виконуються всі умови Теорема 4.1.*

Крім того, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$ які задовольняють систему визначальних рівнянь (4.18), (4.19), тоді інтегральна крайова задача (3.1), (4.1) має розв'язок $x^0(\cdot)$ такий, що

$$x^0(a) = z^0, x^0(b) = \eta^0$$

і

$$\int_a^b [g(s, x^0(s)) + h(s, f(s, x^0(s)))] ds = d, \quad (4.20)$$

крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (4.3):

$$x^0(t) = x_\infty(t, z^0, \eta^0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z^0, \eta^0), \quad t \in [a, b]. \quad (4.21)$$

І навпаки, якщо інтегральна крайова задача (3.1), (4.1) має розв'язок $x^0(\cdot)$, в області D , то він обов'язково задається формулою (4.21) і система визначальних рівнянь (4.18), (4.19) задовольняється при

$$z = x^0(a), \eta = x^0(b). \quad (4.22)$$

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню Теорема 3.4. \square

4.3 Дослідження розв'язності на основі наближеної системи визначальних рівнянь

Розв'язність точної системи визначальних алгебраїчних рівнянь (4.18), (4.19) може бути досліджена на основі так званої, *наближеної системи визначальних рівнянь*

$$\Delta_m(z, \eta) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s, z, \eta)) ds = 0, \quad (4.23)$$

$$\Lambda_m(z, \eta) = \int_a^b [g(s, x_m(s, z, \eta)) + h(s, f(s, x_m(s, z, \eta)))] ds - d = 0, \quad (4.24)$$

де m —фіксоване натуральне число.

Зауважимо, що на відміну від (4.18), (4.19) рівняння (4.23), (4.24) можуть бути побудовані явно.

На основі Теорема 4.1 природно очікувати, що при виконанні підходящих умов системи (4.18), (4.19) і (4.23), (4.24) досить близькі один до одного, при достатньо великому m .

Лема 4.1. *Припустимо, що мають місце умови Теорема 4.1 і крім того $g \in Lip(K_g, D)$ і $h \in Lip(K_h, D')$ з деякими невід'ємними квадратними матрицями K_g, K_h розмірності n , де*

$$D' := \{f(t, x) : t \in [a, b], x \in D\}.$$

Тоді для точної і наближеної визначальних систем (4.18), (4.19) і (4.23), (4.24) мають місце наступні оцінки, для будь-яких $(z, \eta) \in D_a \times D_b$ і $m \geq 1$:

$$|\Delta(z, \eta) - \Delta_m(z, \eta)| \leq \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \quad (4.25)$$

$$|\Lambda(z, \eta) - \Lambda_m(z, \eta)| \leq \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \quad (4.26)$$

де матриця Q і вектор $\delta_{[a,b],D}(f)$ задані відповідно в (3.6) і (3.5).

Доведення. Зафіксуємо довільні $(z, \eta) \in D_a \times D_b$. Використовуємо умову Ліпшиця (3.3), оцінку (4.11) і рівність

$$\int_a^b \alpha_1(t, a, b-a) dt = \frac{(b-a)^2}{3}, \quad (4.27)$$

де $\alpha_1(t, a, b-a)$ задано в (2.4), ми маємо

$$|\Delta(z, \eta) - \Delta_m(z, \eta)| = \left| \int_a^b f(s, x_m(s, z, \eta)) ds - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq K \int_a^b \frac{10}{9} \alpha_1(s, a, b-a) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) ds = \\ &= \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \end{aligned}$$

що доводить нерівність (4.25).

З (4.19) і (4.24) використовуючи умови Ліпшиця (3.3) і співвідношення (4.11), (4.27) отримуємо

$$\begin{aligned} |\Lambda(z, \eta) - \Lambda_m(z, \eta)| &= \left| \int_a^b [g(s, x_\infty(s, z, \eta)) + h(s, f(s, x_\infty(s, z, \eta))) \right. \\ &\quad \left. - g(s, x_m(s, z, \eta)) - h(s, f(s, x_m(s, z, \eta)))] ds \right| \leq \\ &\leq K_g \int_a^b |x_\infty(s, z, \eta) - x_m(s, z, \eta)| ds + K_h K \int_a^b |x_\infty(s, z, \eta) - x_m(s, z, \eta)| ds \leq \\ &\leq (K_g + K_h K) \int_a^b \frac{10}{9} \alpha_1(s, a, b-a) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) ds \leq \\ &\leq \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \end{aligned}$$

тобто оцінка (4.26) також має місце. \square

На основі точної та наближеної визначальних систем (4.18), (4.19) і (4.23), (4.24) введемо в розгляд відображення $H : D_a \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ і $H_m : D_a \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ поклавши:

$$H(z, \eta) = \begin{bmatrix} \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds \\ \int_a^b [g(s, x_\infty(s, z, \eta)) + h(s, f(s, x_\infty(s, z, \eta)))] ds - d \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$(z, \eta) \in D_a \times D_b,$$

$$H_m(z, \eta) = \begin{bmatrix} \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s, z, \eta)) ds \\ \int_a^b [g(s, x_m(s, z, \eta)) + h(s, f(s, x_m(s, z, \eta)))] ds - d \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$(z, \eta) \in D_a \times D_b.$$

З Теорема 4.3 випливає, що критичні точки векторного поля $H(z, \eta)$ визначають розв'язки інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1).

Наступне твердження встановлює подібний результат на основі властивостей векторного поля $H_m(z, \eta)$, яке явно задається в (4.29).

Теорема 4.5. *Припустимо, що виконуються умови Лема 4.1. Крім того, можна вказати таке $m \geq 1$ і множину $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ вигляду*

$$\Omega := D_1 \times D_2 \quad (4.30)$$

де $D_1 \subset D_a$, $D_2 \subset D_b$ є певні обмежені відкриті множини, такі що відображення $H_m(z, \eta)$, задовольняє співвідношення

$$|H_m(z, \eta)| \triangleright_{\partial\Omega} \frac{10(b-a)^2}{27} \begin{bmatrix} KQ^m(I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \\ (K_g + K_h K)Q^m(I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

на границі $\partial\Omega$.

Якщо крім того, степінь Брауера відображення H_m не дорівнює нулеві:

$$\deg(H_m, \Omega, 0) \neq 0, \quad (4.32)$$

тоді, існує пара $(z^*, \eta^*) \in D_1 \times D_2$ така, що функція

$$x^*(\cdot) = x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*) \quad (4.33)$$

є абсолютно неперервним розв'язком інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1),

де $x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)$ – гранична функція послідовності (4.3)

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z^*, \eta^*), \quad t \in [a, b]. \quad (4.34)$$

Зауваження 4.2. В (4.32) використовується степінь Брауера (а не степінь Лере Шаудера) тому що, всі векторні поля є скінченно вимірні. Відзначимо також, що права частина в (4.31) може бути явно обчислена (наприклад використовуючи пакет математичних програм компютерної алгебри).

Доведення Теорема 4.5. Будемо використовувати Лему 4.1. Доведемо, що векторні поля H і H_m , які задані в (4.28) та (4.29) є гомотопні.

Для цього розглянемо „лінійну деформацію“ яка визначена сім’єю відображень

$$\Psi(\vartheta, z, \eta) = H_m(z, \eta) + \vartheta [H(z, \eta) - H_m(z, \eta)], \quad (z, \eta) \in \partial\Omega, \vartheta \in [0, 1]. \quad (4.35)$$

Очевидно, що Ψ є неперервним відображення на границі $\partial\Omega$ для всіх $\vartheta \in [0, 1]$ і більш того

$$\Psi(0, z, \eta) = H_m(z, \eta), \quad \Psi(1, z, \eta) = H(z, \eta).$$

Для довільної $\vartheta \in [0, 1]$ і $(z, \eta) \in \partial\Omega$, на основі (4.35), маємо

$$\begin{aligned} |\Psi(\vartheta, z, \eta)| &= |H_m(z, \eta) + \vartheta [H(z, \eta) - H_m(z, \eta)]| \geq \\ &\geq |H_m(z, \eta)| - |H(z, \eta) - H_m(z, \eta)|. \end{aligned} \quad (4.36)$$

З іншого боку, на основі оцінок (4.25) і (4.26) з Лема 4.1, ми маємо наступну покомпонентну нерівність

$$|H(z, \eta) - H_m(z, \eta)| \leq \frac{10(b-a)^2}{27} \left[\begin{array}{c} KQ^m(I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \\ (K_g + K_h K)Q^m(I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \end{array} \right].$$

З (4.31) і (4.36), випливає, що

$$|\Psi(\vartheta, z, \eta)| \triangleright_{\partial\Omega} \mathbf{0}_{2n}, \quad \vartheta \in [0, 1]$$

і отже не всі компоненти $\Psi(\vartheta, z, \eta)$ приймають нульове значення на $\partial\Omega$ для

будь якого ϑ , отже лінійна диформація (4.35) є невиродженою і тому векторні поля H і H_m є гомотопними.

У попередній формулі $\mathbf{0}_{2n}$ означає нульовий вектор стовпчик розмірності $2n$.

Використовуючи допущення (4.32) та інваріантну властивість степені Брауера, відносно гомотопії, можна заключити що

$$\deg(H, \Omega, 0) = \deg(H_m, \Omega, 0) \neq 0.$$

Тоді, класичний топологічний результат (див. [61], Теорема A2.4), гарантує існування такої пари

$$(z^*, \eta^*) \in D_1 \times D_2 = \Omega,$$

яка задовольняє рівнянню $H(z^*, \eta^*) = 0$. Отже, пара (z^*, η^*) задовольняє систему визначальних рівнянь (4.18), (4.19).

Застосовуючи Теорему 4.3, можемо зробити висновок, що функція (4.34) є абсолютно неперервним розв'язком інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1).

Зауваження 4.3. Для того, щоб застосувати Теорему 4.1 потрібно зробити наступні кроки:

1. Вибрати вектор ρ і обчислити вектор $\delta_{[a,b],D}(f)$ згідно (3.5).
2. Перевірити виконання нерівності (3.4), побудувати функцію $x_m(\cdot, z, \eta)$ в аналітичному виді (використовуючи, наприклад, пакет математичних програм комп'ютерної алгебри) для деякого фіксованого $m = m_0$, де z, η являються параметрами.
3. Вибрати підходящу множину Ω і перевірити виконання умов (4.31), (4.32) для $m = m_0$.
4. Для перевірки виконання умов (4.35) Теореми 4.5 потрібно використати рекурентну формулу (4.3) для обчислення функцій $x_m(\cdot, z, \eta)$ в аналітичному виді, вважаючи z, η параметрами. Далі треба перевірити чи хоч одна компонента вектора $|H_m(z, \lambda, \eta)|$ розмірності $2n$ строго більша ніж відповідна компонента в правій частині (4.31) в кожній точці (z, η) , що

належить $\partial\Omega$. Після цього треба переконатися, що в (4.32) топологічна степінь Брауера відображення H_m не дорівнює нулеві. В загальному випадку це досить важка проблема. Однаково, у ряді випадків це можна перевірити досить просто.

Зокрема, коли відображення H_m є непарним, тобто

$$H_m(-z, -\eta) = -H_m(z, \eta)$$

для всіх $(z, \eta) \in \Omega$, тоді за теоремою Борсука (див. [61], Теорема A2.12), степінь Брауера буде непарним числом, тому вона не може дорівнювати нулеві.

Якщо, відображення H_m в (4.29) є гладким тоді згідно визначення топологічної степені Брауера (див. [61], Означення A2.1) у випадку, якщо в ізолюваному нулі матриця Якобі не сингулярна, тобто $(z_{m,0}, \eta_{m,0})$

$$\det \frac{\partial}{\partial(z, \eta)} H_m(z_{m,0}, \eta_{m,0}) \neq 0, \quad (4.37)$$

тоді степінь Брауера відмінна від нуля.

В (4.37) символ $\frac{\partial}{\partial(z, \eta)}$ означає частинні похідні відносно вектора змінних $(z_1, \dots, z_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$.

Зауважимо, що якщо для матриці Q вигляду (3.6) не виконується умова (3.7) то діленням відрізка інтегрування навпіл можна вдвічі послабити цю умову. Техніка ділення відрізка навпіл обґрунтована в п'ятому розділі дисертації.

Теорема 4.1 може бути доповнена слідуючим зауваженням. Нехай $(\hat{z}, \hat{\eta}) \in D_a \times D_b$ є коренем наближеної визначальної системи (4.23), (4.24) для деякого m . Тоді функція

$$\tilde{x}(t) := x_m(t, \hat{z}, \hat{\eta}), \quad t \in [a, b], \quad (4.38)$$

яка визначена згідно (4.3) може розглядатися як m -те наближення до розв'язку інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1). Це виправдовується наступною

оцінкою, що прямо випливає з нерівності (4.11) Теорема 4.1

$$\begin{aligned} & |x_\infty(t, \widehat{z}, \widehat{\eta}) - x_m(t, \widehat{z}, \widehat{\eta})| \leq \\ & \leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b - a) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a, b], D}(f), \quad t \in [a, b], m \geq 0. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що Q і $\delta_{[a, b], D}(f)$ задані відповідно в (3.6) і (3.5).

Доцільно підкреслити роль невідомих параметрів, які входять в (4.38): \widehat{z} є наближене початкове значення розв'язку інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1) в точці $t = a$, а $\widehat{\eta}$ його наближене значення при $t = b$.

4.4 Необхідні умови існування розв'язків

Перейдемо до отримання необхідних умов розв'язності інтегральної крайової задачі (3.1), (4.1).

А саме, знайдемо необхідні умови для того, щоб деякі підобласті $G_a \subset D_a$ і $G_b \subset D_b$ могли містити точки z^* і η^* , які визначають при $t = a$ і $t = b$, відповідно значення

$$x(a) = z^* \text{ і } x(b) = \eta^*$$

розв'язку $x(\cdot)$.

Попередньо доведемо леми, про неперервну залежність граничної функції $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ і визначальних функцій $\Delta(z, \eta)$ і $\Lambda(z, \eta)$ вигляду (4.18), (4.19) від $(z, \eta) \in D_a \times D_b$.

Лема 4.2. *Нехай для крайової задачі (3.1), (4.1) виконуються умови Теорема 4.1. Тоді, для будь-яких пар точок $(z', \eta') \in D_a \times D_b$, $(z'', \eta'') \in D_a \times D_b$ для відхилення граничних функцій $x_\infty(\cdot, z', \eta')$ і $x_\infty(\cdot, z'', \eta'')$ послідовностей $x_m(t, z', \eta')$ і $x_m(t, z'', \eta'')$ вигляду (4.3) справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} & \left| x_\infty(t, z', \eta') - x_\infty(t, z'', \eta'') \right| \leq \\ & \leq \left[I_n + \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b - a) K (I_n - Q)^{-1} \right] \left[\left| z' - z'' \right| + \left| \eta' - \eta'' \right| \right], \quad (4.39) \end{aligned}$$

де $\alpha_1(t, a, b - a)$ дається згідно (2.4), K матриця Ліпшиця в умові $f \in Lip(K, D)$.

Доведення. Безпосередньо із (4.3), (4.4) слідує

$$\begin{aligned}
x_1(t, z', \eta') - x_1(t, z'', \eta'') &= z' + \int_a^t f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z' + \frac{s-a}{b-a} \eta'\right) ds - \\
&\quad - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z' + \frac{s-a}{b-a} \eta'\right) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta' - z'] - \\
&\quad - z'' - \int_a^t f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z'' + \frac{s-a}{b-a} \eta''\right) ds + \\
&\quad + \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z'' + \frac{s-a}{b-a} \eta''\right) ds - \frac{t-a}{b-a} [\eta'' - z''] = \\
&\quad = \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) (z' - z'') + \frac{t-a}{b-a} (\eta' - \eta'') + \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) \times \\
&\quad \times \int_a^t \left[f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z' + \frac{s-a}{b-a} \eta'\right) - f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z'' + \frac{s-a}{b-a} \eta''\right) \right] ds - \\
&\quad - \frac{t-a}{b-a} \int_t^b \left[f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z' + \frac{s-a}{b-a} \eta'\right) - \right. \\
&\quad \quad \left. - f\left(s, \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z'' + \frac{s-a}{b-a} \eta''\right) \right] ds. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Використовуючи в (4.40) умову Ліпшиця і вигляд послідовності $\alpha_{m+1}(t, a, b-a)$ в (2.5), маємо

$$\begin{aligned}
|x_1(t, z', \eta') - x_1(t, z'', \eta'')| &\leq [|z' - z''| + |\eta' - \eta''|] + K \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \int_a^t \left| \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z' + \frac{s-a}{b-a} \eta' - \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z'' - \frac{s-a}{b-a} \eta'' \right| ds \right] + \\
&\quad + K \left[\frac{t-a}{b-a} \int_t^b \left| \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z' + \frac{s-a}{b-a} \eta' - \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right) z'' - \frac{s-a}{b-a} \eta'' \right| ds \right] \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + K \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right) \int_a^t \left| \left(1 - \frac{s-a}{b-a} \right) |z' - z''| + \frac{s-a}{b-a} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. |\eta' - \eta''| \right| ds \right] + K \left[\frac{t-a}{b-a} \int_t^b \left| \left(1 - \frac{s-a}{b-a} \right) |z' - z''| + \frac{s-a}{b-a} |\eta' - \eta''| \right| ds \right] \leq \\
&\leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + K \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right) \int_a^t \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] ds \right] + \\
&+ K \left[\frac{t-a}{b-a} \int_t^b \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] ds \right] \leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + \\
&+ K \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right) \int_a^t ds + \frac{t-a}{b-a} \int_t^b ds \right] \leq \\
&\leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + K \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \alpha_1(t, a, b-a).
\end{aligned}$$

Аналогічно встановлюємо, що

$$\begin{aligned}
&\left| x_2(t, z', \eta') - x_2(t, z'', \eta'') \right| \leq \\
&\leq \left[I_n + K\alpha_1(t, a, b-a) + K^2\alpha_2(t, a, b-a) \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right].
\end{aligned}$$

За методом математичної індукції можна отримати, що

$$\begin{aligned}
&\left| x_m(t, z', \eta') - x_m(t, z'', \eta'') \right| \leq \\
&\leq \left[I_n + K\alpha_1(t, a, b-a) + K^2\alpha_2(t, a, b-a) + \dots + K^m\alpha_m(t, a, b-a) \right] \times \\
&\quad \times \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right]. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Із (4.41) з урахуванням нерівності (2.7), маємо

$$\begin{aligned}
&\left| x_m(t, z', \eta') - x_m(t, z'', \eta'') \right| \leq \\
&\leq \left[I_n + K \left[I_n + \left(\frac{3(b-a)}{10} K \right) + \left(\frac{3(b-a)}{10} K \right)^2 \dots + \left(\frac{3(b-a)}{10} K \right)^{m-1} \right] \right] \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b - a) \left[\left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \right]. \quad (4.42)$$

Перейшовши в (4.42) до границі при $t \rightarrow \infty$, з урахуванням вигляду (3.6) матриці Q , маємо

$$\begin{aligned} & \left| x_\infty(t, z', \eta') - x_\infty(t, z'', \eta'') \right| \leq \\ & \leq \left[I_n + \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b - a) K (I_n - Q)^{-1} \right] \left[\left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \right], \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Лема 4.3. При виконанні умов Теорема 4.1, визначальні функції $\Delta(z, \eta)$ і $\Lambda(z, \eta)$ відповідно вигляду (4.18) і (4.19) визначені і неперервні в області $(z, \eta) \in D_a \times D_b$ і для всіх пар точок $(z', \eta') \in D_a \times D_b$, $(z'', \eta'') \in D_a \times D_b$ має місце оцінка

$$\begin{aligned} & \left| \Delta(z', \eta') - \Delta(z'', \eta'') \right| \leq \\ & \leq \left[I_n + \left(K(b - a) + \frac{10(b - a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] \left[\left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \left| \Lambda(z', \eta') - \Lambda(z'', \eta'') \right| \leq \\ & \leq \left[(b - a) (K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b - a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\ & \quad \times \left[\left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Доведення. Для всіх пар $(z, \eta) \in D_a \times D_b$ існує неперервна гранична функція для рівномірно збіжної послідовності функцій (4.3). Далі, із (4.10) з використанням умови Ліпшиця, маємо

$$\left| \Delta(z', \eta') - \Delta(z'', \eta'') \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \eta' - z' - \int_a^b \left(s, x_\infty(s, z', \eta') \right) - \eta'' + z'' + \int_a^b \left(s, x_\infty(s, z'', \eta'') \right) \right| \leq \\
&\leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + K \int_a^b \left| x_\infty(t, z', \eta') - x_\infty(t, z'', \eta'') \right| ds. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Приймаючи до уваги (4.39) і (4.27) із (4.45), находимо

$$\begin{aligned}
&|\Delta(z', \eta') - \Delta(z'', \eta'')| \leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + \\
&\quad + K \int_a^b \left[I_n + \frac{10}{9} \alpha_1(s, a, b-a) K (I_n - Q)^{-1} \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] ds \leq \\
&\leq \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + \left[K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\
&\quad \times \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] = \\
&= \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right],
\end{aligned}$$

що і завершує доведення нерівності (4.43).

