

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

# НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Том 42 № 1*

Ужгород 2023

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2023. Т. 42, № 1. 233 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1)).

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.екон.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №3 від 2 травня 2023 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №5 від 4 травня 2023 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.
---

Індексується в Index Copernicus. ICV 2021 = 78.86.

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua).

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2023

© Ужгородський національний університет,  
2023

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

# SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Volume 42 No 1*

Uzhhorod 2023

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2023. Vol. 42, No 1. 233 p.  
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1)).

## EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.). Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 3 of May 2, 2023) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 5 of May 4, 2023)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2021 = 78.86.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua).

# ЗМІСТ

## Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бондаренко В. М., Стойка М. В., Стъопочкіна М. В.* Про комбінаторні властивості частково впорядкованих множин надсуперкритичного  $MM$ -типу найменшого порядку . . . . . 9
2. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про алгебру Ауслендера над полем характеристики два комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів . . . . . 14
3. *Бортош М. Ю., Химинець М. В.* Розширені бінарні коди Голея за груповою алгеброю групи  $C_3 \times D_8$  . . . . . 20
4. *Божонок К. В.* Алгоритм поліноміальної апроксимації розв'язків нелінійного диференціального рівняння Абеля . . . . . 26
5. *Гуртовий Ю. В., Єлькін В. І.* Стоячі хвилі в двошаровій обмеженій рідині . . . . . 35
6. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В., Боярищева Т. В.* Точність наближення в центральній граничній теоремі в термінах зрізаних псевдомоментів . . . . . 47
7. *Курченко О. О., Синявська О. О.* Чотири теореми для диференційованих функцій кількох змінних . . . . . 56
8. *Назаренко О. А., Стехун А. О., Яровий А. Т.* Дифракція пружних хвиль на сферичних дефектах . . . . . 66
9. *Петрова Т. О., Петрова І. Л.* Узагальнення негативних результатів для інтерполяційного монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну в просторі соболева з індексом  $r \in (2, 3)$  . . . . . 75
10. *Самарук Н. М.* Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору . . . . . 81
11. *Турчин Є. В.* Асиметричні аналоги узагальненого подвійного розподілу Ломакса: властивості та застосування . . . . . 92

## Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бабич С. Ю., Діхтярук М. М., Лазар В. Ф., Мальяр М. М.* Контактна задача для нескінченного пружного неоднорідного стрингера і двох смуг з початковими напруженнями . . . . . 103
2. *Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Лазар В. Ф., Микоряк М. В.* Числовий розв'язок контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та двох півпросторів з початковими напруженнями . . . . . 117
3. *Бойко Н. І., Ткачик О. А.* Алгоритми та методи кластеризації для різноманітних даних . . . . . 131
4. *Брила А. Ю., Кузка О. І., Погоріляк О. О.* Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями та інтервальними обмеженнями допустимості . . . . . 150
5. *Глагола В. Ю.* Синтез комбінованої нейромережевої моделі прогнозування . . . . . 156
6. *Гчанська Н. В., Лисенко М. В.* Прогнозування видобутку нафти в Україні за допомогою адаптивних моделей . . . . . 166
7. *Кириченко В. В., Лесіна Є. В.* Формальний розв'язок задачі Діріхле у кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною . . . . . 176
8. *Кондрук Н. Е.* Аналіз технік зменшення розмірності в машинному навчанні . . . . . 183
9. *Крилов Є. В., Нікітін В. А.* Використання транзакційного годинника для пришвидшення процесу узгодження даних в розподілених системах . . . . . 190

---

10. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Еквацио- нально неповних булевих алгебр . . . . .	195
11. Сабов Д. П., Шаркаді М. М. Підходи щодо кластеризації криптовалют . . . . .	203
12. Симонов Д. І. Конкурентні моделі розміщення центрів обслуговування клі- єнтів . . . . .	210
13. Червак-Смерічко О. Ю. Лексикографічна згортка багатьох критеріїв як над- критерій їх паретівської згортки . . . . .	218

# CONTENTS

## Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V.* On combinatorial properties of the posets of oversupercritical  $MM$ -type of smallest order. . . . . 9
2. *Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.* On the Auslander algebra over a field of characteristic two of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements . . . . . 14
3. *Bortos M. Yu., Khymynets M. V.* Extended binary Golay codes by a group algebra of the group  $C_3 \times D_8$ . . . . . 20
4. *Bozhonok K. V.* Algorithm for the Polynomial Approximation of the Abel's Differential Equation Solutions . . . . . 26
5. *Hurtovyi Yu. V., Yelkin V. I.* Standing waves in a two-layer limited liquid . . . . . 35
6. *Kapustey M. M., Slyusarchuk P. V., Boiaryshcheva T. V.* Exactness of an approximation in the central limit theorem in the term of axe middle pseudomoments 47
7. *Kurchenko O. O., Syniavska O. O.* Four theorems for differentiable functions of several variables . . . . . 56
8. *Nazarenko O. A., Stekhun A. O., Yarovyi A. T.* The diffraction of elastic waves by spherical defects. . . . . 66
9. *Petrova T. O., Petrova I. L.* Generalization of negative results for interpolation monotone approximation of functions having a fractional derivative in sobolev space with index  $r \in (2, 3)$ . . . . . 75
10. *Samaruk N. M.* Quasi-monomials with respect to subgroups of the space affine group . . . . . 81
11. *Turchyn I. V.* Skew Counterparts of the Generalized Double Lomax Distribution: Properties and Applications . . . . . 92

## Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Babich S. Yu., Dikhtyaruk M. M., Lazar V. F., Malyar M. M.* Contact problem for an infinite elastic inhomogeneous stringer and two strips with initial stresses . 103
2. *Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Mikoryak M. V.* Numerical solution of the contact problem for a pre-stressed cylindrical stamp and two half-spaces with initial stresses . . . . . 117
3. *Boyko N. I., Tkachyk O. A.* Clustering algorithms and methods for diverse data . 131
4. *Bryla A. Yu., Kuzka O. I., Pohoriliak O. O.* The Lexicographic Optimization Problem with alternative criteria and interval admissibility conditions . . . . . 150
5. *Hlahola V. Yu.* Synthesis of the combined neural network forecasting model . . . . . 156
6. *Ichanska N. V., Lysenko M. V.* Oil Production Forecasting in Ukraine using Adaptive Models and Neural Networks. . . . . 166
7. *Kyrychenko V. V., Lesina E. V.* On the solution of the first boundary value problem in a ball for a nonhomogeneous ultrahyperbolic equation. . . . . 176
8. *Kondruk N. E.* Analysis of Dimensionality Reduction Techniques in Machine Learning . . . . . 183
9. *Krylov E. V., Nikitin V. A.* Usage of transaction clock to speed up the data consistency process in distributed systems . . . . . 190
10. *Mych I. A., Nikolenko V. V., Vartsaba O. V.* Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. . . . . 195
11. *Sabov D. P., Sharkadi M. M.* Approaches to clusterization of cryptocurrencies . . . 203
12. *Symonov D. I.* Competitive models of placement of customer service centers . . . . . 210

13. <i>Chervak-Smerichko O. Yu.</i> Lexicographic convolution of multiple criteria as a supercriterion of their paretian convolution . . . . .	218
--	-----



УДК 512.56

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).9-13](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).9-13)**В. М. Бондаренко<sup>1</sup>, М. В. Стойка<sup>2</sup>, М. В. Стъпочкіна<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Інститут математики НАН України,  
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,  
доктор фізико-математичних наук  
[vitalij.bond@gmail.com](mailto:vitalij.bond@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

<sup>2</sup> Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,  
доцент кафедри математики і інформатики,  
кандидат фізико-математичних наук  
[stoyka\\_m@yahoo.com](mailto:stoyka_m@yahoo.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0840-1496>

<sup>3</sup> Поліський національний університет,  
доцент кафедри вищої і прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук  
[stmar@ukr.net](mailto:stmar@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

## ПРО КОМБІНАТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН НАДСУПЕРКРИТИЧНОГО ММ-ТИПУ НАЙМЕНШОГО ПОРЯДКУ

М. М. Клейнер довів, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина  $S$  має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(1, 3, 3)$ ,  $(1, 2, 5)$ ,  $(N, 4)$ , а Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина  $S$  є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 4)$ ,  $(1, 2, 6)$ ,  $(N, 5)$ . Ці ч. в. множини називаються відповідно критичними і суперкритичними.

Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних в тій самій мірі, що суперкритичні відрізняються від критичних, називаються надсуперкритичними. У цій статті ми вивчаємо деякі комбінаторні властивості ч. в. множин, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичним ч. в. множинам найменшого порядку.

**Ключові слова:** критичні, суперкритичні та надсуперкритичні ч. в. множини, мінімаксний ізоморфізм, граф Хассе, 0-довжина ланцюга.

**1. Вступ.** М. М. Клейнер [7] довів, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина  $S$  має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(1, 3, 3)$ ,  $(1, 2, 5)$  і  $(И, 4)$ , які називаються критичними множинами;  $(P, Q)$  позначає ч. в. множину, яка є прямою сумою ч. в. множин  $P$  і  $Q$ , а  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$  — ч. в. множину, яка є прямою сумою ланцюжків довжини  $i_1, i_2, \dots, i_p$ . У [2] доведено, що ч. в. множина є критичною відносно доданості квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна (чи, формально, більш точно — мінімаксно ізоморфна) критичній множині (поняття мінімаксної еквівалентності введено в [1]); в [2] всі такі ч. в. множини повністю описано.

Подібну ситуацію маємо і з ручними ч. в. множинами. Л. А. Назарова [8] довела, що ч. в. множина  $S$  ручна тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 4)$ ,  $(1, 2, 6)$  і  $(И, 5)$ ; ці ч. в. множини називають надкритичними. У [3] доведено, що ч. в. множина є критичною

відносно невід'ємності форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна суперкритичній ч. в. множині; всі такі критичні ч. в. множини описані в [4].

Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин у спосіб, яким суперкритичні ч. в. множини відрізняються від критичних, називаються надсуперкритичними. Точніше (див. [5]), це такі ч. в. множини: 1) (1, 1, 1, 1, 1, 1), 2) (1, 1, 1, 1, 2), 3) (1, 1, 2, 2), 4) (1, 1, 1, 3), 5) (2, 3, 3), 6) (2, 2, 4), 7) (1, 4, 4), 8) (1, 3, 5), 9) (1, 2, 7), 10) (6, II).

У цій статті вивчаються комбінаторні властивості ч. в. множин  $S$ , які мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним ч. в. множинам шостого порядку, тобто множинам  $A_0 = (1, 1, 2, 2)$ ,  $B_0 = (1, 1, 1, 3)$ ,  $C_0 = (1, 1, 1, 1, 2)$ ,  $D_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . В цьому випадку кажуть, що  $S$  має відповідно  $MM$ -тип  $A_0, B_0, C_0, D_0$ . Іншими (більш загальними словами), в цій статті ми вивчаємо властивості ч. в. множин надсуперкритичного  $MM$ -типу найменшого порядку.

**2. Формулювання основних результатів.** Нехай  $S$  скінченна ч. в. множина. Її діаграмою Хассе називається орієнтований граф  $H(S)$  з вершинами  $x \in S$  і стрілками  $(x, y)$ ,  $x, y \in S$ , де  $y$  накриває  $x$  (тобто,  $x < y$  і не існує  $z$  такого, що  $x < z < y$ ). Ми називаємо  $0$ -довжиною орієнтованого шляху графа Хассе  $H(S)$  число його вершин і позначаємо через  $l_{min}(S)$  (відповідно  $l_{max}(S)$ )  $0$ -довжину найбільш короткого (відповідно довгого) орієнтованого шляху графа  $H(S)$ . Зауважимо, що шляхи довжини 1 також розглядаються. Ми позначаємо через  $[S]^\sim$  множину всіх ч. в. множин мінімаксно еквівалентних ч. в. множині  $S$  (див. [1]) і покладаємо

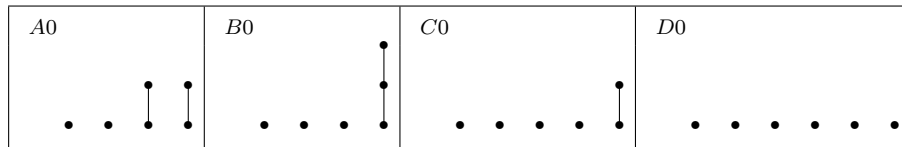
$$L_{min}(S) = \min_{X \in [S]^\sim} l_{min}(X), \quad L_{max}(S) = \max_{X \in [S]^\sim} l_{max}(X).$$

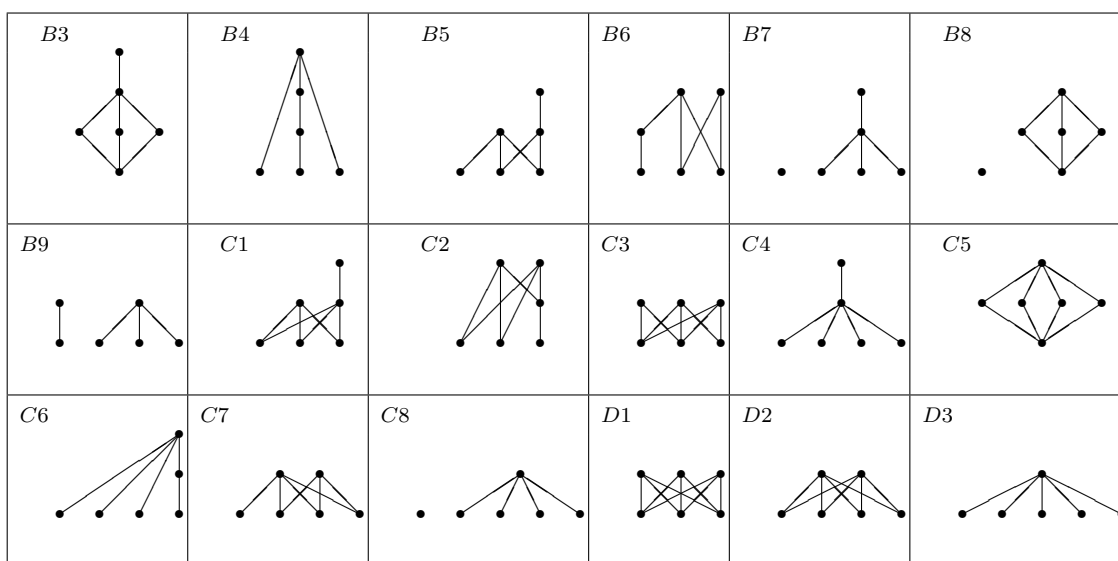
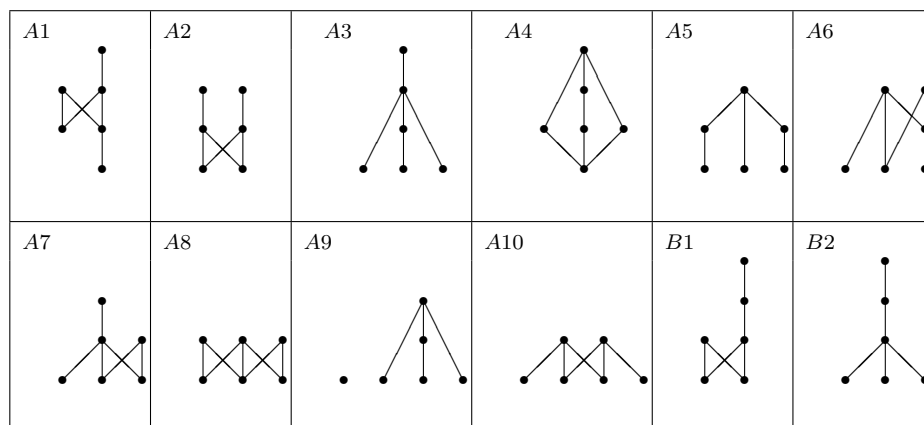
Число максимальних орієнтованих шляхів ч. в. множини  $X$  (тобто таких, що не належать орієнтованим шляхам більшої  $0$ -довжини) позначається через  $n(X)$ .

**Теорема 1.** *Нехай  $S \in \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ . Тоді  $L_{min}(S) = 1$ ,  $L_{max}(S) = 4$  і для довільного  $X \in [S]^\sim$ ,  $1 \leq l_{min}(X) \leq 4$ ,  $1 \leq l_{max}(X) \leq 4$ ,  $1 \leq n(X) \leq 9$ .*

**3. Доведення теореми 1.** З формальних міркувань (пов'язаних з нумерацією малюнків в таблицях) ми пишемо  $A0, B0, C0, D0$  замість  $A_0, B_0, C_0, D_0$ .

Ч. в. множини, мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним ч. в. множинам шостого порядку (або, іншими словами, ч. в. множинам шостого порядку, що мають надсуперкритичний  $MM$ -тип), описані в [6]. Вони задаються з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) наступною таблицею.





Ми маємо таку теорему.

**Теорема 2.** Для ч. в. множин  $A_i, B_j, C_k, D_s$  виконується наступне:

$N$	$l_{min}$	$l_{max}$	$n$
$A_0$	1	2	4
$B_0$	1	3	4
$C_0$	1	2	5
$D_0$	1	1	6

$N$	$l_{min}$	$l_{max}$	$n$	$N$	$l_{min}$	$l_{max}$	$n$	$N$	$l_{min}$	$l_{max}$	$n$
A1	2	4	4	B1	2	4	4	C2	2	3	6
A2	3	3	4	B2	4	4	3	C3	2	2	8
A3	3	4	3	B3	4	4	1	C4	3	3	4
A4	3	4	1	B4	2	4	3	C5	3	3	1
A5	2	3	3	B5	2	3	5	C6	1	3	4
A6	2	3	5	B6	2	3	5	C7	2	2	7
A7	2	3	5	B7	1	3	4	C8	1	2	5
A8	2	2	7	B8	1	3	2	D1	2	2	9
A9	1	3	4	B9	2	2	4	D2	2	2	8
A10	2	2	6	C1	2	3	6	D3	2	2	5

Теорема 2 доводиться за допомогою безпосередніх обчислень

Теорема 1 випливає із теореми 2.

**4. Висновки.** У статті описуються комбінаторні властивості ч. в. множин, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичним ч. в. множинам найменшого порядку. Результати та методи їх доведення можуть бути застосовані для інших класів ч. в. множин.

#### Список використаної літератури

1. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*. 2005. No. 1. P. 24–25.
2. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.
3. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2008. Т. 60, № 9. С. 1157–1167.
4. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2009. Т. 61, № 5. С. 734–746.
5. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. 1-надсуперкритичні частково впорядковані множини з тривіальною групою автоморфізмів і міні-еквівалентність. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика*. 2011. Т. 22, № 2. С. 17–25.
6. Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В. Про частково впорядковані множини шостого порядку, що мають надсуперкритичний ММ-тип. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2021. Т. 38, № 1. С. 7–15.
7. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 32–41.
8. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР*. 1975. Т. 39, № 5. С. 963–991.

**Bondarenko V. M., Stoika M. V., Stypochkina M. V.** On combinatorial properties of the posets of oversupercritical MM-type of smallest order.

M. M. Kleiner proved that a poset  $S$  has finite representation type if and only if it does not contain subposets of the form  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(1, 3, 3)$ ,  $(1, 2, 5)$ ,  $(N, 4)$ , and L. A. Nazarova proved that a poset  $S$  is tame if and only if it does not contain subsets of the form  $(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 4)$ ,  $(1, 2, 6)$ ,  $(N, 5)$ . These posets are called, respectively, critical and supercritical.

The posets which differ from the supercritical posets in the same degree as the supercritical posets differ from the critical ones, are called oversupercritical. In this paper, we study some combinatorial properties of the posets that are minimax isomorphic to the oversupercritical posets of the smallest order.

**Keywords:** critical, supercritical and oversupercritical posets, minimax isomorphism, Hasse graph, 0-length of a chain.

## References

1. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*, 1, 24–25 [in Russian].
2. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form, *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr./Problems of Analysis and Algebra. Institute of Mathematics of NAN of Ukraine*, 2(3), 18–58. [in Russian].
3. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2008). (Min, max)-equivalency of posets and nonnegative Tits forms *Ukrainian Math. J.*, 60(9), 1349–1359.
4. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukrainian Math. J.*, 61(5), 734–746.
5. Bondarenko, V. V., Bondarenko, V. M., Stepochkina, M. V., & Chervyakov, I. V. (2011). 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.*, 22(2), 17–25. [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2021) On posets of sixth order having oversupercritical MM-type. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.*, 38(1), 7–15.
7. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauch. Semin. LOMI*, 28, 32–41. [in Russian].
8. Nazarova, L. A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(5), 963–991. [in Russian].

Одержано 25.04.2023

УДК 512.53, 512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).14-19](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).14-19)

V. M. Bondarenko<sup>1</sup>, O. V. Zubaruk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,  
Leading researcher of the department of algebra and topology,  
Doctor of physical and mathematical sciences  
[vitalij.bond@gmail.com](mailto:vitalij.bond@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

<sup>2</sup> Kyiv National University named after Taras Shevchenko,  
Head of the cycle commission of mathematics teachers of UFML,  
Candidate of physical and mathematical sciences  
[sambrinka@ukr.net](mailto:sambrinka@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

## ON THE AUSLANDER ALGEBRA OVER A FIELD OF CHARACTERISTIC TWO OF THE COMMUTATIVE NONCYCLIC SEMIGROUP OF THIRD ORDER WITHOUT UNIC AND ZERO ELEMENTS

The classification of the semigroups of third order (in terms of Cayley tables, up to isomorphism and antiisomorphism) was first received by T. Tamura in 1953, and later, but with the help of a computer program, by G. E. Forsyth (in 1955). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups were constructed in the papers of V. M. Bondarenko and Y. V. Zatsikha. They also described representation type of third-order semigroups over an arbitrary field and in the case of semigroups of finite representation type, the canonical forms of matrix representations were indicated.

In a number of previous papers, the authors studied matrix Auslander algebras for third-order semigroups. This paper continues such research.

**Keywords:** semigroup, antiisomorphism, minimal system of generators, defining relations, matrix representation, representation type, canonical form, Auslander algebra.

**1. Introduction.** Minimal systems of generators and corresponding defining relations for all third-order semigroups are described in [1]. If we consider only commutative semigroups, and also those that are not neither cyclic nor cyclic with an attached unit or zero element, then there exist, up to isomorphism, only four semigroups (in square brackets are indicated all elements, in angular a minimal system of generators, and then the defining relations):

$$(a) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0;$$

$$(b) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = cb = 0;$$

$$(c) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0;$$

$$(d) (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c$$

(is a consequence of the remaining relations),  
 $b^2 = c^2, bc = cb = c.$

Note that trivial relations for unic and zero generating 0 and  $e$  (if any) are not written out.

All these semigroups are tame; moreover, except for the semigroup (a), are of finite representation type [1], that is, have a finite number of equivalence classes of indecomposable representations.

In the case of finite representation types, one of the forms of studying the category of representations is the description of the Auslander algebra as the algebra of endomorphisms of the direct sum of representatives of all equivalence classes of indecomposable representations. In the simple case of (b), the Auslander algebra was considered as an example in the paper [2], and in the case of (c) it was studied in [3]. In [4], we study the Auslander algebra of the semigroup (d) over a field of characteristic not equal to 2. The remaining case (when the characteristic is equal to 2) is considered in this paper.

**2. Formulation of the main result.** Let  $S$  be a semigroup and  $T = \{T(x) \mid x \in S\}$  be its matrix representation over a field  $K$ . An *endomorphism of the representation  $T$*  is a matrix  $X$  such that  $T(x)X = XT(x)$  for any  $x \in S$ . It is clear that when a system of generating elements of  $S$  is fixed, then it is sufficient to consider the indicated equality only for such elements. All matrices with this property form an algebra called the *algebra of endomorphisms of  $T$* . In the case when the semigroup  $S$  has a finite representation type, the algebra of endomorphisms of the direct sum of all, with accuracy up to equivalence, indecomposable representations (i.e., one representative from each equivalence class) is called the *Auslander algebra of the semigroup  $S$  over the field  $K$*  and is denoted by  $Aus_K(S)$ . Since we are considering matrix representations, it is natural to call the *Auslander matrix algebra*. Note that it does not depend on the choice of representatives in the equivalence classes in the sense that all algebras obtained in this way are isomorphic; moreover, they are conjugated as subalgebras of the complete matrix algebra of the corresponding size.

We now formulate the main result. The semigroup of the form (d) is denoted by  $S_d$ .

**Theorem 1.** *The Auslander matrix algebra  $Aus_K(S_d)$  of the semigroup  $S_d$  over a field  $K$  of characteristic 2 consists of all matrices of the form*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix},$$

where  $x_{ij}$  are elements of  $K$ .

**3. Proof of Theorem 1.** Canonical forms of the matrix representations of the semigroups of third order over a field  $K$  were obtained in [1], using methods of the Kyiv school on the theory of matrix problems and representations (see, e.g., [5]–[16]). In particular, for the semigroup  $S_d$  in the case of  $\text{char } K = 2$ , the canonical form looks like this:

$$b \rightarrow B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \rightarrow C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

where  $E$  are some unit cells (the size of which we do not fix). Since any representation is equivalent to an representation of the form  $(*)$  (at the same time, some unit cells may be empty), then this property holds for the direct sum  $\Sigma$  of all representatives of equivalence classes of indecomposable representations. So it is possible to calculate the Auslander algebra assuming that the representation  $\Sigma$  has the form  $(*)$ . And It is clear that at the same time (if we reason purely formally) all unit cells have dimension 1 or 0 (otherwise some representation is included in  $\Sigma$  two or more times). The effectiveness of the method used to obtain a canonical form, also consists in the fact that if all unit cells in the matrix  $\Sigma$  are considered to be one-dimensional, then permutations indecomposable direct terms will be indecomposable and pairwise non-equivalent. It is easy to check also directly. Indeed, the representation  $\Sigma$  is permutatively equivalent to the direct sum of the following representations:

- 1)  $B_1 = (1), C_1 = (1);$
- 2)  $B_2 = (0), C_2 = (0);$
- 3)  $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- 4)  $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

each of which is obviously indecomposable and all of them are pairwise non-equivalent.

Hence we have that the representations 1)–4) exhaust all (up to equivalence) indecomposable representations of the semigroup  $S_d$  and, therefore, the Auslander algebra can be calculated starting from the representations  $\Sigma_0$  of the form  $(*)$  with one-dimensional unit cells. Therefore,  $\Sigma_0$  is given by the matrices

$$b \rightarrow B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \rightarrow C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which means that the Auslander matrix algebra is given by equalities  $B_0X = XB_0$ ,  $C_0X = XC_0$  as equations relative to the matrix  $X = (x_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 6$ .

It is easy to calculate that the equality  $B_0X = XB_0$  is equivalent to the equalities  $x_{ij} = 0$  for  $i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6$ ;  $i = 4, 5, 6, j = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6$ ;  $i = 5, 6, j = 4$ ;  $i = 5, j = 6$  and  $x_{44} = x_{55}$  (see, e.g., [17, VIII, §2]).

Now consider the equality  $C_0X = XC_0$ . We have:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} & x_{13} + x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11} + x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{21} + x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{31} + x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

From here we have that

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix}.$$

Theorem 5 is proved.

**4. Conclusions.** The paper describes the Auslander matrix algebra over an arbitrary field of characteristic 2 of a unique (up to isomorphism) commutative noncyclic semigroup of the third order without unit and zero elements. Since the Auslander matrix algebra unambiguously defines the category of matrix representations, the obtained result (together with the corresponding research methods) will find application in the study of categories of representations of other semigroups.

### References

1. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematics and informatics*, 32(1), 36–49 [in Ukrainian].
2. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2015).  $\Sigma$ -function of the number of parameters for the matrix representations system. *Proc. Inst. math. NAS of Ukraine*, 12(3), 56–64 [in Russian].
3. Zubaruk, O. V. (2021). On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematics and informatics*, 38(1), 48–54 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2022). On the category of representations of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematics and informatics*, 41(2), 23–28 [in Ukrainian].
5. Bondarenko, V. M. (1988). *Svyazki polutsepnykh mnozhestv i ikh predstavleniya* [Bundles of semichained sets and their representations]. Kiev: In-t matematiki [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Drozd, Ju. A. (1977). Predstavlencheskiy tip konechnykh grupp [The representation type of finite groups]. *Modules and representations. Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 71, 24–41 [in Russian].
7. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). On matrix representations of monoids of the fourth order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University Ser. of mathematics and informatics*, 33(2), 19–26 [in Ukrainian].

8. Bondarenko, V. M., Nazarova, L. A., & Zavadskii, A. G. (1979). *O predstavleniyakh ruchnykh chastichno uporyadochennykh mnozhestv* [Representations of tame partially ordered sets]. Representations and quadratic forms. Kiev: Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat. [in Russian].
9. Drozd, Ju. A. (1977). *O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh* [Tame and wild matrix problems]. Kiev: Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. [in Russian].
10. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Ruchnyye chastichno uporyadochennyye mnozhestva s involyutsiyey [Tame partially ordered sets with involution]. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 183, 149–159 [in Russian].
11. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Predstavleniya chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of partially ordered sets]. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
12. Bondarenko, V. M. (2003). Linear operators on  $S$ -graded vector spaces. *Linear algebra and its applications*, 365, 45–90.
13. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications*, 430(1), 86–105.
14. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn, E. M. (2013). On modular representations of semigroups  $S_p \times T_p$ . *Algebra Discrete Math.*, 16(1), 16–19.
15. Bondarenko, V. M., & Tertychna, O. M. (2008). On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra Discrete Math.*, 4, 15–22.
16. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math.*, 21(1), 18–23.
17. Gantmakher, F. (1966). *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moskow: Nauka [in Russian].

**Бондаренко В. М., Зубарук О. В.** Про алгебру Ауслендера над полем характеристики два комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів.

Класифікація напівгруп третього порядку (в термінах таблиць Келі, з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) була вперше отримана Т. Тамурою в 1953 році, а пізніше, але вже за допомогою комп'ютерної програми, Г. Е. Форсайтом (в 1955 році). Мінімальні системи твірних і відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані в працях В. М. Бондаренка та Я. В. Заціхи. Вони також описали зображувальний тип напівгруп третього порядку над довільним полем, а у випадку напівгруп скінченного зображувального типу вказали канонічні форми матричних зображень.

У низці попередніх праць автори досліджували матричні алгебри Ауслендера для напівгруп третього порядку. Ця стаття продовжує такі дослідження.

**Ключові слова:** напівгрупа, антиізоморфізм, мінімальні системи твірних, визначальні співвідношення, матричне зображення, зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

### Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 1, № 32. С. 36–49.
2. Бондаренко В. М., Зубарук О. В.  $\Sigma$ -функція числа параметрів для системи матричних зображень. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. 2015. Т. 12, № 3. С. 56–64.
3. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера напівгрупи, породженої двома анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38, № 1. С. 48–54.
4. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про категорію зображень комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2022. Вип. 41, № 2. С. 23–28.

