УДК 519.816 (075.8)

МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ НА ВИРОБНИЦТВО ПРОДУКТУ ОСОБИСТОГО КОРИСТУВАННЯ

Лавер В.О.
Маляр М. М.

В статті йдеться мова про те, що після світової економічної кризи знову набули актуальності питання державного регулювання економіки. Аналізується одна з моделей регульованої монополії, а саме модель розподілу витрат на виробництво продукту особистого користування. Для аналізу використовуються методи економіко-математичного моделювання. Розглядається чіткий варіант постановки задачі та підхід до її вирішення через зведення до класичної моделі розподілу витрат. Розглядається алгоритм знаходження оптимальних часток витрат агентів та величини колективного продукту.

Ключові слова: *регульована монополія, розподіл витрат, прийняття рішень, математичні моделі, математична економіка, економіко-математичне моделювання, оптимізація, оптимальні розподіли, колективний продукт.*

ВСТУП

На основі критики існуючих підходів до визначення місця природних монополій в системі економічних відносин в розвинутих капіталістичних країнах, перш за все в США та Великобританії, були прийняті закони та нормативні акти, спрямовані на організацію конкурентного сектору в галузях, що раніше розглядались як складова частина природних монополій, і виділенню портів аеропортів, терміналів та ін. як природно-монопольного сектору. Нові теоретичні підходи на практиці звелись до дезінтеграції і приватизації природних монополій. Але реформи даного роду не завжди дозволяють досягти бажаної ефективності і загалом не є позбавленими недоліків. Це можна простежити, наприклад, на досвіді реформування галузі електроенергетики в Великобританії [5]. Тому не втрачають актуальності математичні моделі регулювання природних монополій.

Теоретичним підґрунтям при дослідженні регульованих монополій можуть слугувати праці вчених світової економічної науки, зокрема У. Баумоля, Г. Демшеця, Р. Позера, Масгрейва, Пікока, Дж. Панзара, Р. Уілліга [6]. Математичні моделі регульованої монополії та застосуваня теорії ігор до вирішення даних проблем можна знайти в працях французького математика Е. Мулена [3] та інших вчених, зокрема Ш. Вебера, В. Петерса, М. Ямади та ін.

Разом з тим, не дивлячись на значний науковий доробок, дослідженнями не охоплено в повній мірі питання знаходження оптимальних розподілів витрат, які б враховували наперед задані принципи розподілу. Тому це питання і стало предметом даної статті.

При написанні статті використовувались методи економіко-математичного моделювання та методи оптимізації.

Враховуючи актуальність даної проблеми в процесі дослідження ставилася мета – дослідити модель виробництва продукту особистого користування і побудувати алгоритми для знаходження оптимальних розподілів витрат і оптимальних рівнів випуску продукції.

1 ВИРОБНИЦТВО ПРОДУКТУ ОСОБИСТОГО КОРИСТУВАННЯ

Розглядається модель регульованої монополії, а саме задача виробництва особистого продукту [3].

Нехай маємо два «особистих» продукти: праця використовується як ресурс для виробництва кукурудзи (випуск). Виробництво кукурудзи потребує $x = c(y)$ одиниць праці (наприклад, годин), c неспадна функція, $c(0) = 0$.

В економіці діють *n* агентів. На початку процесу виробництва у агента *i* є M_i одиниць вільного часу (цей час може бути використаний для відпочинку чи дозвілля, або для виробництва) і в нього немає кукурудзи. В кінцевому розподілі в нього залишається частина вільного часу при витратах праці x_i і він споживає y_i одиниць кукурудзи. Його переваги описуються функцією корисності $u_i(M_i - x_i, y_i)$, що задана на просторі «вільний час»-«кукурудза». Таким чином, розподіл є допустимим, якщо (і тільки якщо)

Лавер В.О., асистент кафедри кібернетики і прикладної математики, Ужгородський національний університет, e-mail: v.laver@gmail.com
Маляр М.М., к.т.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики, Ужгородський національний університет

$$0 \le x_i \le M_i,\ 0 \le y_i \quad \textbf{для} \ \forall i = \overline{1,n} \ \textbf{і} \ \sum_{i=1}^{n} x_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{1}$$

Відмітимо, що в цій моделі витрати часу нетрансферабельні (не передаються) між агентами. Зокрема, агент *i* не може залишитись з більшою кількістю вільного часу, ніж в нього було на початку, він не може позичити вільний час в когось іншого.