Враховуючи ліпшицеві властивості $f \in Lip(K, D)$, $g \in Lip(K_g, D)$ і $h \in Lip(K_h, D')$, із рівності (4.6) на основі оцінки (4.39) і рівності (4.27), маємо

$$\begin{aligned}
&|\Lambda(z', \eta') - \Lambda(z'', \eta'')| \leq \int_a^b K_g \left| x_\infty(t, z', \eta') - x_\infty(t, z'', \eta'') \right| ds + \\
&\quad + \int_a^b K_h \left| f(s, x_\infty(t, z', \eta')) - f(s, x_\infty(t, z'', \eta'')) \right| ds \leq \\
&\leq \int_a^b K_g \left[I_n + \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b-a) K (I_n - Q)^{-1} \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] ds + \\
&+ \int_a^b K_h K \left[I_n + \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b-a) K (I_n - Q)^{-1} \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] ds \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[K_g(b-a) + K_g \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] + \\
&+ \left[K_h K(b-a) + K_h K \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right] \leq \\
&\leq \left[(b-a)(K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\
&\quad \times \left[|z' - z''| + |\eta' - \eta''| \right].
\end{aligned}$$

Лема доведена. \square

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (3.1), (4.1) дає наступне твердження.

Теорема 4.6. *Нехай справедливі умови Теорема 4.1. Тоді, для того, щоб деякі підобласті $G_a \subset D_a$ і $G_b \subset D_b$ могли містити точки z^* і η^* , які при $t = a$ і $t = b$, задають відповідно значення*

$$x(a) = z^* \text{ і } x(b) = \eta^* \quad (4.46)$$

розв'язку $x(\cdot)$ крайової задачі (3.1), (4.1) необхідно, щоб при всіх t і довільних $\tilde{z} \in G_a, \tilde{\eta} \in G_b$ виконувались нерівності

$$\begin{aligned}
|\Delta_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| &\leq \sup_{z \in G_a, \eta \in G_b} \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] \times \\
&\times [|\tilde{z} - z| + |\tilde{\eta} - \eta|] + \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$|\Lambda_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{z \in G_a, \eta \in G_b} \left[(b-a)(K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\
&\times [|\tilde{z} - z| + |\tilde{\eta} - \eta|] + \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f). \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Доведення. Нехай для значень (z^*, η^*) визначальні рівняння $\Delta(z, \eta)$ і $\Lambda(z, \eta)$

вигляду (4.18) і (4.19) перетворюються в нуль:

$$\Delta(z^*, \eta^*) = 0, \quad \Lambda(z^*, \eta^*) = 0. \quad (4.49)$$

Тоді, за Теоремою 4.2 значення розв'язку $x_\infty(\cdot)$ в точках $t = a$ і $t = b$ виражається згідно (4.46). Застосуємо формулу (4.43) Лема 4.3 при

$$z' = \tilde{z}, \quad z'' = z^*, \quad \eta' = \tilde{\eta}, \quad \eta'' = \eta^*. \quad (4.50)$$

Тоді із (4.43) і (4.49) маємо

$$|\Delta(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] [|\tilde{z} - z^*| + |\tilde{\eta} - \eta^*|]. \quad (4.51)$$

На підставі нерівності (4.25) знаходимо, що

$$|\Delta(\tilde{z}, \tilde{\eta}) - \Delta_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f),$$

тобто

$$|\Delta_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq |\Delta(\tilde{z}, \tilde{\eta})| + \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f). \quad (4.52)$$

Об'єднавши нерівності (4.52) і (4.51) доводимо справедливість нерівності (4.47):

$$\begin{aligned} |\Delta_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| &\leq \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] \times \\ &\quad \times [|\tilde{z} - z^*| + |\tilde{\eta} - \eta^*|] + \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \leq \\ &\leq \sup_{z \in G_a, \eta \in G_b} \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] [|\tilde{z} - z| + |\tilde{\eta} - \eta|] + \\ &\quad + \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f). \end{aligned}$$

Для доведення нерівності (4.48) застосуємо формулу (4.44) Лема 4.3 при

значеннях параметрів, наведених в (4.50). Тоді із (4.44) і (4.49) маємо

$$|\Lambda(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq \left[(b-a)(K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\ \times [|\tilde{z} - z^*| + |\tilde{\eta} - \eta^*|]. \quad (4.53)$$

З (4.26) випливає, що

$$|\Lambda_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq |\Lambda(\tilde{z}, \tilde{\eta})| + \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f). \quad (4.54)$$

Із співвідношень (4.54) і (4.53) маємо:

$$|\Lambda_m(\tilde{z}, \tilde{\eta})| \leq \left[(b-a)(K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\ \times [|\tilde{z} - z^*| + |\tilde{\eta} - \eta^*|] + \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \leq \\ \leq \sup_{z \in G_a, \eta \in G_b} \left[(b-a)(K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] \times \\ \times [|\tilde{z} - z| + |\tilde{\eta} - \eta|] + \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f),$$

що й доводить нерівність (4.48). \square

Теорема 4.6 дозволяє вказати корисний на практиці алгоритм наближеного відшукування значення (4.46) розв'язку. Для цього представимо множини D_a і D_b , як об'єднання скінченного числа підмножин

$$D_a = \bigcup_{i=1}^N D_a^i, \quad D_b = \bigcup_{i=1}^N D_b^i. \quad (4.55)$$

На кожному D_a^i і D_b^i вибираємо довільні точки $z^i \in D_a^i$ і $\eta \in D_b^i$. Потім для деякого номера m по формулі (4.18) обчислюємо послідовні наближення $x_m(t, z^i, \eta^i)$, а по (4.23) і (4.24) знаходимо $\Delta_m(z^i, \eta^i)$ і $\Lambda_m(z^i, \eta^i)$. Після чого на підставі (4.47) і (4.48) виключаються із розгляду ті підмножини D_a^i і D_b^i ,

для довільних точок $z^i \in D_a^i$ і $\eta^i \in D_b^i$ яких, виконуються зворотні нерівності

$$|\Delta_m(z^i, \eta^i)| > \sup_{z \in G_a, \eta \in G_b} \left[I_n + \left(K(b-a) + \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right) \right] \times \\ \times [|z^i - z| + |\eta^i - \eta|] + \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f),$$

$$|\Lambda_m(z^i, \eta^i)| > \sup_{z \in G_a, \eta \in G_b} \left[(b-a) (K_g + K_h K) + (K_g + K_h K) \times \right. \\ \left. \times \frac{10(b-a)^2 K (I_n - Q)^{-1}}{27} \right] [|z^i - z| + |\eta^i - \eta|] + \\ + \frac{10(b-a)^2}{27} (K_g + K_h K) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f),$$

оскільки за Теоремою 4.6 такі підмножини D_a^i і D_b^i не можуть містити точки $z^* \in D_a^i$, $\eta^* \in D_b^i$, що задають відповідно значення $x(a) = z^*$ і $x(b) = \eta^*$ розв'язку крайової задачі (3.1), (4.1).

Ті D_a^i і D_b^i , які залишилися, утворюють певні підмножини \widehat{D}_a і \widehat{D}_b , які при $i, m \rightarrow \infty$ збігаються до підмножин D_a^* і D_b^* , і які містять відповідні значення розв'язку крайової задачі (3.1), (4.1).

4.5 Конструктивна перевірка достатніх умов існування для приклада інтегральної крайової задачі з двома розв'язками

Продемонструємо детально застосування Теорема 4.5 у випадку крайової задачі (3.48), (3.49), яка була розглянута у третьому розділі.

Покажемо, що ця крайова задача в околі першого наближення вигляду (3.53) має розв'язок. Для цього в Теоремі 4.5 виберемо область $\Omega := D_1 \times D_2$ в (4.30) як прямий добуток прямокутників

$$D_1 := \{(z_1, z_2) : -0.55 \leq z_1 \leq 0.1; -0.1 \leq z_2 \leq 0.05\} \subset D_a, \quad (4.56)$$

$$D_2 := \{(\eta_1, \eta_2) : -0.55 \leq \eta_1 \leq 0; 0 \leq \eta_2 \leq 0.12\} \subset D_b. \quad (4.57)$$

Таким чином, границі ∂D_1 та ∂D_2 задаються відповідно наступними рівнян-

нями:

$$\begin{aligned}
&\{z_1 = -0.55, \quad -0.1 \leq z_2 \leq 0.05\}, \\
&\{z_2 = 0.05, \quad -0.55 \leq z_1 \leq 0.1\}, \\
&\{z_1 = 0.1, \quad -0.1 \leq z_2 \leq 0.05\}, \\
&\{z_2 = -0.1, \quad -0.55 \leq z_1 \leq 0.1\}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

та

$$\begin{aligned}
&\{\eta_1 = -0.55, \quad 0 \leq \eta_2 \leq 0.12\}, \\
&\{\eta_2 = 0.12, \quad -0.55 \leq \eta_1 \leq 0\}, \\
&\{\eta_1 = 0, \quad 0 \leq \eta_2 \leq 0.12\}, \\
&\{\eta_2 = 0, \quad -0.55 \leq \eta_1 \leq 0\}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Тому, виконання співвідношення (4.31) в Теоремі 4.5 треба перевірити для всіх значень параметрів, які задані в (4.58), (4.59). Прямими обчисленнями отримаємо, що $g \in Lip(K_g, D)$, де область D задана в (3.51) і

$$K_g = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.375 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Крім того, маємо

$$\frac{10(b-a)^2}{27} \begin{pmatrix} KQ(I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \\ K_g Q(I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.32707024 \cdot 10^{-4} \\ 6.065016891 \cdot 10^{-4} \\ 2.406173922 \cdot 10^{-4} \\ 3.155040783 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

Якщо порівняти ліву і праву частини в (4.31) в точках, які задані рівняннями (4.58), (4.59), тоді приходимо до висновку, що нерівність (4.31) виконується.

Для того, щоб перевірити виконання умови (4.32), використаємо диференційовність функція f . Запишемо матрицю Якобі

$$\frac{\partial H_1}{\partial(z, \eta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{11}}{\partial z_1} & \frac{\partial H_{11}}{\partial z_2} & \frac{\partial H_{11}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial H_{11}}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial H_{12}}{\partial z_1} & \frac{\partial H_{12}}{\partial z_2} & \frac{\partial H_{12}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial H_{12}}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial H_{13}}{\partial z_1} & \frac{\partial H_{13}}{\partial z_2} & \frac{\partial H_{13}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial H_{13}}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial H_{14}}{\partial z_1} & \frac{\partial H_{14}}{\partial z_2} & \frac{\partial H_{14}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial H_{14}}{\partial \eta_2} \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

де

$$\begin{aligned} H_{11}(z, \eta) &= \eta_1 - z_1 - \int_a^b f_1(t, x_{11}(t, z, \eta), x_{12}(t, z, \eta)) dt, \\ H_{12}(z, \eta) &= \eta_2 - z_2 - \int_a^b f_2(t, x_{11}(t, z, \eta), x_{12}(t, z, \eta)) dt, \\ H_{13}(z, \eta) &= \int_a^b g_1(t, x_{11}(t, z, \eta), x_{12}(t, z, \eta)) dt + \frac{197}{48000}, \\ H_{14}(z, \eta) &= \int_a^b g_2(t, x_{11}(t, z, \eta), x_{12}(t, z, \eta)) dt - \frac{1}{4000}, \end{aligned}$$

де функції f і g визначені в заданому прикладі.

Якщо підставити значення параметрів з другого стовпчику Таблиці 3.1 в матрицю Якобі (4.60), то отримаємо

$$\begin{pmatrix} -0.991664946 & 0.0165680208 & 1.016639475 & 0.0334006242 \\ -0.005205078 & -1.001032832 & -0.0104752604 & 0.9967402959 \\ -0.00208135681 & -0.02066615277 & -0.00609620114 & -0.041047519 \\ -0.00000185526 & -0.00124495269 & 0.00001482908 & 0.0049824817 \end{pmatrix}.$$

Детермінант останньої матриці дорівнює $5.0813401 \cdot 10^{-5}$, тобто відмінний від нуля. Тоді на основі того, що (4.37) виконується для значень параметрів з першого стовпчика Табл.3.1., можемо заключити, що нерівність (4.32) має місце. Тому на основі Теорема 4.5, існує така пара параметрів $(z^*, \eta^*) \in D_1 \times D_2$, що функція (4.33) є розв'язком інтегральної крайової задачі (3.48), (3.49).

Легко перевірити, що пара функцій

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{5}$$

є розв'язком ІКЗ (3.48), (3.49) і їх значення в точках 0 і $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1^*(0) &= -0.5, & x_2^*(0) &= 0, \\ x_1^*\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{39}{80}, & x_2^*\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

належать відповідно областям D_1 та D_2 вигляду (4.56), (4.57).

Графік цього розв'язку та його перше наближення і відповідна похибка наведені в підрозділі 3.4.

Згідно Теорем 4.3, 4.4, число розв'язків визначальної алгебраїчної системи (4.18), (4.19) співпадає з числом розв'язків заданої ІКЗ. Обчислення дають, що поряд з значеннями параметрів які представлені в Табл. 3.1 наближена система визначальних рівнянь (4.23), (4.24), при $m = 1$ має і інший розв'язок, який записано в другому стовпчику Табл. 3.2.

Тепер замість області $\Omega := D_1 \times D_2$ яка визначена (4.56), (4.57), введемо в розгляд область $\tilde{\Omega} = D_3 \times D_4$ де

$$D_3 = \{(z_1, z_2) : 0 \leq z_1 \leq 0.42, -0.2 \leq z_2 \leq -0.12\}, \quad (4.61)$$

$$D_4 = \{(\eta_1, \eta_2) : 0 \leq \eta_1 \leq 0.41, -0.1 \leq \eta_2 \leq 0.05\}. \quad (4.62)$$

Рівняння границь ∂D_3 та ∂D_4 мають вигляд

$$\{z_1 = 0, \quad -0.2 \leq z_2 \leq -0.12\},$$

$$\{z_2 = -0.12, \quad 0 \leq z_1 \leq 0.42\},$$

$$\{z_1 = 0.42, \quad -0.2 \leq z_2 \leq -0.12\},$$

$$\{z_2 = -0.2, \quad 0 \leq z_1 \leq 0.42\}$$

та

$$\{\eta_1 = 0, \quad -0.1 \leq \eta_2 \leq 0.05\},$$

$$\{\eta_2 = 0.05, \quad 0 \leq \eta_1 \leq 0.41\},$$

$$\{\eta_1 = 0.41, \quad -0.1 \leq \eta_2 \leq 0.05\},$$

$$\{\eta_2 = -0.1, \quad 0 \leq \eta_1 \leq 0.41\}.$$

Обчислення показують, що і в цьому випадку всі умови Теорема 4.5 при $m = 1$ також виконуються.

Отже, на основі Теорема 4.5, існує така пара векторів $(\hat{z}^*, \hat{\eta}^*) \in D_3 \times D_4$, що функція

$$\hat{x}^*(t) = x_\infty(t, \hat{z}^*, \hat{\eta}^*), \quad t \in [0, 1/2], \quad (4.63)$$

є розв'язком інтегральної крайової задачі (3.48), (3.49) для якого, мають місце включення $(\hat{x}_1^*(0), \hat{x}_2^*(0)) \in D_3$, $(\hat{x}_1^*(1/2), \hat{x}_2^*(1/2)) \in D_4$. Перше наближення $\hat{x}_{11}(t), \hat{x}_{12}(t)$ до другого розв'язку (4.63) і його графіки представлені в підрозділі 3.4.

Легко бачити, що значення першого наближення до другого точного розв'яз-

ку (4.63) в 0 та $1/2$ мають значення

$$\begin{aligned}\hat{x}_{11}(0) &= 0.39235367135, & \hat{x}_{12}(0) &= -0.1570525052, \\ \hat{x}_{11}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.3868493959, & \hat{x}_{12}\left(\frac{1}{2}\right) &= -0.04383992216\end{aligned}$$

і належать D_3 і D_4 вигляду (4.61), (4.62) відповідно.

Аналогічно обчислені друге і третє ($m = 2, 3$) наближення до другого розв'язку. Відповідні графіки наближених розв'язків та нев'язку на третій ітерації також можна знайти в підрозділі 3.4.