5. Бондаренко В. М. Связки полупростых множеств и их представления. Киев : Ин-т математики, 1988. 32 с.
6. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Записки науч. семинаров ЛОМИ*. 1977. Т. 71. С. 24–41.
7. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2018. Т. 33, № 2. С. 19–26.
8. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. Представления и квадратичные формы. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979. С. 75–105.
9. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977. С. 104–114.
10. Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*. 1990. Т. 183. С. 149–159.
11. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 5–31.
12. Bondarenko V. M. Linear operators on  $S$ -graded vector spaces. *Linear algebra and its applications*. 2003. Vol. 365. P. 45–90.
13. Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V. Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications*. 2009. Vol. 430. P. 86–105.
14. Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M. On modular representations of semigroups  $S_p \times T_p$ . *Algebra and Discrete Mathematics*. 2013. Vol. 16, No. 1. P. 16–19.
15. Bondarenko V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2008. No. 4. P. 15–22.
16. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V. On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 21, No. 1. P. 18–23.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, Москва : Наука, 1966. 576 с.

Одержано 03.05.2023

УДК 519.725

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).20-25](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).20-25)М. Ю. Бортош<sup>1</sup>, М. В. Химинець<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,  
кандидат фізико-математичних наук

maria.bortos@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-1350>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,  
myroslava.khymynets1@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6363-421X>

## РОЗШИРЕНІ БІНАРНІ КОДИ ГОЛЕЯ ЗА ГРУПОВОЮ АЛГЕБРОЮ ГРУПИ $C_3 \times D_8$

Бінарні коди Голя вивчалися довгий період і було встановлено багато різних конструкцій для їх побудови, а також з'ясовано багато властивостей цих кодів. У статті розглянуто побудову розширених бінарних кодів Голя за головними ідеалами (ліви́ми) групо́вою алгеброю  $\mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$  групи  $C_3 \times D_8$  порядку 24 над полем з двох елементів  $\mathbb{F}_2$ . Розглядається дія регулярного зображення  $v \rightarrow \sigma(v)$  на елементах  $v$  групо́вої алгебри. Рядки матриці  $\sigma(v)$  породжують лінійний бінарний код  $C(v)$ . У попередніх дослідженнях з'ясовано кількість всіх елементів  $v$  групо́вої алгебри  $\mathbb{F}_2G$  скінченних груп  $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$  та  $D_{24}$  таких, що бінарний код  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голя. Раніше таким способом розширений бінарний код Голя будувався за одним елементом  $v \in \mathbb{F}_2G$ , що  $v = v^*$ . В результаті числових обчислень знайдено всі 12 288 елементів  $v \in \mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$ , за якими можна побудувати розширений бінарний код Голя, серед яких 128 задовольняє умову  $v = v^*$ .

**Ключові слова:** групова алгебра, коди Голя, розширені бінарні коди, самодуальні коди, коди над полями.

**1. Вступ.** У багатьох роботах [1, 3–10] досліджувалися різні підходи побудови і властивості бінарних [23, 12, 7]-кодів та розширених [24, 12, 8]-кодів Голя. [23, 12, 7]-код є добре відомим кодом, має низку властивостей і широке застосування як у загальній математиці, так і в теорії кодування. Хоча розширені бінарні коди Голя не володіють усіма властивостями таких кодів, вони демонструють інші важливі риси. Вперше ці коди були розглянуті Марселем Дж. Е. Голеем у роботі [1] у 1949 році. Математична значимість коду Голя далеко виходить за рамки його властивості виправлення помилок. Розширений бінарний код Голя пов'язаний з групою Матґе  $M_{24}$ . Крім того, даний код є головним елементом у побудові 24-вимірної решітки Ліча. Поняття решітки Ліча було відкрито у зв'язку з упакуванням сфер в  $n$ -вимірний простір. Він забезпечує найкраще ґратчасте пакування в  $\mathbb{R}^{24}$ , розташування одиничних сфер в  $\mathbb{R}^{24}$  так, що їхні центри утворюють решітку.

У статті ми розглядатимемо тільки розширені бінарні коди Голя. Для групи  $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$  ( $C_n$  — циклічна група порядку  $n$ ) та групи Діедра  $D_{24}$  раніше була з'ясована точна кількість всіх елементів, за якими будуються розширені бінарні коди Голя за головним ідеалом групо́вих алгебр даних скінченних груп. У даній роботі розглядаємо таку ж задачу для групи  $G = C_3 \times D_8$ .

Розглянемо побудову розширених бінарних кодів Голея використовуючи конструкцію запропоновану Т. Харлі у роботі [2]. Нехай  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  — скінченна група порядку  $n$  і нехай  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_{g_i} g_i \in \mathbb{F}_2 G$  ( $\alpha_{g_i} \in \mathbb{F}_2$ ). Для елемента  $v = \alpha_{g_1} g_1 + \alpha_{g_2} g_2 + \dots + \alpha_{g_n} g_n \in \mathbb{F}_2 G$  позначимо  $v^* = \alpha_{g_1} g_1^{-1} + \alpha_{g_2} g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_n} g_n^{-1} \in \mathbb{F}_2 G$ . Розглянемо матрицю  $\sigma(v) \in M(n, \mathbb{F}_2)$  вигляду

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що  $\sigma(v)^T = \sigma(v^*)$ . Для заданого елемента  $v \in \mathbb{F}_2 G$  визначимо  $C(v)$ , як бінарний код породжений рядками матриці  $\sigma(v)$ . Розглянемо простір  $\mathbb{F}_2^n$ , в якому вводиться скалярний добуток  $[v, w] = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ .  $C(v)$  є підпростором простору  $\mathbb{F}_2^n$ . Бінарний код  $C$  називається *самоортогональним*, якщо  $C \subset C^\perp$  і *самодуальним* — якщо  $C = C^\perp$ , де  $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_2^n \mid [v, w] = 0, w \in C\}$ . Зрозуміло, що код  $C(v)$  самоортогональний, якщо  $\sigma(v)\sigma(v)^T = 0$ . Відомо [12], що розширений бінарний код Голея самодуальний.

**Теорема 1** ([11]). *Нехай  $G$  скінченна група порядку 24 з елементом  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2 G$ . Якщо*

- 1)  $v = v^*$ ,
- 2)  $v^2 = 0$ ,
- 3)  $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$ ,

*тоді код  $C(v)$  самодуальний.*

У [2–4, 11] встановлено, що з 15 неізоморфних груп 24-го порядку, для груп  $D_{24}$ ,  $S_4$ ,  $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ ,  $C_3 \times D_8$ ,  $C_2 \times A_4$  розширений бінарний код Голея будується за достатніми умовами самодуальності коду наведені в теоремі 1. Далі скористаємося таким очевидним критерієм.

**Теорема 2** ([5]). *Нехай  $G$  скінченна група порядку 24 з елементом  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2 G$ . Код  $C(v)$  самодуальний тоді і тільки тоді, коли*

- 1)  $vv^* = 0$ ,
- 2)  $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$ .

## 2. Побудова кодів за групою $G = C_3 \times D_8$ .

**Лема 1.** *Нехай  $G = \langle x, y, z \mid x^3 = 1, y^4 = 1, z^2 = 1, xy = yx, xz = zx, yzyz = 1 \rangle$ ,  $v = \sum_{i=0}^3 ((\alpha_{i+1} + \alpha_{i+13}z)y^i + (\alpha_{i+5} + \alpha_{i+17}z)y^i x + (\alpha_{i+9} + \alpha_{i+21}z)y^i x^2)$ . Якщо код  $C(v)$  самодуальний, тоді*

- 1)  $\sum_{i=1}^{24} \alpha_i = 0$ ,
- 2)  $(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}) = 0$ ,
- 3)  $(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20}) = 0$ ,



$$\gamma_5 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_1 + \alpha_9) + \alpha_2 + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_2 + \alpha_{10}) + \alpha_3 + (\alpha_3 + \alpha_7)(\alpha_3 + \alpha_{11}) + \\ + \alpha_4 + (\alpha_4 + \alpha_8)(\alpha_4 + \alpha_{12}) + \alpha_{13} + (\alpha_{13} + \alpha_{17})(\alpha_{13} + \alpha_{21}) + \alpha_{14} + (\alpha_{14} + \alpha_{18})(\alpha_{14} + \alpha_{22}) + \\ + \alpha_{15} + (\alpha_{15} + \alpha_{19})(\alpha_{15} + \alpha_{23}) + \alpha_{16} + (\alpha_{16} + \alpha_{20})(\alpha_{16} + \alpha_{24}),$$

$$\gamma_6 = \alpha_1(\alpha_6 + \alpha_{12}) + \alpha_2(\alpha_9 + \alpha_7) + \alpha_3(\alpha_{10} + \alpha_8) + \alpha_4(\alpha_{11} + \alpha_5) + \alpha_{22}(\alpha_{13} + \alpha_{19}) + \\ + \alpha_{23}(\alpha_{14} + \alpha_{20}) + \alpha_{24}(\alpha_{15} + \alpha_{17}) + \alpha_{21}(\alpha_{16} + \alpha_{18}) + \alpha_9\alpha_8 + \alpha_{10}\alpha_5 + \alpha_{11}\alpha_6 + \alpha_{12}\alpha_7 + \\ + \alpha_{17}\alpha_{14} + \alpha_{18}\alpha_{15} + \alpha_{19}\alpha_{16} + \alpha_{20}\alpha_{13},$$

$$\gamma_7 = (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_{11} + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_3 + \alpha_7) + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_{12} + \alpha_4) + (\alpha_2 + \alpha_{10})(\alpha_4 + \\ + \alpha_8) + (\alpha_{13} + \alpha_{17})(\alpha_{23} + \alpha_{15}) + (\alpha_{13} + \alpha_{21})(\alpha_{15} + \alpha_{19}) + (\alpha_{14} + \alpha_{18})(\alpha_{24} + \alpha_{16}) + (\alpha_{14} + \\ + \alpha_{22})(\alpha_{16} + \alpha_{20}),$$

$$\gamma_8 = \alpha_1(\alpha_{10} + \alpha_8) + \alpha_2(\alpha_{11} + \alpha_5) + \alpha_3(\alpha_{12} + \alpha_6) + \alpha_4(\alpha_9 + \alpha_7) + \alpha_{13}(\alpha_{24} + \alpha_{18}) + \\ + \alpha_{14}(\alpha_{21} + \alpha_{19}) + \alpha_{15}(\alpha_{22} + \alpha_{20}) + \alpha_{16}(\alpha_{23} + \alpha_{17}) + \alpha_9\alpha_6 + \alpha_{10}\alpha_7 + \alpha_{11}\alpha_8 + \alpha_{12}\alpha_5 + \\ + \alpha_{17}\alpha_{22} + \alpha_{18}\alpha_{23} + \alpha_{19}\alpha_{24} + \alpha_{20}\alpha_{21},$$

$$\gamma_9 = \alpha_1(\alpha_{23} + \alpha_{19}) + \alpha_2(\alpha_{24} + \alpha_{20}) + \alpha_3(\alpha_{21} + \alpha_{17}) + \alpha_4(\alpha_{22} + \alpha_{18}) + \alpha_5(\alpha_{15} + \alpha_{23}) + \\ + \alpha_6(\alpha_{16} + \alpha_{24}) + \alpha_7(\alpha_{13} + \alpha_{21}) + \alpha_8(\alpha_{14} + \alpha_{22}) + \alpha_9(\alpha_{19} + \alpha_{15}) + \alpha_{10}(\alpha_{20} + \alpha_{16}) + \\ + \alpha_{11}(\alpha_{17} + \alpha_{13}) + \alpha_{12}(\alpha_{18} + \alpha_{14}),$$

$$\gamma_{10} = \alpha_1(\alpha_{20} + \alpha_{24}) + \alpha_2(\alpha_{21} + \alpha_{17}) + \alpha_3(\alpha_{22} + \alpha_{18}) + \alpha_4(\alpha_{23} + \alpha_{19}) + \alpha_5(\alpha_{16} + \alpha_{24}) + \\ + \alpha_6(\alpha_{13} + \alpha_{21}) + \alpha_7(\alpha_{14} + \alpha_{22}) + \alpha_8(\alpha_{15} + \alpha_{23}) + \alpha_9(\alpha_{20} + \alpha_{16}) + \alpha_{10}(\alpha_{17} + \alpha_{13}) + \\ + \alpha_{11}(\alpha_{18} + \alpha_{14}) + \alpha_{12}(\alpha_{19} + \alpha_{15}).$$

Звідси отримаємо,

$$\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_8 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \\ + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}).$$

$$\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10} = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_{22} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{24} + \alpha_{23} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \\ + \alpha_{17}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{14} + \alpha_{22} + \alpha_{16} + \alpha_{24} + \alpha_{15} + \alpha_{23} + \alpha_{13} + \alpha_{21}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \\ + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{18} + \alpha_{14} + \alpha_{20} + \alpha_{16} + \alpha_{19} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{13}).$$

Якщо код  $C(v)$  самодуальний, то за умовою 1 теореми 2 виконуються умови:  $vv^* = 0$  і  $\sigma(v)\sigma(v)^T = \sigma(vv^*) = 0$ . Таким чином,  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, 10$ ). Тоді  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_8 = 0$ ,  $\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10} = 0$ ,  $\gamma_5 = 0$ ,  $\gamma_7 = 0$ . Звідси отримуємо відповідно рівняння наведені у висновку леми.

Одним зі знайдених елементів є, наприклад,  $v = y^3x^2 + z + zy + zx + zyx + zx^2 + zy^2x^2 + zy^3x^2$ . Для нього  $v^* = yx + z + zy + zx^2 + zyx^2 + zx + zy^2x + zy^3x \neq v$ . В таблиці подано добутки всіх доданків з  $v$  на доданки з  $v^*$ .

Таблиця 1.

Таблиця добутків доданків з  $v$  на доданки з  $v^*$

	$yx$	$z$	$zy$	$zx^2$	$zyx^2$	$zx$	$zy^2x$	$zy^3x$
$y^3x^2$	1	$zyx^2$	$zy^2x^2$	$zyx$	$zy^2x$	$zy$	$zy^3$	$z$
$z$	$zyx$	1	$y$	$x^2$	$yx^2$	$x$	$y^2x$	$y^3x$
$zy$	$zy^2x$	$y^3$	1	$y^3x^2$	$x^2$	$y^3x$	$yx$	$y^2x$
$zx$	$zyx^2$	$x$	$yx$	1	$y$	$x^2$	$y^2x^2$	$y^3x^2$
$zyx$	$zy^2x^2$	$y^3x$	$x$	$y^3$	1	$y^3x^2$	$yx^2$	$y^2x^2$
$zx^2$	$zy$	$x^2$	$yx^2$	$x$	$yx$	1	$y^2$	$y^3$
$zy^2x^2$	$zy^3$	$y^2x^2$	$y^3x^2$	$y^2x$	$y^3x$	$y^2$	1	$y$
$zy^3x^2$	$z$	$yx^2$	$y^2x^2$	$yx$	$y^2x$	$y$	$y^3$	1

Таким чином,  $vv^* = 0$ . З вигляду  $v$  одержимо, що

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислення в системі комп'ютерної алгебри GAP показують, що  $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$ , а мінімальна відстань Хемінга коду  $C(v)$  рівна 8. Таким чином,  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голя.

**3. Числові результати.** Групова алгебра  $\mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$  складається, очевидно, з  $2^{24} = 16\,777\,216$  елементів  $v$ . В результаті обчислень отримуємо кількість елементів  $v \in \mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$ , що  $C(v)$  — розширений бінарний код Голя. Подаємо ці результати разом з кількістю тих же елементів при умові  $v = v^*$ .

Таблиця 2.

Кількість елементів з групової алгебри  $\mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$

Мінімальна відстань Хемінга $C(v)$	2	4	6	8
Кількість елементів $v$ , що $v = v^*$	128	1 216	128	128
Кількість елементів $v$	7 680	92 160	12 288	12 288

Таким чином, існує рівно 12 288 елементів  $v \in \mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$ , що  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голя.

**4. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У статті досліджено конструкції розширених бінарних кодів Голя за групою алгеброю  $\mathbb{F}_2G$  групи  $G = C_3 \times D_8$ . Знайдено 12 288 елементів  $v \in \mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$ , що  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голя. В подальших дослідженнях, крім вже розглянутих  $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ ,  $D_{24}$ ,  $C_3 \times D_8$ , можна буде розглянути інші групи порядку 24, наприклад групи  $C_2 \times A_4$  та  $S_4$ .

Автори щиро вдячні професору Тилищаку О. А. за цінні поради при обговоренні результатів.

#### Список використаної літератури

1. Golay M. J. Notes on digital coding. *Proc. I.R.E.* 1949. Vol. 37, No. 6. 657 pp.
2. Hurley T. Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math.* 2006. Vol. 31, No. 3. P. 319–335.
3. Bernhardt F., Landrock P., Manz O. The extended Golay codes considered as ideals. *J. Comb. Theory Ser. A.* 1990. Vol. 55, No. 2, P. 235–246.
4. Dougherty S. T., Gildea J., Taylor R., Tylyshchak A. Group rings,  $G$ -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography.* 2018. Vol. 86, No. 9. P. 2115–2138. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10623-017-0440-7>.
5. Бортош М. Ю., Тилищак О. А. Розширені бінарні коди Голя за групою алгеброю однієї групи. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 1, № 36. С. 65–72.
6. Бортош М. Ю., Тилищак О. А., Химинець М. В. Розширені бінарні коди Голя за групою алгеброю групи дієдра. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика».* 2022. Вип. 40, № 1, С. 27–32.



7. Pless V. On the uniqueness of the Golay codes. *J. Combin. Theory*. 1968. Vol. 5, No. 3. P. 215–228.
8. Peng X. H., Farrell P. G. On construction of the (24, 12, 8) Golay codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2006. Vol. 8, No. 52. P. 3669–3675.
9. Curtis R. T. Error-correction and the binary Golay code. *London Mathematical Society*. 2016. Vol. 150, No. 1, P. 51–58.
10. McLoughlin I. Dihedral codes. 2009. URL: <http://hdl.handle.net/10379/6401>
11. McLoughlin I., Hurley T. A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2008. Vol. 9, No. 54. P. 4381–4383.
12. Huffman W. C., Pless V. Fundamentals of error-correcting codes. Cambridge University : Press, Cambridge, 2003. 646 pp.

**Bortos M. Yu., Khymynets M. V.** Extended binary Golay codes by a group algebra of the group  $C_3 \times D_8$ .

Binary Golay codes have been studied for a prolonged period of time and many different structures of their construction have been established as well as a certain amount of their properties has been revealed. In the article the construction of extended binary Golay has been considered according to the principle ideals (left) of the group algebra  $\mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$  of the group  $C_3 \times D_8$  of order 24 over a field of two elements  $\mathbb{F}_2$ . The action of the regular representation  $v \rightarrow \sigma(v)$  on the elements  $v$  of the group algebra is considered. The rows of the matrix  $\sigma(v)$  generate a linear binary code  $C(v)$ . In preceding studies, the number of all elements  $v$  of the group algebra  $\mathbb{F}_2G$  of finite groups  $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$  and  $D_{24}$  such that the binary code  $C(v)$  is an extended binary Golay code was established. Previously, in this way the extended binary Golay code was built on one element  $v \in \mathbb{F}_2G$ , which  $v = v^*$ . As a result of numerical calculations, all the 12 288 elements of  $v \in \mathbb{F}_2(C_3 \times D_8)$  were found, on which the extended binary Golay codes can be constructed. Among them 128 satisfy the condition  $v = v^*$ .

**Keywords:** group algebra, Golay codes, extended binary codes, self-dual codes, codes over fields.

## References

1. Golay, M. J. (1949). Notes on digital coding. *Proc. I.R.E.*, 37(6), 657.
2. Hurley, T. (2006). Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math*, 31(3), 319–335.
3. Bernhardt, F. Landrock, P., & Manz, O. (1990). The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory Ser. A*, 55(2), 235–246.
4. Dougherty, S. T., Gildea, J., Taylor, R., & Tylyshchak, A. (2018). Group rings,  $G$ -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 86(9), 2115–2138. <https://doi.org/10.1007/s10623-017-0440-7>.
5. Bortos, M. Yu., & Tylyshchak, A. A. (2020). Extended binary Golay codes by a group algebra of one group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(36), 65–72.
6. Bortos, M. Yu., Tylyshchak, A. A., & Khymynets, M. V. (2022). Extended binary Golay codes by a group algebra of dihedral group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 27–32.
7. Pless, V. (1968). On the uniqueness of the Golay codes. *J. Combin. Theory*, 5(3), 215–228.
8. Peng, X. H., & Farrell, P. G. (2006). On construction of the (24, 12, 8) Golay codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 8(52), 3669–3675.
9. Curtis, R. T. (2016). Error-correction and the binary Golay code. *London Mathematical Society*, 150(1), 51–58.
10. McLoughlin, I., & Hurley, T. (2008). A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 9(54), 4381–4383.
11. McLoughlin, I. (2009). Dihedral codes. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10379/6401>
12. Huffman, W. C., & Pless, V. (2003). *Fundamentals of error-correcting codes*. Cambridge University Press: Cambridge.

Одержано 28.04.2023

УДК 519.622

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).26-34](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).26-34)**К. В. Божонок**

Український державний університет ім. М. Драгоманова,  
завідувач кафедри вищої математики,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
k.v.bozhonok@udu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5396-7352>

**АЛГОРИТМ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ  
НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ АБЕЛЯ**

Розглядаються питання конструювання та теоретичного обґрунтування чисельно-аналітичного алгоритму поліноміальної апроксимації розв'язків задачі Коші для диференціального рівняння Абеля. Алгоритм ґрунтується на апроксимаційному методі В. К. Дзядика розв'язування лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь, головною ідеєю якого є побудова такого наближеного розв'язку, який би як можна точніше задовольняв апроксимаційну теорему П. Л. Чебишева про характеристику многочлена найкращого наближення. В роботі  $\alpha$ -метод узагальнюється на рівняння з нелінійностями у вигляді поліномів. Доведена теорема про відхилення наближеного розв'язку від точного розв'язку поставленої задачі Коші у рівномірній та квадратичній метриках, отримані оцінки похибок. Алгоритм апробований на тестовій задачі. Обчислювальний експеримент ілюструє високу ефективність запропонованого алгоритму та теоретичних результатів.

**Ключові слова:** поліноміальна апроксимація, найкраще наближення, алгебраїчно-нелінійні рівняння, диференціальне рівняння Абеля, оптимальні алгоритми.

**1. Вступ.** Апроксимаційний метод ( $\alpha$ -метод) був запропонований В. К. Дзядиком в [1] при розв'язуванні задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь з многочленними коефіцієнтами.

Основними перевагами  $\alpha$ -методу є висока точність — порядку найкращого наближення шуканої функції алгебраїчними многочленами  $i$ , як наслідок, ненасичуваності за точністю [2]. Ця особливість важлива при необхідності уникнення явища «вибуху похибок», яке може бути наслідком явища насичення [3] (відома проблема Фавара-Колмогорова у теорії наближення функцій та явище насичення у чисельному аналізі).

Актуальність таких питань зумовлена посиленням вимог до точності та надійності при розв'язуванні сучасних задач математичного та комп'ютерного моделювання [4], [5].

Можливо це і послужило однією з причин для подальшого розвитку  $\alpha$ -методу до розв'язування алгебраїчно-нелінійних диференціальних рівнянь та систем [6], [7].

Метою роботи є конструювання та теоретичне обґрунтування алгоритму на основі відомого  $\alpha$ -методу В. К. Дзядика для розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння Абеля із врахуванням нелінійності розглянутого рівняння. Зазначимо також, що даний алгоритм є зручним для реалізації в системах комп'ютерної алгебри [8].

**2. Основний результат.**

Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння Абеля 1-го роду виду

$$a(x)y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y^2(x) + d(x)y^3(x) + f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

де  $x \in [-h; h]$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $f(x)$  — алгебраїчні многочлени степенів  $n_a$ ,  $n_b$ ,  $n_c$ ,  $n_d$ ,  $n_f$  відповідно.

*Алгоритм побудови апроксимаційних многочленів.* Запишемо загальну схему побудови многочленів:

1. Відповідно до схеми а-методу (див. [1], [6]– [7]), перейдемо від задачі (1) до еквівалентного рівняння типу Вольтери:

$$\int_0^x a(t)y'(t)dt = \int_0^x (b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t) + f(t)) dt,$$

$$a(x)y(x) - a(0)y(0) - \int_0^x a'(t)y(t)dt = \int_0^x (b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t) + f(t)) dt,$$

$$a(x)y(x) = a(0)y_0 + \int_0^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y(t) + d(t)y^2(t)) \cdot y(t) + f(t)] dt. \quad (2)$$

2. Тепер поставимо у відповідність рівнянню (2) наступне наближене рівняння:

$$a(x)y_n(x) = a(0)y_0 + \int_0^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)) \cdot y_n(t) + f(t)] dt - \varepsilon_N(x). \quad (3)$$

У (3)  $y_n(x)$  є наближений розв'язок, що шукається у вигляді алгебраїчного многочлена степеня  $n$ :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot x^k, \quad (4)$$

з невідомими коефіцієнтами  $c_k$ .

За нев'язку  $\varepsilon_N(x)$  беремо многочлен степеня  $n + N$  виду:

$$\varepsilon_N(x) = \sum_{i=1}^N \tau_{n+i} T_{n+i} \left( \frac{x}{h} \right), \quad (5)$$

де  $N_{i=1}$  вибираємо, як  $\max(n_a, n_b + 1, n_c + n + 1, n_d + 2n + 1, n_f + 1 - n)$ .

Тут  $T_k(t) = \cos(k \cdot \arccos t)$  — многочлени Чебишова першого роду,  $\tau_{n+i}$  — невідомі додаткові параметри.

3. Далі, підставляючи (4), (5) в (3) і прирівнюючи коефіцієнти при степенях  $x$ , отримуємо систему нелінійних рівнянь з якої знаходимо невідомі  $c_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ) та допоміжні параметри  $\tau_{n+i}$  ( $i = \overline{1, N}$ ).

4. Для випадку, коли в (1)  $x$  належить довільному проміжку  $[x_0; x_1]$  і початкова умова переписується  $y(x_0) = y_0$ , то будемо мати наступне наближене рівняння:

$$a(x)y_n(x) = a(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)) \cdot y_n(t) + f(t)] dt - \varepsilon_N(x),$$

де  $y_n(x)$  визначається (4), а нев'язка-многочлен  $\varepsilon_N(x)$  записується через многочлени Чебишова першого роду, що зміщені на  $[x_0; x_1]$

$$T_{n+i} \left( \frac{2x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0} \right) = \cos \left( (n+i) \cdot \arccos \left( \frac{2x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0} \right) \right).$$

*Теоретичне обґрунтування.* Оцінки похибки запропонованого алгоритму розв'язування задачі (1) дослідимо в припущенні, що

$$\min_{x \in [-h; h]} a(x) \geq c > 0. \quad (6)$$

Розділимо праву і ліву частини (2) на  $a(x)$ , позначимо:

$$A(x, t) := \frac{a'(t) + b(t)}{a(x)}, \quad B(x, t) := \frac{c(t)}{a(x)}, \quad D(x, t) := \frac{d(t)}{a(x)}. \quad (7)$$

Відхилення наближеного розв'язку  $y_n(x)$  від точного розв'язку задачі (1)  $y(x)$  будемо вивчати в  $C[-h; h]$  і  $L_p^2[-h; h]$  просторах неперервних і сумовних з квадратом при чебишовській вазі  $\sqrt{1 - (x/h)^2}$  на  $[-h, h]$  функцій які мають норми:

$$\|\varphi\|_C := \max_{|x| \leq h} |\varphi(x)|, \quad \|\varphi\|_{L_p^2} := \frac{2}{\pi h} \int_{-h}^h \frac{\varphi^2 dx}{\sqrt{1 - (x/h)^2}}. \quad (8)$$

$C(\square)$  і  $L_p^2(\square)$  — аналогічні простори функцій  $F(x, t)$ , де  $(x, t) \in [-h, h]$ .

Має місце наступне твердження:

**Теорема 1.** *Нехай число  $h > 0$  і для рівняння (3) число  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) такі, що у кулі  $S(\rho) := \{\psi : \psi \in C[-h, h], \|\psi\|_C \leq \rho\}$  існує єдиний розв'язок задачі (1)  $y(x)$  і єдиний розв'язок наближеного інтегрального рівняння (2)  $y_n(x)$ .*

*Тоді на  $[-h, h]$  справедливі наступні нерівності:*

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_C \exp(hM), \quad (9)$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_{L_p^2} \leq \left( 1 + \frac{\pi}{2} hM \exp(hM) \right) \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2}, \quad (10)$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq \left( 1 + \frac{\sqrt{N}}{n+1} A_1(h, \rho) \right) \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_C, \quad (11)$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_{L_p^2} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{N}}{n+1} A_2(h, \rho)\right) \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2}, \quad (12)$$

де

$$M := \|A(x, t)\|_{C(\square)} + 2\|B(x, t)\|_{C(\square)}\rho + 3\|D(x, t)\|_{C(\square)}\rho^2 \quad (13)$$

$A_1(h, \rho)$ ,  $A_2(h, \rho)$  — деякі сталі, що не залежать від  $n$ .

**Доведення.** Розділимо обидві частини рівнянь (2) і (3) на  $a(x)$ . З урахуванням припущення (6) і позначень (7), отримаємо:

$$y(x) = \frac{a(0)y_0}{a(x)} + \int_0^x \left[ (A(x, t) + B(x, t)y(t) + D(x, t)y^2(t)) \cdot y(t) + \frac{f(t)}{a(x)} \right] dt,$$

$$y_n(x) = \frac{a(0)y_0}{a(x)} + \int_0^x \left[ (A(x, t) + B(x, t)y_n(t) + D(x, t)y_n^2(t)) \cdot y_n(t) + \frac{f(t)}{a(x)} \right] dt - \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}.$$

Знайдемо різницю лівих і правих частин отриманих рівнянь:

$$\begin{aligned} y(x) - y_n(x) &= \\ &= \int_0^x [A(x, t) + B(x, t)(y(t) + y_n(t)) + D(x, t)(y^2(t) + y_n(t)y_n(t) + y_n^2(t))] \cdot \\ &\quad \cdot [y(t) - y_n(t)] dt + \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Застосуємо тепер нерівність Гронуола (див. [1]) з урахуванням того, що  $y, y_n \in S(\rho)$ , отримаємо:

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_C \exp(hM),$$

де  $M := \|A(x, t)\|_{C(\square)} + 2\|B(x, t)\|_{C(\square)}\rho + 3\|D(x, t)\|_{C(\square)}\rho^2$ , тобто нерівність (9).