Накладаються типові для моделей мікроекономіки обмеження[4]: функції корисності агентів квазіугнуті та диференційовані, функція витрат опукла і диференційована.

Розглянемо «внутрішні» розподіли ($0 < x_i < M_i$, $0 < y_i$). Для оптимальності за Парето такого розподілу необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні рівності («умова Самуельсона»[3], що відповідає адитивній згортці функцій корисності агентів):

$$\frac{u_{iy}}{u_{im_i}}(m_i, y_i) = c'\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right), \ \textbf{для} \ \forall i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $m_i = M_i - x_i$ - величина залишку вільного часу агента *i*.

2 ВИПАДОК КВАЗІЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ КОРИСНОСТІ

Розглянемо випадок квазілінійних корисностей: $u_i(M_i - x_i, y_i) = b_i(y_i) + m_i$, де $b_i(y_i)$ - це еквівалент у годинах витрат, необхідних для випуску y_i одиниць кукурудзи. Для агента *i* байдуже, чи він має $b_i(y_i)$ одиниць вільного часу, чи споживає y_i одиниць кукурудзи безкоштовно.

Умови (2) для квазілінійних функцій корисності набувають такого вигляду:

$$b_i'(y_i) = c'\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \ \textbf{для} \ \forall i = \overline{1,n} \tag{3}$$

Якщо функції $b_i(y_i)$ угнуті і функція *c* опукла, то маємо задачу опуклого математичного програмування. Тоді необхідні умови екстремуму є і достатніми і розв'язок задачі (3) єдиний.

Отже, для знаходження оптимального набору рівнів випуску продукту особистого користування $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ маємо систему з *n* рівнянь з *n* невідомими, яка може бути розв'язана відомими чисельними методами[1].

Припустимо, що знайдено розв'язок (3). Постає питання: яким чином розподілити витрати між агентами?

Пропонується апріорі визначити один із принципів розподілу витрат [2]:

1) вирівнювання витрат ($x_i = x_j, \forall i, j$);
2) вирівнювання вільного часу ($m_i = m_j, \forall i, j$);
3) пропорційність витрат початковим запасам часу $x_i = \dfrac{M_i}{\sum M_i} c(\sum y_i), \forall i$.

Зауважимо, що пропорційність витрат початковим запасам часу еквівалентна пропорційності витрат вільному часу, $x_i = \dfrac{m_i}{\sum m_i} c\left(\sum y_i\right)$, в чому неважко переконатись шляхом елементарних перетворень.

Оскільки на x_i ($i = \overline{1,n}$) накладаються обмеження $0 \le x_i \le M_i$, то необхідно розглядати узагальнення принципу розподілу вирівнювання витрат – а саме подушний податок [3]. У випадку вирівнювання вільного часу узагальненням даного принципу є знаходження рівневого податку [3].

Нагадаємо, що рівневий податок – це (єдиний) розподіл витрат $(x_1, ..., x_n)$ у моделі розподілу витрат при $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, що є розв'язком задачі:

$$(x_1, ..., x_n) \in A = \left\{ (y_1, ..., y_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i = c, 0 \le y_i \le b_i, \forall i \right\},$$
$$(b_1 - x_1, ..., b_n - x_n) LM (b_1 - y_1, ..., b_n - y_n), \forall y \in A,$$

де *LM* – лексимінний порядок на E^N.

Подушний податок – це (єдиний) розподіл витрат $(x_1, ..., x_n) \in A$, що задовольняє: $(x_1, ..., x_n) LM (y_1, ..., y_n), \forall y \in A.$.

Рівневий та подушний податки можна обчислити за допомогою такого параметричного представлення[2]:

1. подушний податок обчислюється із розв'язку наступного рівняння відносно параметра $\lambda \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, M_i\} = c(y) \Rightarrow x_i = \min\{\lambda, M_i\}.$$

2. подушний податок обчислюється із розв'язку наступного рівняння відносно параметра $\lambda \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, M_i\} = \sum_{i=1}^{n} M_i - c(y) \Rightarrow x_i = M_i - \min\{\lambda, M_i\}$$

Якщо ж ми розглядаємо пропорційний принцип, то $x_i = \frac{M_i}{\sum M_i} c(\sum y_i), \quad i = \overline{1,n}$, і обмеження на величину витрат завжди виконуються.