4.6 Приклад з двома розв'язками, де інтегральна крайові умови залежать і від похідної

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^2(t) - \frac{t}{5}x_1(t) + \frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{25} := f_1(t, x_1, x_2), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_2'(t) = \frac{t^2}{10}x_2(t) + \frac{t}{8}x_1(t) - \frac{21}{800}t^3 + \frac{1}{16}t + \frac{1}{5} := f_2(t, x_1, x_2), \end{cases} \quad (4.64)$$

підпорядковану інтегральним крайовим умовам

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{1}{2}} [sx_1(s)x_2(s) + x_1'^2(s)]ds = -\frac{59}{16000}, \\ \int_0^{\frac{1}{2}} [s^2x_2^2(s) + x_2'^2(s)]ds = \frac{81}{4000}. \end{cases} \quad (4.65)$$

Можна перевірити, що один з розв'язків задачі (4.64), (4.65) має вигляд:

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{5}. \quad (4.66)$$

Згідно (3.8) введемо наступні параметри:

$$\begin{aligned}z &:= x(0) = \text{col}(x_1(0), x_2(0)) = \text{col}(z_1, z_2), \\ \eta &:= x\left(\frac{1}{2}\right) = \text{col}\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \text{col}(\eta_1, \eta_2).\end{aligned}$$

Нехай опуклі підмножини D_a і D_b , де шукаємо значення розв'язку $x(a)$

та $x(b)$, мають вигляд:

$$D_a = D_b = \{(x_1, x_2) : -10.3 \leq x_1 \leq 0.6, -0.01 \leq x_2 \leq 0.2\}.$$

У цьому випадку

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

У нерівності (3.4) виберемо

$$\rho = \text{col}(0.2; 0.2).$$

Отже, векторний ρ – окіл множини $D_{a,b}$ дається наступним чином

$$D = B(D_{a,b}, \rho) = \{(x_1, x_2) : -10.5 \leq x_1 \leq 0.8, -0.21 \leq x_2 \leq 0.4\}$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (3.3) для правої частини (4.64) в області D виконується з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 1/10 & 9/10 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix}$$

і маємо

$$Q = \frac{3}{20} \begin{bmatrix} 1/10 & 9/10 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix}, \quad r(Q) = 0.045 < 1,$$

$$\delta_{[a,b],D}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D} f(t, x) \right] = \begin{bmatrix} 0.645 \\ 0.36075 \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{2} \delta_{[a,b],D}(f) = \begin{bmatrix} 0.16125 \\ 0.0901875 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, ми перевірили, що всі умови Теорема 4.1 виконуються, і тому послідовність функцій (4.3) для цього прикладу є збіжною.

На першому кроці ($m = 1$) на основі послідовних наближень (4.3), використовуючи пакет символної математики Maple, отримаємо для першої і другої

	m=0	m=1	m=2	m=3
z_1	-0.5000428728	-0.499994975	-0.5000000116	-0.5000000016
z_2	-0.001576661	$-0.60016337 \cdot 10^{-5}$	$3.0283887 \cdot 10^{-8}$	$2.9748396 \cdot 10^{-10}$
η_1	-0.4876685954	-0.4874955843	-0.4875000081	-0.4875000014
η_2	0.09844741696	0.09999409626	0.1000000296	0.1000000003

Табл. 4.1: Наближені значення параметрів для першого розв'язку (4.66)

КОМПОНЕНТ наступні результати:

$$\begin{aligned}
x_{11}(t, z, \eta) &:= z_1 + \frac{1}{400}t^4 + \frac{1}{3} \left((-2z_2 + 2\eta_2)^2 + \frac{2}{5}z_1 - \frac{2}{5}\eta_1 - \frac{1}{25} \right) t^3 + \\
&+ \frac{1}{2} \left(2z_2(-2z_2 + 2\eta_2) - \frac{1}{5}z_1 \right) t^2 + z_2^2 t - \\
&- 2t \left(-\frac{29}{19200} + \frac{1}{24}(-2z_2 + 2\eta_2)^2 - \frac{1}{120}z_1 - \frac{1}{60}\eta_1 + \right. \\
&\left. + \frac{1}{4}z_2(-2z_2 + 2\eta_2) + \frac{1}{2}z_2^2 \right) + 2t(\eta_1 - z_1), \\
x_{12}(t, z, \eta) &:= z_2 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{5}z_2 + \frac{1}{5}\eta_2 - \frac{21}{800} \right) t^4 + \\
&+ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}z_1 + \frac{1}{4}\eta_1 + \frac{1}{10}z_2 \right) t^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}z_1 + \frac{1}{16} \right) t^2 - \\
&- 2t \left(\frac{5499}{51200} + \frac{1}{960}z_2 + \frac{1}{320}\eta_2 + \frac{1}{192}z_1 + \frac{1}{96}\eta_1 \right) + 2t(\eta_2 - z_2).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Чисельні розрахунки показують, що розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь вигляду (4.23), (4.24) при $m = 0, 1, 2, 3$ є числові значення, що представлені в Табл. 4.1.

Підставивши значення другого стовпчику Табл. 4.1. в (4.67), отримаємо перше наближення, відповідно першої та другої компонент, до розв'язку інтегральної крайової задачі (4.64), (4.65):

$$\begin{aligned}
x_{11}(t) &= -0.4999949750 + (1/400)t^4 - 0.00166655933t^3 + 0.04999829717t^2 + \\
&+ 0.00010377264t, \\
x_{12}(t) &= -1.633747 \cdot 10^{-6} + 0.1999349966t - 0.001562495105t^4 + \\
&+ 0.001041415846t^3 + 3.140600000 \cdot 10^{-7}t^2.
\end{aligned}$$

На Рис. 4.1 зображено графіки компонент першого (4.66) та наближеного

	m=0	m=1	m=2	m=3
\tilde{z}_1	-10.21806895	-10.21326364	-10.20404878	-10.20427860
\tilde{z}_2	0.2096714432	0.1516110403	0.1514587161	0.1514591964
$\tilde{\eta}_1$	-9.951596136	-9.951162260	-9.942186105	-9.942410605
$\tilde{\eta}_2$	0.1110109368	0.1020979352	0.1020892875	0.1020862671

Табл. 4.2: Наближені значення параметрів для другого розв'язку ІКЗ

розв'язків на нульовій і третій ітерації.

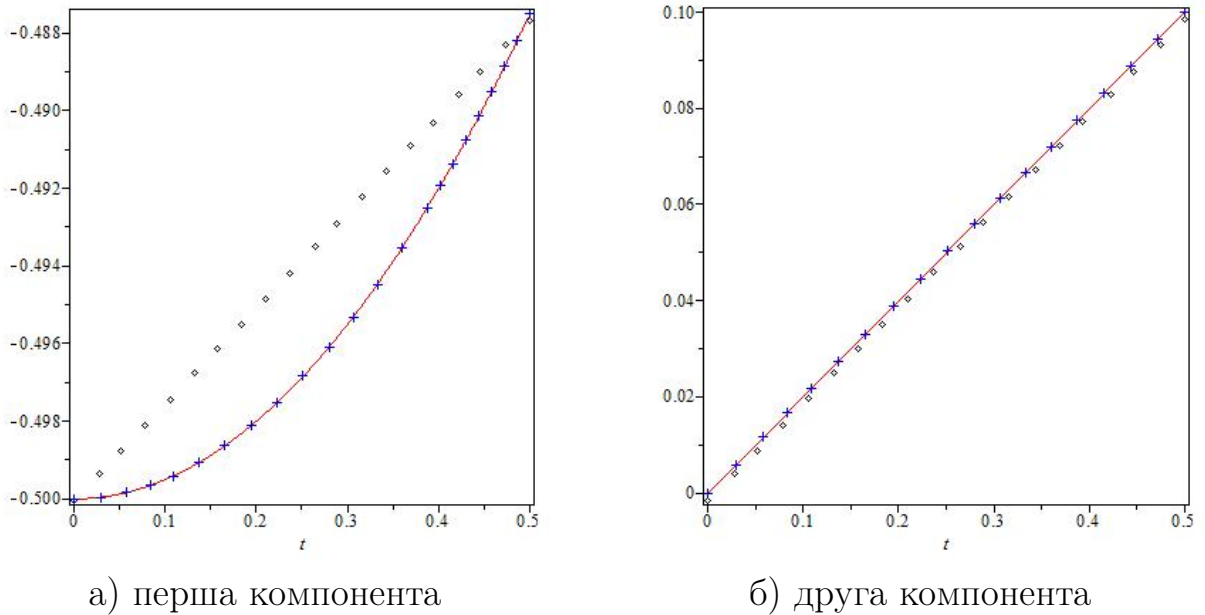


Рис. 4.1: Перший розв'язок (4.66) (лінія) та його нульове (\diamond) і третє наближення (\times).

Похибка третьої апроксимації ($m = 3$):

$$\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \leq 2.3 \cdot 10^{-9}, \quad \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \leq 6 \cdot 10^{-10}.$$

Згідно Теорем 4.3 і 4.4 число розв'язків алгебраїчної визначальної системи (4.18), (4.19) співпадає з числом розв'язків даної інтегральної крайової задачі.

Розрахунки показують, що система наближених визначальних алгебраїчних рівнянь (4.23), (4.24) при $m = 0, 1, 2, 3$, окрім розв'язків представлених в Табл. 4.1., має ще інші розв'язки, які наведено в Табл. 4.2.

Таким чином, при $m = 1$ отримаємо перше наближення до другого розв'язку даної крайової задачі:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{11}(t) &= -10.21326364 + \frac{1}{400}t^4 - 0.04501145400t^3 + 1.006312897t^2 + \\ &\quad + 0.0319866749t, \\ \tilde{x}_{12}(t) &= 0.1516110403 + 0.1989191771t - 0.00903815525t^4 + \\ &\quad + 0.02689548301t^3 - 0.6070789775t^2.\end{aligned}$$

За аналогією отримуємо третє наближення ($m = 3$) до другого розв'язку:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{31}(t) &= -10.20427860 + 1.109681721 \cdot 10^{-9}t^{15} - 9.214218520 \cdot 10^{-9}t^{14} + \\ &\quad + 2.823261003 \cdot 10^{-7}t^{13} - 1.74592236 \cdot 10^{-6}t^{12} + 1.837022747 \cdot 10^{-5}t^{11} - \\ &\quad - 6.158409930 \cdot 10^{-5}t^{10} - 0.00003009699552t^9 + 0.002230452505t^8 - \\ &\quad - 0.0080985116t^7 + 0.00356533801t^6 + 0.0784309005t^5 - \\ &\quad - 0.110197656t^4 - 0.06277119690t^3 + 1.05072029t^2 + 0.022939337t, \\ \tilde{x}_{32}(t) &= 0.1514591964 + 0.2000001111t + 1.029818264 \cdot 10^{-7}t^{11} - \\ &\quad - 2.048525315 \cdot 10^{-6}t^{10} + 0.00002872374699t^9 - 0.0002612343205t^8 + \\ &\quad + 0.001800515656t^7 - 0.002103346123t^6 - 0.01371819803t^5 + \\ &\quad + 0.03126749550t^4 + 0.006004863667t^3 - 0.6065174125t^2.\end{aligned}$$

Підставивши третє наближення $\tilde{x}_3(t) = \text{col}(\tilde{x}_{31}(t), \tilde{x}_{32}(t))$ до другого розв'язку в систему диференціальних рівнянь (4.64) отримаємо наступну нев'язку:

$$\begin{aligned}\max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \tilde{x}'_{31}(t) - \tilde{x}_{32}^2(t) + \frac{t}{5}\tilde{x}_{31}(t) - \frac{t^3}{100} + \frac{t^2}{25} \right| &\approx 5.7 \cdot 10^{-7}, \\ \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \tilde{x}'_{32}(t) - \frac{t^2}{10}\tilde{x}_{32}(t) - \frac{t}{8}\tilde{x}_{31}(t) + \frac{21}{800}t^3 - \frac{1}{16}t - \frac{1}{5} \right| &\approx 1.4 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

На Рис. 4.2 показано графіки нульового, першого та третього наближення до другого розв'язку інтегральної КЗ.

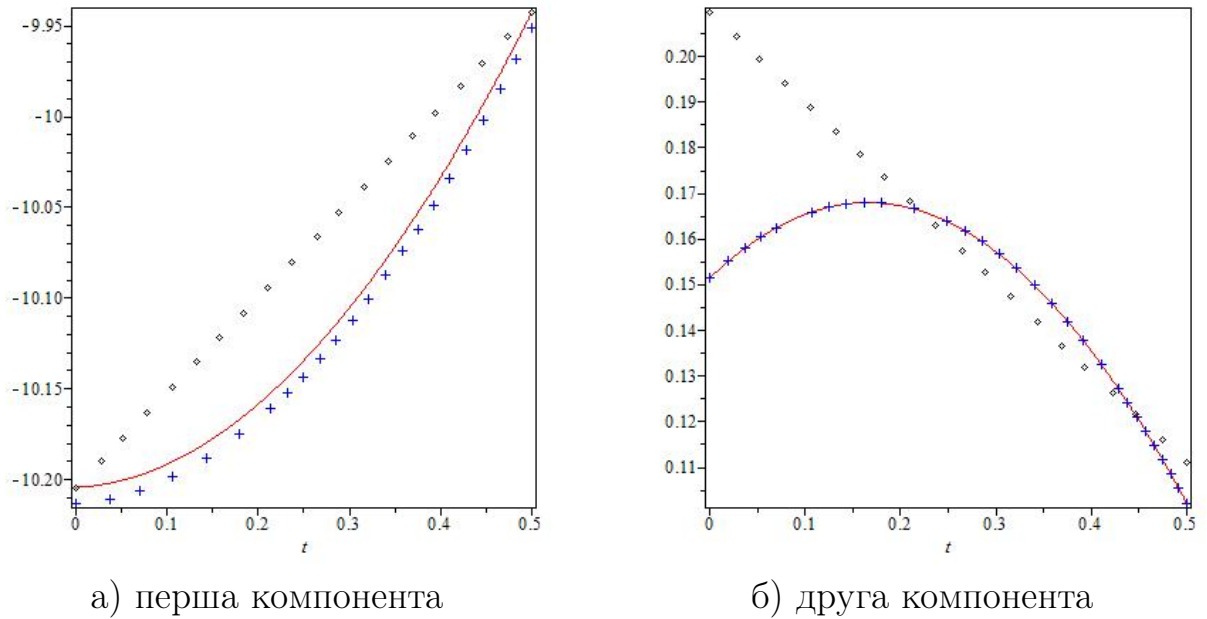


Рис. 4.2: Нульове (\diamond), перше (\times) та третє (лінія) наближення другого розв'язку.

Висновки до четвертого розділу

Досліджено нелінійну крайову задачу, підпорядковану нелінійним інтегральним умовам, які залежать як від невідомої функції так і її похідної. Показано доцільність зведення заданої ІКЗ до параметризованого модельного типу. Цікаво відзначити, що модельна параметризована задача має один і той же вигляд при будь-яких заданих крайових умовах. Для вивчення параметризованої модельної задачі застосовується одна і та ж чисельно-аналітична схема, яка орієнтована спеціально на модельну задачу.

Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної задачі. Отримані, з використанням топологічної степені Брауера, конструктивні достатні умови розв'язності інтегральної крайової задачі на базі вивчення властивостей так званих наближених визначальних рівнянь, які є алгебраїчними.

Проведена конструктивна перевірка достатніх умов існування на прикладі інтегральної крайової задачі. Встановлено також, необхідні умови розв'язності в сенсі, що отримані нерівності, які необхідні для того, щоб якась підмножина могла містити точку, яка визначає початкове значення розв'язку.

Одержані теоретичні результати апробовано на прикладі КЗ з нелінійними інтегральними крайовими умовами. Показано існування двох розв'язків. Основні результати опубліковано в роботах [4, 110, 111].

Розділ 5

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДІЛЕННЯМ НА ПІДІНТЕРВАЛИ

Дослідження розв'язків крайових задач (3.1), (3.2) та (3.1), (4.1) проведених у попередніх двох розділах дисертації пов'язане з властивостями спеціальних послідовностей функцій (3.11), (4.3). Головне обмеження пов'язане з збіжністю цих послідовностей полягає в тому, що найбільше власне значення матриці Q припускається меншим за одиницю:

$$Q = \frac{3(b-a)}{10}K \quad (5.1)$$

$$r(Q) < 1 \quad (5.2)$$

У цьому розділі покажемо, що використовуючи відповідну техніку ділення заданого інтервалу на підінтервали достатню умову (5.2) вдається послабити в два чи більше разів.

5.1 Постановка задачі та зведення до двох модельних задач

Розглянемо нелінійну інтегральну крайову задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \quad (5.3)$$

$$\int_a^b g(s, u(s)) ds = d, \quad (5.4)$$

де $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервні функції в певній обмеженій області D і $d \in \mathbb{R}^n$ заданий постійний вектор.

Зафіксуємо деякі відкриті обмежені області $D_a, D_{\frac{a+b}{2}}, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося неперервно диференційовними розв'язками u крайової задачі (5.3), (5.4) такими, що

$$u(a) \in D_a, \quad u\left(\frac{a+b}{2}\right) \in D_{\frac{a+b}{2}} \quad \text{і} \quad u(b) \in D_b. \quad (5.5)$$

В загальному можемо вибрати D_a , $D_{\frac{a+b}{2}}$, D_b опуклими множинами.

На основі множин D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$ введемо в розгляд множину

$$D_{a, \frac{a+b}{2}} = (1 - \theta)z + \theta\lambda, \quad z \in D_a, \quad \lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad \theta \in [0, 1], \quad (5.6)$$

згідно (2.1) і її покомпонентний векторний ρ^x – окіл

$$D^x = B(D_{a, \frac{a+b}{2}}, \rho^x) \quad (5.7)$$

так як в (2.2). Аналогічно, на основі множин $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b визначимо множину

$$D_{\frac{a+b}{2}, b} = (1 - \theta)\lambda + \theta\eta, \quad \lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad \eta \in D_b, \quad \theta \in [0, 1], \quad (5.8)$$

згідно (2.1) і її покомпонентним векторний ρ^y – окіл

$$D^y = B(D_{\frac{a+b}{2}, b}, \rho^y), \quad (5.9)$$

так як в (2.2).

Важливо підкреслити, що D^x , D^y є обмежені множини і надалі припускається, що умови Ліпшиця

$$f \in Lip(K_x, D^x), \quad f \in Lip(K_y, D^y), \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &\leq K_x |u - v|, \quad t \in [a, \frac{a+b}{2}], \quad \{u, v\} \in D^x, \\ |f(t, u) - f(t, v)| &\leq K_y |u - v|, \quad t \in [\frac{a+b}{2}, b], \quad \{u, v\} \in D^y \end{aligned} \quad (5.11)$$

в цих областях виконується локально.

Ставимо задачу знаходження неперервно диференційовного розв'язку u задачі (5.3), (5.4) для яких має місце включення (5.5).

Насамперед спростимо інтегральні крайові умови (5.4) і зведемо їх до підходящих умов модельного типу, аналогічно як в попередніх розділах. Для цього введемо в розгляд векторні параметри

$$z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \quad (5.12)$$

формально поклавши

$$z := u(a), \quad \lambda := u\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \eta := u(b). \quad (5.13)$$

Після цього, замість крайової задачі (5.3), (5.4) використовуючи техніку ділення відрізка навпіл, будемо розглядати відповідно на інтервалах $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ і $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, наступні дві „модельного типу“ параметризовані задачі (5.14)–(5.15) та (5.16)–(5.17):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x(a) = z, \quad (5.14)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda \quad (5.15)$$

та

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \quad (5.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y(b) = \eta, \quad (5.17)$$

де $z, \lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$ вважаються параметрами. Зауважимо, що довжина інтервалу в задачах (5.14)–(5.15) та (5.16)–(5.17) є $\frac{b-a}{2}$ в протилежність $b-a$ у випадку вихідної задачі (5.3), (5.4).

Техніка параметризації, яку будемо використовувати полягає в тому, що замість вихідної задачі (5.3), (5.4) ми вивчаємо сім'ю параметризованих модельних задач (5.14)–(5.15) та (5.16)–(5.17). Після цього, розв'язки вихідної КЗ отримуються відповідним вибором чисельних значень введених параметрів.