Тепер зауважимо, що рівність (14) лінійна відносно до функції  $\varphi(x) = y(x) - y_n(x)$ . Тож має місце наступна рівність (див. [1]):

$$y(x) - y_n(x) = \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} + \int_0^x R(x, t) \frac{\varepsilon_N(t)}{a(t)} dt, \quad (15)$$

де  $R(x, t)$  — резольвента ядра

$$K(x, t) := A(x, t) + B(x, t)(y(t) + y_n(t)) + D(x, t) \cdot (y^2(t) + y(t)y_n(t) + y_n^2(t)),$$

рівняння (14).

З означення резольвенти і за умовою теореми  $y, y_n \in S(\rho)$ , маємо наступну оцінку для  $R(x, t)$ :

$$\max_{x, t \in [-h, h]} |R(x, t, y, y_n)| \leq M \exp(hM), \quad (16)$$

де величина  $M$  визначена у формулі (13).

За нерівністю Буняковського, використовуючи рівність (15) і оцінку (16) перевіряємо нерівність (10):

$$\begin{aligned} \|y(x) - y_n(x)\|_{L_p^2} &\leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2} + \left\| \int_0^x R(x, t) \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} dt \right\|_{L_p^2} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2} + \left\{ \frac{2}{\pi h} \int_{-h}^h \frac{\left[ \int_0^x R(x, t) \frac{\varepsilon_N(t)}{a(t)} dt \right]^2}{\sqrt{1 - (x/h)^2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2} \left[ 1 + \left( \int_{-h}^h \int_0^x R^2(x, t) \frac{\sqrt{1 - (t/h)^2}}{\sqrt{1 - (x/h)^2}} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \\ &\leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2} \left[ 1 + M e^{hM} \left( \int_0^h \int_0^x \frac{\sqrt{1 - (t/h)^2}}{\sqrt{1 - (x/h)^2}} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \\ &\leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2} \left( 1 + \frac{\pi}{2} h M e^{hM} \right). \end{aligned}$$

Нерівність (10) виконана.

Тепер виконаємо заміну у виразі многочлена Чебишова:

$$z = \arccos(t/h).$$

В силу теореми про диференційовність за параметром та формули інтегрування частинами отримаємо оцінку для інтеграла, що стоїть у правій частині (15):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x R(x, t) \frac{\varepsilon_N(t)}{a(t)} dt \right| &= \left| \sum_{i=1}^N \tau_{n+i} \int_0^x \frac{R(x, t)}{a(t)} T_{n+i} \left( \frac{t}{h} \right) dt \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^N \frac{\tau_{n+i}}{n+i} \left[ \frac{R(x, h, \cos z) \sin z \sin(n+i)z}{a(h \cos z)} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(\frac{x}{h})} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(\frac{x}{h})} \sin(n+i)z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{R(x, h, \cos z)}{a(h \cos z)} \right) dz \right| \leq \sum_{i=1}^N \frac{\tau_{n+i}}{n+i} C_1(h, \rho) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sqrt{N}}{n+1} C_1(h, \rho) \|\tau\|, \quad (17)$$

де  $C_1(h, \rho)$  — деяка стала, яка не залежить від  $n$  і норми:

$$\|\tau\| := \left( \sum_{i=1}^N \tau_{n+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Скористайтесь тим, що через ортогональність многочленів Чебишова  $T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right)$  на проміжку  $[-h, h]$  з вагою  $\sqrt{1 - (x/h)^2}$ :

$$\begin{aligned} \|\tau\| &\leq \left[ \frac{2}{\pi h} \int_{-h}^h \frac{\varepsilon_N(x) dx}{\sqrt{1 - (x/h)^2}} \right] \leq \|a(x)\|_C \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \|a(x)\|_C \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_C. \quad (18) \end{aligned}$$

Отже, із (15) і (17)–(18) отримаємо нерівності (11) і (12).

Теорема 1 доведена.

**Зауваження 1.** Слід зазначити, що з нерівностей (11) і (12) випливає той факт, що наближення  $y_n(x)$  розв'язку  $y(x)$  близьке до найкращого  $E_n(y)$  в  $C[-h; h]$  і  $L_p^2[-h; h]$ .

*Результати обчислювального експерименту.* Для реалізації запропонованого алгоритму була обрана наступна задача Коші для рівняння Абеля.

Для рівняння

$$xy'(x) = x^3 y^3 + (x-1)y, \quad x \in [1; 6/5], \quad (19)$$

задана початкова умова

$$y(1) = 1. \quad (20)$$

Точним розв'язком задачі (19)–(20) буде

$$\frac{yx}{\sqrt{y^2 x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2} \exp} \cdot \exp(x).$$

Наближений розв'язок на  $[1; 6/5]$  будемо шукати у вигляді полінома

$$y_1(x) = c_0 + c_1 \cdot x.$$

Відповідно до загальної схеми алгоритму маємо:

Наближене інтегро-функціональне рівняння (3)

$$xy_1(x) = 1 + \int_1^x [(1 + (t-1) + t^3 y_1^2(t)) y_1(t)] dt - \varepsilon_{N(x)}, \quad (21)$$

$$N = 6, \quad n + N = 7.$$

Многочлен-нев'язка  $\varepsilon_{N(x)}$  має вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N(x)} = & \tau_2 T_2(10x - 11) + \tau_3 T_3(10x - 11) + \tau_4 T_4(10x - 11) + \\ & + \tau_5 T_5(10x - 11) + \tau_6 T_6(10x - 11) + \tau_7 T_7(10x - 11), \end{aligned}$$

де многочлени Чебишова змістили на відрізок  $[1; 6/5]$ .

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$ , отримаємо систему нелінійних рівнянь відносно невідомих  $c_0, c_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7$ .

Для знаходження відповідних параметрів можна запропонувати ітераційні схеми розв'язання рівняння (21), в основу яких покладено метод простої ітерації та схеми із роботи Орліца [9] для  $\tau$ -методу розв'язування на нелінійних диференціальних рівняннях типу Ріккати.

В результаті маємо (див. [10]):

$$c_0 \approx -1.332, \quad c_1 \approx 2.291, \quad \tau_2 \approx 0.0467, \quad \tau_3 \approx 0.0057,$$

$$\tau_4 \approx 0.00036, \quad \tau_5 \approx 0.000014, \quad \tau_6 \approx 3.0405 \cdot 10^{-7}, \quad \tau_7 \approx 2.6838 \cdot 10^{-9}.$$

Звідси

$$y_1(x) = -1.332297291 + 2.290918678x,$$

— наближений розв'язок задачі (19)–(20), а параметри  $\tau_i$  ( $i = \overline{2, 7}$ ) визначають нев'язку  $\varepsilon_{N(x)}$ .

На рисунку (1) суцільною лінією позначено точний розв'язок задачі, пунктирною лінією позначено наближений розв'язок.

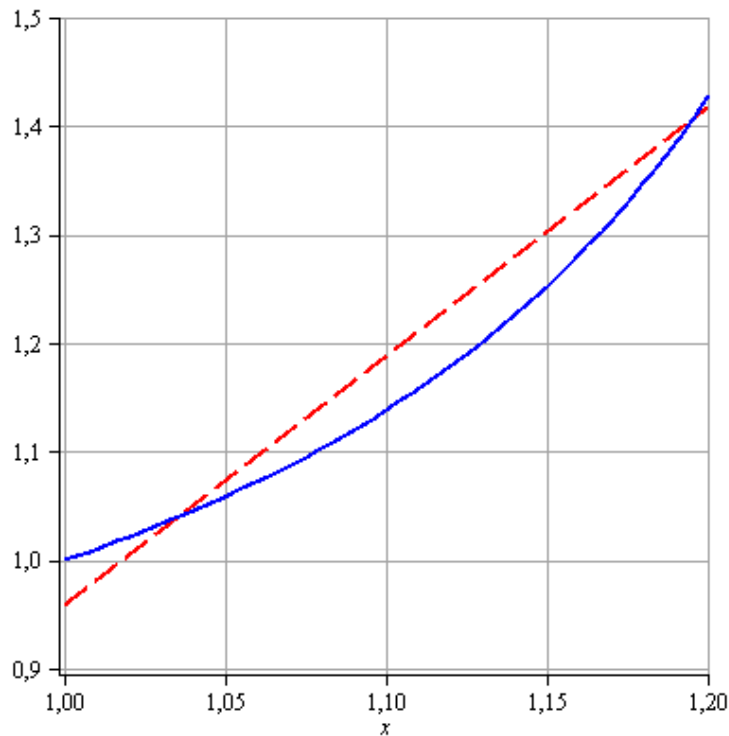


Рис. 1. Точний та наближений розв'язки задачі.



**3. Висновки.** У роботі сконструйовано та теоретично обґрунтовано алгоритм для побудови поліноміального наближення розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння Абеля на основі апроксимаційного метода В. К. Дзядика.

Сформульовано і доведено теорему про оцінки похибок відповідної задачі на основі запропонованого алгоритму, яка показує оптимальності в сенсі найкращого поліноміального наближення в рівномірній та квадратичній метриках.

Проведено обчислювальний експеримент на тестовій задачі, результати якого добре ілюструють ефективність та доцільність розв'язування задачі Коші для рівняння Абеля наведеним алгоритмом. Зазначимо також, що вже при малих степенях многочлена алгоритм дає достатньо високу точність для наближення розв'язку задачі.

### Список використаної літератури

1. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наукова думка, 1988. 387 с.
2. Гаврилюк И. П., Макаров В. Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2004. 500 с.
3. Бабенко К. И. О явлении насыщения в численном анализе. *Доклады АН СССР*. 1978. Т. 241, № 3. С. 505–508.
4. Сергієнко І. В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансчислювальної складності. Київ : Академперіодика, 2010. 293 с.
5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. Киев : Наук. думка, 1986. 584 с.
6. Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Yu., and Stelya O. B. Piecewise Polynomial Algorithms for the Analysis of Processes in Inhomogeneous Media. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, No. 4. P. 636–642. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0064-6>.
7. Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Yu. Piecewise-Polynomial Approximations for the Solutions of Impulsive Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2019. Vol. 71, No. 2. P. 190–201. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01638-3>.
8. Летичевский А. А., Денисенко П. Н., Биленко В. И., Волков В. А. Реализация численно-аналитических методов приближения функций, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. Т. 33, № 1. С. 108–112.
9. Ortiz E. L., Pham Ngoc Dinh A. On the convergence of the tau method for nonlinear differential equations of Riccati's type. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods, Applications* 1985. Vol. 9, No. 1. P. 53–60. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(85\)90052-5](https://doi.org/10.1016/0362-546X(85)90052-5).
10. Божонюк К. В. Ітераційні процедури розв'язування нелінійного диференціального рівняння Абеля на основі  $a$ -методу В. К. Дзядика. *Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції*. Київ : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 10–12.

**Bozhonok K. V.** Algorithm for the Polynomial Approximation of the Abel's Differential Equation Solutions.

The problems of construction and theoretical substantiation of numerical-analytical algorithms for polynomial approximation of the Cauchy problem solutions for Abel's differential equation are considered. The algorithm is based on the Dzyadyk's approximation method for the solution of differential and integral equations, the main idea of which is to construct such an approximate solution that would satisfy the Chebyshev's approximation theorem on the characterization of the best approximation polynomial as accurately as possible. In the paper the  $a$ -method is generalized to equations with nonlinearities in the form of polynomials. The theorem on the deviation of the approximate solution from the exact solution of the given Cauchy problem for uniform and quadratic metrics is proved, the estimations of errors are obtained. The algorithm was tested on a test task. The

computational experiment illustrates the high efficiency of the proposed algorithm and theoretical results.

**Keywords:** Polynomial approximation, the best approximation, algebraic-nonlinear equations, Abel's differential equation, optimal algorithms.

## References

1. Dziadyk, V. K. (1988). *Approximation Methods to Solve Differential and Integral Equations*. Kyiv: Naukova Dumka [in Russian].
2. Havryliuk, I. P., & Makarov, V. L. (2004). *Strongly Positive Operators and Numerical Algorithms without Accuracy Saturation*. Kyiv: Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine [in Russian].
3. Babenko, K. I. (1978). On the phenomenon of saturation in numerical analysis. *Reports USSR Academy of Sciences*, 241(3), 505–508. [in Russian].
4. Serhiienko, I. V. (2001). *Methods of optimization and system analysis for problems of transcomputational complexity*. Kyiv: Akadempriodika [in Ukrainian].
5. Ivanov, V. V. (1986). *Calculation Methods Using Computers: A Handbook*. Kyiv: Naukova Dumka [in Russian].
6. Bilenko, V. I., Bozhonok, K. V., Dzyadyk, S. Yu., & Stelya, O. B. (2018). Piecewise Polynomial Algorithms for the Analysis of Processes in Inhomogeneous Media. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54(4), 636–642. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0064-6>.
7. Bilenko, V. I., Bozhonok, K. V., & Dzyadyk, S. Yu. (2019). Piecewise-Polynomial Approximations for the Solutions of Impulsive Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71(2), 190–201. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01638-3>.
8. Letichevskii, A. A., Denisenko, P. N., Bilenko, V. I., & Volkov, V. A. (1997). Implementation of numerical-analytical approximation methods for functions defined by ordinary differential equations. *Cybernetics and Systems Analysis*, 33(1), 108–112. [in Russian].
9. Ortiz, E. L., & Pham Ngoc Dinh, A. (1985). On the convergence of the tau method for nonlinear differential equations of Riccati's type. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods, Applications*, 9(1), 53–60. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(85\)90052-5](https://doi.org/10.1016/0362-546X(85)90052-5).
10. Bozhonok, K. V. (2023). Iterative procedures for solving Abel's nonlinear differential equation based on V. K. Dziadyk's  $\alpha$ -method. *Actual problems of physics, mathematics, informatics and their teaching methods: Proceedings from '23*. Kyiv: Mykhailo Drahomanov State University. 10–12. [in Ukrainian].

Одержано 25.04.2023

УДК 532.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).35-46](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).35-46)**Ю. В. Гуртовий<sup>1</sup>, В. І. Єлькін<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Центральнoукраїнський державний університет ім. Володимира Винниченка,  
доцент кафедри математики та методики її викладання

hurtovy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1499-7089>

<sup>2</sup> Центральнoукраїнський державний університет ім. Володимира Винниченка,  
аспірант кафедри математики та методики її викладання

kamikadze19900@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5457-2593>

## СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДВОШАРОВІЙ ОБМЕЖЕНІЙ РІДИНІ

В статті розглядається дослідження стоячих внутрішніх хвиль у двошаровій гідродинамічній рідинній системі з обмеженими товщинами шарів. Проблема постановки задачі сформульована у безрозмірному вигляді. Для лінійної задачі отримано розв'язки для відхилення поверхні контакту двох шарів як для двовимірної, так і для тривимірної моделі задачі. Показано, що граничні умови на бокових стінках рідини обмежують значення хвильових чисел до певного дискретного набору. Для опису частоти стоячої внутрішньої хвилі була розроблена формула, яка залежить від фізичних параметрів системи та кількості вузлів. Ця формула дозволяє визначити частоту хвилі для заданої конфігурації системи. Графічно були зображені можливі форми стоячих хвиль, які містять декілька нерухомих точок на поверхні контакту шарів. Ці форми відображають стоячі хвилі з різною кількістю вузлів та вузлових ліній, що демонструють різноманітні коливальні структури, які можуть виникати у системі. Дослідження надає розширене розуміння поведінки стоячих внутрішніх хвиль у двошаровій гідродинамічній системі з кінцевими товщинами шарів, що може мати важливі застосування у вивченні гідродинаміки морських систем та інших стратифікованих середовищах.

**Ключові слова:** двошарова рідина, стоячі внутрішні хвилі, вузли і пучності, вузлові лінії.

**1. Вступ.** Системи з шаруватою структурою займають особливий клас об'єктів та процесів. Дослідження внутрішніх хвиль у таких системах займає великий теоретичний та прикладний інтерес і слугує областю досліджень багатьох вчених. Тому потрібен точний аналітичний метод для опису руху поверхні розділу двох рідин з різною густиною для розрахунку параметрів стоячих хвиль. Дослідження та аналіз фізичних характеристик внутрішніх хвиль також є актуальними під час розробки відповідних технологій та пристроїв, що застосовують енергію внутрішніх хвиль для генерації електричного струму. В статті будемо розглядати двовимірну та тривимірну модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох обмежених рідких шарів.

**2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми.** З початку ХІХ століття були встановлені основні принципи теорії хвиль, включаючи теорію нелінійних хвиль, які в основному застосовуються для розв'язання задач газу та гідродинаміки. Спостереження та експерименти підтверджують основні результати досліджень поширення хвиль у двошарових гідродинамічних системах в багатьох дослідженнях.

В роботах, які були опубліковані в останній час та пов'язані з дослідженням стоячих хвиль в рідких систем, можна виділити наступні.

У роботі [1] було описано експерименти та розроблені для експериментальні висновки про стоячі хвилі. Близьке наближення до вільних коливань створювалося в резервуарі генераторами хвиль. Вони працювали з малою амплітудою та на частотах, для яких за рахунок резонансу відбувалося велике посилення. Амплітудно-частотна крива при цьому складається з двох гілок, які не перетинаються, що може бути пояснено теоретично. Передбачення, зроблене Пенні та Прайсом, полягало в тому, що хвилі будуть нестійкими, коли висота гребенів стоячих хвиль досягає приблизно 0.15 довжини хвилі. Було знайдені умови експерименту, необхідні для отримання похилого гребеня. Був виявлений збіг з розрахунковою формою профілю найвищої хвилі, що мала кут дуже близький до  $90^\circ$ . Було виявлено, що передбачена нестійкість для двовимірних хвиль починається у той момент, коли гребінь стає гострим.

У роботі [2] стабільний і точний чисельний метод для розрахунку руху інтерфейсів між двома рідинами використовується для розрахунку двовимірних стоячих хвиль на воді. Загальний метод, який обчислює довільне відхилення залежить від руху інтерфейсу. Визначено дуже круті стоячі хвилі. Як визначальний параметр використовується пікове прискорення гребеня, а не крутість хвилі. Виявлено, що крутість хвилі має максимальне значення, менше ніж екстремальна хвиля. Досліджено стійкість стоячих хвиль та розраховано інкременти нестійких мод. Встановлено, що всі стоячі хвилі, крім дуже крутих, загалом стійкі до гармонійних збурень. Однак стоячі хвилі, як правило, нестійкі до субгармонійних збурень через нестійкість бокового типу.

У дослідженні [3] розраховано просторово та тимчасово періодичні стоячі хвилі. Використовуючи метод спектрального граничного інтегралу у поєднанні з ітераціями Ньютона. Нові точні результати поблизу граничної форми гравітаційних хвиль отримані з використанням нерівномірного розподілу вузлів. Показано, що при найбільшій розрахунковій кривизні кут гребеня менший за  $90^\circ$ . Коли враховується невеликий поверхневий натяг, форма гребеня значно змінюється. Експерименти з хвилями Фарадея у прямокутному контейнері з великим подовженням узгоджуються з розрахунками. Це вперше, коли такі високо амплітудні періодичні хвилі спостерігалися у лабораторних умовах.

У роботі [4] досліджено граничну поведінку стоячих хвиль великої амплітуди на глибокій воді. Було використане чисельне моделювання високої роздільної здатності з подвійною точністю. У той час як біжучі періодичні хвилі, наближаються до екстремальної хвилі Стокса з гострим гребенем, виявилось, що стоячі хвилі змінюють свою поведінку. Замість того, щоб загострюватися до кута або виступу, як передбачалося раніше, на вершині гребеня розвиваються різні коливальні структури. Це призводить до того, що біфуркаційна крива, яка параметризує ці хвилі, розпадається на гілки, що не перетинаються. У багатьох випадках вертикальний струмінь рідини штовхає ці структури вгору, що призводить до хвильових профілів, які зазвичай спостерігаються в експериментах з хвильовим резервуаром.

У роботі [5] наведені явища відбивання та передачі водних хвиль через хвилеподібне проникне дно в двошаровій рідинній системі з використанням двовимірної лінеаризованої теорії. Досліджено вплив поверхневого натягу на вільну поверхню включено в цю роботу. Показано залежність коефіцієнтів відбиття і пропускання, отриманих в термінах інтегралів, від функції форми хвилеподі-

бного дна.

У дослідженні [6] розглядалась двошарова система покрита кригою. Проаналізоване явище відбиття і передачі водяних хвиль у ній. Дно нижнього шару є хвилеподібним і проникним, а верхній шар покритий крижаним листом. Коефіцієнти відображення і передачі першого порядку визначаються за допомогою регулярного аналізу збурень та методу перетворень.

У роботі [7] досліджується новий адаптивний пристрій генерації енергії водяної хвилі. Цей пристрій належить мікро-генератору енергії. Низько швидкісна енергія та енергія моменту обертання можна перетворити в електричну енергію, що може бути використана для зарядки літійового акумулятора, за допомогою верхніх та нижніх груп лопатей поглинача.

У статті [8] продемонстровано діелектричний еластомірний генератор, який може трансформувати енергію коливань, перенесену водними хвилями в електрику. Для побудови прототипу генератора використано поліакрилату плівку, а експерименти проводились у штучному басейні. За допомогою цього можна генерувати запрограмовані дрібно масштабні хвилі на різних частотах і амплітудах. Результати вихідної потужності продемонстрували велику ефективність хвильових перетворювачів енергії на основі пружних ємнісних генераторів.

Таким чином, дослідженню стоячих хвиль у різноманітних гідродинамічних системах присвячені численні наукові праці сучасних вчених, які мають як теоретичний так і експериментальний характер.

**3. Мета та завдання.** Метою даного дослідження є поширення внутрішніх стоячих хвиль у двошаровій рідині що має скінченну товщину.

Для досягнення мети поставлені наступні завдання:

- виконати математичну постановку задачі у двовимірному вигляді;
- виконати математичну постановку задачі у тривимірному вигляді;
- лінеаризувати початкову задачу та знайти розв'язки лінійної задачі;
- зробити аналіз отриманих розв'язків.

**4. Постановка задачі для двовимірного випадку.** Досліджується задача поширення хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідких шарів.

$\Omega_1 = \{(x, z), 0 < x < l, -h_1 < z < 0\}$  з густиною  $\rho_1$  верхнього рідкого шару та

$\Omega_2 = \{(x, z), 0 < x < l, 0 < z < h_2\}$  з густиною  $\rho_2$  нижнього рідкого шару (рис. 1).

У безрозмірному вигляді постановка задачі визначається системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка містить рівняння Лапласа для потенціалів швидкостей в шарах  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ .

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0; \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхні

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \quad \text{при } z = \eta(x, t), \quad (2)$$

динамічну умову на поверхні контакту

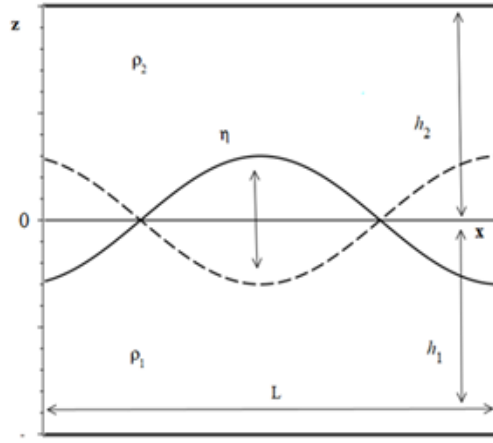


Рис. 1. Двошарова обмежена рідина.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2] - T \left[ 1 + \alpha^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

при  $z = \eta(x, t)$ , граничні умови на бокових стінках

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = 0, \quad \begin{cases} \frac{\varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = l, \quad (4)$$

граничні умови на дні та кришці

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_2. \quad (5)$$

Швидкості у  $\Omega_j$  виражені через градієнт потенціалу  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ . Шари розділені поверхнею контакту  $z = \eta(x, t)$ . Враховується сила поверхневого натягу, де  $T$  — коефіцієнт поверхневого натягу. Сила тяжіння напрямлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному  $z$ -напрямку. Рідини вважаються нестисливими, тобто  $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$  — відношення густин верхнього та нижнього рідких шарів залишається сталою.

**5. Тривимірна модель задачі.** Стоячі хвилі розглядаємо у басейні у вигляді прямокутного паралелепіпеда що містить два рідких шари:

$\Omega_1 = \{(x, y, z), 0 < x < L_1, 0 < y < L_2 - h_1 < z < 0\}$  з густиною  $\rho_1$  верхнього рідкого шару;

$\Omega_2 = \{(x, y, z), 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, 0 < z < h_2\}$  з густиною  $\rho_2$  нижнього рідкого шару.

Швидкості у  $\Omega_j$  виражені через градієнт потенціалу  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$ . Шари розділені поверхнею контакту  $z = \eta(x, y, t)$  (рис. 2).

Математична постановка задачі про коливання внутрішніх стоячих хвиль з товщинами  $h_1$  та  $h_2$  має вигляд:

$$\nabla^2 \varphi_1 \equiv \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

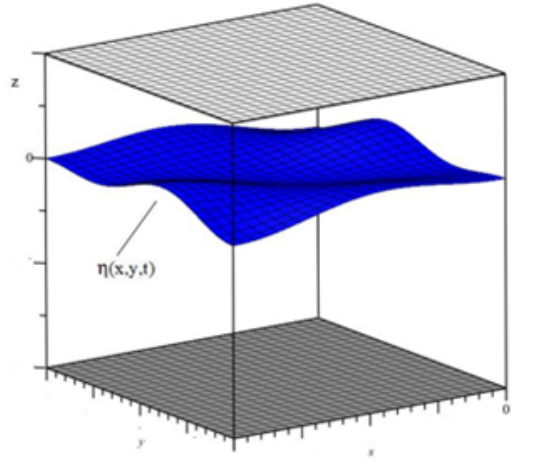


Рис. 2. Тривимірна модель обмеженої двошарової рідини.

$$\nabla^2 \varphi_2 \equiv \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad (7)$$

кінематичні умови

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (9)$$

динамічна умова

$$g \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \eta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + 0,5 (\vec{\nabla} \varphi_1)^2 - 0,5 (\vec{\nabla} \varphi_2)^2 - \frac{T}{\rho_1} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{-3}{2}} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{при } z = \eta(x, y, t), \quad (10)$$

граничні умови на бокових стінках

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad x = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x = L_1, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad y = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{при } y = L_2.$$

граничні умови на дні та кришці

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = h_2. \quad (12)$$

**6. Розв'язки для двовимірної моделі.** Якщо амплітуда хвиль буде набагато меншою за характерну довжину хвилі, то коефіцієнт нелінійності  $\alpha$  можна вважати рівним нулю, причому система (1–5) стає лінійною.

Розв'язок такої задачі будемо шукати у вигляді стоячих хвиль:

$$\eta = A \cos(kx) \sin(\omega t). \quad (13)$$

Підстановка (13) в рівняння (1–2, 5) дає значення потенціалів швидкостей нижнього і верхнього шарів у вигляді:

$$\varphi_1 = \omega k^{-1} A \cos(kx) \sin(\omega t) \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)}, \quad (14)$$

$$\varphi_2 = \omega k^{-1} A \cos(kx) \sin(\omega t) \frac{\text{ch}(k(h_2 - z))}{\text{sh}(kh_2)}. \quad (15)$$

Підставляючи розв'язки (13–15) в рівняння (3), отримуємо дисперсійне рівняння

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\text{cth}(kh_1) + \rho \text{cth}(kh_2)}. \quad (16)$$

Можна зазначити, що дисперсійне співвідношення має такий самий вигляд як у випадку прогресивних хвиль.

Перевірка граничних умов на бокових стінках басейну (5) накладає обмеження на хвильове число стоячих хвиль:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \quad n = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (17)$$

Тут натуральне число  $n$  показує кількість вузлів для кожної стоячої хвилі. Підстановка (17) в (16) дає дискретний ряд частот, з якими коливається хвиля, що має  $n$  вузлів:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(1 - \rho + \frac{\pi^2 n^2 T}{L^2}) L}{\coth \frac{\pi n h_1}{L} + \rho \coth \frac{\pi n h_2}{L}}}. \quad (18)$$

Враховуючи дисперсійне співвідношення (18) можна зробити висновок, що частоти коливання стоячих хвиль належать до-дискретного спектру і можуть набувати лише певних значень. Дисперсійна діаграма являє собою неперервну криву, а набір точок вздовж деякої кривої (рис. 3).

На рис. 4 зображено стоячі хвилі для таких параметрів двошарової системи  $h_1 = h_2 = 1$ ,  $L = 2$ ,  $A = 0.3$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

Кожна стояча хвиля має вузли — точки поверхні контакту, які залишаються нерухомими під час коливання стоячої хвилі. На рисунку 4 на них вказує штрихова лінія. Також є так звані пучності — точки контакту двох шарів, які коливаються з максимальною амплітудою. Всі точки межі розділу двох шарів коливаються з однаковою частотою, але з різними амплітудами. Якщо реалізована стояча хвиля з одним вузлом, то це буде середня точка поверхні контакту, а максимальна амплітуда коливань буде біля бокових стінок басейну. Частота коливань такої хвилі  $\omega = 0.41$  визначається фізичними параметрами двошарової рідини і є найменшою серед усіх можливих значень. Стояча хвиля з двома вузлами коливається з частотою  $\omega = 0.99$ , яка більша ніж вдвічі за частоту хвилі з одним вузлом. Внутрішня стояча хвиля з трьома вузлами має частоту  $\omega = 1.73$ . На практиці може реалізовуватись накладання стоячих хвиль з різною кількістю вузлів.



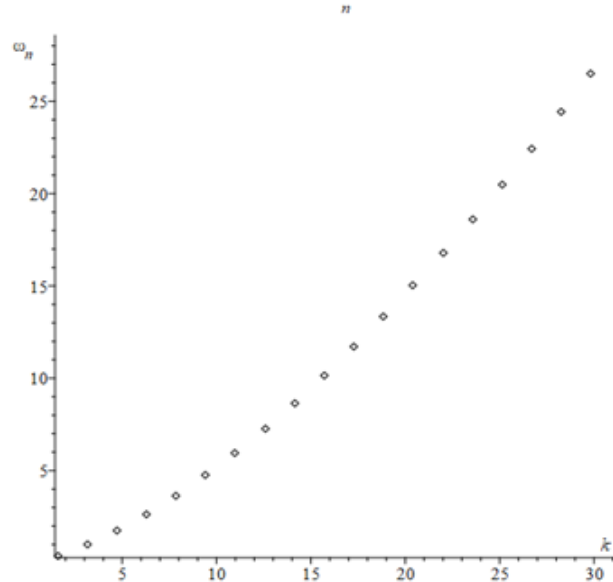


Рис. 3. Дискретна дисперсійна крива для стоячих хвиль.