3 ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК

Розглянемо більш загальний випадок, коли агенти мають не квазілінійні корисності.

Застосувавши пропорційний принцип розподілу витрат, можемо знайти оптимальний розподіл $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ чисельно. Для цього потрібно підставити вираз для часток витрат агентів ($x_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$) в рівняння (2). В результаті отримаємо систему з n рівнянь з n невідомими, розв'язавши яку можемо знайти шуканий розподіл.

У випадках вирівнювання витрат або вільного часу задача дещо ускладнюється.

Задачу знаходження оптимальних розподілів, що будуть враховувати обрані принципи розподілу витрат, можна звести зокрема до таких оптимізаційних задач:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i - \frac{c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \right)^2} \rightarrow \min, \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{u_{iy}}{u_{im_i}}(m_i, y_i) = c'\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right), \ \forall i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right), \qquad \textbf{(5)}$$

$$0 < x_i < M_i, \ 0 < y_i, \ \forall i = \overline{1,n},$$

у випадку вирівнювання витрат, де α_i, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, це апріорно задані вагові коефіцієнти, що визначають величину відносного «права» i-го агента на відхилення від заданого типу розподілу. Чим більший ваговий коефіцієнт агента, тим його «право на відхилення» є меншим.

У випадку вирівнювання вільного часу отримаємо таку задачу:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(x_i - M_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i - c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \right)^2} \rightarrow \min, \qquad \textbf{(6)}$$

при обмеженнях (5). Коефіцієнти β_i мають аналогічний зміст, $0 \leq \beta_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$.

Логічно оптимізаційні задачі (4) і (5) об'єднати в одну задачу багатокритеріальної оптимізації.

$$\sqrt{\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i - \frac{c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \right)^2 + (1-\gamma) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(x_i - M_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i - c\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \right)^2} \rightarrow \min, \qquad \textbf{(7)}$$

при обмеженнях (5). Тут γ - заданий коефіцієнт, $0 \leq \gamma \leq 1$, що визначається «схильністю» суспільства до того чи іншого типу розподілу. Він може бути заданий з врахуванням економічних умов, політичного курсу – так, наприклад, для соціал-демократичної держави значення γ буде близьким до нуля, а в неоліберальній - до одиниці.

Для розв'язку цієї задачі можемо використовуємо метод множників Лагранжа.

Зазначимо, що для двох агентів розв'язок може бути знайдено аналітично.

4 ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо приклад. Дано двох агентів із початковими запасами вільного часу $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ і функціями корисності Кобба-Дугласа:

$$u_1(1 - x_1, y_1) = (1 - x_1) y_1,$$

$$u_2(2 - x_2, y_2) = (2 - x_2)\sqrt{y_2}.$$

Середні витрати $c(y)/y$ спадають по y (тобто технологія виробництва має зростаючі доходи на масштаб). Функція затрат має наступний вигляд: $c(y) = \sqrt{y}$ (тут і далі $y = y_1 + y_2$ - загальний рівень випуску кукурудзи).

Побудуємо кооперативну гру з нетрансферабельними корисностями, що відповідає даній економіці. Припустимо, що окремий агент має вільний доступ до технології. Тоді

$$\gamma_1(c) = v(1) = \max_{0 \leq y_1 \leq 1} (1 - \sqrt{y_1}) y_1 = 0{,}148; \quad \text{та}$$

$\gamma_2(c) = v(2) = \max_{0 \leq y_2 \leq \sqrt{2}} (1 - \sqrt{y_2})\sqrt{y_2} = 1$, де $v(i)$ - виграш i-го гравця.

Множина $v(12)$ (виграш коаліції двох гравців) задається границею допустимих корисностей або відображенням оптимальних за Парето розподілів[3].