Зауваження 5.1. Множина розв'язків крайової задачі (5.3), (5.4) співпадає з тією множиною розв'язків параметризованих задач (5.14)–(5.15) та (5.16)–(5.17), які задовільняють додатковим умовам (5.13).

5.2 Ділення відрізка інтегрування навпіл та послідовні наближення

Отже, ми пропонуємо замість ІКЗ (5.3), (5.4) досліджувати спочатку окремо дві допоміжні модельні задачі (5.14)–(5.15) та (5.16)–(5.17). Для цього побудуємо підходящі ітераційні процеси і вивчимо їх властивості.

Покладемо, що областю визначення по фазовій змінній функції f в правій частині системи (5.3) є множина D^x вигляду (5.7), тобто $f : [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що $f \in Lip(K_x, D^x)$ з вектором ρ^x , який задовільняє нерівність

$$\rho^x \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad (5.18)$$

крім того

$$r(Q_x) < 1, \quad Q_x = \frac{3(b-a)}{20} K_x. \quad (5.19)$$

Для параметризованої задачі (5.14)–(5.15) введемо в розгляд наступну рекурентну параметризовану послідовність функцій $x_m : [a, \frac{a+b}{2}] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$, поклавши

$$\begin{aligned} x_0(t, z, \lambda) &= z + \frac{2(t-a)}{b-a} [\lambda - z] = \left[1 - \frac{2(t-a)}{b-a} \right] z + \frac{2(t-a)}{b-a} \lambda, t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right], \\ x_m(t, z, \lambda) &= z + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s, z, \lambda)) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_{m-1}(s, z, \lambda)) ds + \\ &\quad + \frac{2(t-a)}{b-a} [\lambda - z], t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right], \quad (5.20) \end{aligned}$$

для всіх $m = 1, 2, \dots, z \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Подібно, для параметризованої задачі (5.16)–(5.17) на підінтервалі $[\frac{a+b}{2}, b]$ покладемо, що областю визначення по фазовій змінній функції f є множина D^y вигляду (5.9), крім того припустимо, що $f \in Lip(K_y, D^y)$ з вектором ρ^y , який задовільняє нерівність

$$\rho^y \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) \quad (5.21)$$

i

$$r(Q_y) < 1, \quad Q_y = \frac{3(b-a)}{20} K_y. \quad (5.22)$$

Для вивчення другої модельної задачі (5.16)–(5.17) введемо в розгляд параметризовану послідовність функцій $y_m : \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$, поклавши

$$\begin{aligned} y_0(t, \lambda, \eta) &= \lambda + \frac{2t-a-b}{b-a} [\eta - \lambda] = \left[1 - \frac{2t-a-b}{b-a}\right] \lambda + \frac{2t-a-b}{b-a} \eta, \\ y_m(t, \lambda, \eta) &= \lambda + \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(s, y_{m-1}(s, \lambda, \eta)) ds - \frac{2t-a-b}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y_{m-1}(s, \lambda, \eta)) ds + \\ &\quad + \frac{2t-a-b}{b-a} [\eta - \lambda], \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad (5.23) \end{aligned}$$

для всіх $m = 1, 2, \dots$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що всі члени послідовності функцій (5.20), (5.23) задовольняють двоточкові модельні крайові умови (5.13) для всіх z , λ і η з \mathbb{R}^n .

5.3 Збіжність послідовних наближень

Будемо використовувати послідовності $x_m : \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$, і $y_m : \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$ з формул (5.20) та (5.23) для дослідження розв'язків вихідної ІКЗ (5.3), (5.4).

Наступне твердження показує, що послідовність функцій (5.20) рівномірно збігається для всіх $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і її гранична функція є розв'язком певної адитивно збуреної задачі.

Теорема 5.1. *Нехай існує невід'ємний вектор r^x такий, що $f \in Lip(K_x, D^x)$ на інтервалі $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ і який задовільняє нерівність (5.18) та виконується*

$$r(Q_x) < 1,$$

де матриця Q_x задана (5.19).

Тоді, для довільної пари векторів $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$:

1. Всі члени послідовності (5.20) є неперервно диференційовними функціями на інтервалі $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ і задовольняють модельні умови

$$x_m(t = a, z, \lambda) = z, \quad x_m\left(t = \frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = \lambda.$$

2. Послідовності функцій (5.20) на інтервалі $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції

$$x_\infty(t, z, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z, \lambda).$$

3. Гранична функція задовольняє умови

$$x_\infty(a, z, \lambda) = z, \quad x_\infty\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = \lambda.$$

4. Функція $x_\infty(t, z, \lambda)$ в області D^x є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_a^t f(s, x(s)) ds - \\ - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x(s)) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} [\lambda - z], \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

Іншими словами, $x_\infty(t, z, \lambda)$ є розв'язком наступної задачі Коші для адекватно збуреної системи:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{2}{b-a} \Delta(z, \lambda), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ x(a) = z, \tag{5.24}$$

де збурення $\Delta(z, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ є відображенням, яке задається формулою

$$\Delta(z, \lambda) = \lambda - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_\infty(s, z, \lambda)) ds. \tag{5.25}$$

5. Має місце наступна оцінка:

$$|x_\infty(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda)| \leq \\ \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, a, \frac{a+b}{2} \right) Q_x^m (I_n - Q_x)^{-1} \delta_{[a, \frac{b-a}{2}] \times D^x}(f), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right], m \geq 0,$$

де

$$\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x} f(t, x) \right],$$

$\alpha_1(t, a, \frac{b-a}{2})$ задано згідно (2.4).

Доведення. Доведення Теорема 5.1 може бути виконано аналогічно доведенню Теорема 3.1. \square

По аналогії з Теоремою 5.1 може бути встановлена рівномірна збіжність послідовності функцій (5.23).

Теорема 5.2. *Нехай існує невід'ємний вектор ρ^y такий, що $f \in Lip(K_y, D^y)$ на інтервалі $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, який також задовольняє нерівність (5.21) і*

$$r(Q_y) < 1$$

де матриця Q_y задана в (5.22).

Тоді для довільної фіксованої пари векторів $(\lambda, \eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$:

1. *Всі члени послідовності функції (5.23) є неперервно диференційовними на інтервалі $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ і задовольняють модельні умови*

$$y_m \left(t = \frac{a+b}{2}, \lambda, \eta \right) = \lambda, \quad y_m(t = b, \lambda, \eta) = \eta.$$

2. *Послідовності функцій (5.23) на інтервалі $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції*

$$y_\infty(t, \lambda, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t, \lambda, \eta)$$

3. Гранична функція задовольняє умови

$$y_\infty \left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta \right) = \lambda, \quad y_\infty(b, \lambda, \eta) = \eta.$$

4. Функція $y_\infty(t, \lambda, \eta)$ в області D^y є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \lambda + \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(s, y(s)) ds - \frac{2t-a-b}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y(s)) ds + \\ + \frac{2t-a-b}{b-a} [\eta - \lambda], \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

Іншими словами, $y_\infty(t, \lambda, \eta)$ є розв'язком наступної задачі Коші для збуреної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \frac{2}{b-a} H(\lambda, \eta), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \quad (5.26)$$

$$y \left(\frac{a+b}{2} \right) = \lambda,$$

де збурення $H(\lambda, \eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ є відображенням, яке задається формулою

$$H(\lambda, \eta) = \eta - \lambda - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y_\infty(s, \lambda, \eta)) ds. \quad (5.27)$$

5. Має місце наступна оцінка:

$$|y_\infty(t, \lambda, \eta) - y_m(t, \lambda, \eta)| \leq \\ \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right) Q_y^m (I_n - Q_y)^{-1} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b] \times D^y}(f), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right], \quad m \geq 0,$$

де

$$\delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y} f(t, x) \right],$$

$\alpha_1(t, \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$ задано згідно (2.4).

Доведення. Доведення Теорема 5.2 може бути виконано аналогічно доведенню Теорема 3.4. \square

5.4 Граничні функції і визначальні рівняння

Природно сподіватися, що граничні функції $x_\infty(t, z, \lambda)$ і $y_\infty(t, \lambda, \eta)$ послідовностей (5.20) і (5.23) на підінтервалах $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ можуть бути корисними для отримання критерія розв'язності ІКЗ (5.3), (5.4). Виявляється, що функції

$$\Delta(z, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ і } H(\lambda, \eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

які задані рівняннями (5.25) і (5.27) дають можливість зробити такий висновок.

Насправді, Теорема 5.1 і 5.2 гарантують, що при зроблених допущеннях функції

$$x_\infty(t, z, \lambda) : \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ і } y_\infty(t, \lambda, \eta) : \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

є коректно визначеними для всіх $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і $(\lambda, \eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$. Тому, якщо покласти

$$u_\infty(t, z, \lambda, \eta) := \begin{cases} x_\infty(t, z, \lambda), & \text{якщо } t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ y_\infty(t, \lambda, \eta), & \text{якщо } t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases} \quad (5.28)$$

ми одержимо функцію $u_\infty(t, z, \lambda, \eta) : [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, яка також коректно визначена для тих же значень параметрів $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і $(\lambda, \eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$. Очевидно, що ця функція є неперервною, тому що в точці $t = \frac{a+b}{2}$ маємо

$$x_\infty\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = y_\infty\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right) = \lambda. \quad (5.29)$$

Поряд з рівняннями (5.14) і (5.16) визначених відповідно на інтервалах $[a, \frac{a+b}{2}]$ і $[\frac{a+b}{2}, b]$, введемо в розгляд наступні рівняння з адитивним збуренням

у правій частині

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{2}{b-a}\mu^x, \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad (5.30)$$

з початковою умовою

$$x(a) = z, \quad (5.31)$$

та

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \frac{2}{b-a}\mu^y, \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \quad (5.32)$$

з початковою умовою

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \quad (5.33)$$

де

$$\mu^x = \text{col}(\mu_1^x, \dots, \mu_n^x), \quad \mu^y = \text{col}(\mu_1^y, \dots, \mu_n^y) \in \mathbb{R}^n$$

вважаємо керуючими параметрами.

Теорема 5.3. *Нехай $z \in D_a$ і $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$ є фіксовані. Припустимо, що всі умови Теорем 5.1, 5.2 мають місце.*

Тоді, для того, щоб розв'язки $x(\cdot, a, z)$ і $y(\cdot, \frac{a+b}{2}, \lambda)$ задач Коші (5.30), (5.31) і (5.32), (5.33), відповідно мали властивості модельних умов

$$x(a) = z, \quad x\left(\frac{a+b}{2}, a, z\right) = \lambda,$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda, \quad y\left(b, \frac{a+b}{2}, \lambda\right) = \eta,$$

необхідно і достатньо, щоб керуючі параметри μ^x і μ^y були задані формулами:

$$\mu^x = \lambda - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_\infty(s, z, \lambda)) ds$$

та

$$\mu^y = \eta - \lambda - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y_\infty(s, \lambda, \eta)) ds,$$

де $x_\infty(\cdot, z, \lambda)$ і $y_\infty(\cdot, \lambda, \eta)$ є відповідно граничними функціями послідовностей

(5.20) та (5.23). Більш того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty(\cdot, z, \lambda), \quad y\left(\cdot, \frac{a+b}{2}, \lambda\right) = y_\infty(\cdot, \lambda, \eta).$$

Доведення. Доведення цієї теореми може бути проведено аналогічно доведенню Теореми 3.2. \square

Наступна теорема встановлює зв'язок функції (5.28) з розв'язком ІКЗ (5.3), (5.4) в термінах нулів функцій $\Delta(z, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $H(\lambda, \eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, які визначені в (5.25), (5.27).

Теорема 5.4. *Нехай виконуються умови Теорем 5.1, 5.2.*

Тоді:

1. Функція $u_\infty(t, z, \lambda, \eta) : [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ задана згідно (5.28) є неперервно диференційовним розв'язком ІКЗ (5.3), (5.4) тоді і тільки тоді, коли трійка векторів (z, λ, η) задовольняє систему $3n$ алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta(z, \lambda) &= \lambda - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_\infty(s, z, \lambda)) ds = 0, \\ H(\lambda, \eta) &= \eta - \lambda - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y_\infty(s, \lambda, \eta)) ds = 0, \\ P(z, \lambda, \eta) &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s, x_\infty(s, z, \lambda)) ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(s, y_\infty(s, \lambda, \eta)) ds - d = 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

2. Для будь-якого розв'язку $U(\cdot)$ задачі (5.3), (5.4) з властивістю

$$\left(U(a), U\left(\frac{a+b}{2}\right), U(b) \right) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b,$$

існує така трійка векторів (z_0, λ_0, η_0) , що

$$U(\cdot) = u_\infty(t, z_0, \lambda_0, \eta_0),$$

де функція $u_\infty(t, z_0, \lambda_0, \eta_0)$ задана згідно (5.28).

Доведення. Аналогічно доведенню Теорема 3.4. Неперервна диференційовність розв'язку

$$u_{\infty}(t, z, \lambda, \eta) : [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$$

в точці $t = \frac{a+b}{2}$ випливає з рівнянь (5.29), (5.24), (5.26), та з перших двох формул системи (5.34), неперервна диференційовність цієї функції в інших точках відрізка очевидна з їх означення. \square

Систему рівнянь (5.34) називають системою визначальних рівнянь тому, що її корені визначають розв'язки заданої крайової задачі.

Хоча Теорема 5.5 теоретично дає відповідь як побудувати розв'язок КЗ (5.3), (5.4), однак її застосування пов'язане з труднощами, тому що явний вигляд $x_{\infty}(t, z, \lambda)$, $y_{\infty}(t, \lambda, \eta)$ і функцій

$$\Delta(z, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(\lambda, \eta) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$P(z, \lambda, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

які задані в (5.34) зазвичай є невідомими. Ці труднощі можуть бути подолані, якщо застосувати функції $x_m(s, z, \lambda)$, $y_m(s, \lambda, \eta)$ для якогось фіксованого m . На їх основі замість точної визначальної системи можна розглядати так звану m -ту наближену систему визначальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta_m(z, \lambda) &= \lambda - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_m(s, z, \lambda)) ds = 0, \\ H_m(\lambda, \eta) &= \eta - \lambda - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y_m(s, \lambda, \eta)) ds = 0, \\ P_m(z, \lambda, \eta) &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s, x_m(s, z, \lambda)) ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(s, y_m(s, \lambda, \eta)) ds - d = 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Зауважимо, що в протизага (5.34) m -та наближена визначальна система (5.35) містить в собі члени, які залежать від функцій $x_m(\cdot, z, \lambda)$, $y_m(\cdot, \lambda, \eta)$ і тому

вона явно може бути побудована.

Природно очікувати, що наближення до невідомого розв'язку задачі (5.3), (5.4) може бути отримано на основі функції

$$u_m(t, z, \lambda, \eta) = \begin{cases} x_m(t, z, \lambda), & \text{якщо } t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ y_m(t, \lambda, \eta), & \text{якщо } t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases} \quad (5.36)$$

яка є „наближеним“ варіантом до (5.28) і яка коректно визначена для всіх $t \in [a, b]$ та $(z, \lambda) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$, $(\lambda, \eta) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$.

Лема 5.1. *Якщо вектори z , λ і η задовольняють наближену систему визначальних рівнянь (5.35), для деякого фіксованого t , тоді функція $u_m(t, z, \lambda, \eta)$, яка задана рівнянням (5.36) є неперервно диференційовною на відрізку $[a, b]$.*

Доведення. Нагадаємо, що функції (5.20) та (5.23) мають властивість

$$x_m\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right) = y_m\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right) = \lambda. \quad (5.37)$$

Безпосередньо (5.20), (5.23) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{dx_{m+1}\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right)}{dt} &= f\left(\frac{a+b}{2}, x_m\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right)\right) - \\ &\quad - \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(s, x_m(s, z, \lambda)) ds + \frac{2}{b-a} [\lambda - z] \end{aligned} \quad (5.38)$$

та

$$\begin{aligned} \frac{dy_{m+1}\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right)}{dt} &= f\left(\frac{a+b}{2}, y_m\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right)\right) - \\ &\quad - \frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(s, y_m(s, \lambda, \eta)) ds + \frac{2}{b-a} [\eta - \lambda]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Враховуючи перші два рівняння з системи (5.35) з формул (5.38) і (5.39) слідує, що

$$\frac{dx_{m+1}\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right)}{dt} = f\left(\frac{a+b}{2}, x_m\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right)\right) \quad (5.40)$$

та

$$\frac{dy_{m+1}\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right)}{dt} = f\left(\frac{a+b}{2}, y_m\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right)\right). \quad (5.41)$$

Якщо врахувати (5.37) з (5.40), (5.41) маємо, що

$$\frac{dx_{m+1}\left(\frac{a+b}{2}, z, \lambda\right)}{dt} = \frac{dy_{m+1}\left(\frac{a+b}{2}, \lambda, \eta\right)}{dt}$$

і тому згідно (5.36) $\frac{du_m(t, z, \lambda, \eta)}{dt}$ є неперервною в $\frac{a+b}{2}$. Неперервна диференційовність функції $u_m(t, z, \lambda, \eta)$ в інших точках відрізка очевидним образом впливає з побудови. \square

Теорема 5.4 може бути доповнена наступним зауваженням. Нехай вектори $(\tilde{z}, \tilde{\lambda}, \tilde{\eta}) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$ є коренями наближеної визначальної системи (5.35) для деякого фіксованого m . Тоді функція

$$U_m(t) = u_m(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}, \tilde{\eta}) = \begin{cases} x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right), & \text{якщо } t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ y_m\left(t, \tilde{\lambda}, \tilde{\eta}\right), & \text{якщо } t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases},$$

яка задається згідно (5.36) може розглядатися як m -те наближення до неперервно диференційовного розв'язку ІКЗ (5.3), (5.4). Наступна оцінка впливає безпосередньо з Теорем 5.1, 5.2

$$\begin{aligned} & |\tilde{x}_\infty(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}) - x_m(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda})| \leq \\ & \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2}\right) Q_x^m (I_n - Q_x)^{-1} \delta_{\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \times D^x}(f), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ & |\tilde{y}_\infty(t, \tilde{\lambda}, \tilde{\eta}) - y_m(t, \tilde{\lambda}, \tilde{\eta})| \leq \\ & \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) Q_y^m (I_n - Q_y)^{-1} \delta_{\left[\frac{a+b}{2}, b\right] \times D^y}(f), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{aligned}$$

5.5 Приклад з двома розв'язками та ділення відрізка інтегрування навпіл

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{t}{4}x_2^2(t) - \frac{7t}{2}x_1(t) + \frac{27}{64}t^3 + \frac{3}{5}t, \\ x_2'(t) = t^2x_1(t) - \frac{t}{4}x_2(t) - \frac{1}{8}t^4 - \frac{3}{80}t^2 + \frac{1}{4}, \quad t \in [0, 1], \end{cases} \quad (5.42)$$

підпорядковану інтегральним крайовим умовам

$$\begin{cases} \int_0^1 sx_1(s)x_2(s)ds = \frac{7}{480} \\ \int_0^1 s^2x_2^2(s)ds = \frac{1}{80} \end{cases}. \quad (5.43)$$

Очевидно, що (5.42), (5.43) є окремим випадком (5.3), (5.4) при $a := 0$, $b := 1$,

$$f(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{t}{4}x_2^2 - \frac{7t}{2}x_1 + \frac{27}{64}t^3 + \frac{3}{5}t, \\ t^2x_1 - \frac{t}{4}x_2 - \left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{80}\right)t^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$g(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} tx_1x_2 \\ t^2x_2^2 \end{pmatrix}, \text{ і } d := \begin{pmatrix} 7/480 \\ 1/80 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що один з розв'язків ІКЗ (5.42), (5.43) має вигляд:

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{8} + \frac{1}{10}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{4}. \quad (5.44)$$

Введемо наступні параметри, згідно (5.12), (5.13):

$$\begin{aligned} z &:= x(0) = \text{col}(x_1(0), x_2(0)) = \text{col}(z_1, z_2), \\ \lambda &:= x\left(\frac{1}{2}\right) = \text{col}\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2), \\ \eta &:= x(1) = \text{col}(x_1(1), x_2(1)) = \text{col}(\eta_1, \eta_2). \end{aligned}$$

Нехай опуклі підмножини D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$, де шукаємо значення розв'язку $x(a)$ та $x(\frac{a+b}{2})$, мають вигляд:

$$D_a = D_{\frac{a+b}{2}} = \{(x_1, x_2) : 0.001 \leq x_1 \leq 0.14, -0.1 \leq x_2 \leq 0.14\}.$$

А опуклі підмножини $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b , де шукаємо значення розв'язку $x(\frac{a+b}{2})$ та $x(b)$ виглядають наступним чином:

$$D_{\frac{a+b}{2}} = D_b = \{(y_1, y_2) : 0.12 \leq y_1 \leq 0.23, 0.1 \leq y_2 \leq 0.26\}.$$

В цьому випадку опукла лінійна комбінація $D_{a, \frac{a+b}{2}}$ вигляду (5.6) для векторів $z \in D_a$ і $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$ є наступною: $D_{a, \frac{a+b}{2}} = D_a = D_{\frac{a+b}{2}}$.