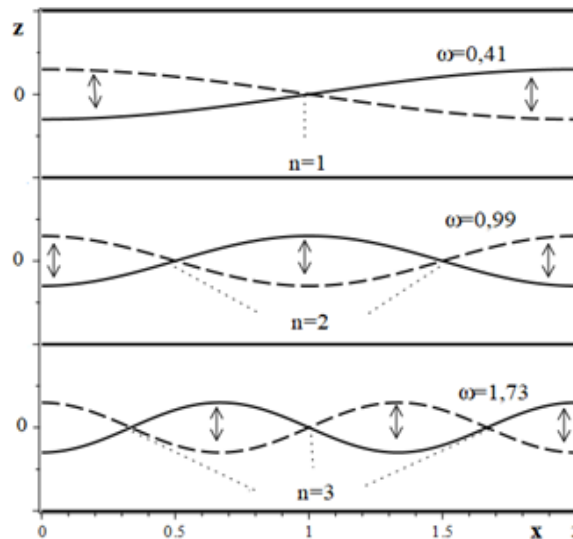


Рис. 4. Стоячі хвилі з різною кількістю вузлів.

**7. Лінійна тривимірна задача.** Розв’язок для тривимірної задачі одержуємо у вигляді стоячих хвиль:

$$\eta = A \cos(k_1x) \cos(k_2y) \sin(\omega t). \tag{19}$$

Підстановка (19) в рівняння (1-2, 5) дає значення потенціалів швидкостей нижнього і верхнього шарів у вигляді:

$$\varphi_1 = \omega k^{-1} A \cos(k_1x) \cos(k_2y) \cos(\omega t) \left( \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)} \right), \tag{20}$$

$$\varphi_2 = \omega k^{-1} A \cos(k_1x) \cos(k_2y) \cos(\omega t) \left( \frac{\text{ch}(k(h_2 - z))}{\text{sh}(kh_2)} \right). \tag{21}$$

де  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ . Перевірка граничних умов на бокових стінках басейну накладає обмеження на числа  $k_1, k_2$ :

$$k_1 = \frac{\pi n_1}{L_1}, \quad k_2 = \frac{\pi n_2}{L_2}, \quad n_1, n_2, \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (22)$$

Отже, хвильове число має вигляд  $k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2}}$ . Підставляючи розв'язки (19–21) в останнє з рівнянь отримуємо те саме дисперсійне рівняння, що і в двовимірному випадку

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2)}. \quad (23)$$

Покажемо, які розв'язки відповідають різним значенням чисел  $n_1$  і  $n_2$ . У випадку тривимірної задачі ми отримуємо вже вузлові лінії, які визначаються співвідношенням  $\eta(x, y, t) = 0$ . Тобто, це ті точки межі розділу двох рідких шарів, що залишаються нерухожими. На поданих нижче рисунках зображено вузлові лінії (лівий рисунок) та відхилення інтерфейсу двох рідких шарів (правий рисунок) для басейну у вигляді куба зі стороною рівною 2 (рис. 5–8).

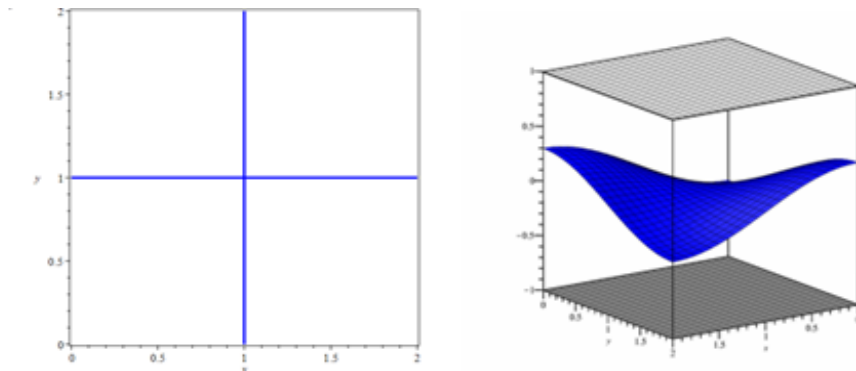


Рис. 5. Вузлові лінії  $x = 1, y = 1$ , та відхилення інтерфейсу для параметрів  $n_1 = 1, n_2 = 1$ .

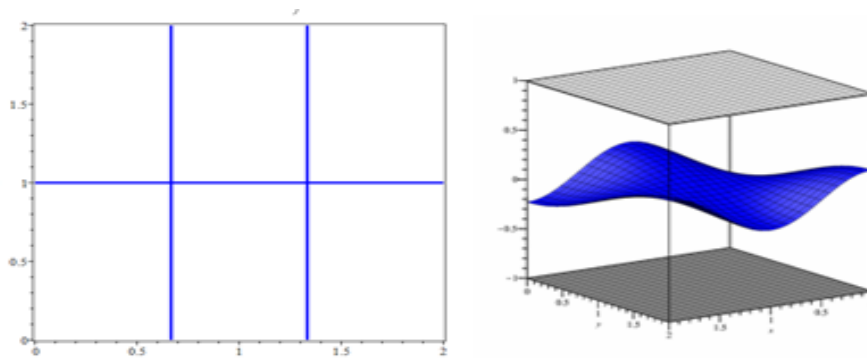


Рис. 6. Вузлові лінії  $x = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$ , та відхилення інтерфейсу для параметрів  $y = 1, n_1 = 2, n_2 = 1$ .

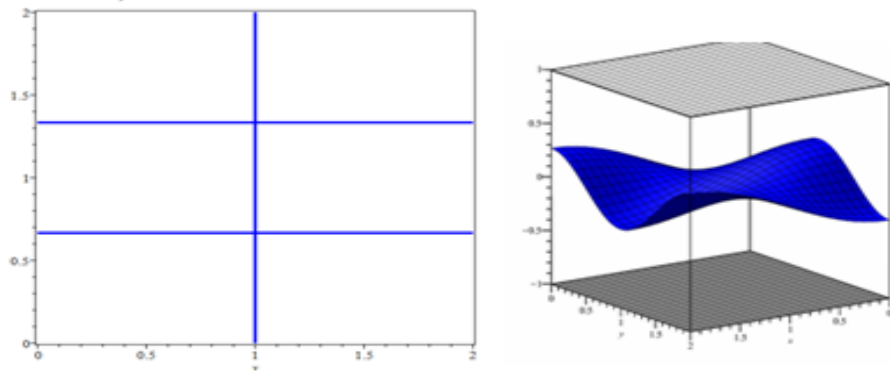


Рис. 7. Вузлові лінії  $x = 1$ ,  $y = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{4}{3}$ , та відхилення інтерфейсу для параметрів  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ .

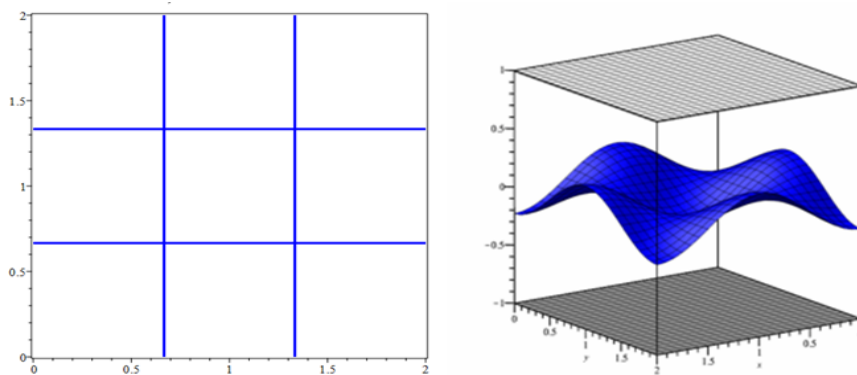


Рис. 8. Вузлові лінії  $x = \frac{2}{3}$ ,  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{4}{3}$ , та відхилення інтерфейсу для параметрів  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 2$ .

Реальна стояча хвиля буде суперпозицією хвиль, які відповідають різним значенням параметрів  $n_1$  і  $n_2$ . Причому вузлові лінії можуть мати форму різноманітних плоских кривих. Форма кривої буде визначатися амплітудами стоячих хвиль, що входять в суперпозицію.

**8. Результати дослідження двовимірної та тривимірної моделі задачі.** При дослідженні двовимірної моделі всі точки крім вузлів межі розділу двох шарів коливаються з однаковою частотою, але з різними амплітудами. Якщо реалізована стояча хвиля з одним вузлом, то це буде середня точка поверхні контакту, а максимальна амплітуда коливань буде відбуватись біля бокових стінок басейну. Частота коливань такої хвилі  $\omega = 0.41$  визначається фізичними параметрами двошарової рідини і є найменшою серед усіх можливих стоячих хвиль. У випадку двох трьох і більше вузлів частота коливань стоячої хвилі збільшується за дискретним законом згідно дисперсійного співвідношення.

Тривимірна задача для двошарового басейну і вигляді прямокутного паралелепіпеда дає елементарні розв'язки, які являють собою стоячі хвилі у вигляді поверхні, точки якої коливаються вертикально вздовж вісі  $z$ . Вузлові лінії для цього випадку є вертикальними і горизонтальними лініями, які залишаються нерухомими.

**9. Висновки.** Отже, у даній статті було досліджено проблему знаходжен-

ня параметрів внутрішніх стоячих хвиль у обмеженій гідродинамічній системі «шар – шар». Постановка задачі була здійснена для ідеальних рідин та містить рівняння Лапласа, кінематичні то динамічні умови рівноваги, а також граничні умови на дні і кришці та бокових стінках. Розв’язки задачі були отримані для довгих хвиль, тобто коли амплітуда значно менша за довжину хвилі. Це припущення дозволило лінеаризувати побудовану математичну модель та отримати розв’язки, які повністю описують можливі стоячі хвилі у таких системах. Показано, що дисперсійне співвідношення для внутрішніх стоячих хвиль має характер дискретної кривої, яка складається з окремих точок. Побудовано відхилення поверхні контакту у випадку двовимірної моделі для різної кількості вузлів та у випадку тривимірної моделі для різної кількості вузлових ліній. Дана задача може бути корисна для моделювання стоячих хвиль в обмежених рідких середовищах, а також може використовуватись для постановки експериментів для довгих хвиль у двошаровому басейні.

### Список використаної літератури

1. Penney W. G., Price A. T., Thornhill C. K. Part II. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1952. Vol. 244, No. 882. P. 254–284. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1953.0086>
2. Mercer G. N., Roberts A. J. Standing waves in deep water: Their stability and extreme form. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1992. Vol. 4, No. 2. P. 259–269. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.858354>
3. Schultz W. W., Vanden-Broeck J. M., Jiang L., Perlin M. Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect. *Journal of Fluid Mechanics*. 1998. Vol. 369. P. 253–272. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112098001773>
4. Wilkening J. Breakdown of self-similarity at the crests of large-amplitude standing water waves. *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, No. 18. 184501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.184501>
5. Panda S., Martha S. C. Water-waves scattering by permeable bottom in two-layer fluid in the presence of surface tension. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2017. Vol. 22, No. 6. P. 827–851. DOI: <https://doi.org/10.3846/13926292.2017.1386239>
6. Selezov I. T., Avramenko O. V., & Gurtovy Y. V. Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 2007. Vol. 34, No. 5. P. 475–491 DOI: <https://doi.org/10.1615/InterJFluidMechRes.v34.i5.60>
7. Panda S. Oblique wave scattering by an undulating porous bottom in a two-layer ice-covered fluid. *China ocean engineering*. 2016. Vol. 30, No. 3. P. 431–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
8. Panda S. Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid. *China ocean engineering*. 2016. Vol. 130, No. 3. P. 431–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
9. Berti M., Montalto R. Quasi-periodic standing wave solutions of gravity-capillary water waves. *American mathematical society*. 2020. Vol. 263, No. 1273. DOI: <https://doi.org/10.1090/memo/1273>
10. Baldi P., Berti M., Haus E., Montalto R. Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth. *Inventiones mathematicae*. 2018. Vol. 214, No. 2. P. 739–911. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00222-018-0812-2>
11. Berti M., Franzoi L., Maspero A. Traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2021. Vol. 240, No. 1. P. 99–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-021-01607-w>
12. Berti M., Franzoi L., Maspero A. Pure gravity traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2021. Vol. 240. P. 99–202. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12006>
13. Feola R., Giuliani F. Time quasi-periodic traveling gravity water waves in infinite depth.

*Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni*. 2021. Vol. 31, No. 4. P. 901–916. URL: <https://ems.press/journals/rlm/articles/29647>

## Hurtovyi Yu. V., Yelkin V. I. Standing waves in a two-layer limited liquid.

The article discusses the study of standing internal waves in a two-layer hydrodynamic fluid system with limited layer thicknesses. The problem formulation is presented in a dimensionless form. For the linear problem, solutions for the interface displacement between the two layers are obtained for both two-dimensional and three-dimensional models. It is shown that the boundary conditions on the lateral walls of the fluid restrict the values of wave numbers to a discrete set. A formula was developed to describe the frequency of the standing internal wave, which depends on the physical parameters of the system and the number of nodes. This formula allows for determining the wave frequency for a given system configuration. Possible forms of standing waves containing multiple stationary points on the interface surface were depicted graphically. These forms represent standing waves with different numbers of nodes and demonstrate various oscillatory structures that can occur in the system. The research provides an enhanced understanding of the behavior of standing internal waves in a two-layer hydrodynamic system with finite layer thicknesses, which may have important applications in studying the hydrodynamics of marine systems and other density-stratified environments.

**Keywords:** two-layer liquid, standing internal waves, nodes and antinodes, nodal lines.

## References

1. Penney, W. G., Price, A. T., & Thornhill, C. K. (1952). Part II. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 244(882), 254–284. <https://doi.org/10.1098/rspa.1953.0086>
2. Mercer, G. N., & Roberts, A. J. (1992). Standing waves in deep water: Their stability and extreme form. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(2), 259–269. <https://doi.org/10.1063/1.858354>
3. Schultz, W. W., Vanden-Broeck, J. M., Jiang, L., & Perlin, M. (1998). Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 369, 253–272. <https://doi.org/10.1017/S0022112098001773>
4. Wilkening, J. (2011). Breakdown of self-similarity at the crests of large-amplitude standing water waves. *Physical Review Letters*, 107(18), 184501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.184501>
5. Panda, S., & Martha, S. C. (2017). Water-waves scattering by permeable bottom in two-layer fluid in the presence of surface tension. *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(6), 827–851. <https://doi.org/10.3846/13926292.2017.1386239>
6. Selezov, I. T., Avramenko, O. V., & Gurtovy, Y. V. (2007). Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 34(5). <https://doi.org/10.1615/InterJFluidMechRes.v34.i5.60>
7. Panda, S. (2016). Oblique wave scattering by an undulating porous bottom in a two-layer ice-covered fluid. *China ocean engineering*, 30(3), 431–446. <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
8. Panda, S. (2016). Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid. *China ocean engineering*, 130(3), 431–446. <https://doi.org/10.1007/s13344-016-0067-x>
9. Berti, M., & Montalto, R. (2020). Quasi-periodic standing wave solutions of gravity-capillary water waves (Vol. 263, No. 1273). American mathematical society. <https://doi.org/10.1090/memo/1273>
10. Baldi, P., Berti, M., Haus, E., & Montalto, R. (2018). Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth. *Inventiones mathematicae*, 214(2), 739–911. <https://doi.org/10.1007/s00222-018-0812-2>
11. Berti, M., Franzoi, L., & Maspero, A. (2021). Traveling quasi-periodic water waves

- with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 240(1), 99–202. <https://doi.org/10.1007/s00205-021-01607-w>
12. Berti, M., Franzoi, L., & Maspero, A. (2021). Pure gravity traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 240, 99–202. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12006>
  13. Feola, R., & Giuliani, F. (2021). Time quasi-periodic traveling gravity water waves in infinite depth. *Rendiconti Lincei-Matematica e Applicazioni*, 31(4), 901–916. Retrieved from <https://ems.press/journals/rln/articles/29647>

Одержано 04.05.2023

УДК 512.56

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).47-55](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).47-55)М. М. Капустей<sup>1</sup>, П. В. Слюсарчук<sup>2</sup>, Т. В. Боярищева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
здобувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
m.kapustey@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4438-3395>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
кандидат фізико-математичних наук  
petro.slyusarchuk@uzhnu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9235-1497>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
кандидат фізико-математичних наук  
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2899-4900>

## ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ В ТЕРМІНАХ ЗРІЗАНИХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин в термінах усереднених псевдомоментів. У роботі [1] одержано узагальнення нерівності Беррі-Ессеена із використанням різного погляду псевдомоментів. Завдяки роботі [1] псевдомоменти набули широкого застосування у граничних теоремах. У роботі [2] розглядаються умови, при виконанні яких швидкість збіжності буде вищою, ніж у нерівності Беррі-Ессеена. Псевдомоменти знайшли застосування до оцінки швидкості збіжності цін опціонів [3]. У роботах [4] і [5] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [1] для різнорозподілених випадкових величин. У даній роботі ми узагальнюємо результати [1] на послідовність серій незалежних в кожній серії різнорозподілених випадкових величин, при цьому узагальнюються результати робіт [4] і [5].

**Ключові слова:** центральна гранична теорема, швидкість збіжності, псевдомомент.

**1. Вступ.** Застосування псевдомоментів до дослідження швидкості збіжності у граничних теоремах дозволяє вивчати поведінку законів розподілу випадкових величин різної природи: як однаково, так і різно розподілених. У даній роботі розглядається послідовність серій випадкових величин, що є різно розподіленими і в кожній серії незалежними. Для оцінки швидкості збіжності розподілу їх сум до нормального використано псевдомоменти так званого урізаного виду, перевага яких у тому, що вони краще враховують близькість розподілів до граничного в околі нуля.

**2. Основний результат.** Розглянемо послідовність серій  $\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_n}$  незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями  $M\xi_{n_i} = 0$ , дисперсіями  $D\xi_{n_i} = \sigma_{n_i}^2$ ,  $\sigma_{n_i} > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \sigma_{n_i}^2 = 1$ ,  $\bar{\sigma}_n = \max \sigma_{n_1}, \dots, \sigma_{n_n}$ . Розглянемо послідовність серій  $\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_n}$  незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями  $M\xi_{n_i} = 0$ , дисперсіями  $D\xi_{n_i} = \sigma_{n_i}^2$ ,  $\sigma_{n_i} > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \sigma_{n_i}^2 = 1$ ,  $\bar{\sigma}_n = \max \{ \sigma_{n_1}, \dots, \sigma_{n_n} \}$ . Позначимо:  $F_{n_i}(x)$  — функція розподілу  $\xi_{n_i}$ ,  $f_{n_i}(t)$  — характеристична функція  $\xi_{n_i}$ ,  $S_n = \xi_{n_1} + \dots + \xi_{n_n}$ ,  $\Phi_n(x)$  — функція розподілу  $S_n$ ;  $\Phi(x)$  — функція розподілу стандартного нормального

закону,  $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$ . Для довільного  $y > 0$  визначимо псевдомоменти вигляду

$$\begin{aligned}\nu_{nk}^{(1)}(y) &= \int_{|x| \leq y} \max(1, |x|^3) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|, \\ \nu_{nk}^{(2)}(y) &= \int_{|x| > y} \max(1, x^2) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|, \\ \bar{\nu}_n^{(1)}(y) &= \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(1)}(y), \quad \bar{\nu}_n^{(2)}(y) = \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(2)}(y).\end{aligned}$$

**Теорема 1.** Нехай  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  при  $n \geq 2$ . Тоді існує стала  $C$ , що для всіх  $n \geq 1$

$$\rho_n \leq C \inf_{y>0} (\bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(y) + \bar{\nu}_n^{(2)}(y)).$$

*Доведення.* При доведенні будемо використовувати наступні нерівності, що справедливі для всіх  $t \in R$ . Враховуючи, що  $M\xi_{nk} = 0$ ,  $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$ ,

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t) &= \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sigma_{nk}} d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} - \frac{(itx\sigma_{nk})^2}{2} \right) d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| \leq \\ &\leq \int_{|x| \leq y} \left| e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} - \frac{(itx\sigma_{nk})^2}{2} \right| |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| + \\ &+ \int_{|x| > y} \left| e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk} - \frac{(itx\sigma_{nk})^2}{2} \right| |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| \leq \\ &\leq \int_{|x| \leq y} \frac{|tx\sigma_{nk}|^3}{6} |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| + \int_{|x| > y} (tx\sigma_{nk})^2 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| = \\ &= \frac{1}{6} |t|^3 \sigma_{nk}^3 \int_{|x| \leq y} |x|^3 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| + t^2 \sigma_{nk}^2 \int_{|x| > y} |x|^2 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| \leq \\ &\leq \nu_{nk}^{(1)}(y) \frac{1}{6} |t|^3 \sigma_{nk}^3 + \nu_{nk}^{(2)}(y) t^2 \sigma_{nk}^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Аналогічно,

$$\omega_{nk}(t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx\sigma_{nk}} - 1 - itx\sigma_{nk}) d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| \leq$$



$$\leq \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| \leq \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2} \left( \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sigma_{nk}} d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| \leq \\ &\leq \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y). \end{aligned} \quad (3)$$

У нерівності ([6], ст. 299)

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24 \sup_x |G'(x)|}{\pi T},$$

покладемо  $F(x) = \Phi_n(x)$ ,  $G(x) = \Phi(x)$ ,  $f(t) = \prod_{k=1}^n f_{nk}(t)$ ,  $g(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ . Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T}. \quad (4)$$

Із нерівності

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \left( \prod_{k=1}^{i-1} |b_k| \right) \left( \prod_{k=i+1}^n |a_k| \right),$$

і із умови (1) теореми

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| &= \left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{ni}^2}{2}} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)| \leq \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t) \psi_{ni}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\psi_{ni}(t) = \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)|.$$

Позначимо  $\bar{\nu}_n(y) = \max \left\{ \bar{\nu}_n^{(1)}(y), \bar{\nu}_n^{(2)}(y) \right\}$ . Нехай  $n \geq 2$ ,  $c \in \left( 0; e^{-9n\bar{\sigma}_n^2} \right]$  — довільна стала. Будемо припускати, що  $\bar{\nu}_n^{(2)}(y) \leq c$ , бо у протилежному випадку теорема є справедливою.

Покладемо  $T_n^{(1)} = \frac{1}{\sigma_n} \sqrt{-2 \ln \bar{\nu}_n(y)}$ , якщо  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$ , і  $T_n^{(2)} = \frac{1}{\sigma_n} \frac{c}{\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}$ , якщо  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) > c$ .

Нехай  $n \geq 2$ ,  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) > c$ . Із нерівності

$$|f_{nk}(t)| = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t), \quad (6)$$

і (1) при  $|t| \leq T_n^{(2)}$

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t)| &\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left( \frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2\sigma_{nk}^2\nu_{nk}^{(2)}(y) \right) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{\frac{(T_n^{(2)})^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left( T_n^{(2)}\frac{t^2\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2\sigma_{nk}^2c \right) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + t^2\sigma_{nk}^2\sqrt{e} \left( \frac{c}{\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}\frac{1}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + c \right) \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \psi_{ni}(t) &= \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)| \leq \\ &\leq \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + t^2\sigma_{nk}^2\sqrt{e} \left( \frac{c}{\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}\frac{1}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + c \right) \right) \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2}(1 - \sigma_{ni}^2) + t^2\sqrt{e}\frac{7c}{6} \right\} \leq e^{-c_2t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $c_2 = \frac{1}{8} - \frac{7}{6}\sqrt{ec} > 0$ .

Із (5) і (7) при  $\bar{\nu}_n^{(1)} > c$ ,  $|t| \leq T_n^{(2)}$  і  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|t|^3\sigma_{nk}^3}{6}\nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2\sigma_{nk}^2\nu_{nk}^{(2)}(y) \right) e^{-c_2t^2} \leq \\ &\leq \left( \frac{|t|^3}{6}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + t^2\bar{\nu}_n^{(2)}(y) \right) e^{-c_2t^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нехай  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) > c$  і  $n \geq 2$ . Покладемо у (4)  $T = T_n^{(2)}$ . Із (4) і (8)

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_n^{(2)}} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_n^{(2)}} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_n^{(2)}} \left( \frac{t^2}{6}\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + t\bar{\nu}_n^{(2)}(y) \right) e^{-c_2t^2} dt + \\ &+ \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y)}{c} \leq C_3 (\bar{\sigma}_n\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + \bar{\nu}_n^{(2)}(y)), \end{aligned}$$

де надалі  $C_k$  — сталі, що залежать тільки від  $c$ .

У випадку  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) > c$  і  $n \geq 2$  теорема доведена.

Нехай  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$ ,  $n \geq 2$ . Із (2) і (6) при  $|t| \leq T_n^{(1)}$

$$|f_{nk}(t)| \leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + e^{\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \frac{1}{2}t^2\sigma_{nk}^2 \left( \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + e^{\frac{(T_n^{(1)})^2\sigma_{nk}^2}{4}} \frac{1}{2} t^2 \sigma_{nk}^2 \left( \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sigma_{nk}^2 \left( \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) \right). \end{aligned}$$

Тоді, із умови  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ , при  $n \geq 2$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \psi_{ni}(t) &\leq \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sigma_{nk}^2 \left( \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) \right) \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{4} (1 - \sigma_{ni}^2) + (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^2 (\bar{\nu}_n^{(1)}(y) + \bar{\nu}_n^{(2)}(y)) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{4} (1 - \sigma_{ni}^2) + t^2 \sqrt{\bar{\nu}_n(y)} \right\} \leq \exp \left\{ -t^2 \left( \frac{1}{16} - \sqrt{c} \right) \right\} = e^{-c_1 t^2}, \quad (9) \end{aligned}$$

де  $c_1 = \frac{1}{16} - \sqrt{c} > 0$ .

Із (5) і (9) при  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$ ,  $|t| \leq T_n^{(1)}$  і  $n \geq 2$  маємо

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \nu_{nk}^{(1)}(y) + t^2 \sigma_{nk}^2 \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) e^{-c_1 t^2} \leq \\ &\leq \left( \frac{|t|^3}{6} \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(y) + t^2 \bar{\nu}_n^{(2)}(y) \right) e^{-c_1 t^2}. \quad (10) \end{aligned}$$

Покладемо у (4)  $T = \frac{c}{\bar{\sigma}_n} (\bar{\nu}_n(y))^{-1}$ ,  $T' = \min \{T; T_n^{(1)}\}$ . Тоді із (4)

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{dt}{t} + \\ &+ \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} c} \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n(y) = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} c} \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n(y). \quad (11) \end{aligned}$$

Оскільки  $T' \leq T_n^{(1)}$ , то із (10)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left( \frac{t^2}{6} \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(y) + t \bar{\nu}_n^{(2)}(y) \right) e^{-c_1 t^2} dt \leq C_4 (\bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(y) + \bar{\nu}_n^{(2)}(y)). \quad (12) \end{aligned}$$

Із (1) і (6) при  $\bar{\nu}_n(y) \leq c$  і  $|t| > T_n^{(1)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \sqrt{-2 \ln \bar{\nu}_n(y)}$

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \leq \prod_{k=1}^n \left( e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t) \right) \leq \\ & \leq \prod_{k=1}^n \left( e^{-\frac{(T_n^{(1)})^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) = \prod_{k=1}^n \left( (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} + \nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y) \right) = \\ & = (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \prod_{k=1}^n \left( 1 + (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} (\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y)) \right), \end{aligned}$$

і, використавши нерівність  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\prod_{i=1}^n x_i \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^n$ , одержимо

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \leq (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left( 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{\nu}_n(y))^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} (\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y)) \right)^n \leq \\ & \leq (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left( 1 + (\bar{\nu}_n(y))^{-1} \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n (\nu_{nk}^{(1)}(y) + \nu_{nk}^{(2)}(y)) \right)^n \leq (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} 3^n. \quad (13) \end{aligned}$$

Оскільки  $\bar{\nu}_n(y) \leq c \leq e^{-9n\bar{\sigma}_n^2} \leq e^{-9}$  і  $|t| > T_n^{(1)}$ , то

$$|t| \bar{\sigma}_n > \bar{\sigma}_n T_n^{(1)} = \sqrt{-2 \ln \bar{\nu}_n(y)} \leq \sqrt{-2 \ln c} \geq \sqrt{18}.$$

Будемо вважати, що  $T' = T_n^{(1)}$ , бо інакше  $I_2 = 0$ ,  $I_3 = 0$ , і справедливість теореми випливає із (11), (12). Із (13) (враховуємо, що  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$ )

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{3^n 2}{\pi} (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \int_{T_n^{(1)}}^T t^{-1} dt = \\ &= \frac{3^n 2}{\pi} (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \int_{T_n^{(1)}}^T t^{-\frac{8}{9} - \frac{1}{9}} dt \leq \frac{3^n 18}{\pi} (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} (T_n^{(1)})^{-\frac{1}{9}} T^{\frac{1}{9}} \leq \\ &\leq \frac{3^n 18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - \frac{1}{9}} c^{\frac{1}{9}} \leq \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n(y) \frac{18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} c^{-1} \frac{1}{\bar{\sigma}_n} 3^n c^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \\ &\leq \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n(y) \frac{18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} c^{-1} \sqrt{n} (3e^{-9})^n \leq \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n(y) \frac{1}{\pi} 18^{1-\frac{1}{18}} c^{-1} \sqrt{2} (3e^{-9})^2. \quad (14) \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$ ,  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$  і  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  при  $n \leq 2$ , одержимо

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{\pi} \int_{T_n^{(1)}}^T e^{-\frac{1}{2} t^2} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} (T_n^{(1)})^{-2} e^{-\frac{1}{2} (T_n^{(1)})^2} = \frac{2}{\pi} (T_n^{(1)})^{-2} (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{9\pi} \bar{\sigma}_n^2 (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \frac{1}{9\pi} \bar{\sigma}_n^2 (\bar{\nu}_n(y))^{\frac{4}{3}} \leq \bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n(y) \frac{1}{9\pi} c^{\frac{1}{3}}. \quad (15) \end{aligned}$$

У випадку  $n \geq 2$ ,  $\bar{\nu}_n^{(1)}(y) \leq c$  теорема випливає із (11), (12), (14), (15).