Умови Самуельсона для цієї задачі набувають наступного вигляду:

$$\frac{1-x_1}{y_1}=\frac{2-x_2}{2y_2}=\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \textbf{(8)}$$

Враховуючи, що $x_1+x_2=\sqrt{y_1+y_2}$, з умов (8) можемо отримати наступні параметричні вирази:

$$y_1=4y-6\sqrt{y};\quad y_2=6\sqrt{y}-3y;$$
$$1-x_1=2\sqrt{y}-3.\ 2-x_2=6-3\sqrt{y}. \quad \textbf{(9)}$$

$$y_{1,2}\ge 0, 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 2 \quad \textbf{(10)}$$

З обмежень (10) можемо отримати діапазон допустимих змін значень параметру $\lambda=\sqrt{y}$: $\frac{3}{2}\le\lambda\le 2$, тобто $2{,}25\le y\le 4$.

Таким чином, маємо наступне параметричне представлення оптимальних за Парето векторів корисності:

$$u_1=8\lambda(\lambda-1)^2, u_2=\sqrt{\lambda}(4-3\lambda)^{3/2},\ \frac{3}{2}\le\lambda\le 2.$$

Розглянемо рівномірний принцип розподілу витрат ($x_1=x_2=\frac{\sqrt{y}}{2}$).

Цільова функція (4) для цього випадку набуде вигляду:

$$\min Z=\sqrt{\alpha_1\left(x_1-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+\alpha_2\left(x_2-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2},\ \alpha_1+\alpha_2=1. \quad \textbf{(11)}$$

Підставимо (9) в (11). Внаслідок ряду елементарних перетворень, отримаємо, що

$$\sqrt{\alpha_1\left(x_1-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+\alpha_2\left(x_2-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2}=\sqrt{\alpha_1\left(4-2\sqrt{y}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+\alpha_2\left(3\sqrt{y}-4-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)\left(4-2{,}5\sqrt{y}\right)^2}=\sqrt{\left(4-2{,}5\sqrt{y}\right)^2}=\left|4-2{,}5\sqrt{y}\right|.$$

Звідси отримуємо, що $\sqrt{y}=1{,}6.$

Як бачимо, вагові коефіцієнти в даному випадку скорочуються. Це відбувається зокрема тому, що адитивна згортка (що відповідає утилітарному критерію) є нечутливою до перерозподілу корисностей.

Отже, вирівнюючи витрати, отримаємо наступні значення: $y=2{,}56$, $x_1=x_2=0{,}8$, $y_1=0{,}64$, $y_2=1{,}92$. Корисності агентів відповідно рівні $u_1=0{,}128$, $u_2=2{,}103$.

Аналогічно, вирівнюючи вільний час ($x_i=M_i-\left(\frac{\sum M_i-c(y)}{n}\right)$), отримуємо $y=3{,}24$, $x_1=0{,}4$, $x_2=1{,}4$, $y_1=2{,}16$, $y_2=1{,}08$, $u_1=1{,}296$, $u_2=0{,}873$.

Пропорційний розподіл витрат відповідно дає $y=2{,}938$, $x_1=0{,}572$, $x_2=1{,}142$, $y_1=1{,}467$, $y_2=1{,}471$, $u_1=0{,}628$, $u_2=1{,}362$.

Як бачимо, тільки розподіл витрат, отриманий за принципом пропорційності, належить ядру гри. Це означає, що обираючи певний принцип розподілу як «справедливий», гравці повинні погодитись і на не зовсім ефективні для них розподіли витрат заради максимізації колективного добробуту.

ВИСНОВКИ

Зведення до задачі розподілу витрат дозволяє знаходити оптимальні розподіли з врахуванням апріорно заданих принципів розподілу. Недоліком даного методу є те, що він вимагає розв'язання досить складних оптимізаційних задач. Також, отримані результати не завжди належать ядру відповідної кооперативної гри.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Банди Б. Методы оптимизации. – М.: Радио и связь, 1988. - 128с.
2. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень. - К.: ВТЦ "Київський університет", 2006. - 304с.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений. - М: Мир, 1991. - 464с.
4. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Мікроекономіка. – К: Вища школа, 2004. - 262с.
5. Сапожникова Н.Т., Сауткин С.И. Естественная монополия: опыт реформирования электронергетики Великобритании // Менеджмент в России и за рубежом. – 2001. - №6.
6. Panzar J.C., Willig, R.D. Free Entry and Stability of Natural Monopoly // Bell Journal of Economics. – 1977. - v.8.