А опукла лінійна комбінація $D_{\frac{a+b}{2}, b}$ вигляду (5.8) для векторів $\lambda \in D_{\frac{a+b}{2}}$ і $\eta \in D_b$ є наступною: $D_{\frac{a+b}{2}, b} = D_{\frac{a+b}{2}} = D_b$.

Вектор ρ^x та ρ^y вибираємо наступним чином

$$\rho^x = \rho^y = \text{col}(0.7; 0.7).$$

Отже ρ^x – окіл D^x для $D_{a, \frac{a+b}{2}}$ задається наступним чином

$$D^x = \{(x_1, x_2) : -0.701 \leq x_1 \leq 0.84, -0.8 \leq x_2 \leq 0.84\}$$

Векторний ρ^y – окіл D^y для $D_{\frac{a+b}{2}, b}$ задається наступним чином

$$D^y = \{(y_1, y_2) : -0.58 \leq y_1 \leq 0.93, -0.6 \leq y_2 \leq 0.96\}.$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (5.10) для правої частини системи диференціальних рівнянь (5.42) в області $D = D^x \cup D^y$ виконується з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 7/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix},$$

але в цьому випадку не виконується умова (4.2), бо

$$Q = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} 7/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad r(Q) = 1.061405 > 1.$$

Після ділення відрізка інтегрування навпіл в областях D^x та D^y умова Ліпшиця (5.11) виконується, відповідно з матрицями K_x, K_y , на основі яких

	m=0	m=1	m=3	m=7
z_1	0.09511531356	0.1000871447	0.09999272334	0.099999981
z_2	4.0158455×10^{-6}	0.000035396	0.000002826281	3.4218408×10^{-9}
λ_1	0.1262556725	0.1312562435	0.1312423042	0.13124998
λ_2	0.1249924882	0.1250395576	0.1250027922	0.1250000027
η_1	0.2198432299	0.2248977438	0.2249981283	0.2249999863
η_2	0.2500045171	0.2500433008	0.2500023885	0.2500000033

Табл. 5.1: Наближені значення параметрів для першого розв'язку (5.44)

$$Q_x := \frac{3}{20}K_x = \frac{3}{20} \begin{bmatrix} 7/4 & 1/32 \\ 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}, \quad r(Q_x) = 0.2632 < 1,$$

$$Q_y := \frac{3}{20}K_y = \frac{3}{20} \begin{bmatrix} 7/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad r(Q_y) = 0.5307 < 1.$$

Якщо вектори ρ^x, ρ^y вибрати як нище вказано і обчислити $\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f)$, $\delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f)$, то отримаємо:

$$\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D^x} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D^x} f(t, x) \right] = \begin{bmatrix} 1.392475, \\ 0.295125 \end{bmatrix},$$

$$\rho^x = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \begin{bmatrix} 0.34811875, \\ 0.07378125 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times D^y} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times D^y} f(t, x) \right] = \begin{bmatrix} 2.7577, \\ 0.95 \end{bmatrix},$$

$$\rho^y = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \begin{bmatrix} 0.689425, \\ 0.2375 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, ми перевірили, що всі умови Теорем 5.1, 5.2 для крайової задачі (5.42), (5.43) мають місце.

Використовуючи пакет символної математики Maple розв'язуємо наближену систему визначальних рівнянь (5.25), (5.27) при $m = 0, 1, 3, 7$ і отримуємо чисельні результати, які представлені в Таблиці 5.1.

На Рис. 5.1 зображено графіки компонент першого (5.44) та наближеного

розв'язків на нульовій і сьомій ітерації.

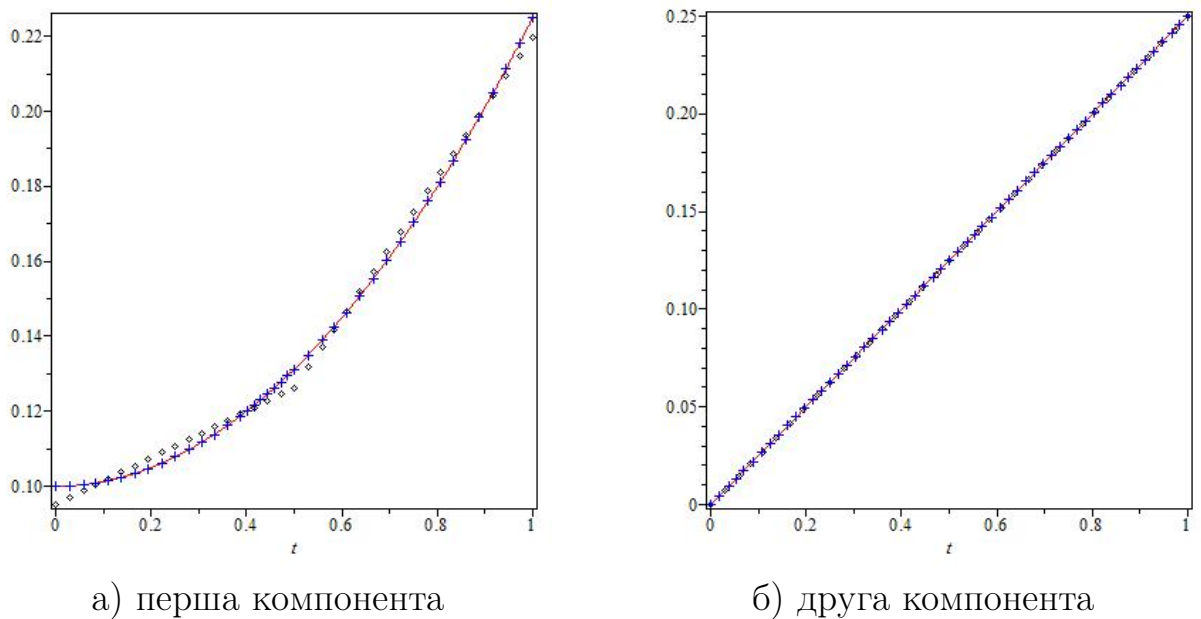


Рис. 5.1: Перший розв'язок (5.44) (лінія) та його нульове (\diamond) і сьоме наближення (\times).

На основі Теорема 5.4 число розв'язків наближеної визначальної алгебраїчної системи (5.35) співпадає з числом розв'язків даної інтегральної крайової задачі (5.42), (5.43). Крім розв'язку представленого в Таблиці 5.1 маємо ще один розв'язок, який показано в Таблиці 5.2.

Для отримання другого розв'язку відповідні множини вибираємо наступним чином:

$$D_a = D_{\frac{a+b}{2}} = \{(x_1, x_2) : -0.47 \leq x_1 \leq -0.2, -0.36 \leq x_2 \leq -0.23\}.$$

А опуклі підмножини $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b , де шукаємо значення розв'язку $x(\frac{a+b}{2})$ та $x(b)$ мають вигляд:

$$D_{\frac{a+b}{2}} = D_b = \{(y_1, y_2) : -0.23 \leq y_1 \leq 0.13, -0.25 \leq y_2 \leq -0.12\}.$$

$$D_{a, \frac{a+b}{2}} = D_a = D_{\frac{a+b}{2}}, \quad D_{\frac{a+b}{2}, b} = D_{\frac{a+b}{2}} = D_b.$$

Отже, векторний ρ^x – окіл D^x для $D_{a, \frac{a+b}{2}}$ задається наступним чином

$$D^x = \{(x_1, x_2) : -1.17 \leq x_1 \leq 0.5, -1.06 \leq x_2 \leq 0.47\}.$$

	m=0	m=1	m=3	m=7
\hat{z}_1	-0.4606311523	-0.4600459223	-0.4605775388	-0.4605699988
\hat{z}_2	-0.3592791480	-0.3588100487	-0.3586360553	-0.3586373911
$\hat{\lambda}_1$	-0.2395290393	-0.2288301475	-0.2289726229	-0.2289732239
$\hat{\lambda}_2$	-0.240160585	-0.2405391230	-0.2403938592	-0.2403944639
$\hat{\eta}_1$	0.1314467787	0.1278495443	0.1273373239	0.1273450421
$\hat{\eta}_2$	-0.1373267131	-0.1346356173	-0.1344486528	-0.1344493662

Табл. 5.2: Наближені значення параметрів для другого розв'язку

Векторний ρ^y – окіл D^y для $D_{\frac{a+b}{2}, b}$:

$$D^y = \{(y_1, y_2) : -0.93 \leq y_1 \leq 0.83, -0.95 \leq y_2 \leq 0.58\}.$$

При дослідженні другого розв'язку умови Теорем 5.1, 5.2 теж виконуються, бо:

$$\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D^x} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [0, \frac{1}{2}] \times D^x} f(t, x) \right] = \begin{bmatrix} 1.531475, \\ 0.30437 \end{bmatrix},$$

$$\rho^x = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \begin{bmatrix} 0.3828687, \\ 0.07609375 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times D^y} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times D^y} f(t, x) \right] = \begin{bmatrix} 2.6678125 \\ 0.92125 \end{bmatrix},$$

$$\rho^y = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \begin{bmatrix} 0.6669531250, \\ 0.2303125 \end{bmatrix}.$$

На Рис. 5.2 показано графіки нульового, першого та сьомого наближення до другого розв'язку даної інтегральної КЗ.

Підставивши сьоме наближення $\tilde{x}_7(t) = col(\tilde{x}_{71}(t), \tilde{x}_{72}(t))$ в систему диференціальних рівнянь (5.42) отримаємо наступну нев'язку:

$$\max_{t \in [0,1]} \left| \tilde{x}'_{71}(t) - \frac{t}{4} \tilde{x}_{72}^2(t) + \frac{7t}{2} \tilde{x}_{71}(t) - \frac{27}{64} t^3 - \frac{3}{5} t \right| \approx 2 \cdot 10^{-6},$$

$$\max_{t \in [0,1]} \left| \tilde{x}'_{72}(t) - t^2 \tilde{x}_{71}(t) + \frac{t}{4} \tilde{x}_{72}(t) + \frac{1}{8} t^4 + \frac{3}{80} t^2 - \frac{1}{4} \right| \approx 6 \cdot 10^{-7}.$$

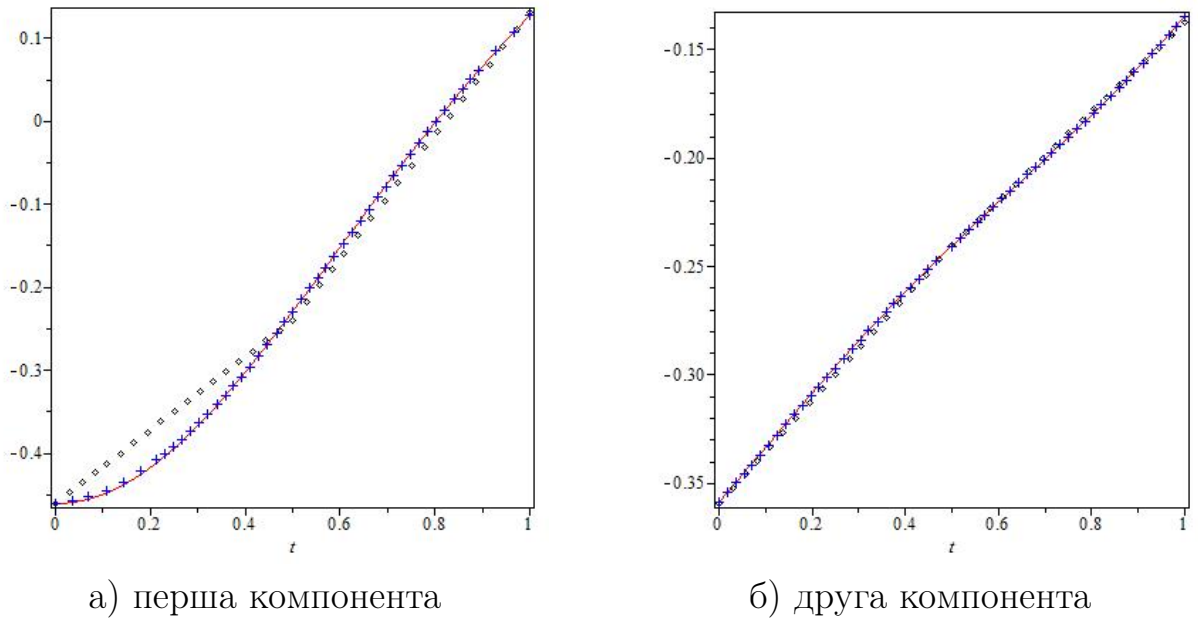


Рис. 5.2: Нульове (\diamond), перше (\times) та сьоме (лінія) наближення до другого розв'язку.

5.6 Ділення відрізка інтегрування на підінтервали та зведення до модельних задач

В підрозділі 5.3 у випадку нелінійної інтегральної крайової задачі (5.3), (5.4) було обґрунтовано ділення відрізка інтегрування навпіл. Достатні умови збіжності відповідних ітераційних процесів істотно можна послабити, якщо замість ділення відрізка навпіл застосувати техніку ділення на скінченну кількість підінтервалів.

Дослідимо розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь (5.3) підпорядкованим нелінійним інтегральним крайовим умовам, які залежать як від невідомої функції так і її похідної:

$$\int_a^b \left[g(s, u(s)) + h \left(s, \frac{du(s)}{ds} \right) \right] ds = d, \quad (5.45)$$

де $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ і $h : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервними і локально ліпшицевими функціями в деякій обмеженій області, яка є коректно визначеною нижче, $d \in \mathbb{R}^n$ – заданий вектор.

Наслідуючи ідею, яка застосовується при чисельному розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, поділемо інтервал $[a, b]$ із змін-

ним кроком

$$t_k = t_{k-1} + h_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_0 = a, \quad t_N = b \quad (5.46)$$

на N підінтервалів

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], \dots, [t_{N-1}, t_N]. \quad (5.47)$$

Зауважимо, що в (5.47) може бути також і постійна величина кроку

$$h = h_k = \frac{b - a}{N} = \frac{t_N - t_0}{N}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Огляд літератури показує, що у випадку нелінійних крайових задач при застосуванні чисельно-аналітичних методів ділення відрізка інтегрування на підінтервали застосовується вперше.

Зафіксуємо деякі відкриті обмежені множини

$$D^k \subset \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.48)$$

і будемо досліджувати неперервно диференційовні розв'язки u задачі (5.3), (5.45) значення яких в точках (5.46) належать області D^k :

$$u(t_k) \in D^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5.49)$$

Без втрати загальності можемо вибрати $D^k, k = 0, 1, 2, \dots, N$ опуклими.

На основі (5.48), (2.1) введемо в розгляд множини:

$$D_{k-1,k} := (1 - \theta)z^{(k-1)} + \theta z^{(k)}, \quad z^{(k-1)} \in D^{k-1}, \quad z^{(k)} \in D^k, \quad \theta \in [0, 1], \quad (5.50)$$

$k = 1, 2, \dots, N$ і відповідно їх покомпонентні $\rho^{(k)}$ -векторні околи :

$$D^{[k]} := B(D_{k-1,k}, \rho^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.51)$$

згідно (2.2).

Аналогічно, як в попередніх розділах, насамперед спростимо інтегральні крайові умови (5.45). Для того, щоб їх замінити модельними умовами, введе-

мо в розгляд векторні параметри

$$z^{(k)} = \text{col}(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.52)$$

і формально покладемо

$$z^{(k)} := u(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5.53)$$

Після цього замість ІКЗ (5.3), (5.45) використовуючи техніку ділення на підінтервали (5.46), (5.47) будемо вивчати на інтервалах $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$ відповідно N „модельного типу“ задач :

$$\frac{dx^{(k)}(t)}{dt} = f(t, x^{(k)}(t)), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.54)$$

$$x(t_{k-1}) = z^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$\frac{dx^{(k)}(t)}{dt} = f(t, x^{(k)}(t)), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.55)$$

$$x(t_k) = z^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

де $z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ вважаються векторними параметрами. Зауважимо, що довжина інтервалів, де розглядаються модельні задачі (5.54)–(5.55), дорівнює кроку h_k в протилежність $b - a$ у випадку вихідної КЗ (5.3), (5.45).

Знайшовши розв'язки допоміжних модельних задач (5.54)–(5.55) при $k = 1, 2, \dots, N$ повертаємось до вихідної ІКЗ (5.3), (5.45). Розв'язки вихідної ІКЗ отримуються відповідним вибором чисельних значень введених параметрів.

Покладемо, що область визначення по фазовій змінній для модельних задач (5.54)–(5.55) є відповідно множини $D^{[k]}$, які задані формулою (5.51).