Нехай  $n = 1$ . Тоді  $\sigma_{11}^2$  і

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F_{11}(x) - \Phi(x)| = \sup_x \left| \int_{-\infty}^x d(F_{11}(u) - \Phi(u)) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |d(F_{11}(x) - \Phi(x))| \leq \nu_{11}^{(1)}(y) + \nu_{11}^{(2)}(y). \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Введемо позначення

$$\check{\nu}_n^{(1)}(y) = \sum_{k=1}^n \sigma_{nk}^3 \nu_{nk}^{(1)}(y), \quad \check{\nu}_n^{(2)}(y) = \sum_{k=1}^n \sigma_{nk}^2 \nu_{nk}^{(2)}(y).$$

**3. Деякі наслідки.** У теоремі покладемо  $y = \bar{\sigma}_n^{-1}$ .

**Наслідок 1.** Нехай  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ , при  $n \geq 2$ . Тоді для всіх  $n \geq 1$

$$\rho_n \leq C (\bar{\sigma}_n \bar{\nu}_n^{(1)}(\bar{\sigma}_n^{-1}) + \bar{\nu}_n^{(2)}(\bar{\sigma}_n^{-1})).$$

Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{nk}^{(0)}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|, \quad \bar{\nu}_n^{(0)}(r) = \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(0)}(r).$$

**Наслідок 2.** Нехай  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  для  $n \geq 2$ ,  $2 < r \leq 3$ . Тоді для всіх  $n \geq 1$

$$\rho_n \leq C \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\nu}_n^{(0)}(r).$$

**Наслідок 3.** Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  — послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням  $M\xi_i = 0$ , дисперсією  $D\xi_i = \sigma_i^2$ ,  $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Позначимо через  $F_k(x)$  функцію розподілу випадкової величини  $\xi_k$  і покладемо  $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$ . Тоді

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n}, \quad F_{nk}(x) = F_k(xB_n),$$

$$\sigma_{nk}^2 = \frac{\sigma_k^2}{B_n^2}, \quad \bar{\sigma}_n^2 = \frac{\sigma^2}{B_n^2}, \quad \sigma = \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k.$$

$$\nu_k^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_k(x\sigma_k) - \Phi(x))|, \quad \bar{\nu}_n^{(0)}(r) = \frac{\sigma^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \nu_k^{(0)}(r).$$

**Наслідок 4.** Нехай  $\frac{\sigma^2}{B_n^2} \leq \frac{3}{4}$  для  $n \geq 2$ . Тоді

$$\rho_n \leq C \left( \frac{\sigma}{B_n} \right)^{r-2} \bar{\nu}_n^{(0)}(r).$$

**4. Висновки.** У роботі отримано оцінки швидкості збіжності розподілів послідовностей сум випадкових величин в схемі серій. Результати сформульовано в термінах псевдомоментів урізаного типу. Одержані оцінки можуть бути використані при дослідженні збіжності послідовностей випадкових величин з іншими властивостями.

#### Список використаної літератури

1. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem : Lecture Notes in Mathematics. Vol. 330. Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Berlin. Heidelberg : Springer, 1973. P. 531–543. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0061516>
2. Mishura Y., Munchak Y., Slyusarchuk P. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments. *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 2015. Vol. 2, No. 2. P. 95–106. DOI: <https://doi.org/10.15559/15-VMSTA23>
3. Мішуря Ю., Мунчак Є. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів. *Теорія ймовірностей і математична статистика*. 2015. Вип. 92. С. 110–124.
4. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для послідовності серій в термінах середніх псевдомоментів. *Теорія ймовірностей і математична статистика*. 2018. Вип. 2, № 69. С. 91–100.
5. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Точність наближення в центральній теоремі в термінах усереднених псевдомоментів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2, № 33. С. 78–87.
6. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Узагальнення одного результату В. М. Золотарьова *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 1998. Вип. 3. С. 184–189.
7. Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 1999. Вип. 4. С. 12–16.
8. Bojarishcheva T. V., Slyusarchuk P. V. The approximation of convergence of sums to the normal law. *Theory of stochastic processes*. Kyiv, 2003. No. 3-4. P. .

**Kapustey M. M., Slyusarchuk P. V., Boiaryshcheva T. V.** Exactness of an approximation in the central limit theorem in the term of axe middle pseudomoments.

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem generalized for sequences series random variables in the term of middle pseudomoments. In the paper [1] a generalization of the Barry-Esseen inequality was obtained using a different kind of pseudomonitors. Due to the work [1], pseudomoments have become widely used in the limit theorems; a detailed bibliography is contained in [1]. In [2] we consider the conditions in which the convergence rate will be higher than in the Barry-Esseen inequality. Pseudomoments have been used to estimate the convergence rate of options prices [3]. In papers [4] and [5] different approaches to generalizing the results from [1] for variously distributed random variables are considered. In this paper we summarize the results of work [1] on a sequence of independent series in each series of randomly distributed random variables, while the results of works [4] and [5] are substantially generalized.

**Keywords:** central limit theorem, rate of convergence, pseudomoment.

#### References

1. Zolotarev, V. M. (1973). Exactness of an approximation in the central limit theorem. In Maruyama, G., Prokhorov, Y. V. (eds). *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory*. (Vol. 330). Berlin. Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0061516> [in German].
2. Mishura, Yu., Munchak, Ye., & Slyusarchuk, P. (2015). The rate of convergence to the normal

- law in terms of pseudomoments. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 2(2), 95–106. <https://doi.org/10.15559/15-VMSTA23>
3. Mishura, Yu., & Munchak, Ye. (2015). The rate of convergence of option prices using the method of pseudo-moments. *Probability theory and mathematical statistics*, 92, 110–124. [in Ukrainian].
  4. Kapustei, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). Estimation of the speed of convergence in the central limit theorem for a sequence of series in terms of average pseudo moments. *Probability theory and mathematical statistics*, 2(69), 91–100. [in Ukrainian].
  5. Kapustei, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). Accuracy of the approximation in the central theorem in terms of averaged pseudo-moments. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Mathematics and computer science series*, 2(33), 78–87. [in Ukrainian].
  6. Slyusarchuk, P. V., & Polyak, I. Y. (1998). Generalization of one result by V. M. Zolotaryov. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Mathematics and computer science series*, 3, 184–189. [in Ukrainian].
  7. Boyarishcheva, T. V., & Slyusarchuk, P. V. (1999). Estimation of the speed of convergence in the central limit theorem for differently distributed quantities. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Mathematics series and computer science series*, 4, 12–16. [in Ukrainian].
  8. Boyarishcheva, T. V., & Slyusarchuk, P. V. (2003). The approximation of convergence of sums to the normal law //Theory of stochastic processes. [in Ukrainian].

Одержано 04.05.2023

УДК 517.22

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).56-65](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).56-65)**О. О. Курченко<sup>1</sup>, О. О. Синявська<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Київський національний університет ім. Т. Шевченка,  
професор кафедри математичного аналізу,  
доктор фізико-математичних наук, доцент  
oleksandr.kurchenko@knu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
olga.synavska@uzhnu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

## ЧОТИРИ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Ця стаття містить певні узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші диференціального числення функцій однієї змінної на випадок диференційовних функцій кількох змінних. Наведені приклади застосування отриманих результатів для доведення нерівностей та обчислення кратних границь.

**Ключові слова:** теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші для диференційовних функцій, диференційовні функції кількох змінних, кратні границі.

**1. Вступ.** Теореми Ролля, Лагранжа, теорема Коші для диференційовних функцій, правила Лопітала є класичними теоремами математичного аналізу функцій однієї змінної. Разом з теоремою Ферма, формулою Тейлора вони є перлинами диференціального числення функцій однієї змінної [1, гл. 4]. Два узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій були опубліковані у статті [2]. Одне з цих узагальнень було використано для викладу теми «Формула Тейлора» у підручнику [3].

Дослідження, пов'язані з теоремою Лагранжа, Коші для диференційовних функцій, формулою Тейлора проводилися багатьма математиками. Так, у статті [4] отримані узагальнення теореми про середнє для диференційовних функцій однієї змінної. У роботах [5, 6] досліджуються проміжні точки у теоремах Лагранжа і Коші. Стаття [7] містить теореми про середнє для випадку адаптованих похідних (conformable derivative). У роботі [8] отримані певні узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій однієї і кількох змінних.

У цій статті для функцій  $m$  змінних розглянуто природи по  $m$  вимірному паралелепіпеду  $\Pi$ , які виражаються через  $m$ -кратний інтеграл по паралелепіпеду  $\Pi$  від мішаної похідної  $m$ -го порядку цієї функції. За допомогою теореми про середнє для кратних інтегралів отримано певні узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші для диференційовних функцій кількох змінних. Наведені приклади застосування отриманих результатів для доведення нерівностей, обчислення кратних границь.

**2. Повні природи на паралелепіпеді функцій кількох змінних.** Нехай  $t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $h_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ ;

$$\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \dots \times [t_m, t_m + h_m]$$



—  $m$ -вимірний паралелепіпед у  $m$ -вимірному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^m$ ;  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  — дійсна функція  $m$  дійсних змінних.

Нехай, далі,  $s = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \Pi$ ,  $d_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Надамо змінній  $s_j$  приросту  $d_j$ , так, що  $s_j + d_j \in [t_j, t_j + h_j]$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Означення 1.** *Нехай  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Приростом функції  $f$ , що відповідає приросту  $d_j$  змінної  $s_j$ , у точці  $s$  називається величина*

$$\Delta_{d_j}^{(j)} f(s) = f(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j + d_j, s_{j+1}, \dots, s_m) - f(s_1, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_m).$$

**Означення 2.** *Повним приростом ( $m$ -приростом) функції  $f$  на  $m$ -вимірному паралелепіпеді  $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \dots \times [t_m, t_m + h_m]$  називається величина*

$$\Delta_{\Pi} f = \Delta_{h_m}^{(m)} \Delta_{h_{m-1}}^{(m-1)} \dots \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

**Приклад 1.** *Для прямокутника  $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2]$  ( $m = 2$ ),  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  повний приріст функції двох змінних на  $\Pi$  обчислюється за формулою*

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi} f &= \Delta_{h_2}^{(2)} \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2) = \Delta_{h_2}^{(2)} (f(t_1 + h_1, t_2) - f(t_1, t_2)) = \\ &= f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - f(t_1 + h_1, t_2) - f(t_1, t_2 + h_2) + f(t_1, t_2). \end{aligned}$$

*Цей приріст має таку геометричну інтерпретацію. У прямокутній системі координат  $x_1 O x_2$  розглянемо прямокутник  $\Pi = ABCD$  з вершинами*

$$A = (t_1, t_2), B = (t_1 + h_1, t_2), C = (t_1 + h_1, t_2 + h_2), D = (t_1, t_2 + h_2).$$

Тоді

$$\Delta_{\Pi} f = f(A) - f(B) + f(C) - f(D).$$

Наприклад,

$$\Delta_{[0,x] \times [0,y]} \sin = \sin(x + y) - \sin(x) - \sin(y) + \sin 0.$$

**Лема 1.** *Нехай  $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \dots \times [t_m, t_m + h_m]$ ,  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ . Тоді*

$$\Delta_{\Pi} f = (-1)^m \sum_{\alpha_1=0}^1 \dots \sum_{\alpha_m=0}^1 (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} f(t_1 + \alpha_1 h_1, \dots, t_m + \alpha_m h_m).$$

**Доведення.** Застосуємо метод математичної індукції. Покладемо

$$\Pi_k = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \dots \times [t_k, t_k + h_k], 1 \leq k \leq m.$$

Для  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi_1} f &= \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \dots, t_m) = f(t_1 + h_1, t_2, \dots, t_m) - f(t_1, t_2, \dots, t_m) = \\ &= (-1) \sum_{\alpha_1=0}^1 (-1)^{\alpha_1} f(t_1 + \alpha_1 h_1, t_2, \dots, t_m). \end{aligned}$$

Виконаємо індукційний крок. Припустимо, що для фіксованого  $k$ ,  $1 \leq k \leq m-1$  виконується рівність

$$\Delta_{\Pi_k} f = (-1)^k \sum_{\alpha_1=0}^1 \dots \sum_{\alpha_k=0}^1 (-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} f(t_1 + \alpha_1 h_1, \dots, t_k + \alpha_k h_k, t_{k+1}, \dots, t_m).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi_{k+1}} f &= \Delta_{h_{k+1}}^{(k+1)} \Delta_{\Pi_k}(f) = \\ &= (-1)^k \sum_{\alpha_1=0}^1 \dots \sum_{\alpha_k=0}^1 (-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} \Delta_{h_{k+1}}^{(k+1)} f(t_1 + \alpha_1 h_1, \dots, t_k + \alpha_k h_k, t_{k+1}, \dots, t_m) = \\ &= (-1)^k \sum_{\alpha_1=0}^1 \dots \sum_{\alpha_k=0}^1 (-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} (-1) \times \\ &\times \sum_{\alpha_{k+1}=0}^1 (-1)^{\alpha_{k+1}} f(t_1 + \alpha_1 h_1, \dots, t_k + \alpha_k h_k, t_{k+1} + \alpha_{k+1} h_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m) = \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{\alpha_1=0}^1 \dots \sum_{\alpha_{k+1}=0}^1 (-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k+1}} \times \\ &\times f(t_1 + \alpha_1 h_1, \dots, t_k + \alpha_k h_k, t_{k+1} + \alpha_{k+1} h_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m). \end{aligned}$$

Лема доведена.

**Лема 2.** Нехай  $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \dots \times [t_m, t_m + h_m]$ , функція  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  —  $m$ -разів неперервно диференційовна на  $m$ -вимірному паралелепіпеді  $\Pi$ . Тоді

$$\Delta_{\Pi} f = \int_{\Pi} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (1)$$

**Доведення.** Кратний інтеграл у правій частині рівності (1) запишемо у вигляді повторного:

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} dx_1 dx_2 \dots dx_m = \\ &= \int_{t_m}^{t_m+h_m} dx_m \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+h_{m-1}} dx_{m-1} \dots \int_{t_1}^{t_1+h_1} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} dx_1. \end{aligned}$$

Для обчислення повторного інтеграла послідовно застосовуємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\begin{aligned} &\int_{t_m}^{t_m+h_m} dx_m \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+h_{m-1}} dx_{m-1} \dots \int_{t_1}^{t_1+h_1} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} dx_1 = \\ &= \int_{t_m}^{t_m+h_m} dx_m \int_{t_{m-1}}^{t_{m-1}+h_{m-1}} dx_{m-1} \dots \int_{t_2}^{t_2+h_2} \frac{\partial^{m-1} \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_2 \dots \partial x_m} dx_2 = \dots = \\ &= \Delta_{h_m}^{(m)} \Delta_{h_{m-1}}^{(m-1)} \dots \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \dots, t_m) = \Delta_{\Pi} f. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Більш загальні прирости функції кількох змінних розглянуті у монографії [9, підр. 1.1].

**3. Узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші на випадок функцій кількох змінних.** Нехай  $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$  — паралелепіпед у  $m$ -вимірному просторі  $\mathbb{R}^m$ , функція  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ . Покладемо  $t_i = a_i$ ,  $h_i = b_i - a_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Тоді паралелепіпед  $\Pi = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2] \times \dots \times [t_m, t_m + h_m]$ , а повний приріст функції  $f$  на  $\Pi$  має вигляд:

$$\Delta_{\Pi} f = \Delta_{h_m}^{(m)} \dots \Delta_{h_1}^{(1)} f(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

**Теорема 1.** Нехай функція  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови:

- 1)  $f \in C^{(m)}(\Pi)$ ;
- 2)  $\Delta_{\Pi} f = 0$ .

Тоді існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що

$$\frac{\partial^m f(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} = 0.$$

**Доведення.** Внаслідок леми 2 та умови 2),

$$\Delta_{\Pi} f = \int_{\Pi} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} dx_1 dx_2 \dots dx_m = 0.$$

За теоремою про середнє значення для кратного інтеграла [10, с. 103], існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що

$$0 = \int_{\Pi} \frac{\partial^m f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} dx_1 \dots dx_m = \frac{\partial^m f(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m),$$

звідки

$$\frac{\partial^m f(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} = 0.$$

Теорема доведена.

**Зауваження 1.** Точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , існування якої стверджується у теоремі 1, може бути не одна.

**Приклад 2.** Нехай

$$f(x, y) = xy(1 - y), (x, y) \in \Pi = [0, 1]^2.$$

У вершинах квадрата  $\Pi$  ця функція набуває значення нуль і тому  $\Delta_{\Pi} f = 0$ . Теорема 1 стверджує існування такої точки  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Pi$ , що

$$\frac{\partial^2 f(\xi_1, \xi_2)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Всі такі точки — це відрізок  $y = \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Дійсно,

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 1 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

**Теорема 2.** Нехай  $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$  — паралелепіпед у  $m$ -вимірному просторі  $\mathbb{R}^m$ , функція  $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  —  $m$ -разів неперервно диференційовна на  $m$ -вимірному паралелепіпеді  $\Pi$ . Тоді існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що:

$$\Delta_{\Pi} f = \frac{\partial^m f(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m). \quad (2)$$

**Доведення.** Внаслідок леми 2,

$$\Delta_{\Pi} f = \int_{\Pi} \frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1, x_2, \dots, \partial x_m} dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (3)$$

За теоремою про середнє значення для кратного інтеграла [10, с. 103], існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що:

$$\int_{\Pi} \frac{\partial^m f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1, \dots, \partial x_m} dx_1 \dots dx_m = \frac{\partial^m f(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m} (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m). \quad (4)$$

З рівностей (3)–(4) випливає рівність (2).

**Зауваження 2.** Теорема 1 — частинний випадок теореми 2.

**Приклад 3.** Довести нерівність

$$0 \leq \sin x + \sin y - \sin(x + y) \leq xy \sin(x + y), \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \quad (5)$$

**Розв'язання.** Безпосередньо перевіряємо, що при  $x = 0$  або  $y = 0$  нерівність справджується. Нехай

$$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \Pi_{x,y} = [0, x] \times [0, y]; \quad f(x, y) = -\sin(x + y), \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi_{x,y}} f &= \sin x + \sin y - \sin(x + y), \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \sin(x + y). \end{aligned} \quad (6)$$

Внаслідок теореми 2, існує така точка  $(\xi, \eta) \in \Pi_{x,y}$ , що

$$\Delta_{\Pi_{x,y}} f = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x \partial y} xy = \sin(\xi + \eta) \cdot x \cdot y. \quad (7)$$

Зауважимо, що для

$$(\xi, \eta) \in \Pi_{x,y} \subset \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 : 0 \leq \sin(\xi + \eta) \leq \sin(x + y). \quad (8)$$

Із співвідношень (6)–(8) отримуємо нерівність (5).

**Приклад 4.** Довести нерівність

$$0 \leq \tan(x + y) - \tan x - \tan y \leq \frac{2xy \sin(x + y)}{\cos^3(x + y)}, \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \quad (9)$$

*Розв'язання.* Як і у попередньому прикладі, перевіряємо, що при  $x = 0$  або  $y = 0$  нерівність справджується. Нехай

$$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \Pi_{x,y} = [0, x] \times [0, y]; f(x, y) = \tan(x + y), x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_{\Pi_{x,y}} f &= \tan(x + y) - \tan x - \tan y, \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{2 \sin(x + y)}{\cos^3(x + y)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Внаслідок теореми 2, існує така точка  $(\xi, \eta) \in \Pi_{x,y}$ , що

$$\Delta_{\Pi_{x,y}} f = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x \partial y} xy = \frac{2 \sin(\xi + \eta)}{\cos^3(\xi + \eta)} \cdot x \cdot y. \tag{11}$$

Зауважимо, що для

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \in \Pi_{x,y} \subset \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 : 0 \leq \sin(\xi + \eta) \leq \sin(x + y), \\ 0 < \cos^3(x + y) \leq \cos^3(\xi + \eta). \end{aligned} \tag{12}$$

Із співвідношень (10)–(12) отримуємо нерівність (9).

**Теорема 3.** Нехай  $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$  – паралелепіпед у  $m$ -вимірному просторі  $\mathbb{R}^m$ , функції  $f, g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють умови:

- 1)  $f, g \in C^{(m)}(\Pi)$ ;
- 2)  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Pi :$

$$\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} \neq 0.$$

Тоді існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що

$$\frac{\Delta_{\Pi} f}{\Delta_{\Pi} g} = \frac{\frac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}.$$

*Доведення.* Спочатку доведемо, що  $\Delta_{\Pi} g \neq 0$ . Проведемо міркування від супротивного. Дійсно, якщо  $\Delta_{\Pi} g = 0$ , то, внаслідок теореми 1, існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що

$$\frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} = 0.$$

Це суперечить умові 2).

Покладемо  $\lambda = \frac{\Delta_{\Pi} f}{\Delta_{\Pi} g}$  і розглянемо допоміжну функцію

$$\phi(x) = f(x) - \lambda g(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Pi.$$

Ця функція  $m$  разів неперервно диференційовна на паралелепіпеді  $\Pi$  і  $\Delta_{\Pi} \phi = 0$ . Внаслідок теореми 1, існує така точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Pi$ , що:

$$\frac{\partial^m \phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} = \frac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} - \lambda \frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} = 0,$$

зв'ідки

$$\lambda = \frac{\frac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}.$$

Теорема доведена.

Теорема 1–3 узагальнюють теорема Ролля, Лагранжа, Коші для диференційованих функцій однієї дійсної змінної на випадок  $m$  раз неперервно диференційованих функцій  $m$  дійсних змінних.

**4. Застосування для обчислення кратних границь.** Нехай  $a > 0$ ,  $m$  – вимірний паралелепіпед  $\Pi = [0, a]^m$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (0, a]^m$ ,  $m$  – вимірний паралелепіпед  $\Pi_x = [0, x_1] \times \dots \times [0, x_m]$ ; функції  $f, g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема 4.** Нехай функції  $f, g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють умови:

- 1)  $f, g \in C^{(m)}(\Pi)$ ;
- 2)  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Pi :$

$$\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} \neq 0.$$

- 3) існує  $m$ -кратна границя

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+, \dots, x_m \rightarrow 0+} \frac{\frac{\partial^m f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}} = p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Тоді існує  $m$ -кратна границя

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+, \dots, x_m \rightarrow 0+} \frac{\Delta_{\Pi_x} f}{\Delta_{\Pi_x} g} = p. \quad (13)$$

**Доведення.** Для довільного  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in (0, a)^m$  функції  $f, g$  задовольняють умови теореми 3 на  $m$ -вимірному паралелепіпеді  $\Pi_x$ . Тому існує така точка  $\xi = (\xi_1(x), \dots, \xi_m(x)) \in \Pi_x$ , що

$$\frac{\Delta_{\Pi_x} f}{\Delta_{\Pi_x} g} = \frac{\frac{\partial^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}{\frac{\partial^m g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}}. \quad (14)$$

Оскільки  $\xi_i \in [0, x_i]$ , то  $\xi_i \rightarrow 0+$  при  $x_i \rightarrow 0+$ ,  $1 \leq i \leq m$ . У рівності (14) переходимо до границі при  $x_i \rightarrow 0+$ ,  $1 \leq i \leq m$  і, внаслідок умови 3), отримуємо рівність (13). Теорема доведена.

**Приклад 5.** Знайти подвійну границю

$$\lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+} \frac{\cos(x+y) - \cos x - \cos y + 1}{\cosh x + \cosh y - \cosh(x+y) - 1}, \quad (15)$$

де  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

*Розв'язання.* Розглянемо функції

$$f(s, t) = \cos(s + t), \quad g(s, t) = -\cosh(s + t), \quad s, t \in [0, 1]$$

і покладемо  $\Pi_{xy} = [0, x] \times [0, y]$ ,  $x, y \in (0, 1)$ . Маємо:

$$\Delta_{\Pi_{xy}} f = \cos(x + y) - \cos x - \cos y + 1;$$

$$\Delta_{\Pi_{xy}} g = -\cosh(x + y) + \cosh x + \cosh y - 1;$$

$$\forall x, y \in [0, 1] : \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -\cos(x + y); \quad \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} = -\cosh(x + y) \neq 0;$$

і

$$\lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+} \frac{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y}} = \lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+} \frac{-\cos(x + y)}{-\cosh(x + y)} = 1.$$

Отже, внаслідок теореми 4, подвійна границя (15) дорівнює 1.

**Приклад 6.** Знайти потрібну границю

$$\lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+, z \rightarrow 0+} h(x, y, z), \quad de \tag{16}$$

$$h(x, y, z) = \frac{\sin(x + y + z) - \sin(x + y) - \sin(x + z) - \sin(y + z) + \sin x + \sin y + \sin z}{e^{x+y+z} - e^{x+y} - e^{x+z} - e^{y+z} + e^x + e^y + e^z - 1}.$$

*Розв'язання.* Розглянемо функції

$$f(s, t, u) = \sin(s + t + u), \quad g(s, t, u) = e^{s+t+u}, \quad s, t, u \in [0, 1]$$

і покладемо  $\Pi_{xyz} = [0, x] \times [0, y] \times [0, z]$ ,  $x, y, z \in (0, 1)$ . Маємо:

$$\Delta_{\Pi_{xyz}} f = \sin(x + y + z) - \sin(x + y) - \sin(x + z) - \sin(y + z) +$$

$$+ \sin x + \sin y + \sin z;$$

$$\Delta_{\Pi_{xyz}} g = e^{x+y+z} - e^{x+y} - e^{x+z} - e^{y+z} + e^x + e^y + e^z - 1, \quad x, y, z \in (0, 1);$$

$$\forall x, y, z \in [0, 1] : \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} = e^{x+y+z} \neq 0;$$

і

$$\lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+, z \rightarrow 0+} \frac{\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}}{\frac{\partial^3 g(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}} = \lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+, z \rightarrow 0+} \frac{-\cos(x + y + z)}{e^{x+y+z}} = -1.$$

Внаслідок теореми 4,

$$\lim_{x \rightarrow 0+, y \rightarrow 0+, z \rightarrow 0+} \frac{\Delta_{xyz} f}{\Delta_{xyz} g} = -1.$$

Отже, границя (16) дорівнює  $-1$ .

**5. Висновки.** У статті отримані певні узагальнення теорем Ролля, Лагранжа, Коші для диференційовних функцій однієї змінної на випадок  $m$  раз неперервно диференційовної на  $m$ -вимірному паралелепіпеді функції  $m$  змінних. Отримані результати можуть бути застосовані для проведення досліджень у галузі математичного аналізу та його застосувань, зокрема, для доведення нерівностей з функціями кількох змінних та обчислення кратних границь. Методика проведеного дослідження може бути використана у навчальному процесі для студентів освітнього рівня бакалавр математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, а саме, у вибіркових курсах, курсових та дипломних роботах.

### Список використаної літератури

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : Підручник у двох частинах. Частина 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.
2. Курченко О. О., Рабець К. В. Два узагальнення теореми Коші для диференційованих функцій у курсі математичного аналізу. *Науковий часопис національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі*. 2009. Вип. 5. С. 104–114.
3. Курченко О. О. Диференціальне числення функції однієї змінної : Підручник. Київ, 2014. 238 с. URL: <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/merged.pdf> (дата звернення: 19.02.2023).
4. Abian A. Generalizing the Generalized Mean-Value Theorem. *The American Mathematical Monthly*. 1981. Vol. 88, No. 7. P. 528–530. DOI: <https://doi.org/10.2307/2321759>.
5. Bailey D. F., Fix G. J. A generalization of the mean value theorem. *Applied Mathematics Letters*. 1988. Vol. 1, Issue 4. P. 327–330. DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(88\)90143-7](https://doi.org/10.1016/0893-9659(88)90143-7).
6. Matkowski J. Generalizations of Lagrange and Cauchy Mean-Value theorems. *Demonstratio Mathematica*. 2010. Vol. 43, No. 4. P. 765–774. DOI: <https://doi.org/10.1515/dema-2010-0405>.
7. Martínez F., Martínez I., Kaabar M. K. A. and Paredes S. Generalized Conformable Mean Value Theorems with Applications to Multivariable Calculus. *Journal of Mathematics*. 2021. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/5528537>.
8. Cheng J. On Multivariate Fractional Taylor's and Cauchy' Mean Value Theorem. *Journal of Mathematical Study*. 2019. Vol. 52, No. 1. P. 38–52. DOI: <https://doi.org/10.4208/jms.v52n1.19.04>.
9. Козаченко Ю. В., Курченко О. О., Синявська О. О. Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування. Монографія. Ужгород : Шарк, 2018. 228 с.
10. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : Підручник. У 2 ч. Київ : Вища шк., 1993. 375 с.

**Kurchenko O. O., Syniavska O. O.** Four theorems for differentiable functions of several variables.

This article presents some generalizations of the Roll, Lagrange, and Cauchy theorems of the differential calculus of functions of one variable to the case of differential functions of several variables. Examples of using the obtained results for proving inequalities and calculating multivariable limits are given.

**Keywords:** Rolle's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem for differentiable functions, differentiable functions of several variables, multivariable limits.



## References

1. Dorogovtsev, A. Ya. (1993). *Mathematically analysis: Pidruchnyk u dvokh chastynakh. Chastyna 1* [Mathematical analysis :Textbook in two parts. Part 1]. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].
2. Kurchenko, O. O., & Rabets, K. V. (2009). Dva uzahalnennia teoremy Koshi dlia dyferentsiiovanykh funktsii u kursi matematychnoho analizu [Two generalizations of Cauchy's theorem for differentiable functions in the course of mathematical analysis]. *Scientific journal of the National Pedagogical University named after M. P. Drahomanov. Series 3. Physics and mathematics in higher and secondary school*, 5, 104–114. [in Ukrainian].
3. Kurchenko, O. O. (2014). *Dyferentsialne chyslennia funktsii odnoi zminnoi: pidruchnyk* [Differential calculus of a function of one variable: a textbook]. Kyiv. Retrieved from <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/merged.pdf> [in Ukrainian].
4. Abian, A. (1981). Generalizing the Generalized Mean-Value Theorem. *American Mathematical Monthly*, 88(7), 528–530. <https://doi.org/10.2307/2321759>
5. Bailey, D. F., & Fix, G. J. (1988). A generalization of the mean value theorem. *Applied Mathematics Letters*, 1(4), 327–330. [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(88\)90143-7](https://doi.org/10.1016/0893-9659(88)90143-7)
6. Matkowski, J. (2010). Generalizations of Lagrange and Cauchy Mean-Value theorems. *Demonstratio Mathematica*, 43(4), 765–774. <https://doi.org/10.1515/dema-2010-0405>
7. Martínez, F., Martínez, I. J. M., Kaabar, M. K. A., & Paredes, S. (2021). Generalized Conformable Mean Value Theorems with Applications to Multivariable Calculus. *Journal of Mathematics*, 1–7. <https://doi.org/10.1155/2021/5528537>
8. Cheng, J. (2019). On Multivariate Fractional Taylor's and Cauchy' Mean Value Theorem. *Journal of Mathematical Study*, 52(1), 38–52. <https://doi.org/10.4208/jms.v52n1.19.04>
9. Kozachenko, Yu. V., Kurchenko, O. O., & Syniavska, O. O. (2018). *Teoremy Levi-Bakstera dlia vypadkovykh poliv ta yikh zastosuvannia. Monohrafiia*. [Levy-Baxter theorems for random fields and their applications. Monograph]. Uzhhorod: Shark [in Ukrainian].
10. Liashko, I. I., Yemelianov, V. F., & Boiarchuk, O. K. (1993). *Matematychnyi analiz: Pidruchnyk* [Mathematical analysis: A Textbook]. Part 2. Kyiv: Vyscha shk. [in Ukrainian].