Припустимо, що

$$f \in \text{Lip}(K_k, D^{[k]}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.56)$$

де $\rho^{(k)}$ в формулі (5.51) задовольняють нерівності

$$\rho^{(k)} \geq \frac{h_k}{2} \delta_{[t_{k-1}, t_k], D^{[k]}}(f), \quad (5.57)$$

$$\delta_{[t_{k-1}, t_k], D^{[k]}(f)} = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [t_{k-1}, t_k] \times D^{[k]}} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [t_{k-1}, t_k] \times D^{[k]}} f(t, x) \right], \quad (5.58)$$

крім того вважаємо, що матриці K_k в умові Ліпшиця (5.56) такі, що для найбільших власних значення матриць

$$Q_k := 3 \frac{h_k}{10} K_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.59)$$

має місце

$$r(Q_k) < 1. \quad (5.60)$$

Для модельного типу задач (5.54)–(5.55) введемо в розгляд рекурентну параметризовану послідовність функцій

$$x_m^{(k)} : [t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

ПОКЛАВШИ

$$x_0^{(k)} \left(t, z^{(k-1)}, z^{(k)} \right) = z^{(k-1)} + \frac{(t - t_{k-1})}{h_k} \left[z^{(k)} - z^{(k-1)} \right] = \quad (5.61)$$

$$= \left[1 - \frac{t - t_{k-1}}{h_k} \right] z^{(k-1)} + \frac{t - t_{k-1}}{h_k} z^{(k)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$x_m^{(k)} \left(t, z^{(k-1)}, z^{(k)} \right) = z^{(k-1)} + \int_{t_{k-1}}^t f \left(s, x_{m-1}^{(k)} \left(s, z^{(k-1)}, z^{(k)} \right) \right) ds - \quad (5.62)$$

$$- \frac{t - t_{k-1}}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \left(s, x_{m-1}^{(k)} \left(s, z^{(k-1)}, z^{(k)} \right) \right) ds + \frac{t - t_{k-1}}{h_k} \left[z^{(k)} - z^{(k-1)} \right],$$

для всіх $m = 1, 2, \dots, z^{(k-1)} \in \mathbb{R}^n, z^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ і $t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N$.

Зауважимо, що всі члени послідовностей функцій (5.61), (5.62) задовольняють модельні умови $x(t_{k-1}) = z^{(k-1)}, x(t_k) = z^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N$, для будь-яких $z^{(k-1)} \in \mathbb{R}^n$ і $z^{(k)} \in \mathbb{R}^n$.

5.7 Дослідження збіжності послідовних наближень та визначальні рівняння

Будемо використовувати послідовності $\left\{x_m^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)})\right\}_{m=0}^{\infty}$, $k = \overline{1, N}$ з (5.61) та (5.62) для дослідження розв'язків заданої КЗ (5.3), (5.45).

Наступне твердження показує, що послідовність (5.62) є рівномірно збіжною і її гранична функція є розв'язком певної адитивно збуреної задачі для всіх $(z^{(k-1)}, z^{(k)}) \in D^{k-1} \times D^k$.

Теорема 5.5. *Нехай $f \in Lip(K_k, D^{[k]})$, для всіх $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$ і існують невід'ємні вектори $\rho^{(k)}$, для яких виконується нерівність (5.57) і крім того, власні значення матриць Q_k вигляду (5.59) задовільняють нерівність (5.60) для $k = 1, 2, \dots, N$.*

Тоді, для довільної фіксованої пари векторів $(z^{(k-1)}, z^{(k)}) \in D^{k-1} \times D^k$, $k = 1, 2, \dots, N$:

1. *Всі члени послідовності (5.62) є неперервно диференційовними функціями на інтервалі $t \in [t_{k-1}, t_k]$ і задовольняють параметризовані модельні умови*

$$x_m^{(k)}(t_{k-1}, z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, N,$$

$$x_m^{(k)}(t_k, z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N.$$

2. *Послідовність функцій (5.62) при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції*

$$x_{\infty}^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)}), k = 1, 2, \dots, N$$

3. *Граничні функції задовольняють модельні умови*

$$x_{\infty}^{(k)}(t_{k-1}, z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k-1)}, x_{\infty}^{(k)}(t_k, z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N.$$

4. *Функції $x_{\infty}^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)})$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегральних рівнянь*

$$x^{(k)}(t) = z^{(k-1)} + \int_{t_{k-1}}^t f(s, x^{(k)}(s)) ds - \frac{t - t_{k-1}}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s, x^{(k)}(s)) ds + \\ + \frac{t - t_{k-1}}{h_k} [z^{(k)} - z^{(k-1)}], \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

відповідно в областях $D^{[k]}$.

Іншими словами функції $x_\infty^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)})$ є розв'язками наступних задач Коші для збурених систем диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = f(t, x^{(k)}) + \frac{1}{h_k} \Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$x(t_{k-1}) = z^{(k-1)},$$

де $\Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}) : D^{k-1} \times D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ відображення, які задані формулою

$$\Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k)} - z^{(k-1)} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s, x_\infty^{(k)}(s, z^{(k-1)}, z^{(k)})) ds, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.63)$$

5. Має місце наступна оцінка для всіх $t \geq 0, k = 1, 2, \dots, N$:

$$\left| x_\infty^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)}) - x_m^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)}) \right| \leq \\ \leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, t_{k-1}, h_k) Q_k^m (I_n - Q_k)^{-1} \delta_{[t_{k-1}, t_k], D^{[k]}}(f), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad (5.64)$$

де $\delta_{[t_{k-1}, t_k], D^{[k]}}(f)$ задані в (5.58) і $\alpha_1(t, t_{k-1}, h_k) \leq \frac{h_k}{2}$ визначено згідно (2.4).

Доведення. Для доведення теореми потрібно N разів повторити міркування проведені в Теоремі 3.1. Оскільки, модельні крайові задачі (5.54)–(5.55) вивчаються незалежно один від одного. \square

Отже, Теорема 5.5 гарантує, що при зроблених припущеннях функції

$$x_\infty^{(k)}(t, z^{(k-1)}, z^{(k)}) : [t_{k-1}, t_k] \times D^{k-1} \times D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

коректно визначені для всіх $(z^{(k-1)}, z^{(k)}) \in D^{k-1} \times D^k$.

Тому, якщо покласти

$$u_\infty(t, z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = \begin{cases} x_\infty^{(1)}(t, z^{(0)}, z^{(1)}), & \text{якщо } t \in [t_0, t_1], \\ x_\infty^{(2)}(t, z^{(1)}, z^{(2)}), & \text{якщо } t \in [t_1, t_2], \\ \dots & \dots \\ x_\infty^{(N)}(t, z^{(N-1)}, z^{(N)}), & \text{якщо } t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases} \quad (5.65)$$

отримаємо функцію $u_\infty(t, z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) : [a, b] \times D^0 \times D^1 \times \dots \times D^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, яка коректно поставлена для всіх значень $z^{(k)} \in D^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Ця функція очевидно неперервна тому, що в точці $t = t_k$ маємо

$$x_\infty^{(k)}(t_k, z^{(k-1)}, z^{(k)}) = x_\infty^{(k)}(t_k, z^{(k)}, z^{(k+1)}), k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Наступна теорема встановлює зв'язок функції (5.65) з розв'язком ІКЗ (5.3), (5.45) за допомогою нулів функцій $\Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}) : D^{k-1} \times D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданих згідно (5.63).

Теорема 5.6. *Нехай виконуються всі умови Теорема 5.5.*

Тоді:

1. *Функція $u_\infty(t, z^{(k-1)}, z^{(k)}) : [a, b] \times D^{k-1} \times D^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, яка задана формулою (5.65) є неперервно диференційовним розв'язком КЗ (5.3), (5.45) тоді і тільки тоді коли вектори*

$$z^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.66)$$

задовольняють систему $n(N + 1)$ алгебраїчних рівнянь

$$\Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k)} - z^{(k-1)} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s, x_\infty^{(k)}(s, z^{(k-1)}, z^{(k)})) ds = 0, k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.67)$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[g(s, x_\infty^{(j)}(s, z^{(j-1)}, z^{(j)})) + h \left(s, f \left(s, x_\infty^{(j)}(s, z^{(j-1)}, z^{(j)}) \right) \right) \right] ds - d = 0.$$

2. Для кожного розв'язку $U(\cdot)$ крайової задачі (5.3), (5.45) з властивістю $U(t_k) \in D^k, k = 0, 1, 2, \dots, N$, існують вектори (5.66) такі, що

$$U(\cdot) = u_\infty(t, z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}),$$

де функція $u_\infty(t, z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$ задана формулою (5.65).

Доведення. Для доведення треба повторити міркування Теорема 3.4 з третього розділі. □

Рівняння (5.67) називаємо системою визначальних рівнянь тому, що її корені визначають всі розв'язки вихідної ІКЗ (5.3), (5.45).

Застосовування на практиці Теорема 5.6 зв'язано з певними труднощами тому, що функції $x_\infty^{(j)}(s, z^{(j-1)}, z^{(j)})$ та

$$\Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}) : D^{k-1} \times D^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\Delta^{(N+1)}(z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) : D^0 \times D^1 \times \dots \times D^N \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

які фігурують в системі (5.67) зазвичай в явному вигляді не можна побудувати.

Для подолання цих труднощів замість (5.67) вводимо в розгляд так звану наближену систему визначальних рівнянь

$$\Delta^{(k)}(z^{(k-1)}, z^{(k)}) = z^{(k)} - z^{(k-1)} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s, x_m^{(k)}(s, z^{(k-1)}, z^{(k)})) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\Delta^{(N+1)}(z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = \tag{5.68}$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[g(s, x_m^{(j)}(s, z^{(j-1)}, z^{(j)})) + h \left(s, f \left(s, x_m^{(j)}(s, z^{(j-1)}, z^{(j)}) \right) \right) \right] ds - d = 0.$$

Систему (5.68) легко одержати з (5.67) якщо в ній $x_\infty^{(k)}(\cdot, z^{(k-1)}, z^{(k)})$ замінити функцією $x_m^{(k)}(\cdot, z^{(k-1)}, z^{(k)})$ вигляду (5.62) для якогось фіксованого номера m .

Таким чином в протилежність системи (5.67) m -та наближена визначальна система (5.68) вже містить тільки функції $x_m^{(j)}(\cdot, z^{(j-1)}, z^{(j)})$, які можуть бути виписані явно.

Природно очікувати, що наближення до невідомого розв'язку ІКЗ (5.3), (5.45) можуть бути отримані з використанням функції

$$u_m(t, z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = \begin{cases} x_m^{(1)}(t, z^{(0)}, z^{(1)}), & \text{якщо } t \in [t_0, t_1], \\ x_m^{(2)}(t, z^{(1)}, z^{(2)}), & \text{якщо } t \in [t_1, t_2], \\ \dots \\ x_m^{(N)}(t, z^{(N-1)}, z^{(N)}), & \text{якщо } t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases} \quad (5.69)$$

Очевидно, що (5.69) є „наближеною“ версією функції (5.65) і вона коректно визначена для всіх $t \in [a, b]$ та $z^{(k)} \in D^k, k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Нехай $\tilde{z}^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, N$ є коренями наближеної визначальної системи (5.68) для певного фіксованого m . Тоді функція

$$u_m(t, \tilde{z}^{(0)}, \tilde{z}^{(1)}, \dots, \tilde{z}^{(N)}) = \begin{cases} x_m^{(1)}(t, \tilde{z}^{(0)}, \tilde{z}^{(1)}), & \text{якщо } t \in [t_0, t_1], \\ x_m^{(2)}(t, \tilde{z}^{(1)}, \tilde{z}^{(2)}), & \text{якщо } t \in [t_1, t_2], \\ \dots \\ x_m^{(N)}(t, \tilde{z}^{(N-1)}, \tilde{z}^{(N)}), & \text{якщо } t \in [t_{N-1}, t_N], \end{cases}$$

яка отримана згідно (5.69) може розглядатися як m -те наближення до розв'язку ІКЗ (5.3), (5.45).

З Теорема 5.5 безпосередньо випливає оцінка:

$$\begin{aligned} & \left| x_\infty(t, \tilde{z}^{(k-1)}, \tilde{z}^{(k)}) - x_m(t, \tilde{z}^{(k-1)}, \tilde{z}^{(k)}) \right| \leq \\ & \leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, t_{k-1}, h_k) Q_k^m (I_n - Q_k)^{-1} \delta_{[t_{k-1}, t_k], D^{[k]}}(f), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], m \geq 0, \end{aligned} \quad (5.70)$$

$k = 1, 2, \dots, N$, де $Q_k, \delta_{[t_{k-1}, t_k], D^{[k]}}(f)$ та $\alpha_1(t, t_{k-1}, h_k)$ задані в (5.59), (5.58) та (2.4).

5.8 Приклад інтегральної крайової задачі з двома розв'язками та ділення відрізка інтегрування на три підінтервали

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) - \frac{t}{4}x_1(t) + \frac{1}{32}t^3 - \frac{1}{32}t^2 + \frac{9}{40}t := f_1(t, x_1, x_2), \\ x_2'(t) = \frac{t}{8}x_1(t) - t^2x_2(t) + \frac{15}{64}t^3 + \frac{1}{80}t + \frac{1}{4} := f_2(t, x_1, x_2), \end{cases} t \in [0, 1.9], \quad (5.71)$$

підпорядковану інтегральним крайовим умовам

$$\begin{aligned} \int_0^{1.9} [sx_1(s)x_2(s) + \frac{1}{4}x_1'(s)] ds &= \frac{10099697}{48000000}, \\ \int_0^{1.9} [s^2x_2^2(s) + \frac{1}{4}x_2'(s)] ds &= \frac{3426099}{8000000}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

Очевидно, (5.71), (5.72) є окремим випадком (5.3), (5.45) при $a := 0$, $b := 1.9$,

$$g(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} tx_1x_2 \\ t^2x_2^2 \end{pmatrix}, \quad h(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1'(t) \\ \frac{1}{4}x_2'(t) \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10099697}{48000000} \\ \frac{3426099}{8000000} \end{bmatrix}.$$

Якщо в (5.47) покласти $N = 1$, $N = 2$ чисельні розрахунки показують, що достатні умови збіжності не виконуються, бо спектральний радіус відповідних матриць більше за одиницю.

Тому в (5.47) вибираємо $N = 3$ і тоді

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 = a, \\ t_1 &= t_0 + h_1 = 0 + 1 = 1, \\ t_2 &= t_1 + h_2 = 1 + 0.5 = 1.5, \\ t_3 &= t_2 + h_3 = 1.5 + 0.4 = 1.9 = b. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Легко перевірити, що

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{10}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{4} \quad (5.74)$$

є неперервно диференційовним розв'язком КЗ (5.71), (5.72).

Згідно (5.52), (5.53) введемо параметри

$$z^{(0)} := x(0) = \text{col}(x_1(0), x_2(0)) = \text{col}(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}),$$

$$z^{(1)} := x(1) = \text{col}(x_1(1), x_2(1)) = \text{col}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}),$$

$$z^{(2)} := x(1.5) = \text{col}(x_1(1.5), x_2(1.5)) = \text{col}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}),$$

$$z^{(3)} := x(1.9) = \text{col}(x_1(1.9), x_2(1.9)) = \text{col}(z_1^{(3)}, z_2^{(3)}).$$

Виберемо області D_0, D_1, D_2, D_3 наступним чином:

$$D_0 = \{(x_1, x_2) : -0.15 \leq x_1 \leq 0.182, -0.01 \leq x_2 \leq 0.38\},$$

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : 0.024 \leq x_1 \leq 0.182, 0.24 \leq x_2 \leq 0.38\},$$

$$D_2 = D_1,$$

$$D_3 = \{(x_1, x_2) : 0.024 \leq x_1 \leq 0.352, 0.24 \leq x_2 \leq 0.48\}.$$

Тоді

$$D_{0,1} = \{(x_1, x_2) : -0.15 \leq x_1 \leq 0.182, -0.01 \leq x_2 \leq 0.38\},$$

$$D_{1,2} = \{(x_1, x_2) : 0.024 \leq x_1 \leq 0.182, 0.24 \leq x_2 \leq 0.38\}$$

$$D_{2,3} = \{(x_1, x_2) : 0.024 \leq x_1 \leq 0.352, 0.24 \leq x_2 \leq 0.48\}.$$

Використовуємо вектори

$$\rho^{(1)} = \text{col}(0.2, 0.3), \rho^{(2)} = \text{col}(0.1, 0.2), \rho^{(3)} = \text{col}(0.1, 0.4)$$

на основі (2.2) визначимо області

$$D^{[1]} = \{(x_1, x_2) : -0.35 \leq x_1 \leq 0.382, -0.31 \leq x_2 \leq 0.68\},$$

$$D^{[2]} = \{(x_1, x_2) : 0.124 \leq x_1 \leq 0.282, 0.44 \leq x_2 \leq 0.58\},$$

$$D^{[3]} = \{(x_1, x_2) : 0.124 \leq x_1 \leq 0.452, 0.64 \leq x_2 \leq 0.88\}.$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (5.10) для правої частини системи диференціальних рівнянь (5.71), відповідно в областях $D^{[1]}, D^{[2]}, D^{[3]}$ виконується з матрицями:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.68 \\ 0.125 & 1 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.58 \\ 0.1875 & 2.25 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.88 \\ 0.2375 & 3.61 \end{bmatrix}.$$

Також маємо, що

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3}{10}K_1, \quad r(Q_1) = 0.33 < 1, \\ Q_2 &= \frac{3}{20}K_2, \quad r(Q_2) = 0.3459 < 1, \\ Q_3 &= \frac{6}{50}K_3, \quad r(Q_3) = 0.441 < 1, \end{aligned}$$

$$\delta_{[0,1],D^{[1]}}(f) = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0,1] \times D^{[1]}} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [0,1] \times D^{[1]}} f(t,x) \right] = \begin{bmatrix} 0.27185 \\ 0.54075 \end{bmatrix},$$

$$\rho^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \geq \frac{1}{2} \delta_{[0,1],D^{[1]}}(f) = \begin{bmatrix} 0.135925 \\ 0.270375 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \delta_{[1,1.5],D^{[2]}}(f) &= \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [1,1.5] \times D^{[2]}} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [1,1.5] \times D^{[2]}} f(t,x) \right] = \\ &= \begin{bmatrix} 0.207028125 \\ 0.6410625 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\rho^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \geq \frac{1}{4} \delta_{[1,1.5],D^{[2]}}(f) = \begin{bmatrix} 0.05175703125 \\ 0.160265625 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \delta_{[1.5,1.9],D^{[3]}}(f) &= \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [1.5,1.9] \times D^{[3]}} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [1.5,1.9] \times D^{[3]}} f(t,x) \right] = \\ &= \begin{bmatrix} 0.3769625 \\ 1.9410875 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\rho^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} \geq \frac{1}{5} \delta_{[1.5,1.9],D^{[3]}}(f) = \begin{bmatrix} 0.0753925 \\ 0.3882175 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, ми перевірили, що всі умови Теорема 5.5 виконуються і послідовності функцій (5.62) є збіжними.

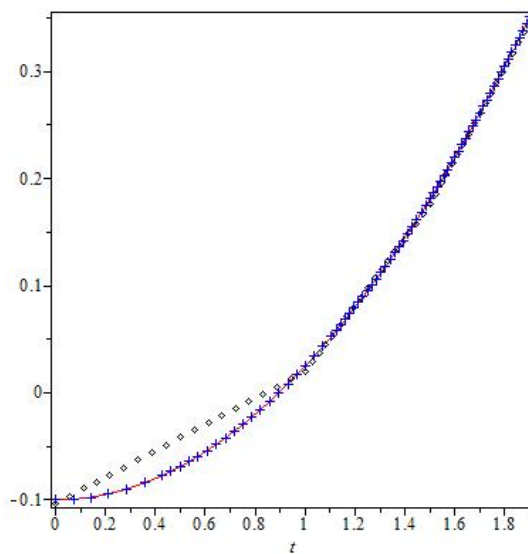
Використовуючи Maple розв'язуємо наближену систему визначальних рівнянь (5.68) і отримуємо чисельні результати, які показано в Таблиці 5.3.