Одержано 05.03.2023

УДК 539.3:534.1

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).66-74](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).66-74)

**O. A. Nazarenko<sup>1</sup>, A. O. Stekhun<sup>2</sup>, A. T. Yarovyi<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Associate professor of the department of higher mathematics,  
Candidate of physical and mathematical science, Assistant Professor  
[gelo.fabric@gmail.com](mailto:gelo.fabric@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0405-6522>

<sup>2</sup> Odesa I. I. Mechnikov National University,  
Associate Professor of the Department of Optimal Management and Economic Cybernetics,  
Candidate of physical and mathematical science  
[angela.stehun@gmail.com](mailto:angela.stehun@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3140-2689>

<sup>3</sup> Odesa I. I. Mechnikov National University,  
Associate Professor of the Department of Optimal Management and Economic Cybernetics,  
Candidate of physical and mathematical science, Assistant Professor  
[jarovyiat@gmail.com](mailto:jarovyiat@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7111-3609>

## THE DIFFRACTION OF ELASTIC WAVES BY SPHERICAL DEFECTS

Based on the method of discontinuous solutions [2–4] in the case of stationary elastic waves, a method is proposed for reducing a number of diffraction problems to a system of integro-differential equations. The defect can be either a spherical crack or a thin rigid spherical inclusion. Detailing of the method is considered for the second case.

Work goals. Generalization of the method of discontinuous solutions [2–4] to the case of spherical defects (cracks or thin rigid spherical inclusions). A method for constructing a discontinuous solution of the wave equation for a spherical coordinate system is proposed.

**Keywords:** wave equation, elasticity theory, defect, inclusion, crack, discontinuous solution, jump, spherical coordinates, stress, displacement.

**1. Introduction.** The study of the interaction of undeformed shells with the surrounding elastic medium is of practical importance, due to the need to increase the strength of ships from underwater and air explosions, improve the methods of underwater acoustics, and ensure the seismic resistance of hydraulic structures and their elements. Thus, the development of mathematical methods for solving problems on the interaction of non-stationary (stationary) waves with various objects, including shell type, is relevant.

Among the analytical methods, the following can be distinguished: the method of integral equations (the potential method), the method of separation of variables and its various modifications (the Fourier method and its generalizations in vector and scalar forms, as well as reduction to infinite systems of algebraic equations), the method of the theory of functions of a complex variable. These methods have proven themselves well in relation to canonical domains (the equations of their boundary surfaces are reduced to standard canonical forms). The following authors were closely involved in this topic: Guz' A. N., Nemish Yu. N., Kubenko Yu. N., Podstri-gach Ya. S., Grilitsky D. V., Poddubnyak A. P. and etc.

At present, various numerical methods of finite differences, finite elements, etc. are widely used to solve spatial problems. The proposed work is devoted to solving

a spatial problem of elasticity theory for a spherical segment by the method of discontinuous solutions [2–4].

## 2. Main results.

### *Part 1. Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect*

Under the defect (from the point of view of mechanics) we mean [4] a part of the surface, at the intersection of which the stresses and displacements of the first kind suffer discontinuities. As a classical defect, we can consider some mathematical cut along the specified part of the surface (crack). A certain rigid inclusion in the form of a shell (cavity), the middle surface of which coincides with the same part of the surface, can also be attributed to such defects. Consider, as one of the special cases, when a part of a spherical surface serves as a defect.

Let's set its geometric parameters in the form:  $r = R$ ,  $0 \leq \theta \leq \omega$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ , where  $r, \theta, \varphi$  are the parameters of the spherical coordinate system. It is widely known that the solution of the equations of motion of an elastic isotropic medium can be expressed in terms of wave functions [1]. Therefore, before proceeding with the construction of a discontinuous solution for the equations of motion, one should construct a solution for the wave equation

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad |\varphi| < \pi, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

where  $\Delta$  is the Laplace operator expressed in spherical coordinates.

Under the discontinuous solution of equation (1), which is given in the entire space for a spherical defect

$$r = R, \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (2)$$

one should understand such a solution to equation (1), which must satisfy it everywhere, excluding only the points of the defect itself (2) ( $R$  is the radius of a spherical defect). At these points, the function and its normal (to the surface of the considered defect) derivative suffer discontinuities of the first kind and their jumps are given, for which we introduce special notation

$$\psi(R-0, \theta, \varphi, t) - \psi(R+0, \theta, \varphi, t) = \langle \psi \rangle,$$

$$\psi'(R-0, \theta, \varphi, t) - \psi'(R+0, \theta, \varphi, t) = \langle \psi' \rangle.$$

In addition, here and everywhere below in the text we will denote the derivative with respect to the variable  $r$  by a prime, with respect to  $\theta$  by a dot, and with respect to the variable  $\varphi$  by a comma. To construct such a solution, we use the same scheme as in the materials [4].

By successively applying to equation (1) the integral transformations of Laplace (with respect to the variable  $t$ ), Fourier (with respect to the variable  $\varphi$ )

$$\psi_p = \int_0^\infty \frac{\psi(r, \theta, \varphi, t)}{e^{pt}} dt, \quad \psi_{pn} = \int_{-\pi}^\pi \frac{\psi_p(r, \theta, \varphi)}{e^{in\varphi}} d\varphi, \quad (3)$$

and Legendre (with respect to the variable  $\theta$ ),

$$\psi_{pnk}(r) = \int_0^\pi \sin \theta P_k^{|n|}(\cos \theta) d\theta, \quad (4)$$

( $P_k^n(\cos \theta)$  is the adjointed Legendre polynomial), we reduce equation (1) to the following one-dimensional form

$$\frac{1}{r^2} \left[ (r^2 \psi'_{pnk}(r))' - k(k+1) \psi_{pnk}(r) \right] - \frac{p^2}{c^2} \psi_{pnk}(r) = 0, \quad (5)$$

where  $0 < r < \infty$ .

At this stage, it is necessary to construct a discontinuous solution of this equation with predetermined jumps

$$\begin{aligned} \langle \psi_{pnk} \rangle &= \psi_{pnk}(R-0) - \psi_{pnk}(R+0), \\ \langle \psi'_{pnk} \rangle &= \psi'_{pnk}(R-0) - \psi'_{pnk}(R+0). \end{aligned} \quad (6)$$

The values of these jumps will be determined based on the boundary conditions of the problem.

If in (5) we make a change of variables of the form  $\chi_{pnk}(r) = \sqrt{r} \psi_{pnk}(r)$ , then this equation is transformed into the Bessel equation. Let us apply the Hankel transformation to the resulting equation

$$\chi_{pnk}(r) = \int_0^\infty r J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \chi_{pnk}(r) dr,$$

to get rid of the variable  $r$  according to the generalized scheme [2,3] (in this formula,  $J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r)$  is the cylindrical Bessel function).

Using the obtained results, we find the dimensionless Hankel transform from the equation (5), expressing them in terms of jumps (6). Further, applying to this expression the inversion formula for the Hankel transform, we find the necessary discontinuous solution of equation (5) with jumps (6)

$$\begin{aligned} \psi_{pnk}(r) &= R^2 \left[ \langle \psi'_{pnk} \rangle D_{k,p}(r, R) - \langle \psi_{pnk} \rangle \frac{\partial}{\partial R} D_{k,p}(r, R) \right], \\ D_{k,p}(r, R) &= \frac{1}{\sqrt{rR}} \begin{cases} I_\nu\left(\frac{Rp}{c}\right) K_\nu\left(\frac{rp}{c}\right), & r > R, \\ I_\nu\left(\frac{rp}{c}\right) K_\nu\left(\frac{Rp}{c}\right), & r < R, \end{cases} \quad \nu = k + \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

( $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  are respectively modified Bessel and Macdonald functions). Further, to obtain a discontinuous solution of the original wave equation, one should use the inversion formulas for the Legendre transforms [2,3]

$$\psi_{pn}(r, \theta) = \sum_{k=|n|}^{\infty} \psi_{pnk}(r) \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos \theta), \quad \sigma_{kn} = \frac{(k-|n|)!(2k+1)}{2(k+|n|)!}, \quad (8)$$

as well as for the Fourier and Laplace transforms.

Thus, applying transformation (8) to formula (7), we obtain the following equation

$$\psi_{pn}(r, \theta) = R^2 \left[ \int_0^\omega T_{n,p}(\theta, \tau) \sin \tau d\tau - \int_0^\omega \tilde{T}_{n,p}(\theta, \tau) \sin \tau d\tau \right], \quad (9)$$

$$T_{n,p}(\theta, \tau) = \langle \psi'_{pn} \rangle M_{n,p}(\theta, \tau, r, R), \quad \tilde{T}_{n,p}(\theta, \tau) = \langle \psi_{pn} \rangle \frac{\partial}{\partial R} M_{n,p}(\theta, \tau, r, R),$$

$$M_{n,p}(\theta, \tau, r, R) = \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos \theta) P_k^{|n|}(\cos \tau) D_{k,p}(r, R).$$

In the event that a steady process of medium oscillations is considered (occurring according to a harmonic law), then the potential from the wave equation (1) can be written in the following form

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = e^{-i\omega_0 t} \tilde{\psi}(r, \theta, \varphi). \quad (10)$$

This makes it possible to exclude the use of the direct and inverse Laplace transforms with respect to the variable  $t$ , which greatly simplifies the calculations. Then, if in equation (5), instead of the parameter  $p$ , we substitute the value  $p = -i\omega_0$ , then we obtain a new equation, which is the solution for the function  $\tilde{\psi}(r, \theta, \varphi)$ .

In contrast to equation (7), the discontinuous solution in this case will take a slightly different form

$$\tilde{\psi}_{pnk}(r) = R^2 \left[ \langle \psi'_{pnk} \rangle D_{k,\mu}(r, R) - \langle \psi_{pnk} \rangle \frac{\partial}{\partial R} D_{k,\mu}(r, R) \right], \quad (11)$$

$$D_{k,\mu}(r, R) = \frac{\pi i}{2\sqrt{rR}} \begin{cases} J_\nu(R\mu) H_\nu^{(1)}(r\mu), & r > R, \quad \mu = \frac{\omega_0}{c}, \\ J_\nu(r\mu) H_\nu^{(1)}(R\mu), & r < R, \quad \nu = k + \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

If in (11) we invert the Legendre transforms, then we obtain an equation of the following form

$$\tilde{\psi}_n(r, \theta) = R^2 \left[ \int_0^\omega P_{n,\mu}(\theta, \tau) \sin \tau d\tau - \int_0^\omega \tilde{P}_{n,\mu}(\theta, \tau) \sin \tau d\tau \right], \quad (12)$$

$$P_{n,\mu}(\theta, \tau) = \langle \tilde{\psi}'_{pn} \rangle M_{n,\mu}(\theta, \tau; r, R), \quad \tilde{P}_{n,\mu}(\theta, \tau) = \langle \tilde{\psi}_{pn} \rangle \frac{\partial}{\partial R} M_{n,\mu}(\theta, \tau; r, R),$$

$$M_{n,\mu}(\theta, \tau; r, R) = \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos \theta) P_k^{|n|}(\cos \tau) D_{k,\mu}(r, R).$$

When substituting the value  $p = -i\omega_0$  in (7), it is necessary to choose the first Hankel function  $H_\nu^{(1)}(z)$  in the kernel  $D_{k,\mu}(r, R)$ . It is she who provides the condition of radiation at infinity. The second function  $J_\nu(z)$  in this kernel is the cylindrical Bessel function. When using discontinuous solutions of the form (9) and (12) in specific problems of the theory of elasticity, it is necessary to use the integral representation for the following function

$$W_k(z)|_{z=-i\xi} = I_\nu(z) K_\nu(z)|_{z=-i\xi} = \frac{\pi i}{2} H_\nu^{(1)}(\xi) J_\nu(\xi) = A_k(\xi), \quad \nu = k + \frac{1}{2}. \quad (13)$$

To obtain relation (13), it suffices to use formula, which allows us to expand the functions  $\Omega_0(\theta) = I_0(\theta) - L_0(\theta)$  ( $L_0(\theta)$  — the second Struve function [2]) into a series in the orthogonal system of functions  $\cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right]$  and therefore

$$W_k(z) = \frac{(-1)^k}{2} \int_0^\pi \Omega_0\left(2z \cos \frac{\theta}{2}\right) \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right] d\theta.$$

Integrating by parts based on (13), we establish an important relationship:

$$A_k(\xi) = \frac{1 - \Delta_k(\xi)}{2k + 1}, \quad \Delta_k(\xi) = \int_0^\pi \frac{\sin\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\tau\right]}{(-1)^k} \frac{\partial}{\partial \tau} \Upsilon_0\left(2\xi \cos \frac{\tau}{2}\right) d\tau, \quad (14)$$

where  $\Upsilon_0(z) = J_\nu(z) - iH_0(z)$  is the first Struve function.

*Part 2. Construction of a discontinuous solution of the equations of motion of an elastic medium for a spherical defects*

In order to construct a discontinuous solution to the equations of motion of an elastic medium, we use the well-known solution to the equations of motion of an isotropic medium, which, following the notation of the authors, is expressed in terms of three wave functions  $\Phi(r, \theta, \varphi, t)$ ,  $\Psi_j(r, \theta, \varphi, t)$  ( $j = 1, 2$ ). It should be noted that the function  $\Phi(r, \theta, \varphi, t)$  determines the expansion wave and must satisfy formula (1), in which one should put  $c = c_1$ , where  $c_1$  is the speed of the expansion wave [1]. In turn, the functions  $\Psi_j(r, \theta, \varphi, t)$  ( $j = 1, 2$ ) describe shear waves and in the same equation one should put  $c = c_2$ , where  $c_2$  is the speed of shear wave propagation. If we omit the time parameter  $t$ , that is, we restrict ourselves to a simpler case when a steady process of oscillations according to a harmonic law with a certain natural oscillation frequency  $\omega_0$  is considered, then, according to [1], the wave potentials can be represented as  $\{\Phi, \Psi_j\} = e^{-i\omega_0 t} \{\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}_j\}$ , respectively.

Using the materials from [2–4], we pass everywhere to the Fourier transforms

$$\{\Phi_n, \Psi_{j,n}, u_{r,n}, u_{\theta,n}, u_{\varphi,n}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega_0 t} \{\Phi, \Psi, u_r, u_\theta, u_\varphi\} d\varphi, \quad (15)$$

( $j = 1, 2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

If in formula (15) we formally omit the factor depending on the variable  $t$  ( $e^{-i\omega_0 t}$ ), as well as the designation of the wave above the symbols, the solutions of the above equations can be represented in the following form

$$\begin{aligned} u_n \equiv u_{r,n} &= \Phi'_n - \frac{[\sin \theta \Psi_{2,n}]^\bullet}{r \sin \theta} - \frac{n^2 \Psi_{2,n}}{r \sin^2 \theta}, \\ v_n \equiv u_{\theta,n} &= \frac{\Psi_n^\bullet}{r} + \frac{(r \Psi_{2,n})'}{r} + \frac{in \Psi_{1,n}}{\sin \theta}, \\ w_n \equiv u_{\varphi,n} &= \frac{in \Phi_n}{r \sin \theta} + \frac{in (r \Psi_{2,n})'}{r \sin \theta} - \Psi_{1,n}^\bullet, \end{aligned} \quad (16)$$

here and everywhere below, as in [2], we denote the derivative with respect to the variable  $r$  by a prime, with respect to  $\theta$  by a dot, and with respect to the variable

$\varphi$  by a comma. It should be noted that the functions  $\Phi_n$  and  $\Psi_{j,n}$  ( $j = 1, 2$ ), must satisfy the Helmholtz equation. For clarity, combining them into a single equation, we write

$$\frac{1}{r^2} \left\{ (r^2 [\Phi'_n, \Psi'_{j,n}])' - \nabla_n [\Phi_n, \Psi_{j,n}] \right\} + [a^2 \Phi_n, b^2 \Psi_{j,n}] = 0, \quad (j = 1, 2), \quad (17)$$

$$\nabla_n f(r, \theta) \equiv \frac{n^2 f(r, \theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{[\sin \theta f^\bullet(r, \theta)]^\bullet}{\sin \theta}, \quad (18)$$

where  $a = \frac{\omega_0}{c_1}$ ,  $b = \frac{\omega_0}{c_2}$ .

Applying Hooke's law and the Cauchy relations to the displacement transformants (16), we find the stress transformants necessary for further calculations

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{r,n}}{2\mu} &= \Phi''_n - \lambda \frac{a^2 \Phi_n}{2\mu} + b^2 (\Psi_{2,n} + r \Psi'_{2,n}) + 3\Psi''_{2,n} + r \Psi'''_{2,n}, \\ \frac{\tau_{\theta,n}}{2\mu} &= \frac{\Phi'_n}{r} - \frac{\Phi_n^\bullet}{r^2} - \frac{inr}{2 \sin \theta} \left( \frac{\Psi_{1,n}}{r} \right)' + \Psi''_{2,n} + \frac{\Psi'_{2,n}}{r} - \frac{\Psi_{2,n}^\bullet}{r^2} + \frac{b^2 \Psi_{2,n}^\bullet}{2}, \\ -\frac{\tau_{\varphi,n}}{2\mu} &= \frac{in (\Phi'_n - \frac{\Phi_n}{r})}{r \sin \theta} + \frac{r}{2} \left( \frac{\Psi_{1,n}^\bullet}{r} \right)' + \frac{in \left( \Psi''_{2,n} + \frac{\Psi'_{2,n}}{r} - \left( \frac{1}{r^2} - \frac{b^2}{2} \right) \Psi_{2,n} \right)}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (19)$$

where  $\mu$ ,  $\lambda$  are Lamé parameters,  $\tau_{\theta,n}$ ,  $\tau_{\varphi,n}$  are Fourier transforms for tangential stresses  $\tau_{r,\theta}$  and  $\tau_{r,\varphi}$  respectively.

A discontinuous solution of the equations of motion of an elastic medium for spherical defects (formula (2)) should be understood as such a solution of the above equations, which must satisfy them everywhere, except for the points of the defect. At these points, all components of the displacement and stress field suffer discontinuities of the first kind with given jumps. The values of these jumps are determined from the boundary conditions. Let us introduce the following notation for these jumps in terms of the Fourier transforms

$$\langle u_n \rangle = u_{rn}(R-0, \theta) - u_{rn}(R+0, \theta), \quad \langle v_n \rangle, \quad \langle w_n \rangle, \quad \langle \sigma_{r,n} \rangle, \quad \langle \tau_{\theta,n} \rangle, \quad \langle \tau_{\varphi,n} \rangle, \quad (20)$$

where  $R$  is the radius of the spherical defect.

Further construction of a discontinuous solution will continue according to the scheme of works [4]. At the first stage of calculations, instead of the values  $v_n$ ,  $w_n$ ,  $\tau_{\theta,n}$ ,  $\tau_{\varphi,n}$ , for convenience, we should introduce their combinations

$$\begin{aligned} \sin \theta \zeta_n(r, \theta) &= [\sin \theta v_n(r, \theta)]^\bullet - in w_n(r, \theta), \\ \sin \theta \xi_n(r, \theta) &= [\sin \theta w_n(r, \theta)]^\bullet + in v_n(r, \theta), \\ \sin \theta \vartheta_n(r, \theta) &= [\sin \theta \tau_{\theta,n}(r, \theta)]^\bullet + in \tau_{\varphi,n}(r, \theta), \\ \sin \theta \varrho_n(r, \theta) &= [\sin \theta \tau_{\varphi,n}(r, \theta)]^\bullet + in \tau_{\theta,n}(r, \theta). \end{aligned} \quad (21)$$

Based on the notation introduced in (21), from relations (16), taking into account (18), we obtain fairly compact expressions for the following elements

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= \Phi'_n(r, \theta) + \frac{\nabla_n \Psi_{2,n}(r, \theta)}{r}, \\ \xi_n(r, \theta) &= \nabla_n \Psi_{1,n}(r, \theta), \\ r \zeta_n(r, \theta) &= -\nabla_n [\Phi_n(r, \theta) + (r \Psi_{2,n}(r, \theta))']. \end{aligned} \quad (22)$$

At this stage, according to [4], it is necessary to express all unknown jumps of the functions  $\langle \Phi_n \rangle$ ,  $\langle \Phi'_n \rangle$ ,  $\langle \Psi_{j,n} \rangle$ ,  $\langle \Psi'_{j,n} \rangle$  ( $j = 1, 2$ ) through the given (based on the boundary conditions of the problem posed) (6) or jumps of the introduced combinations of functions (21). Passing in formulas (16) to jumps and carrying out the necessary transformations in order to obtain jumps of functions (21), we obtain the following, very simple expressions for them

$$\begin{aligned} \langle u_n \rangle &= \langle \Phi'_n \rangle + \frac{\nabla_n \langle \Psi_{2,n} \rangle}{R}, & \langle \xi_n \rangle &= \nabla_n \langle \Psi_{1,n} \rangle, \\ R \langle \zeta_n \rangle &= -\nabla_n [\langle \Phi_n \rangle + \langle \Psi_{2,n} \rangle + R \langle \Psi'_{2,n} \rangle]. \end{aligned} \quad (23)$$

In order to obtain the same ratios for stresses, it is necessary in formulas (5) to exclude the terms that contain derivatives with respect to the variable  $r$  above the first order. To do this, use the group of equations (3), which will allow us to write the following relations

$$\begin{aligned} \Phi_n'' &= \frac{\nabla_n \Phi_n}{r^2} - \frac{2\Phi_n'}{r} - a^2 \Phi_n, \\ \Psi_{j,n}'' &= \frac{\nabla_n \Psi_{j,n}}{r^2} - \frac{2\Psi_{j,n}'}{r} - b^2 \Psi_{j,n} \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Eliminating the indicated derivatives from (19) with the help of these formulas and passing in them to stress jumps (6), including jumps  $\vartheta_n$  and  $\varrho_n$ , we obtain the following relations

$$\begin{aligned} \frac{\langle \sigma_{r,n} \rangle}{2\mu} R^2 &= \nabla_n [\langle \Phi_n \rangle - \langle \Psi_{2,n} \rangle] - \frac{(bR)^2}{2} \langle \Phi_n \rangle - 2R \langle \Phi'_n \rangle + 2R \nabla_n \langle \Psi'_{2,n} \rangle, \\ \frac{R \langle \varrho_n \rangle}{\mu} &= \nabla_n [R \langle \Psi'_{1,n} \rangle - \langle \Psi_{1,n} \rangle], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{2R^2 \langle \vartheta_n \rangle}{\mu} = -\nabla_n \left\{ R \langle \Phi'_n \rangle - \langle \Phi_n \rangle + \nabla_n \langle \Psi_{2,n} \rangle - \langle \Psi_{2,n} \rangle \left[ \frac{b^2}{2} + 1 \right] - R \langle \Psi'_{2,n} \rangle \right\}.$$

At this stage, it is necessary to express all unknown jumps of wave functions and their normal derivatives through jumps of displacements and stresses, which can be determined from the boundary conditions and, in fact, are known. To do this, apply to all formulas (23) and (24) the Legendre integral transformation, according to formula (4). After that, as a result of fairly obvious transformations, we obtain the following expressions

$$\begin{aligned} k(k+1) \langle \Psi_{1,n,k} \rangle &= \langle \xi_{n,k} \rangle, \\ k(k+1) \langle \Psi'_{1,n,k} \rangle &= \frac{\langle \xi_{n,k} \rangle}{R} + \frac{\langle \varrho_{n,k} \rangle}{\mu}, \\ k(k+1) b^2 R \langle \Psi_{2,n,k} \rangle &= \frac{R \langle \vartheta_{n,k} \rangle}{\mu} + 2k(k+1) \langle u_{n,k} \rangle + 2 \langle \zeta_{n,k} \rangle, \\ -R b^2 \langle \Phi_{n,k} \rangle &= 4 \langle u_{n,k} \rangle + 2 \langle \zeta_{n,k} \rangle + \frac{R \langle \sigma_{r,n,k} \rangle}{\mu}, \\ (Rb)^2 \langle \Phi'_{n,k} \rangle &= [(Rb)^2 - 2k(k+1)] \langle u_{n,k} \rangle - \frac{R \langle \vartheta_{n,k} \rangle}{\mu} - 2 \langle \zeta_{n,k} \rangle, \\ k(k+1) (Rb)^2 \langle \Psi'_{2,n,k} \rangle &= 2 \langle u_{n,k} \rangle k(k+1) - \frac{R \langle \vartheta_{n,k} \rangle}{\mu} + \\ &+ \langle \zeta_{n,k} \rangle [2k(k+1) - 2 - (Rb)^2] + \frac{k(k+1) R \langle \sigma_{r,n,k} \rangle}{\mu}. \end{aligned} \quad (25)$$



According to formula (11), the Fourier-Legendre transforms of the wave functions will be expressed by the formulas

$$\Phi_{n,k}(r) = R^2 \left[ \langle \Phi'_{n,k} \rangle D_{k,\mu}(r, R) - \langle \Phi_{n,k} \rangle \frac{\partial}{\partial R} D_{k,\mu}(r, R) \right], \quad (26)$$

$$\Psi_{j,n,k}(r) = R^2 \left[ \langle \Psi'_{j,n,k} \rangle D_{k,\mu}(r, R) - \langle \Psi_{j,n,k} \rangle \frac{\partial}{\partial R} D_{k,\mu}(r, R) \right] \quad (j = 1, 2).$$

Substituting the jump values (11) into these formulas and then inverting the Legendre transformation, according to formula (8), we obtain the functions  $\Phi_n$  and  $\Psi_{j,n}$  ( $j = 1, 2$ ). Further, using the groups of formulas (16), (19) and the obtained wave potentials, we construct a discontinuous solution of the equations of motion for a spherical defect (2). Having a discontinuous solution, it is not difficult to reduce the problem of diffraction by such a defect to one-dimensional integral or integro-differential equations.

**3. Conclusions.** In the proposed work, a discontinuous solution of the wave equation is constructed in a spherical coordinate system. Based on the same method, a discontinuous solution of the equations of motion of an elastic medium for a spherical defect is constructed.

At the next stage, the problem of diffraction of an elastic torsion wave by a thin spherical inclusion should be reduced to a system of integro-differential equations.

Develop and prove the validity of using an approximate method for solving the corresponding integro-differential equations in the class of functions with non-integrable singularities.

Numerically implement the method, build graphs of the dependence of the reactive torque (the inclusion is fixedly fixed) on the frequency of oscillations and the dimensions of the inclusion. Also, build graphs for the amplitude of oscillations of the inclusion when it is mobile (not fixed).

## References

1. Guz', A. N., Kubenko, V. D., & Cherevko, M. A. (1978). *The Diffraction of Elastic Waves*. Kiev: Naukova Dumka [in Ukrainian].
2. Nazarenko, O. A. (2022). Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect. *Norwegian Journal of development of the International Science*, 87, 3–5 [in Norway].
3. Nazarenko, O. A., & Stekhun, A. O. (2019). Studying the influence of torsion wave on a hard spherical defect in an elastic homogeneous environment. *Scientific Bulletin of the Kherson National Technical University. Part 3*, 2(69), 83–88 [in Ukrainian].
4. Попов, Г. Я. (1992). Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect. *Advances in Mechanics*, 15(1-2), 71–110.

**Назаренко О. А., Стехун А. О., Яровий А. Т.** Дифракція пружних хвиль на сферичних дефектах.

На основі методу розривних рішень [2–4] у разі стаціонарних пружних хвиль запропоновано метод зведення ряду задач дифракції до системи інтегро-диференціальних рівнянь. Дефектом може бути як сферична тріщина, або тонке жорстке сферичне включення.

Деталізація методу розглядається для другого випадку. Узагальнення методу розривних розв'язків [2–4] на випадок сферичних дефектів (тріщин або тонких жорстких сферичних включень). Запропоновано метод побудови розривного розв'язку хвильового рівняння для сферичної системи координат.

**Ключові слова:** хвильове рівняння, теорія пружності, дефект, включення, тріщина, розривний розв'язок, стрибок, сферичні координати, напруження, переміщення.

**Список використаної літератури**

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Київ : Наукова думка, 1978. 307 с.
2. Nazarenko O. A. Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect. *Norwegian Journal of development of the International Science*. 2022. No. 87. P. 3–5.
3. Назаренко О. А., Стехун А. О. Вивчення впливу торсіонної хвилі на твердий сферичний дефект у пружному однорідному середовищі. *Вісник Херсонського національного технічного університету. Частина 3*. 2019. Вип. 2, № 69. С. 83–88.
4. Popov G. Ya. Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect. *Advances in Mechanics*. 1992. Vol. 15, No. 1-2. P. 71–110.

Одержано 29.04.2023

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).75-80](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).75-80)**Т. О. Петрова<sup>1</sup>, І. Л. Петрова<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Київський національний університет ім. Т. Шевченка,

доцент кафедри математичного аналізу,

кандидат фізико-математичних наук

tamarapetrova2703@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5293-9701><sup>2</sup> кандидат фізико-математичних наук

iryapetrova1411@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3913-7237>

## УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕГАТИВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОВОВУ ПОХІДНУ В ПРОСТОРИ СОБОЛЕВА З ІНДЕКСОМ $r \in (2, 3)$

Питання монотонної апроксимації це питання наближення монотонних функцій з простору Соболева монотонними алгебраїчними поліномами. Досліджується питання наближення монотонних функцій із простору Соболева  $\mathbb{W}^r[0, 1]$  з дійсним індексом  $r \in (2, 3)$  алгебраїчними поліномами. Побудовано контрприклад, який показує, що для  $r \in (2, 3)$  оцінка

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left( \frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, \quad n > r$$

є хибною. Результат отриманий в роботі є узагальненням аналогічних результатів для простору Соболева з натуральним індексом  $r > 2$ .

**Ключові слова:** наближення функції, простір Соболева, алгебраїчний поліном, монотонна функція.

**1. Вступ.** Нехай  $W^r, r \in \mathbb{N}$  клас функцій  $f \in C[0, 1]$ , таких, що мають абсолютно неперервну  $(r-1)$  похідну і  $|f^{(r)}(x)| \leq 1$  майже скрізь на  $[0, 1]$ . Теляковський [1] для  $r = 1$  та Гопенгауз для  $r \in \mathbb{N}$  [4] посилили пряму теорему Нікольського – Тіммана довівши, що кожну функцію  $f \in W^r$  можна наблизити алгебраїчним многочленом  $p_n$  степеня  $< n$  так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left( \frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, \quad n > r, \quad (1)$$

де  $c$  — абсолютна стала.

DeVore та Yu [2] довели, що при  $r = 1, 2$  оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція  $f \in W^r$ , то існує монотонний многочлен  $p_n$ , такий, що має місце (1). В роботі [5] доведено, що для натурального  $r > 2, r \in \mathbb{N}$  оцінка (1), взагалі кажучи, невірна для монотонного наближення. Для опуклого наближення при  $r > 2, r \in \mathbb{N}$  доведено [7], що оцінка (1) також є невірною. Для  $r \in \mathbb{R}$  введемо клас функцій  $W^r[0, 1]$ , таких, що  $D_{0+}^{r-1}f$  абсолютно неперервна і  $|D_{0+}^r f| \leq 1$  майже скрізь на  $[0, 1]$  (тут  $D_{0+}^{r-1}f$  — лівостороння дробова похідна [3]). Будемо

позначати через  $\Pi_n$  — множину всіх алгебраїчних поліномів степеня  $\leq n$  і через  $\Delta^1$  множину монотонних на  $[0, 1]$  функцій. Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат роботи [6] на класи  $W^r[0, 1] \cap \Delta^1$  з  $r \in (2, 3)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

**2. Основні означення та допоміжні твердження.** Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в роботі.

**Означення 1.** Нехай  $\varphi(x) \in L_1(a, b)$ . Інтеграли

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (2)$$

$$(I_{b-}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad (3)$$

де  $\alpha > 0$  називаються інтегралами дробового порядку  $\alpha$ . Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім. Що стосується дробового диференціювання, то його слід вводити, як операцію обернену дробовому інтегруванню [6].

**Означення 2.** Для функції  $f(x)$ , що задана на відрізку  $[a, b]$  кожен із виразів

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (4)$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (5)$$

називається дробовою похідною порядку  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків  $\alpha \geq 1$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

де  $[\alpha]$  — ціла частина числа  $\alpha$  і  $\{\alpha\}$  — дробова частина числа  $\alpha$ . Якщо  $\alpha$  — ціле число, то під дробовою похідною порядку  $\alpha$  будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad D_{b-}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Якщо ж  $\alpha$  — не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n = [\alpha] + 1, \quad (7)$$

$$D_{b-}^\alpha f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n = [\alpha] + 1. \quad (8)$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  [6].

**Теорема 1.** Нехай  $\alpha > 0$  та функція  $f(x)$  має абсолютно неперервну похідну порядку  $n$ ,  $n = [\alpha] + 1$ . Тоді  $D_{a+}^{\alpha} f$  існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

### 3. Основний результат.

**Теорема 2.** Нехай  $r \in (2, 3)$ . Тоді для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , для будь-якої додатної на  $(0, 1)$  функції  $\psi$ , такої, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = 0$  існує така функція  $F = F_{r,n} \in W^r[0, 1] \cap \Delta^1$ , що для будь-якого полінома  $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$  справедлива одна з таких властивостей:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^2(x)\psi(x)} = +\infty, \quad (9)$$

або

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^2(x)\psi(x)} = +\infty, \quad (10)$$

де  $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ .

**Доведення.** Нехай  $r \in (2, 3)$  і  $m = [r] + 1 = 3$ .

Розглянемо функцію:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(b-x)^3}{3!} + b^3(x+7) - b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}, & x \in [0, b], \\ b^3(x+7) - b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}, & x \in (b, 1], \end{cases}$$

де  $b = \frac{1}{468n^2}$ .

Тоді

$$f'(x) := \begin{cases} -\frac{(b-x)^2}{2} + b^3 + b^2(1+x)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x \in [0, b], \\ b^3 + b^2(1+x)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x \in (b, 1], \end{cases}$$

$$f''(x) := \begin{cases} b-x - b(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2} + \frac{b(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x \in [0, b], \\ -b(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2} + \frac{b(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x \in (b, 1], \end{cases}$$

$$f'''(x) := \begin{cases} -1 + (b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x \in [0, b], \\ (b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x \in (b, 1]. \end{cases}$$

З явного вигляду функції  $f(x)$  та її похідних, можна отримати нерівності:

$$f(0) = \frac{17}{3}b^3 > 0, \quad f(1) = 8b^3 - b^3 \cdot 2^{-\frac{1}{b}} < 8b^3 < \frac{45}{4}b^3,$$

$$\begin{aligned} f(b) &= b^3(b+7) - b^3(1+b)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}} \sim b^4 + 7b^3 - \frac{b^3}{e} + \frac{b^3}{4e} \sim \\ &\sim 7b^3 - \frac{3b^3}{4e} = \frac{(28e-3)b^3}{4e}, \end{aligned}$$

$$f'(0) = -\frac{b^2}{2} + b^3 + b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + b^3 > 0, \quad f'(1) = b^3 + b^2 \cdot 2^{-\frac{1}{b}-1} \sim b^3 > 0,$$

$$f'(b) = b^3 + b^2(1+b)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}-1} \sim b^3 + \frac{b^2}{e} - \frac{b^2}{4e} = b^3 + \frac{3b^2}{4e} > 0,$$

$$f''(0) = b - b(b+1) + \frac{b(1-b)}{4} = b - b^2 - b + \frac{b}{4} - \frac{b^2}{4} = \frac{b}{4} - \frac{5b^2}{4} \sim \frac{b}{4} > 0,$$

$$\forall x \in [0, 1]: f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]: f(x) \geq 0,$$

$$f''(1) = -b(b+1)2^{-\frac{1}{b}-2} < 0,$$

$$f''(b) = -b(b+1)e^{-1} + \frac{b(1-b)}{4}e^{-1} = -\frac{b}{e}(b+1 - \frac{1-b}{4}) = -\frac{b}{e} \cdot \frac{3+5b}{4} < 0,$$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= -1 + (b+1)(2b+1) - \frac{(1-b)(1-2b)}{4} = 3b + 2b^2 - \frac{1}{4} + \frac{3b}{4} - \frac{b^2}{4} = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{15b}{4} + \frac{7b^2}{4} < 0, \end{aligned}$$

$$f'''(1) = (b+1)(2b+1)2^{-\frac{1}{b}-3} > 0,$$

$$\begin{aligned} f'''(b+) &= (b+1)(2b+1)(1+b)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}-3} \sim \\ &\sim (b+1)(2b+1)e^{-1} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1} > 0, \end{aligned}$$

$$f'''(b-) = -1 + (b+1)(2b+1) - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1} < 0.$$

Очевидно, що  $\forall x \in [0, b): f'''(x) < 0$  і  $\forall x \in (b, 1]: f'''(x) > 0$ . З нерівностей наведених вище бачимо, що і функція  $f(x)$  зростає.

Далі розглянемо функцію  $F(x) = x^3 f(x)$ . Доведемо, що  $F \in W^r[0, 1] \cap \Delta^1$ . Спочатку покажемо, що  $F \in \Delta^1$ .  $F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \geq 0$  з доведеного вище. Тоді  $F \in \Delta^1$ .

Тепер доведемо, що  $F \in W^r[0, 1]$ . За Теоремою 2.3 в роботі [3] за формулами (7) або (8) маємо:

$$\begin{aligned} D_{0+}^r F(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt, \end{aligned}$$

майже скрізь на  $[0, 1]$ .

Так як  $F^{(k)}(0) = 0$  при  $k = 0, 1, 2$ , то  $D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt$  майже скрізь на  $[0, 1]$ . Очевидно, що  $\exists c > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  така, що  $\forall x \in [0, 1]: |F^{(3)}(x)| \leq c$ . Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)| \leq \frac{c}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-2}} = \frac{c}{\Gamma(3-r)} \frac{x^{3-r}}{3-r} \leq \frac{c}{(3-r)\Gamma(3-r)}.$$

Таким чином,  $D_{0+}^r F(x)$  існує майже скрізь на  $[0, 1]$ . Очевидно, що

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(2-r)} \int_0^x \frac{F^{(2)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt,$$

буде абсолютно неперервною. Отже,  $F \in W^r[0, 1] \cap \Delta^1$ .

Нехай існує многочлен  $q_n$ , який є монотонним і для якого умова (9) не виконується. Тоді, для деякої сталої  $B$  маємо:

$$|F(x) - q_n(x)| \leq Bx\psi(x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Звідси випливає, що  $q_n(0) = F(0) = 0$  і  $q'_n(0) = F'(0) = 0$ . Так як  $q'_n(x) \geq 0, x \in [0, 1]$  і  $q_n(0) = 0$  зумовлює  $q_n(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ , тоді  $q_n(x)$  зростає на  $[0, 1]$  і  $q_n(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ .

Тоді многочлен  $q_n$  має вигляд  $q_n(x) = x^2 \cdot h_{n_1}(x)$ , де  $h_{n_1}$  многочлен степеня  $\leq n_1, n_1 \leq n - 2$ .

Розглянемо многочлен  $\tilde{q}_n(x) = q_n(x) + f(0)x + f'(0)$ .

$$\frac{b^2}{18} < \frac{b^2}{4} + b^3 = |f'(0)| = |\tilde{q}_n(0)| \leq 2n^2 \|\tilde{q}_n\|.$$

За побудовою многочлена  $\tilde{q}_n(x)$  бачимо, що він зростає. Тоді  $\|\tilde{q}_n\| = \tilde{q}_n(1)$ . Отже маємо

$$\frac{b^2}{18} < 2n^2 \tilde{q}_n(1) \Rightarrow \tilde{q}_n(1) > \frac{b^2}{36n^2}. \quad (11)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} f(1) &< \frac{45b^3}{4} = \frac{45b^2 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^2}{36n^2} \cdot 45n^2 364 = \\ &= \frac{b^2}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot \frac{1}{468n^2} n^2 36}{4} = \frac{b^2}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} < \frac{b^2}{36n^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

З нерівностей (11) і (12) маємо, що  $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$ , а саме  $f(1) < \tilde{q}_n(1)$ . Далі розглянемо  $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$ . Припустимо, що  $q_n(1) = f(1)$ . Тоді

$$\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0) \Rightarrow f(1) = \tilde{q}_n(1) - f'(0) - f(0),$$

припускаємо, що  $q_n(1) > 0$ , бо в протилежному випадку твердження про те, що  $f(1) \neq q_n(1)$ , очевидно. Маємо, що

$$8b^3 - b^3 \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^2}{4} - b^3 - \frac{17}{3}b^3 = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^2}{4} - \frac{20}{3}b^3 \Rightarrow \tilde{q}_n(1) = \frac{44}{3}b^3 - b^3 \cdot 2^{-\frac{1}{6}} + \frac{b^2}{4}.$$

Тоді очевидно, що  $\tilde{q}_n(1) \sim \cdot b^2$ , де  $c > \frac{1}{4}$ ,  $c = const$ . З останніх міркувань випливає, що

$$q_n(1) \sim c \cdot b^2 - \frac{17}{3}b^3 - \frac{b^2}{4} - b^3 = c_1 b^2 - \frac{14}{3}b^3 \sim c_1 b^2, \quad c_1 = const, \quad c_1 > 0.$$

Але з іншого боку,  $f(1) \sim 8b^3$ . Таким чином маємо суперечність з припущенням, що  $q_n(1) = f(1)$ . А отже  $q_n(1) \neq f(1) = F(1)$ . Теорема доведена.

**4. Висновки.** Побудовано контрприклад, який показує, що результат, доведений у роботі [6], можна узагальнити введенням додаткового множника  $\psi(x)$  у знаменнику в умовах (9), (10) теореми 3, для випадку  $W^r[0, 1] \cap \Delta^1$ ,  $r \in (2, 3)$ .

#### Список використаної літератури

1. Теляковський С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами. *Мат. сб.* 1966. Т. 79. С. 252–265.
2. DeVore R. A., Yu X. M. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constr. Approx.* 1985. No. 1. P. 323–331.
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Sci. Publ. : London, 1987.
4. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *J. Approx. Theory.* 1994. Vol. 77. P. 31–41.
5. Gonska H. H., Leviatan D., Shevchuk I. A., Wenz H. J. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constr. Approx.* 2000. No. 16. 603–629.
6. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну. *Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка.* 2003. № 9–10. С. 125–127.
7. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні. *Праці Інституту математики НАН України "Математика та її застосування". Теорія наближення функцій.* 2005. Т. 35. С. 107–112.

**Petrova T. O., Petrova I. L.** Generalization of negative results for interpolation monotone approximation of functions having a fractional derivative in sobolev space with index  $r \in (2, 3)$ .

The issue of monotone approximation is the issue of approximation of monotone functions from the Sobolev space by monotone algebraic polynomials. The issue of approximation of monotone functions from the Sobolev space  $W^r[0, 1]$  with real index  $r \in (2, 3)$  by algebraic polynomials is investigated. A counterexample is constructed, which shows that for  $r \in (2, 3)$  the estimate

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left( \frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, \quad n > r$$

is false. The result obtained in the paper is a generalization of similar results for the Sobolev space with natural index  $r > 2$ .

**Keywords:** approximation function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function.

#### References

1. Teliakovskiy, S. A. (1966). Two theorems on the approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sat.*, 79, 252–265 [in Russian].
2. DeVore, R. A., & Yu, X. M. (1985). Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constr. Approx.*, 1, 323–331.
3. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Sci. Publ.: London.
4. Gopengauz, A. I. (1994). Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *J. Approx. Theory*, 77, 31–41.
5. Gonska, H. H., Leviatan, D., Shevchuk, I. A., & Wenz, H. J. (2000). Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constr. Approx.* 16, 603–629.
6. Petrova, T. O. (2003). On pointwise interpolation estimates of the monotonic approximation of functions having a fractional derivative. *Visn. Kyiv. university Math. Mechanics*, 9–10, 125–127 [in Ukrainian].
7. Petrova, T. O. (2005). A counter example in the interpolation convex approximation. *Work of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine "Mathematics and its applications". The theory of function approximation*, 35, 107–112 [in Ukrainian].

Одержано 22.04.2023



УДК 519.4

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).81-91](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).81-91)**Н. М. Самарук**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
Аспірантка Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника  
samaruk.nat@khmnu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4611-8528>

## КВАЗИ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПРОСТОРУ

Нехай  $H$  — підгрупа просторової афінної групи  $\text{Aff}(3)$ , яка розглядається разом з природною дією на дійсному векторному просторі многочленів від трьох змінних. Сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  називається квазі-мономіальною відносно  $H$ , якщо групові оператори в двох різних базисах  $x^m y^n z^k$  та  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  мають *ідентичні* матриці. В даній статті ми отримали критерій квазі-мономіальності для випадку, коли група  $H$  є підгрупою масштабувань або підгрупою паралельних перенесень в термінах експоненціальної породжуючої функції для сім'ї многочленів  $B_{m,n,k}(x, y, z)$ .

**Ключові слова:** квазі-мономи, афінна група простору, група масштабування, група паралельних перенесень, експоненціальна породжуюча функція.

**1. Вступ.** Нехай  $H$  є підгрупою просторової афінної групи  $\text{Aff}(3)$ , яка розглядається разом з природною дією на векторному просторі многочленів з трьома змінними. Сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  називається *квазі-мономіальною* відносно  $H$ , якщо оператори групи в двох різних базисах  $x^m y^n z^k$  та  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  мають *ідентичні* матриці. У цьому випадку многочлени  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  називаються *квазі-мономами*. Останнім часом квазі-мономіальні сім'ї многочленів знайшли широке застосування в аналізі 2D та 3D зображень. Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно виділити такі *ознаки* зображень, які залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. Такими перетвореннями є обертання, паралельні перенесення, масштабування та композиція цих перетворень, див. [1]. Відповідні інваріантні ознаки для 2D зображень були вперше представлені у статті [2] та називаються *геометричними моментними інваріантами*. Проте, ці моментні інваріанти конструювалися у стандартному поліноміальному базисі  $\{x^m y^n\}$ , що спричиняло практичні труднощі через обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки значення  $x^m y^n$  швидко зростають зі збільшенням розміру зображення. Перехід до інших базисів, особливо до базисів із класичних дискретних ортогональних многочленів, вирішив проблему нестабільності. Але тепер виникла нова проблема знаходження явних виразів для моментних інваріантів, які змінилися із зміною базису. Знаходження виразів для моментних інваріантів в новому базису стикається з великими технічними труднощами і задовільно вирішується лише для деяких часткових випадків, див. [3].

Проте, відносно недавно, в статті [4] автори довели, що в базисі  $\{H_m(x)H_n(y)\}$ , де  $H_n(x)$  — класичні ортогональні многочлени Ерміта, вирази для  $SO(2)$ -інваріантних моментів виявилися ідентичними відомим виразам для  $SO(2)$ -інваріантних геометричних моментів в базисі  $\{x^m y^n\}$ . Таким чином, ця

несподівана властивість многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислювати моменти зображення, інваріантні відносно групи обертань площини  $SO(2)$ .

У статті [5] ці ідеї були розвинуті, і отримано повний опис усіх сімей многочленів в термінах їхніх породжуючих функцій, які володіють цією властивістю, яка була названа властивістю квазі-мономіальності відносно групи обертань площини  $SO(2)$ . У роботі [6] поняття квазі-мономіальності було поширено на довільну підгрупу  $H$  афінної групи площини  $Aff(2)$ , та отримано опис квазі-мономів для випадку, коли група  $H$  генерується масштабуванням та паралельними перенесеннями площини, а також їхніми композиціями, в тому числі з обертаннями.

У цій статті ми продовжуємо цей напрям досліджень і пропонуємо опис, всіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп масштабування та паралельних перенесень афінної групи простору  $Aff(3)$ . Випадок групи обертань простору розглядався в [7]. В статті встановлено необхідні і достатню умови, для того, щоб сім'я многочленів буде квазі-мономіальною відносно підгруп масштабування або паралельних перенесень. Крім того, ми встановлюємо умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

**2. Квазі-мономи відносно групи масштабування простору.** Група масштабування простору є трипараметричною групою перетворень тривимірного простору, які масштабують координати точок незалежно за осями  $x, y$  та  $z$  відповідно до коефіцієнтів масштабування  $s, t$  та  $r$ . Масштабування може збільшувати або зменшувати об'ємні фігури та відстані між точками, але зберігає відносні пропорції фігур.

Формула для масштабування простору може бути записана як:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

де  $(x, y, z)$  — координати початкової точки,  $(x', y', z')$  — координати точки після масштабування, а  $s, t$  та  $r$  — коефіцієнти масштабування вздовж відповідних осей. Група масштабування простору діє операторами  $T_{s,t,r}$  на функції таким чином:

$$T_{s,t,r}(f(x, y, z)) = f(sx, ty, rz), \quad s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, для мономів ми маємо

$$T_{s,t,r}(x^m y^n z^k) = t^m s^n r^k x^m y^n z^k.$$

Нас цікавлять сім'ї многочленів, на які оператори групи  $T_{s,t,r}$  діють аналогічним чином.

**Означення 1.** Сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  називається квазі-мономіальною відносно групи масштабування простору, якщо дія групи на ці многочлени збігається з дією групи на стандартні мономи, тобто виконується тотожність

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z), \quad (1)$$

для всіх  $s, t, r \in \mathbb{R}$ .

Наступна теорема описує всі сім'ї многочленів які є квазі-мономіальними відносно групи масштабування простору в термінах породжуючої функції:

**Теорема 1.** Сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ , визначена експоненційною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабування простору тоді і тільки тоді коли  $G$  є функцією від трьох змінних  $xu$ ,  $yv$  і  $zw$  :

$$G = G(xu, yv, zw).$$

**Доведення.** ( $\implies$ ) Припустимо, що сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  задовольняє умову (1). Спочатку доведемо, що у цьому випадку многочлени  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  для всіх індексів  $m, n, k$  задовольняють таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m,n,k}(x, y, z), \\ y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n B_{m,n,k}(x, y, z), \\ z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k B_{m,n,k}(x, y, z). \end{cases}$$

Справді, продиференціюємо тотожність (1) по змінній  $s$ :

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(sx, ty, rz)}{\partial x} = m s^{m-1} t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Поклавши  $s = 1, t = 1, r = 1$  отримаємо

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно, послідовними диференціюванням по  $t$  та по  $r$  виводяться друга та третя тотожності.

Враховуючи першу доведену тотожність, отримаємо

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left( x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} m B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = u \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо, що мають місце рівняння

$$y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v},$$

i

$$z \frac{\partial G}{\partial z} = w \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Отже, породжуюча функція  $G$  задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial G}{\partial x} = u \frac{\partial G}{\partial u}, \\ y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v}, \\ z \frac{\partial G}{\partial z} = w \frac{\partial G}{\partial w}. \end{cases} \quad (2)$$

Система з трьох диференціальних рівнянь, для функції від шести змінних, не може мати більше трьох функціонально незалежних розв'язків, див. [8]. Однак,  $xu, yv$  і  $zw$  є очевидно є функціонально незалежними розв'язками. Отже,  $G$  повинна бути функцією лише від змінних  $xu, yv$  і  $zw$ .

( $\Leftarrow$ ) Тепер доведемо зворотну імплікацію. Нехай

$$G(x, y, z, u, v, w) = G(xu, yv, zw).$$

Доведемо, що  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  задовольняє умову (1):

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Зауважимо, що, оскільки

$$G(sxu, tyv, rzv) = G(x(su), y(tv), z(rw)),$$

то функція  $G$  задовольняє тотожність

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = G(x, y, z, su, tv, rw).$$

Тепер, з одного боку ми маємо

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

а з іншого боку:

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = G(x, y, z, su, tv, rw) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{(su)^m (tv)^n (rw)^k}{m! n! k!}.$$

Порівнюючи ліву і праву частини отримуємо

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{(su)^m (tv)^n (rw)^k}{m! n! k!}.$$

Прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів  $u$  і  $v$ , знаходимо, що

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

як і вимагалось.

□

**2.1. Квазімономи відносно групи рівномірних масштабувань.** Розглянемо частковий випадок групи *рівномірних* масштабувань простору, тобто таких перетворень простору

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \\ z' = sz. \end{cases}$$

Многочлени  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  назвемо квазімономами відносно групи рівномірних розтягів, якщо виконується тотожність:

$$B_{m,n}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Наступна теорема дає повний опис таких многочленів у термінах породжуючих функцій.

**Теорема 2.** *Сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  визначена експоненціальною породжуючою функцією*

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

*буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних розтягів простору тоді і тільки тоді коли  $G$  є функцією від змінних  $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$ :*

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

**Доведення.** ( $\implies$ ) Диференціюючи по  $s$  тотожність

$$B_{m,n}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

і поклавши  $s = 1$  отримуємо таке диференціальне рівняння

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} + z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = (m + n + k) B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Тоді, аналогічно як при доведенні Теорема 1 знаходимо, що породжуюча функція  $G$  задовольняє таке рівняння

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v} + w \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Це рівняння не може мати більше п'яти функціонально незалежних розв'язків, які ми можемо вказати явно:  $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$ . Тому, породжуюча функція є функцією від змінних  $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$ .

Достатність доводиться аналогічно як в Теоремі 1.

□

**3. Квазі-многочлени відносно групи паралельних перенесень простору.** Трипараметрична група трансляцій простору породжується паралельними перенесеннями такої форми

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Ця група діє на функції операторами зсуву  $T_{a,b,c}$  наступним чином:

$$T_{a,b,c}(f(x, y, z)) = f(x + a, y + b, z + c), a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$(x + a)^m (y + b)^n (z + c)^k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} x^i y^j z^l a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l},$$

то ми приходимо до такого означення

**Означення 2.** Сім'я многочленів  $\{B_{m,n}(x, y)\}$  називається квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору, якщо виконується наступна тотожність

$$B_{m,n,k}(x + a, y + b, z + c) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \quad (3)$$

для всіх  $m, n, k \in \mathbb{N}$ .

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

**Теорема 3.** Сім'я многочленів  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де  $C(u, v, w)$  — довільний степеневий ряд від змінних  $u, v, w$ .

**Доведення.** ( $\implies$ ) Спочатку диференціюємо (3) по  $a$  при  $a = 0$  та  $b = 0$ ,  $c = 0$ . Отримуємо диференціальне рівняння на  $B_{m,n,k}(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m-1,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно, диференціюючи по  $b$  та по  $c$ , отримуємо два інших диференціальних рівняння на  $B_{m,n,k}(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n B_{m,n-1,k}(x, y, z), \\ \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k B_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Взявши до уваги першу тотожність ми маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left( \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} m B_{m-1,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m-1,n,k}(x,y,z) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = uG. \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\frac{\partial G}{\partial y} = vG \text{ і } \frac{\partial G}{\partial z} = wG.$$

Отже,  $G$  задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = uG, \\ \frac{\partial G}{\partial y} = vG, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = wG, \end{cases} \quad (4)$$

Ця проста система диференціальних рівнянь першого порядку має такий розв'язок

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де  $C$  — довільна функція від  $u, v, w$ . Оскільки  $G$  є степеневим рядом, то  $C(u, v, w)$  також степеневий ряд від змінних  $u, v, w$ .

⇐ Припустимо тепер, що породжуюча функція для сім'ї многочленів  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  має вигляд

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

Для оператора зсуву маємо

$$T_{a,b,c}(xu + yv + zw) = au + vb + cw + ux + vy + zw.$$

З одного боку,

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(G) &= T_{a,b,c} \left( \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} \right) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x,y,z)) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(G) &= C(u, v, w)T_{a,b,c}(e^{xu+yv+zw}) = C(u, v, w)e^{au+vb+cw+ux+vy+zw} = \\ &= e^{au+vb+cw}G = \left( \sum_{i,j,l=0}^{\infty} a^i b^j c^l \frac{u^i v^j w^l}{i! j! l!} \right) \left( \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} \right) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x,y,z) \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти однакових степенів  $u$  та  $v$ , ми отримуємо, що

$$T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x, y, z)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z).$$

Отже, многочлени  $B_{m,n,k}(x, y, z)$  є квазі-мономами відносно групи паралельних перенесень простору.  $\square$

Властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени нормалізуються, тобто множаться на деякі константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочленів при обчисленнях. Наступна теорема встановлює, який тип нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

**Теорема 4.** *Нехай  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  – квазі-мономіальна сім'я відносно групи паралельних перенесень простору. Сім'я  $\{\tilde{B}_{m,n}(x, y)\}$ , де*

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

*буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли кожний коефіцієнт  $\alpha_{m,n,k}$  є функцією  $\phi$ , від однієї змінної  $m + n + k$ , яка задовольняє таке рекурентне співвідношення:*

$$\phi(m + n + k) = \phi(m + n + k - 1).$$

**Доведення.** ( $\implies$ ) Оскільки виконується

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= m \tilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z), \\ \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n \tilde{B}_{m,n-1}(x, y, z), \\ \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k \tilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z), \end{aligned}$$

ТО МИ МАЄМО

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= m \alpha_{m-1,n,k} B_{m-1,n,k}(x, y, z), \\ \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n \alpha_{m,n-1,k} B_{m,n-1,k}(x, y, z), \\ \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k \alpha_{m,n,k-1} B_{m,n,k-1}(x, y, z), \end{aligned}$$

Ми отримуємо наступну систему рекурентних рівнянь для послідовності  $\alpha_{m,n}$ :

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{cases}$$



Легко помітити, що розв'язок системи має вигляд  $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$ , де  $\phi$  — довільна функція. Справді, розглянемо довільний індекс  $(m, n, k)$ . Ми можемо досягти індексу  $(0, 0, m+n+k)$  через послідовність перетворень, як показано нижче. Спочатку зменшуємо  $m$ , збільшуючи  $n$ , доки  $m = 0$ :  $\alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{m,n,k}$ . Потім зменшуємо  $n$ , збільшуючи  $k$ , доки  $n = 0$ :  $\alpha_{0,0,m+n+k} = \alpha_{0,n+m,k}$ .

В результаті маємо:

$$\alpha_{m,n,k} = \alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{0,0,m+n+k}.$$

Тепер можемо визначити функцію  $\phi(x) = \alpha_{0,0,x}$ . Тоді  $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$ , що показує, що будь-який розв'язок системи є функцією однієї змінної,  $m+n+k$ .

Підставимо розв'язок  $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$  у перше рівняння і отримуємо необхідне рекурентне співвідношення  $\phi(m+n+k) = \phi(m+n+k-1)$ .

( $\Leftarrow$ ) Тепер доведемо обернену імплікацію. Нехай  $\alpha_{m,n,k} = \phi(m+n+k)$  і  $\phi(m+n+k) = \phi(m+n+k-1)$ , тоді очевидно виконуються умови

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \\ &= m\alpha_{m-1,n,k} B_{m-1,n,k}(x, y, z) = m\tilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z). \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n\tilde{B}_{m,n-1,k}(x, y, z) \text{ і } \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k\tilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z).$$

Отже, породжуюча функція для сім'ї многочленів  $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$  задовольняє умови Теорема 3 і сім'я многочленів  $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$  буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору. □

**3.1. Рівномірні паралельні перенесення.** Для часткового випадку рівномірних паралельних перенесень  $T_{a,a,a} = T_a$  :

$$T_a(x) = x + a, T_a(y) = y + a, T_a(z) = z + a,$$

справедливе наступне твердження:

**Теорема 5.** Сім'я многочленів  $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$  буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд

$$C(x-y, x-z, u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де  $C$  — довільний степеневий ряд від змінних  $x-y, x-z, u, v, w$ .

*Доведення.* Умова квазімономіальності (3) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & B_{m,n,k}(x+a, y+a, z+a)(x, y, z) = \\ & = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \end{aligned}$$

для всіх  $m, n, k \in \mathbb{N}$ .

Диференціюємо цю тотожність по  $a$  в  $a = 0$  знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = \\ & = mB_{m-1,n,k}(x, y, z) + nB_{m,n-1,k}(x, y, z) + kB_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо диференціальне рівняння на породжуючу функцію

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = (u + v + w)G.$$

Можна показати, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$G = C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

Достатність доводиться аналогічно доведенню достатності в Теоремі 3.  $\square$

Виникає природне питання — чи існують сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними одночасно відносно групи масштабування і відносно групи паралельних перенесень? Породжуюча функція для таких многочленів мала би бути одночасним розв'язком систем диференціальних рівнянь (2) і (4). Можна показати, що єдиним розв'язком цих систем рівнянь, з точністю до сталого множника, є функція  $e^{xu+yv+zw}$ . Але вона є експоненціальною породжуючою функцією стандартних мономів  $x^m y^n z^k$  і ми не отримуємо ніяких нових сімей многочленів.