На Рис. 5.3 зображено графіки компонент першого (5.74) та наближеного розв'язків на нульовій і дев'ятій ітерації.

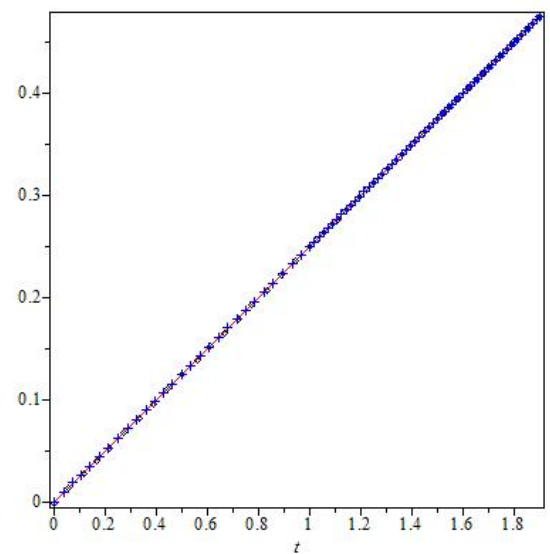
Число розв'язків наближеної визначальної алгебраїчної системи (5.68) співпадає з числом розв'язків даної інтегральної крайової задачі (5.71), (5.72).

	m=0	m=1	m=7	m=9
$z_1^{(0)}$	-0.1035005019	-0.0999680955	-0.1000000006	-0.0999999998
$z_2^{(0)}$	-0.0015183571	-0.00004968118	9.775597×10^{-10}	$-1.454615 \times 10^{-10}$
$z_1^{(1)}$	0.01941727634	0.02499498212	0.02499999952	0.02500000014
$z_2^{(1)}$	0.2496837722	0.2499853487	0.2500000008	0.2499999999
$z_1^{(2)}$	0.1756874698	0.1812420318	0.1812499997	0.1812500002
$z_2^{(2)}$	0.3748370539	0.3749949742	0.3750000003	0.3749999999
$z_1^{(3)}$	0.3460109281	0.3512418286	0.3512499999	0.3512500002
$z_2^{(3)}$	0.474845688	0.4749989732	0.4750000003	0.4749999999

Табл. 5.3: Наближені значення параметрів для першого (5.74) розв'язку



а) перша компонента



б) друга компонента

Рис. 5.3: Перший розв'язок (5.74) (лінія) та його нульове (◇) і дев'яте наближення (×).

Обчислення показують, що крім розв'язку представленого в Таблиці 5.3 поставлена задача має ще один розв'язок, числові значення параметрів якого показано в Таблиці 5.4.

У випадку другого розв'язку нехай опуклі підмножини D_0 , D_1 , D_2 та D_3 мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
D_0 &:= \{(x_1, x_2) : -0.3 \leq x_1 \leq 0.11, -0.65 \leq x_2 \leq 0.16\}, \\
D_1 &:= \{(x_1, x_2) : -0.05 \leq x_1 \leq 0.11, -0.22 \leq x_2 \leq 0.16\}, \\
D_2 &:= D_1, \\
D_3 &:= \{(x_1, x_2) : -0.05 \leq x_1 \leq 0.27, -0.22 \leq x_2 \leq 0.404\}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
D_{0,1} &= \{(x_1, x_2) : -0.3 \leq x_1 \leq 0.11, -0.65 \leq x_2 \leq 0.16\}, \\
D_{1,2} &= \{(x_1, x_2) : -0.05 \leq x_1 \leq 0.11, -0.22 \leq x_2 \leq 0.16\}, \\
D_{2,3} &= \{(x_1, x_2) : -0.05 \leq x_1 \leq 0.27, -0.22 \leq x_2 \leq 0.404\}.
\end{aligned}$$

Використовуючи вектори

$$\rho^{(1)} = \text{col}(0.3, 0.6), \rho^{(2)} = \text{col}(0.1, 0.3), \rho^{(3)} = \text{col}(0.15, 0.9)$$

на основі (2.2) отримаємо області

$$\begin{aligned}
D^{[1]} &= \{(x_1, x_2) : -0.6 \leq x_1 \leq 0.41, -1.25 \leq x_2 \leq 0.76\}, \\
D^{[2]} &= \{(x_1, x_2) : -0.15 \leq x_1 \leq 0.21, -0.52 \leq x_2 \leq 0.46\}, \\
D^{[3]} &= \{(x_1, x_2) : -0.2 \leq x_1 \leq 0.42, -1.12 \leq x_2 \leq 1.304\}
\end{aligned}$$

і прямі обчислення дають

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 19/25 \\ 1/8 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 19/25 \\ 3/16 & 9/4 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 19/40 & 163/125 \\ 19/80 & 361/100 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{3}{10}K_1, \quad r(Q_1) = 0.3331236588 < 1, \\
Q_2 &= \frac{3}{20}K_2, \quad r(Q_2) = 0.348471967730229 < 1, \\
Q_3 &= \frac{6}{50}K_3, \quad r(Q_3) = 0.4447028306 < 1,
\end{aligned}$$

	m=0	m=1	m=7	m=9
$\hat{z}_1^{(0)}$	-0.3130351578	-0.2915938662	-0.2913487961	-0.2913488027
$\hat{z}_2^{(0)}$	-0.6853367388	-0.6463772306	-0.6452155574	-0.6452156067
$\hat{z}_1^{(1)}$	-0.06574963827	-0.04629270564	-0.04566996761	-0.04566995487
$\hat{z}_2^{(1)}$	-0.2581141824	-0.2183359461	-0.2170072781	-0.2170073131
$\hat{z}_1^{(2)}$	0.0838541806	0.1001891237	0.1006981868	0.1006981982
$\hat{z}_2^{(2)}$	0.1398968489	0.1589542884	0.1594479818	0.1594479639
$\hat{z}_1^{(3)}$	0.2497893002	0.2659558438	0.2664281996	0.2664282031
$\hat{z}_2^{(3)}$	0.4027863216	0.4033132063	0.4033665823	0.4033666205

Табл. 5.4: Наближені значення параметрів для другого розв'язку КЗ

$$\delta_{[0,1],D^{[1]}}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0,1] \times D^{[1]}} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [0,1] \times D^{[1]}} f(t,x) \right] = \begin{bmatrix} 0.578125, \\ 1.068125 \end{bmatrix},$$

$$\rho^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix} \geq \frac{1}{2} \delta_{[0,1],D^{[1]}}(f) = \begin{bmatrix} 0.2890625 \\ 0.5340625 \end{bmatrix},$$

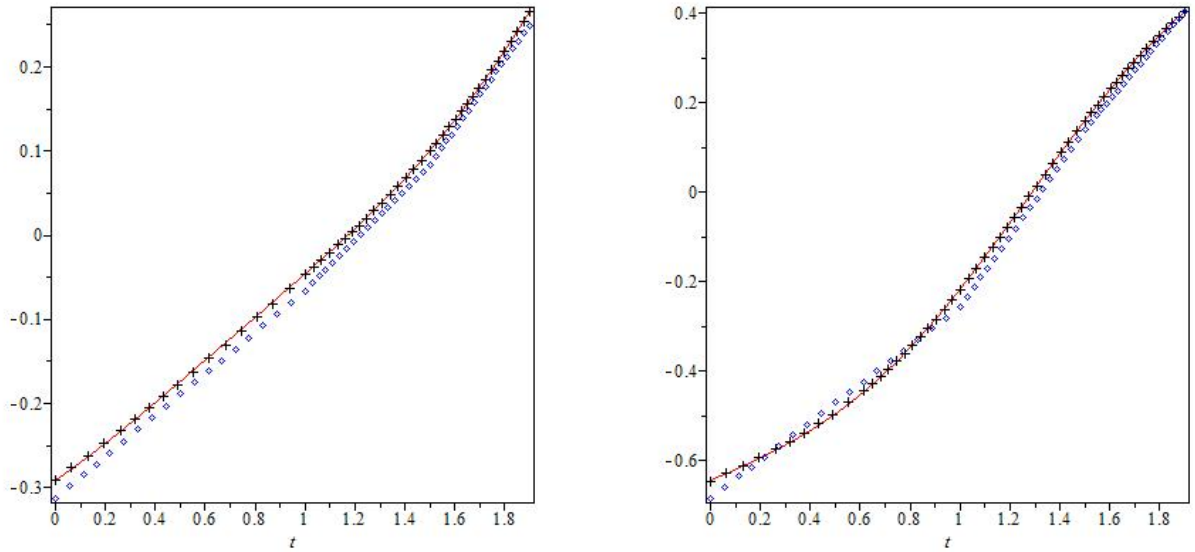
$$\delta_{[1,1.5],D^{[2]}}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [1,1.5] \times D^{[2]}} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [1,1.5] \times D^{[2]}} f(t,x) \right] = \\ = \begin{bmatrix} 0.195803125 \\ 1.144925172 \end{bmatrix},$$

$$\rho^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} \geq \frac{1}{4} \delta_{[1,1.5],D^{[2]}}(f) = \begin{bmatrix} 0.04895078125 \\ 0.286231293 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{[1.5,1.9],D^{[3]}}(f) := \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [1.5,1.9] \times D^{[3]}} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [1.5,1.9] \times D^{[3]}} f(t,x) \right] = \\ = \begin{bmatrix} 0.6295415 \\ 4.448945 \end{bmatrix},$$

$$\rho^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.9 \end{bmatrix} \geq \frac{1}{5} \delta_{[1.5,1.9],D^{[3]}}(f) = \begin{bmatrix} 0.1259083 \\ 0.889789 \end{bmatrix}.$$

На Рис. 5.4 показано графіки нульового, першого та дев'ятого наближення до другого розв'язку.



а) перша компонента

б) друга компонента

Рис. 5.4: Нульове (\diamond), перше (\times) та дев'яте (лінія) наближення другого розв'язку.

Підставивши дев'яте наближення $\tilde{x}_9(t) = \text{col}(\tilde{x}_{91}(t), \tilde{x}_{92}(t))$ в систему диференціальних рівнянь (5.71) отримаємо наступну нев'язку:

$$\max_{t \in [0, 1.9]} \left| \tilde{x}'_{91}(t) - \frac{1}{2} \tilde{x}_{92}^2(t) + \frac{t}{4} \tilde{x}_{91}(t) - \frac{1}{32} t^3 + \frac{1}{32} t^2 - \frac{9}{40} t \right| \approx 3 \cdot 10^{-9},$$

$$\max_{t \in [0, 1.9]} \left| \tilde{x}'_{92}(t) - \frac{t}{8} \tilde{x}_{91}(t) + t^2 \tilde{x}_{92}(t) - \frac{15}{64} t^3 - \frac{1}{80} t - \frac{1}{4} \right| \approx 3 \cdot 10^{-8}.$$

Висновки до п'ятого розділу

У цьому розділі продемонстровано техніку ділення відрізка інтегрування на скінченну кількість підінтервалів.

Так, у випадку ділення відрізка інтегрування $[a, b]$ навпіл, вихідна нелінійна інтегральна крайова задача зводиться до двох модельних параметризованих задач, які визначені і вивчаються відповідно на відрізках $[a, \frac{a+b}{2}]$ та $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Побудовано дві модельні параметризовані послідовності. Доводиться їх рівномірна збіжність. Встановлюється зв'язок розв'язків модельних задач з розв'язком вихідної інтегральної крайової задачі.

Доведено, що у випадку ділення відрізка навпіл в два рази вдається покращити достатні умови збіжності побудованих послідовностей.

Показано, якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ поділити, наприклад, з рівномірним кроком h на N підінтервалів $[a, a + h]$, $[a + h, a + 2h]$, ..., $[a + (N - 1)h, a + Nh]$, легко побудувати N простих модельних параметризованих задач на цих підінтервалах. Їх дослідження показує, що умови збіжності модельних послідовностей можна покращити в N разів.

Цю техніку і її переваги продемонстровано на прикладах інтегральних крайових задач, в яких для виконання достатніх умов збіжності потрібно поділити відрізок інтегрування, відповідно на два і три підінтервала.

Основні результати даного розділу опубліковано у роботах [109, 123].

ВИСНОВКИ

У даній дисертаційній роботі на основі параметризації розроблений і обґрунтований новий чисельно–аналітичний метод, який з успіхом може застосовуватися для дослідження існування і наближеної побудови розв’язків загального вигляду нелінійних функціональних та інтегральних крайових задач.

Основна увага приділяється мало вивченим до цих пір задачам, дослідження розв’язків яких відомими методами взагалі неможливе або пов’язане з істотними труднощами.

В основі метода лежить перехід від заданих крайових умов до так званих параметризованих умов „модельного типу“, які мають простий вигляд початкових умов, і які задані параметрично на лівому і правому кінцях відрізка інтегрування.

Метод може бути застосований як до нелінійних систем диференціальних рівнянь з неперервною локально ліпшицевою правою частиною, так і у випадку умов Каратеодорі. У випадку неперервної правої частини мова йде про неперервно диференційовні розв’язки, а у випадку умов Каратеодорі досліджуються абсолютно неперервні розв’язки.

Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно–аналітична схема, яка оснований на послідовних наближеннях з покращеними характеристиками рівномірної збіжності. Встановлено зв’язок між розв’язками модельної та вихідної крайової задачі.

Отримані конструктивні достатні та необхідні умови розв’язності цих класів нелінійних крайових задач. В основі дослідження існування розв’язків розглядуваних крайових задач лежить вивчення розв’язків скінченно вимірної системи наближених визначальних алгебраїчних рівнянь. Ця система може бути записана в явному вигляді на основі побудованої параметризованої послідовності.

Таким чином від нескінченно вимірної задачі здійснено перехід до встановлення розв’язності скінченно вимірної системи алгебраїчних рівнянь. У свою чергу для цього з успіхом застосовується топологічна теорія степеня Брауера.

Доведено, якщо система визначальних рівнянь має декілька розв'язків, то стільки ж розв'язків буде і у заданої крайової задачі.

Вперше в теорії чисельно–аналітичних методів для покращення достатніх умов збіжності пропонується ділення відрізка інтегрування на підінтервали. В зв'язку з тим, що достатня умова збіжності з певним коефіцієнтом прямо пропорційна довжині відрізка інтегрування, то діленням відрізка інтегрування на підінтервали завжди можна досягти виконання цих умов.

Показано, що діленням відрізка навпіл в два рази можна покращити достатні умови рівномірної збіжності послідовних параметризованих наближень.

Встановлено, якщо відрізок інтегрування поділити на N підінтервалів, тоді достатні умови збіжності модельних послідовностей можна покращити в N разів.

Конструктивність розробленого методу та його переваги продемонстровано на прикладах нелінійних інтегральних крайових задач з не єдиними розв'язками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А. А.* Обобщенно–обратные операторы и нетеровы краевые задачи / Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. — К. Ин-т матем. НАН України, 1995. — 318 с.
3. *Бойчук О. А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь / О. А. Бойчук, І. А. Головацька // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, №4. — С. 460-474.
4. *Варга Я. В.* Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач / Я. В. Варга // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика. — 2015. — 26, №1. — С. 23–34.
5. *Варга Я. В.* Про один новий підхід дослідження розв'язків нелінійних інтегральних крайових задач / Я. В. Варга // Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, Ужгород, 19-21 травня 2016. — С.50.
6. *Варга Я. В.* Дослідження розв'язків деяких нелінійних інтегральних крайових задач / Я. В. Варга // Методика викладання та методи дослідження в математиці: Міжнар. наук. конф., м. Берегове, 21-23 квітня 2016, матеріали міжнар. матем. конф. — С. 68.
7. *Гребеников Е. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
8. *Евхута Н. А.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Н. А. Евхута, П. П. Забрейко // Укр. мат. журн. — 1985. — Т. 37, №2. — С. 162–168.
9. *Евхута Н. А.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений / Н. А. Евхута, П. П. Забрейко // Доклады АН БССР. — 1985. — Т. 29, №1. — С. 15–18.

10. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе // Тбилиси: Изд-то Тбил. ун-та. — 1975, — С. 352.
11. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: Наука. — 1987, 30. — С. 3–103.
12. *Кигурадзе И. Т.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтер // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: Наука. — 1987, 30. — С. 105–201.
13. *Король І. І.* Дослідження існування і побудова розв'язків крайових задач: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння" / І. І. Король. — Київ, 2010. — 36 с.
14. *Король І. І.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних наближень А. М. Самойленка / І. І. Король, М. О. Перестюк // Укр. мат. журн. — 2006. — 58, №4. — С. 472–488.
15. К условию сходимости метода А. М. Самойленко / А. И. Перов, Л. Ю. Дикарева, С. А. Олейникова, М. М. Портнов // Вестник ВГУ. Серия физика, математика — 2001. — №1. — С.111–119.
16. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка — К.: Наукова думка, 1980. — 264 с.
17. *Маринець К. В.* Дослідження розв'язків нелінійних крайових задач на основі параметризації: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння" / К. В. Маринець. — Київ, 2013. — 24 с.
18. *Маринець К. В.* Про один підхід дослідження розв'язків нелінійних крайових задач з інтегральними крайовими умовами / К. В. Маринець, Я. В. Варга // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика. — 2013.—23, №1. — С. 101–115.
19. *Перестюк Н. А.* Об одном методе построения последовательных приближений для исследования многоточечных краевых задач / Н. А. Перестюк, А. Н. Ронто // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, №9. — С. 1243–1253.

20. Ронто А. Н. О параметризации трехточечных нелинейных краевых задач / А. Н. Ронто, М. Ронто, Н.М. Щобак // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, №3. — С. 395–413.
21. Ронто М. Некоторые замечания о сходимости численно–аналитического метода последовательных приближений / М. Ронто, Й. Месарош // Укр. мат. журн. — 1996. — 48, №1. — С. 90–95.
22. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №1. — С. 102–117.
23. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. II / Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №2. — С. 225–243.
24. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. III / Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №7. — С. 960–979.
25. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV / Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №12. — С. 1656–1672.
26. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. V / Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №5. — С. 663–673.
27. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. VI / Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №7. — С. 960–971.
28. Ронто Н. И. Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. VII / Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И. // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №9. — С. 1244–1261.
29. Ронто Н. И. Метод полиномиальных приближений при исследовании решений двухточечных краевых задач / Н. И. Ронто // Укр. мат. журн. — 1984. — 36, №4. — С. 518–522.
30. Ронто Н. И. Чисельно-аналитический метод в случае вырожденных матриц в краевых условиях / Н. И. Ронто // Укр. мат. журн. — 1992. — 44, №5. — С. 673–681.

31. *Ронто Н. И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом / Н. И. Ронто, И. И. Король // Укр. мат. журн. — 1994. — 46, №8. — С. 1031-1043.
32. *Самойленко А. М.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных задач / Самойленко А. М., Лаптинский В. Н., Кенжебаев К. К. // Труды Института математики НАН Украины. Т. 29. — К.: Ин-т матем. НАН Украины, 1999. — 220 с.
33. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. — К.: Вища школа., 2000. — 294 с.
34. *Самойленко А. М.* Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями / А. М. Самойленко, Ле Лонг Тай // УМЖ. — Том 42, №7. — 1990. — С. 951–957.
35. *Самойленко А. М.* Об одной последовательности полиномов и радиусе сходимости ее суммы Пуассона–Абеля / А. М. Самойленко // УМЖ. — 2003. — 65, №7. — С. 1119–1130.
36. *Самойленко А. М.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, В. Н. Лаптинский // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — №1. — С. 30–32.
37. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто — К.: Наукова думка, 1992. — 279 с.
38. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто.— К.:Вища школа., 1976. — 180 с.
39. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I / А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. — 1965. — Т. 17, №4. — С. 82–93.
40. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II / А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. — 1966. — Т. 18, №2. — С. 50–59.
41. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования решений краевых задач / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К.:Наукова думка,

1985. — 224 с.
42. *Самойленко А. М.* О численно-аналитическом методе решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, В. А. Ронто // Укр. мат. журн. — 1981. — 33, №3. — С. 467-475.
 43. *Самойленко А. М.* Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто // Укр. мат. журн. — 1990. — 42, №8. — С. 1107-1116.
 44. *Самойленко А. М.* Двухточечная краевая задача с параметрами а граничных условиях / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто, В. А. Ронто // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — №7. — С. 23-26.
 45. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений / Е. П. Трофимчук // Математическая физика и нелинейная механика. — 1990. — 13. — С. 31–36 .
 46. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах / Дж. Хейл. — М.: Мир, 1966. — 230 с.
 47. *Щобак Н. М.* Багатоточкові крайові задачі для системи лінійних функціонально-диференціальних рівнянь / Н. М. Щобак, Я. В. Варга // Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнар. наук. конф., 27-29 вер. 2012 р. : матер. конф. — Ужгород, 2012. — С. 87.
 48. *Agarwal R.P.* A survey of recent results for initial and boundary value problems singular in the dependent variable: Handbook of differential equations / R.P. Agarwal, D. O.Regan. — North-Holland, Amsterdam: Elsevier. — 2004. — P. 1-68.
 49. *Ascher U.M.* Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations / U.M. Ascher, R.M.M. Mattheij, R.D. Russell // Classics in Applied Mathematics. — Philadelphia: SIAM. — 1995. — Vol. 13. — 621 p.
 50. *Augustynowicz A.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional-differential equation of neutral type / Augustynowicz A., Kwapisz M. // Math. Nachr. — 1990. — 145. — P. 255–269.
 51. *Bainov D. D.* An application of the numerical-analytic method of A.M. Samoilenko for investigation of periodic systems of integro-differential

- equations / D.D. Bainov and G.H. Sarafova // Arch. Math.: Brno. — 1979. — 15, №2. — P. 67–80.
52. *Benchohra M.* Second-order boundary value problem with integral boundary conditions / A. Benchohra, J.J.Nieto, A. Qahab // Boundary Value Problems, doi:10.1155/2011/260309. — 2011. — 9 p.
53. *Bigun Ya. J.* On the existence of a solution and the averaging of multi-point boundary value problems for multifrequency systems with a linearly transformed argument / Ya. J. Bigun // Нелінійні коливання. — 2008. — 11, №4. — С. 462–471.
54. *Bigun Ya. J.* Existence of a solution and the averaging of nonlinear multifrequency problems with delay / Ya. J. Bigun, // Ukrain. Math. J. — 2007. — 59, №4. — P. 435–446.
55. *Boichuk A. A.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 с.
56. *Cesari L.* Functional analysis and periodic solutions of non-linear differential equations / L. Cesari // Interscience Publishers: John Wiley & Sons, Inc., New York. — 1963. — Vol. I. — P. 149–187.
57. *Cesari L.* Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method / L. Cesari. — Nonlinear Function. Anal. and Appl.— New York: Dekker, 1976. — 197 p.
58. *Cesari L.* A new sufficient conditions for periodic solutions of weakly nonlinear differential systems / L. Cesari, J. Hale // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — 8. — P. 757–764.
59. *Cherevko I.* Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems / I. Cherevko, O. Osypova // Miskolc Mathematical Notes. — 2015. — Vol. 16, №. 2. — P.729-745.
60. *Evhuta N. A.* The Poincaré method and Samoilenko method for the construction of periodic solutions to ordinary differential equations / N. A. Evhuta, P. P. Zabreiko // Math. Nachr. — 1991. — 153. — P. 85-99.
61. *Farkas M.* Periodic Motions / M. Farkas // Applied Mathematical Sciences. — Springer-Verlag: New York–London. — 1994. — Vol. 104. — P.577.
62. *Filipchuk M. P.* A numerical-analytic method for investigating multipoi-

- nt boundary value problems for systems of differential equations with a transformed argument / M. P. Filipchuk, Ya. J. Bigun // *Ukrain. Math. J.* — 1998. — 50, №11. — P. 1581–1585.
63. *Gritsans A.* Lemniscatic functions in the theory of the Emden-Fowler differential equation / A Gritsans, F. Sadyrbaev // *Mathematics. Differential equations*, Univ. of Latvia, Institute of Math. and Comp. Sci. — 2003. — 3. — P. 5-27, <http://www.lumii.lv/Pages/Sbornik/s3f3v1.pdf>
64. *Gritsans A.* Characteristic numbers of non-autonomous Emden-Fowler type equations / A Gritsans, F. Sadyrbaev // *Mathematical Modelling*.
65. *Hale J.K.* *Oscillations in Nonlinear Systems* / J.K. Hale. — McGraw-Hill: New York, 1963 . — 180 p.
66. *Horodets'kyi V. V.* Correct solvability of a nonlocal multipoint (in time) problem for one class of evolutionary equations / V. V. Horodets'kyi, O. V. Martynyuk, R. I. Petryshyn // *Ukrain. Math. J.* — 2013. — 65, №3. — P. 377-392.
67. *Ilika S. A.* Approximation of nonlinear functional-differential equations/S. A. Ilika, I. M. Cherevko // *Mat. Metodi Fiz.-Mekh.* — 2012. — Vol.55, №1. — P. 39–48.
68. *Jankowski T.* Monotone and numerical-analytic methods for differential equations / T. Jankowski // *Comput. Math. Appl.* — 2003. — 45, №12. — P. 1823–1828.
69. *Jankowski T.* Numerical-analytic methods for differential-algebraic systems / T. Jankowski // *Acta Math. Hungar.* — 2002. — 95, № 3. — P. 243–252, ISSN 0236-5994.
70. *Jankowski T.* The application of numerical-analytic method for systems of differential equations with a parameter / T. Jankowski // *Ukrain. Math. J.* — 2002. — 54, №4. — P. 671–683.
71. *Jankowski T.* Numerical-analytic methods for implicit differential equations / T. Jankowski // *Math. Notes. (Miskolc)* — 2001. — 2, №2. — P. 137–144.
72. *Keller H. B.* *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems* / H.B. Keller. — Dover Publications, Inc.: New York, 1992. — 397 p.
73. *Knobloch H. W.* Remarks on a paper of L. Cesary on functional analysis and nonlinear differential equations / H. W. Knobloch // *Michigan Math. J.* —

1963. — 16, №4. — P. 417-430.
74. *Krasnoselsky M.A.* Functional-analytic methods in the theory of nonlinear oscillations, in : Proceedings of the Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations, Vol. 1, (1970), 323-331.
75. *Kwapisz M.* On modification of the integral equation of A.M.Samoilenko's numerical-analytic method / M. Kwapisz // Math. Nachr. — 1992. — 157. — P. 123–135.
76. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems / M. Kwapisz // Ukrain. Math. J. — 1992. — 44, №1. — P. 115–119.
77. *Mao Jinxiu* On existence and uniqueness of positive solutions for integral boundary value problems / Mao Jinxiu, Zhao Zengqin, Xu Naiwei // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2010. — №16. — P. 1-8.
78. *Marynets K.* On the parametrization of nonlinear boundary value problems with nonlinear boundary conditions / K. Marynets // Miskolc Mathematical Notes. — 2011. — Vol.12, №. 2. — P.209-223.
79. *Matvii O. V* On the approximation of systems of differential-difference equations of neutral type by systems of ordinary differential equations / S. A. Ilika, I. M. Cherevko // Nonlinear Oscil. — 2007. — Vol.10, №3. — P. 328–335.
80. *Ntouyas S. K.* Nonlocal initial and boundary value problems: a survey, Handbook of Differential Equations / S.K. Ntouyas // Ordinary Differential Equations. — Elsevier B.V.: Amsterdam. — 2005. — Vol. II. — P. 461–557.
81. *Perestyuk M.* Numerical-analytic method for the equation of non-linear oscillator / M. Perestyuk, A. Ronto // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D, Natur. Sci. Math. — 1996. — 36, №2. — P. 115-124.
82. *Rachunkova I.* Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations / Rachunkova I., Stanek S., Tvrdy M. // Handbook of Differential Equations: Elsevier/North-Holland, Amsterdam. — 2006. — P. 607–723.
83. *Ronto A.* On the boundary-value problems with linear multipoint restrictions / A. Ronto // Ibid. — 1995. — 36, №1. — P. 81-89.
84. *Ronto A.* On application of the numerical-analytic method to linear systems / A. Ronto // Ibid. — 1997. — 37, №1. — P. 85-94.

85. *Ronto A. N.* On periodic solutions of systems with „maxima“ / A. N. Ronto // *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki.* — 1999. — 12. — P. 27-31.
86. *Ronto A.* A note on the numerical-analytic method for nonlinear two-point boundary-value problems / A. Ronto, M. Ronto // *Nonlinear Oscilations.* — 2001. — 4, №1. — P. 112–128.
87. *Ronto A.* Existence results for three-point boundary value problems for systems of linear functional differential equations / A. Ronto, M. Ronto // *Carpathian Journal of Mathematics.* — 2012. — 28, №1. — P. 163-182.
88. *Ronto A.* On a Cauchy –Nicoletty type three-point boundary value problem for linear differential equations with with argument deviations / A. Ronto, M. Ronto // *Miskolc Mathematical Notes.* — 2009. — Vol. 10, №2. — P. 173–205.
89. *Ronto A.N.* On some boundary value problems for Lipschitz differential equations / A. N. Ronto // *Nonlinear Oscilations.* — 1998. — 1. — P. 74 – 94.
90. *Ronto A. N.* On the parametrization of three-point nonlinear boundary value problems / Ronto A.N., Ronto M., Shchobak N.M. // *Nonlinear Oscillations.* — 2004. — 7, №3. — P. 384–402.
91. *Ronto A.* On the investigation of some boundary value problems with nonlinear conditions / A. Ronto, M. Ronto // *Math. Notes.*—2000.—1, №1.— P.43–55.
92. *Ronto A.* On Nonseparated Three-Point Boundary Value Problems for Linear Functional Differential Equations / A. Ronto, M. Ronto // *Abstract and Applied Analysis: Hindawi Publishing Corporation.* — 2011. — 22 p.
93. *Ronto A. N.* On some symmetric properties of periodic solution / A. N. Ronto, N. I. Ronto // *Nonlinear Oscillations.* — 2003. — 6, №1. — P. 82-107.
94. *Ronto A. N.* On some symmetric properties of periodic solution / A. N. Ronto, N. I. Ronto // *Nonlinear Oscillations.* — 2003. — 6, №1. — P. 82-107.
95. *Ronto A. N.* On periodic solutions of autonomous difference equations / A. N. Ronto, M. Ronto, A. M. Samoilenko, S. I. Trofimchuk // *Georgian Math. J.* — 2001. — 8, №1 — P. 135-164.
96. *Ronto A.* Periodic successive approximations and interval halving / A. Ronto, M. Ronto // *Miskolc Mathematical Notes.* — 2012. — Vol.13, №2. — P. 459-

- 482.
97. *Ronto A.* Constructive analysis of periodic solutions with interval halving / A. Ronto, M. Ronto, N. Shchobak // *Boundary Value Problems*, doi:10.1186/1687-2770-2013-57. — 2013. — 34 p.
 98. *Ronto A.* Notes on interval halving procedure for periodic and two-point problems / A. Ronto, M. Ronto, N. Shchobak // *Boundary Value Problems*, doi:10.1186/s13661-014-0164-9. — 2014. — 20 p.
 99. *Ronto A.* Successive approximation method for some linear boundary value problems for differential equations with a special type of argument deviations / A. Ronto, M. Ronto // *Miskolc Mathematical Notes*. — 2009. — Vol. 10, №1. — P. 69-95.
 100. *Ronto A.* Successive Approximation Techniques in Non-Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations: Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations / A. Ronto, M. Ronto. — 2008. — Vol. IV. — P. 441- 592.
 101. *Rontó A.* Numerical-analytic technique for investigation of solutions of some nonlinear equations with Dirichlet conditions / A. Rontó, M. Rontó, G. Holubova, P. Necesal // *Boundary Value Problems*. — 2011. — 58. — P. 1-20, <http://dx.doi.org/10.1186/1687-2770-2011-58>
 102. *Rontó A.* On finding solutions of two-point boundary value problems for a class of non-linear functional differential systems/ A. Rontó, M. Rontó, N. Shchobak // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, Proc. 9th Coll. QTDE. — 2011. — №13. — P. 1-17, <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>
 103. *Ronto A.* On constructive investigation of a class of non-linear boundary value problems for functional differential equations / A. Ronto, M. Ronto // *Carpathian Journal of Mathematics*. — 2013. — 29, №1. — P. 91-108.
 104. *Ronto A.* Periodic successive approximations and interval halving/ A. Ronto, M. Ronto // *Miskolc Mathematical Notes*. — 2012. Vol.13, №. 1. — P.459-482.
 105. *Ronto A.* A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems / A. Ronto, M. Ronto, J. Varha // *Applied Mathematics and Computation*. — 2015. — 250. — P. 689-700, doi:10.1016/j.amc.2014.11.021.

106. *Ronto M.* Numerical–analytic successive approximation method for non–linear boundary value problems / M. Ronto // *Nonlin. Analysis: Theory, Methods, and Applications.* — 1997. — 30, №. 5. — P. 3179–3188.
107. *Ronto M.* Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems / M. Ronto, A.M. Samoilenko: World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000. — 468 p.
108. *Ronto M.* On numerical-analytic method for BVPs with parameters / M. Ronto // *Publ.Univ. of Miskolc, Ser. D. Natur. Sci. Math.* — 1996. — 36, №2. — P. 125–132.
109. *Rontó M.* Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems / M. Rontó, Y. Varha // *Miskolc Mathematical Notes.* — 2015. — Vol.16, №2. — P. 1129-1152, DOI: 10.181514/MMN.2015.1192.
110. *Rontó M.* Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems / M. Rontó, Y. Varha // *Miskolc Mathematical Notes.* — 2014. — Vol.15, №2. — P. 725-742.
111. *Rontó M.* Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems / M. Rontó, Y. Varha, K. Marynets // *Tatra Mountains, Mathematical Publications.* — 2015. — 63. — P. 247-267, doi 10515/tmmp-2015-0035.
112. *Ronto M.* On parametrized problems with nonlinear boundary conditions / M. Ronto, N. Shchobak // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* — 2004. — P. 1–24.
113. *Ronto M.* On some existence results for parametrized boundary-value problems // *Publ.Univ. of Miskolc, Ser. D. Natur. Sci. Math.* — 1997. — 37, №2. — P. 95–103.
114. *Ronto M.* On the investigation of parametrized non-linear boundary value problems / M. Ronto // *Nonlinear Analysis.* — 2001. — 47. — P. 4409-4420.
115. *Ronto M.* On the parametrization of boundary-value problems with three-point non-linear restrictions / Miklos Ronto, Kateryna Marynets // *Miskolc Mathematical Notes.* — 2012. Vol.13, №. 1. — P.91-106.
116. *Ronto M. I.* On the parametrization of boundary-value problems with two-point nonlinear boundary conditions / M. I. Ronto, K. V. Marynets' // *Nonli-*

- near Oscillations. — 2012. Vol. 14, № 3. — P.379-413.
117. *Ronto M.* On the numerical–analytic investigation of parametrized problems with non–linear boundary conditions / Miklos Ronto, Natalia Shchobak // Nonlinear Oscillations. — 2003.— Vol. 6, №4.— P. 482–510.
118. *Rontó, M.* Parametrization for some boundary value problems of interpolation type / M.Rontó, N. Shchobak // Tatra Mountains — 2009. — 43.— P. 229-242.
119. *Ronto M.* Parametrization for non–linear problems with integral boundary conditions / M. Ronto, K. Marynets // Electronic Journal of Qualitative Theory of differential Equations, QTDE. — 2012. — No.99. — pp.1-23, <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>
120. *Ronto M.* Reduction of integral boundary value problems to a certain model type / M. Ronto, Y. Varha // Conference on Differential and Difference Equations and Applications: intern. scient. conf., 23-27 June 2014. : conf. materials. — Jasna, Slovak Republic, 2014. — P. 44.
121. *Ronto M.* On analysis of solutions of some nonlinear integral boundary-value problems / M. Ronto, K. Marynets, Y. Varha // The Issues of Calculations Optimization (ПОО-XL): intern. scient. conf., 30 September-4 October 2013. : conf. materials. — K., 2013. — T. 2. — P. 222–223.
122. *Ronto M.* Constructive existence analysis of two solutions of some nonlinear integral BVS / M. Ronto, Y. Varha // The Issues of Calculations Optimization (ISCOPT-XLII): International Scientific Workshop , 21-25 September 2015. : conf. materials. — K., 2015. — P. 76.
123. *Ronto M.* Integral boundary value problems and division into subintervals / M. Ronto, Y. Varha // Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Series mathematics and informatics. — 2015.—27, №2. — P. 144–153.
124. *Ronto M.* On the investigation of integral boundary value problems / M. Ronto, J. Varha // Методика викладання та методи дослідження в математиці: міжнар. наук. конф., м. Берегове, 21-23 квітня 2016. : матеріали міжнар. матем. конф. — С. 14.
125. *Rouche N.* Ordinary differential equations / N. Rouche, J. Mawhin. — Boston: Pitman, 1980. — 260 p.
126. *Samoilenko A. M.* Averaging of nonlinear oscillatory systems of higher

- approximation with delay / A. M. Samoilenko, Ya. J. Bigun // Нелінійні коливання. — 2002. — 5, №1. — С. 77–85.
127. *Samoilenko A. M.* Impulsive differential equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk . — Singapore: World Scientific, 1995. — 462 p.
128. *Samoilenko A. M.* Multifrequency oscillations of nonlinear systems / A. M. Samoilenko, R. I. Petryshyn.: Mathematics and its Applications, 567. KluwerAcademic Publishers Group, Dordrecht, 2004. vi+317 pp.
129. *Sergeeva L. M.* On global solutions of functional-differential equations / L. M. Sergeeva, Ya. J. Bigun // Нелінійні коливання. — 2011. — 14, №1. — С. 100-110.
130. *Stanek S.* Positive solutions of singular Dirichlet boundary value problem with time and space singularities / S. Stanek // Nonlinear Anal. — 71, №10. — 2009. — P. 4893-4905.