**4. Висновки.** У статті досліджено квазі-мономіальні сім'ї многочленів від трьох змінних, які є інваріантними відносно підгруп масштабування та паралельних перенесень афінної групи простору  $\text{Aff}(3)$ . Встановлено необхідні і достатні умови, щоб сім'я многочленів була квазі-мономіальною відносно цих підгруп. Ми також розглянули умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Хоча отримані результати містять самостійний математичний інтерес, вони можуть бути використані для розвитку алгоритмів машинного навчання для розпізнавання та класифікації зображень, що залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. В майбутньому можна провести дослідження властивостей квазі-мономіальних сімей многочленів відносно інших підгруп афінної групи простору.

#### Список використаної літератури

1. Flusser J., Suk T., Zitová B. 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley and Sons, 2017.
2. Hu M. K. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Transactions on Information Theory*. 1962. Vol. 8, No. 2. P. 179–187.

3. Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R. Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition*. 2004. Vol. 37, No. 1. P. 119–129.
4. Yang B., Li G., Zhang H., Dai M. Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*. 2011. Vol. 32, No. 2. P. 1283–1298.
5. Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*. 2022. Vol. 127. P. 108–607.
6. Samaruk N. M. Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. *Matematychni Studii*. 2022. Vol. 59, No. 1. P. 3–11.
7. Flusser J., Suk T., Bedratyuk L., Karella T. Non-separable moments in 3D. In: *20th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP)*, Limassol, Cyprus, September 25–30, 2023.
8. Kamke E. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion* : Teubner Verlag, 1979.

**Samaruk N. M.** Quasi-monomials with respect to subgroups of the space affine group.

Let  $H$  be a subgroup of the space affine group  $\text{Aff}(3)$  considered with the natural action on the real vector space of three variable polynomials. The polynomial family  $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$  is called quasi-monomial with respect to  $H$  if the group operators in two different bases  $\{x^m y^n z^k\}$  and  $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$  have *identical* matrices. We obtain a criterion of quasi-monomiality for the case when the group  $H$  is generated by scaling and translations in terms of exponential generating function for the polynomial family  $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ .

**Keywords:** quasi-monomials, space affine group, scaling group, translation group, exponential generating function.

## References

1. Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2017). *2D and 3D Image Analysis by Moments*. John Wiley and Sons.
2. Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory*, 8(2), 179–187.
3. Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2004). Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition*, 37(1), 119–129.
4. Yang, B., Li, G., Zhang, H., & Dai, M. (2011). Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*, 32(2), 1283–1298.
5. Bedratyuk, L., Flusser, J., Suk, T., Kostkova, J. & Kautsky, J. (2022). Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*, 127, 108–607.
6. Samaruk, N. M. (2022). Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group. *Matematychni Studii*, 59(1), 3–11.
7. Flusser, J., Suk, T., Bedratyuk, L., & Karella, T. (2023). Non-separable moments in 3D. In: *20th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP)*, Limassol, Cyprus.
8. Kamke, E. (1979). *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion*. Teubner Verlag.

Одержано 30.04.2023

УДК 519.224

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).92-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).92-102)**I. V. Turchyn**

Oles Honchar Dnipro National University,  
 Associate Professor, Department of Statistics and Probability Theory,  
 Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent  
 evgturchyn@gmail.com  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8947-1359>

## SKEW COUNTERPARTS OF THE GENERALIZED DOUBLE LOMAX DISTRIBUTION: PROPERTIES AND APPLICATIONS

Two extensions of the generalized double Lomax distribution are introduced — the spliced-scale generalized double Lomax distribution and the exponentiated generalized double Lomax distribution. Their properties are studied. Usefulness of the new distributions is shown by fitting them to stock returns datasets.

**Keywords:** generalized double Lomax distribution, exponentiated distribution, maximum likelihood, moment, entropy.

**1. Introduction.** The generalized double Lomax (GDL) distribution was introduced in [1]. This distribution is a symmetric analog of the Lomax distribution. Its pdf is

$$p(x) = \frac{v}{2s} \left( 1 + \frac{|x - m|}{s} \right)^{-v-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

where  $m$  and  $v > 0$ ,  $s > 0$  are the distribution parameters.

Notation  $\text{GDL}(v, m, s)$  will be used afterwards for the GDL distribution with the parameters  $v, m, s$ .

The generalized double Lomax distribution was successfully fitted to datasets of daily returns for several stock indexes and equities in [1].

Although the GDL distribution is capable of modeling real data, it is interesting to obtain extensions of this distribution which are more flexible. Asymmetric counterparts of the GDL distribution would be especially useful (such skew generalizations, in particular, would be more suitable for modeling of stock returns distributions).

There are many ways of creating new distribution families (many of which can be used, in particular, for skewing a symmetric distribution) — see, for instance, [2] and [3], [4], [5]. We will use exponentiation (see [6]) and “scale splicing” (proposed in [7]) for obtaining new families.

Two skew extensions of the generalized double Lomax distribution will be introduced — the exponentiated generalized double Lomax (EGDL) distribution and the spliced-scale generalized double Lomax (SpScGDL) distribution. Properties of these distributions will be analyzed. Usefulness of these counterparts will be demonstrated by providing financial datasets which can be modeled adequately by the exponentiated generalized double Lomax distribution and the spliced-scale generalized double Lomax distribution. Goodness-of-fit statistics for EGDL and SpScDL distributions will be compared to those of other distribution families.

**2. Spliced-scale generalized double Lomax distribution.** We will introduce the spliced-scale generalized double Lomax distribution by skewing the generalized double Lomax distribution according to the approach of Fernandez and Steel (see [7]). Namely, suppose that a symmetric unimodal distribution has the pdf  $p(x)$ . Fernandez and Steel define the pdf of the skewed distribution as

$$p_{\gamma}(x) = \frac{2}{\gamma + 1/\gamma} \left( p(x/\gamma)I_{[0;\infty)}(x) + p(\gamma x)I_{(-\infty;0)}(x) \right),$$

where  $\gamma \in (0; \infty)$  controls the skewness of this distribution.

**Definition 1.** *The spliced-scale generalized double Lomax distribution with the parameters  $\tau$ ,  $v$ ,  $m$  and  $s$  ( $\tau, v, s > 0$ ) (or  $\text{SpScGDL}(\tau, v, m, s)$  distribution) is defined as the distribution with the pdf*

$$p_{\text{SpSc}}(x; \tau, v, m, s) = \begin{cases} c_{\tau} \frac{v}{2s} \left( 1 - \frac{x-m}{s\tau^2} \right)^{-v-1}, & \text{if } x < m; \\ c_{\tau} \frac{v}{2s} \left( 1 + \tau^2 \frac{x-m}{s} \right)^{-v-1}, & \text{if } x \geq m, \end{cases}$$

where

$$c_{\tau} = \frac{2}{\tau^2 + 1/\tau^2}. \quad (1)$$

We will write  $p_{\text{SpSc}}(x)$  instead of  $p_{\text{SpSc}}(x; \tau, v, m, s)$  if this causes no confusion.

**Remark 1.** *The case  $\tau = 1$  corresponds to the  $\text{GDL}(v, m, s)$  distribution.*

Figures 1 and 2 show the densities of several spliced-scale generalized double Lomax distributions.

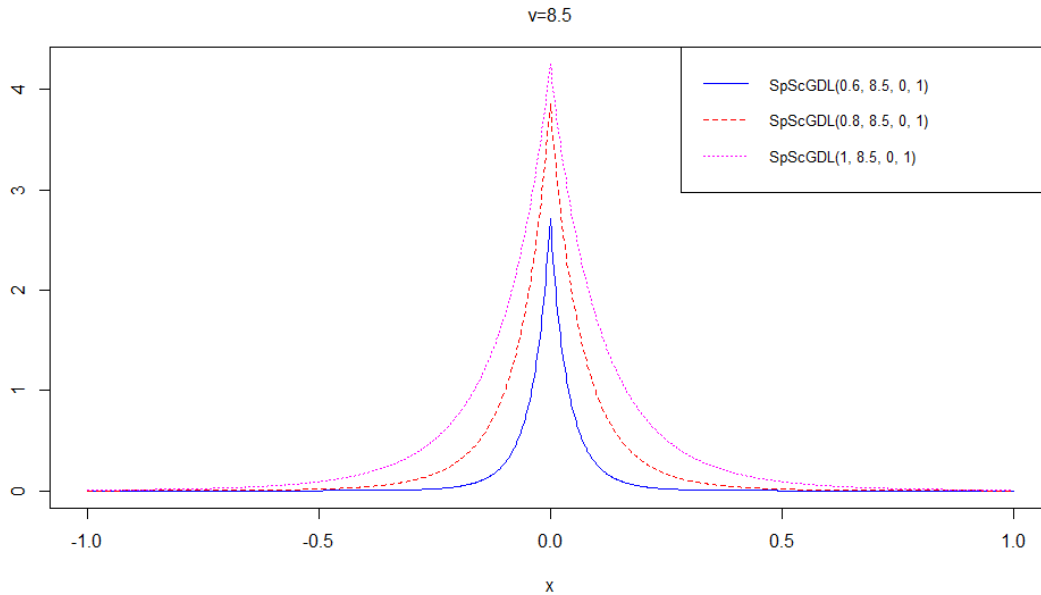


Figure 1. The densities of SpScGDL distributions with  $\tau = 0.6$ ,  $\tau = 0.8$  and  $\tau = 1$

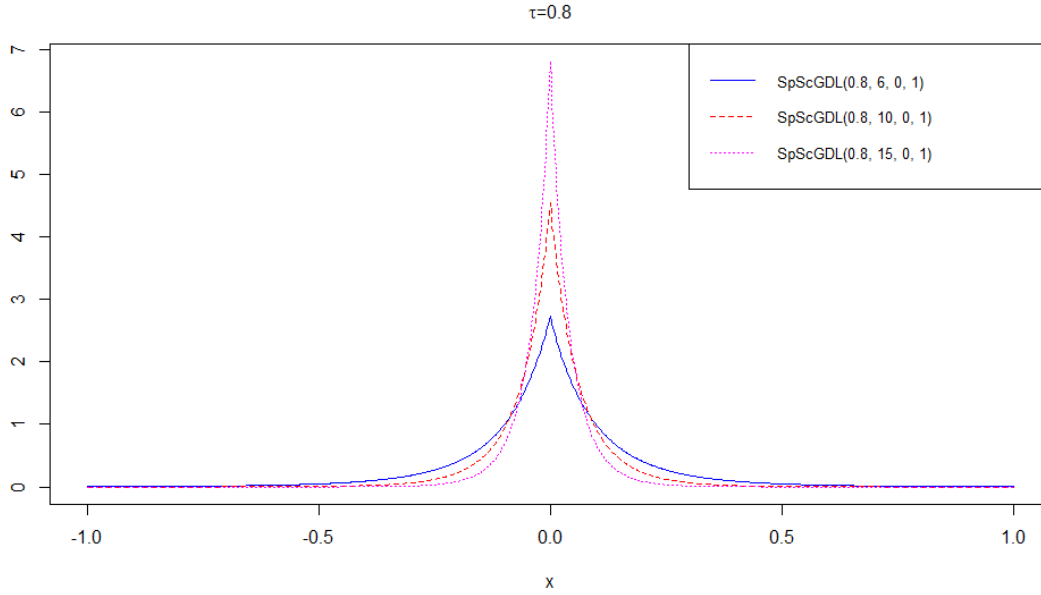


Figure 2. The densities of SpScGDL distributions with  $v = 6$ ,  $v = 10$  and  $v = 15$

It is easy to see that the cdf of SpScGDL( $\tau, v, m, s$ ) distribution is

$$F_{\text{SpSc}}(x; \tau, v, m, s) = \begin{cases} (c_\tau \tau^2 / 2) \left(1 + \frac{m-x}{s\tau^2}\right)^{-v}, & \text{if } x < m; \\ 1 - \frac{c_\tau}{2\tau^2} \left(1 + \frac{\tau^2}{s}(x-m)\right)^{-v}, & \text{if } x \geq m, \end{cases}$$

where  $c_\tau$  is defined in (1).

#### Properties of the spliced-scale generalized double Lomax distribution.

- **Unimodality.**

The spliced-scale generalized double Lomax distribution is unimodal and its mode equals  $m$  (the approach of Fernandez and Steel always yields a skewed unimodal distribution which mode coincides with the mode of the original symmetric distribution, see [7]).

- **Quantiles.**

It is easy to check that the following assertion holds.

**Theorem 1.** *The quantile function  $Q_\tau(u)$  of the SpScGDL( $\tau, v, m, s$ ) distribution is given by*

$$Q_\tau(u) = \begin{cases} m - s\tau^2 \left( \left( \frac{2u}{c_\tau \tau^2} \right)^{-1/v} - 1 \right), & \text{if } u \in \left( 0; \frac{\tau^4}{1 + \tau^4} \right]; \\ m + \frac{s}{\tau^2} \left( \left( \frac{2\tau^2(1-u)}{c_\tau} \right)^{-1/v} - 1 \right), & \text{if } u \in \left( \frac{\tau^4}{1 + \tau^4}; 1 \right). \end{cases}$$

• **Moments about the origin.**

**Theorem 2.** *The  $n$ -th moment about the origin of the SpScGDL( $\tau, v, m, s$ ) distribution equals*

$$\begin{aligned} \mu'_n = \frac{c_\tau v s^n}{2} & \left( (-1)^n \tau^{2n+2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{a^k}{v - (n - k)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tau^{2n+2}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{b^k}{v - (n - k)} \right), \end{aligned} \tag{2}$$

where  $c_\tau$  is defined by (1).

**Proof.** Indeed,

$$\mu'_n = I_1 + I_2,$$

where

$$I_1 = \int_{-\infty}^m x^n p_{\text{SpSc}}(x) dx = c_\tau \frac{v}{2} (-1)^n s^n \tau^{2n+2} \int_1^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{z^{v+1}} dz, \tag{3}$$

$$a = 1 + \frac{m}{s\tau^2},$$

$$I_2 = \int_m^\infty x^n p_{\text{SpSc}}(x) dx = c_\tau \frac{v}{2} s^n \frac{1}{\tau^{2n+2}} \int_1^\infty \frac{(z - b)^n}{z^{v+1}} dz, \tag{4}$$

$$b = 1 - \frac{m\tau^2}{s}.$$

Now (2) follows from (3) and (4). The theorem is proved.

• **Entropy.**

**Theorem 3.** *Let  $\alpha > \frac{1}{v+1}$ ,  $\alpha \neq 1$ . The Renyi entropy  $H_\alpha$  of SpScGDL( $\tau, v, m, s$ ) distribution equals*

$$H_\alpha = \ln \frac{2s}{c_\tau} + \frac{1}{1 - \alpha} \ln \frac{v^\alpha}{\alpha(v + 1) - 1}.$$

**Proof.** We have:

$$H_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \int_{\mathbb{R}} p_{\text{SpSc}}^\alpha(x) dx.$$

Then

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p_{\text{SpSc}}^\alpha(x) dx &= \int_{-\infty}^m p_{\text{SpSc}}^\alpha(x) dx + \int_m^\infty p_{\text{SpSc}}^\alpha(x) dx, \\ \int_{-\infty}^m p_{\text{SpSc}}^\alpha(x) dx &= \left( c_\tau \frac{v}{2s} \right)^\alpha \cdot \frac{s\tau^2}{\alpha(v + 1) - 1}, \\ \int_m^\infty p_{\text{SpSc}}^\alpha(x) dx &= \left( c_\tau \frac{v}{2s} \right)^\alpha \cdot \frac{s}{\tau^2(\alpha(v + 1) - 1)}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{1}{1-\alpha} \ln \left( \left( c_\tau \frac{v}{2s} \right)^\alpha \cdot \frac{s}{\alpha(v+1)-1} \cdot \left( \tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) \right) = \\ &= \ln \frac{2s}{c_\tau} + \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{v^\alpha}{\alpha(v+1)-1}. \end{aligned}$$

**Theorem 4.** *The Shannon entropy of the SpScGDL( $\tau, v, m, s$ ) distribution equals*

$$H = \frac{v+1}{v} - \ln \frac{c_\tau v}{2s}. \quad (5)$$

**Proof.** We have

$$\begin{aligned} H &= - \int_{\mathbb{R}} p_{\text{SpSc}}(x) \ln p_{\text{SpSc}}(x) dx, \\ H &= -(J_1 + J_2), \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$J_1 = \frac{c_\tau v}{2s} \int_{-\infty}^m \left( 1 + \frac{1}{\tau^2 s} (m-x) \right)^{-v-1} \ln \left( \frac{c_\tau v}{2s} \left( 1 + \frac{1}{\tau^2 s} (m-x) \right)^{-v-1} \right) dx, \quad (7)$$

$$J_2 = \frac{c_\tau v}{2s} \int_m^{\infty} \left( 1 + \frac{\tau^2}{s} (x-m) \right)^{-v-1} \ln \left( \frac{c_\tau v}{2s} \left( 1 + \frac{\tau^2}{s} (x-m) \right)^{-v-1} \right) dx. \quad (8)$$

Equality (5) follows from (6), (7) and (8) after simple calculations. The theorem is proved.

#### **Applications to real data.**

The fit of the spliced-scale generalized double Lomax distribution was compared to fit of several other competing distributions using financial datasets. These datasets were the daily stock returns  $\xi_k = \eta_{k+1} - \eta_k$  (where  $\eta_k$  is the stock price on day  $k$ ) for the following stocks (see [8]; [9]):

- DHR, from January 19, 2017 to October 5, 2017;
- IFF, from June 20, 2003 to March 9, 2004.

The competing distributions were: the Johnson- $S_U$  ( $JS_U$ ) distribution, the sinh-arcsinh (SH-ASH) distribution (the “reparametrized” version, see [10], p. 768), the skew  $t$  (ST) distribution of Jones and Faddy (see [11]) and the normal inverse Gaussian (NIG) distribution.

The spliced-scale generalized double Lomax distribution was fitted using the maximum likelihood method. The numerical algorithm chosen for maximization of likelihood was the simulated annealing, the R programming language and the R package `optimization` were used.

The MLE estimates for the  $JS_U$  distribution, the SH-ASH distribution and the ST distribution were obtained using R package `fitdistrplus`. The MLE estimates for the NIG distribution were procured by means of R package `GeneralizedHyperbolic`.

The AIC was taken as a goodness-of-fit statistic. The values of the AIC for the distributions fitted to the above-mentioned datasets are given in Table 1.



Table 1.

Values of AIC

DHR					
Distribution	SpScGDL	SH-ASH	$JS_U$	ST	NIG
AIC	347.463	349.884	349.312	349.614	349.929
IFF					
Distribution	SpScGDL	SH-ASH	$JS_U$	ST	NIG
AIC	165.796	168.055	166.123	167.124	167.022

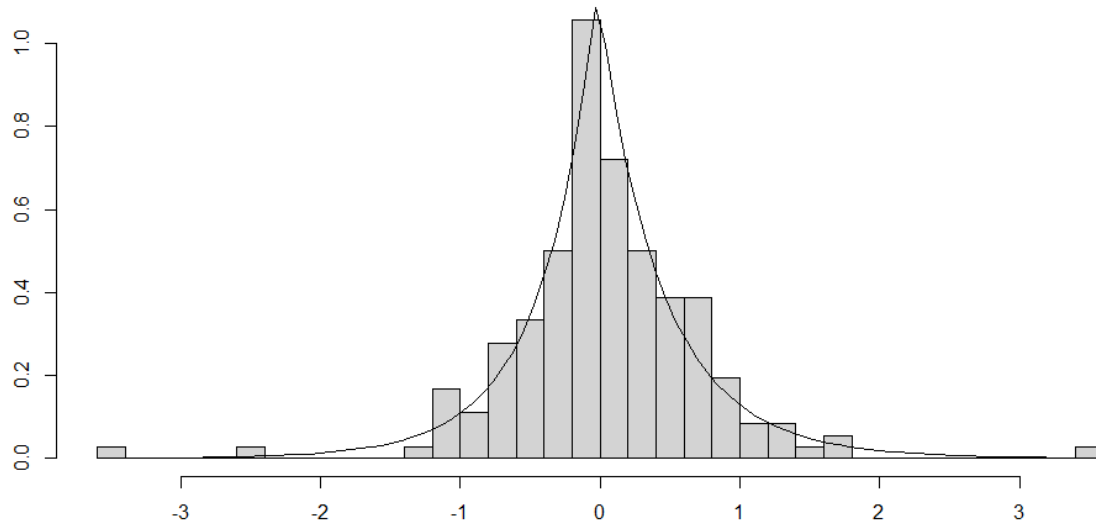


Figure 3. The histogram and the SpScGDL pdf for DHR dataset

The spliced-scale generalized double Lomax distribution corresponded to the lowest value of the AIC for both datasets.

Figure 3 shows the histogram and the fitted spliced-scale generalized double Lomax distribution pdf for DHR dataset.

**3. Exponentiated double Lomax distribution..**

The next skewed version of the generalized double Lomax distribution which will be considered is the exponentiated generalized double Lomax distribution. Skewing of a distribution family by creating exponentiated distributions is a well-known method. Namely, if  $F$  is a probability distribution with the cdf  $F(x)$ , then the corresponding exponentiated distribution  $F_\gamma$  is defined as the distribution with the cdf

$$F_\gamma(x) = (F(x))^\gamma,$$

where  $\gamma \in (0; \infty)$ .

General properties of exponentiated distributions and concrete examples of such distributions are given in detail in [6].

**Definition 2.** *The exponentiated generalized double Lomax distribution with parameters  $\gamma, v, m$  and  $s$  ( $\gamma, v, s > 0$ ) (or EGDL( $\gamma, v, m, s$ ) distribution) is defined as the distribution with the cdf*

$$F_\gamma(x) = (F(x))^\gamma,$$

where

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m-x}{s}\right)^{-v}, & \text{if } x < m; \\ 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x-m}{s}\right)^{-v}, & \text{if } x \geq m, \end{cases} \quad (9)$$

is the cdf of the  $\text{GDL}(v, m, s)$  distribution.

**Remark 2.** If  $\gamma = 1$  then  $\text{EGDL}(\gamma, v, m, s)$  coincides with  $\text{GDL}(v, m, s)$  distribution.

The pdf of  $\text{EGDL}(\gamma, v, m, s)$  distribution is

$$p_\gamma(x) = \gamma(F(x))^{\gamma-1}p(x), \quad (10)$$

where  $p(x)$  is the pdf of the  $\text{GDL}(v, m, s)$  distribution.  $p_\gamma(x)$  can also be represented as

$$p_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma 2^{-\gamma} \frac{v}{s} \left(1 - \frac{x-m}{s}\right)^{-\gamma v-1}, & \text{if } x < m; \\ \gamma \frac{v}{2s} \left(1 + \frac{x-m}{s}\right)^{-v-1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x-m}{s}\right)^{-v}\right)^{\gamma-1}, & \text{if } x \geq m. \end{cases}$$

Figures 4 and 5 show several densities of exponentiated generalized double Lomax distributions.

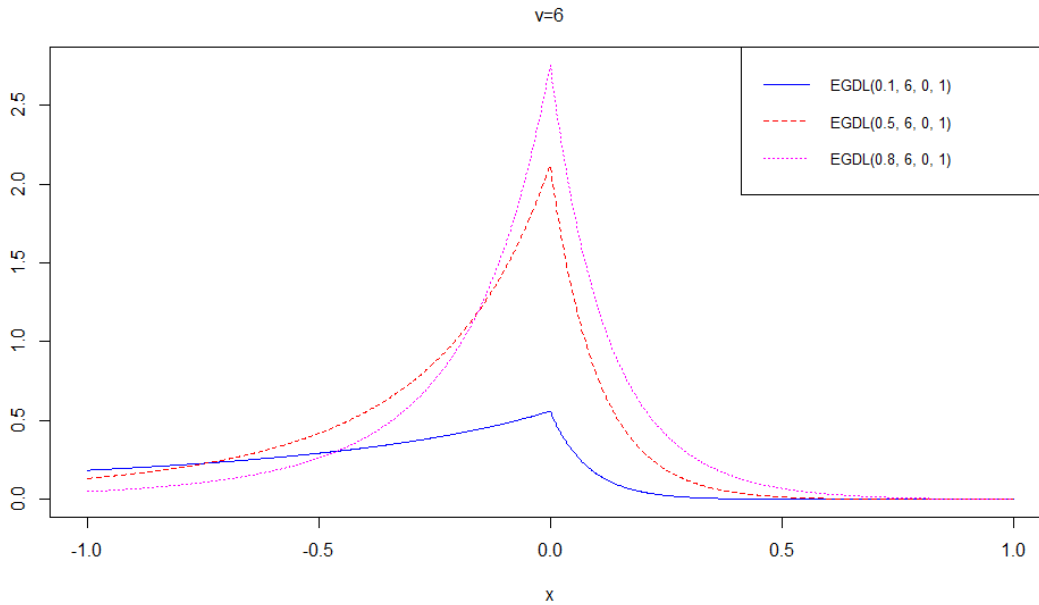


Figure 4. The densities of EGDL distributions with  $\gamma = 0.1$ ,  $\gamma = 0.5$  and  $\gamma = 0.8$

### Properties of the exponentiated generalized double Lomax distribution

- **Unimodality.**

**Theorem 5.** The  $\text{EGDL}(\gamma, v, m, s)$  distribution is unimodal, its mode equals  $m$ .

**Proof.** It is enough to prove that  $p'_\gamma(x) > 0$  for  $x < m$  and  $p'_\gamma(x) < 0$  for  $x > m$ . We will establish (without loss of generality) this fact for the case  $m = 0$ .

Indeed, differentiating (10) we obtain

$$\begin{aligned} p'_\gamma(x) &= \gamma(\gamma - 1)(F(x))^{\gamma-2}(p(x))^2 + \gamma(F(x))^{\gamma-1}p'(x) \\ &= \gamma(F(x))^{\gamma-2} \left( (\gamma - 1)p^2(x) + F(x)p'(x) \right), \end{aligned}$$

and therefore

$$\text{sign}(p'_\gamma(x)) = \text{sign} \left( (\gamma - 1)p^2(x) + F(x)p'(x) \right).$$

Let us consider the case  $x < 0$ . We have:

$$F(x)p'(x) = \frac{v(v+1)}{4s^2(1-x/s)^{2v+2}},$$

$$p^2(x) = \frac{v^2}{4s^2(1-x/s)^{2v+2}},$$

and  $F(x)p'(x) > p^2(x)$  for  $x < 0$ . Therefore

$$\text{sign}(p'_\gamma(x)) = \text{sign} \left( (\gamma - 1)p^2(x) + F(x)p'(x) \right) > 0, \quad x < 0.$$

Inequality  $p'_\gamma(x) < 0$  can be proved in a similar way for  $x > 0$ .

- **Quantiles.**

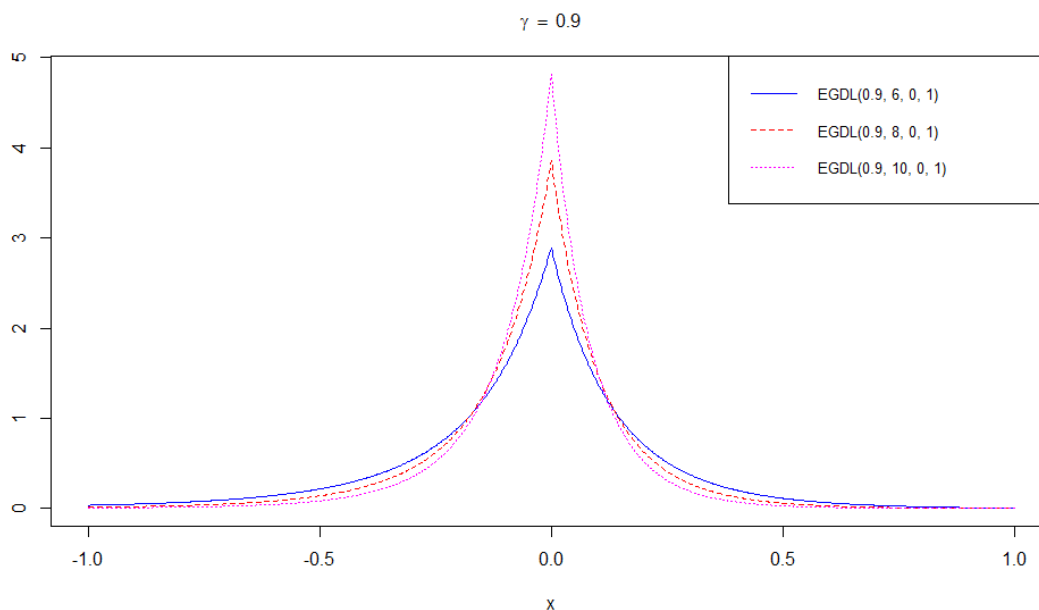


Figure 5. The densities of EGDL distributions with  $v = 6$ ,  $v = 8$  and  $v = 10$

**Theorem 6.** *The quantile function  $Q_\gamma(u)$  of the EGDL( $\gamma, v, m, s$ ) distribution is given by*

$$Q_\gamma(u) = \begin{cases} m + s \left(1 - 2^{-1/v} u^{-1/(\gamma v)}\right), & \text{if } u \in (0; 2^{-\gamma}]; \\ m + s \left(2^{-1/v} (1 - u^{1/\gamma})^{-1/v} - 1\right), & \text{if } u \in (2^{-\gamma}; 1). \end{cases} \quad (11)$$

**Proof.** (11) immediately follows from the equality

$$Q_\gamma((F(x))^\gamma) = x,$$

where  $F(x)$  is the cdf of the GDL( $v, m, s$ ) distribution (see (9)).

#### Applications to real data

The fit of the exponentiated generalized double Lomax distribution was compared to fit of other competing distributions (which were already used for assessing the fit of spliced-scale generalized double Lomax distribution) using several stock datasets. The following daily stock returns were used (see [12]; [13]):

- BSET, from August 29, 2018 to March 22, 2019;
- REX, from May 6, 2004 to November 3, 2006.

The values of the AIC are given in Table 2.

Table 2.

Values of AIC

BSET					
Distribution	EGDL	SH-ASH	JS <sub>U</sub>	ST	NIG
AIC	195.421	196.089	197.409	197.660	197.202
REX					
Distribution	EGDL	SH-ASH	JS <sub>U</sub>	ST	NIG
AIC	193.487	198.660	203.294	206.033	201.564

Figure 6 shows the histogram and the fitted exponentiated generalized double Lomax distribution pdf for REX dataset.

The exponentiated generalized double Lomax distribution was fitted using the maximum likelihood method. Numerical maximization was accomplished using the simulated annealing method (R package `optimization`) for BSET dataset and the Hooke-Jeeves method (R package `dfoptim`) for REX dataset. Fitting of the competing distributions was done using the same R packages as for the SpScGDL distribution.

The exponentiated generalized double Lomax distribution corresponded to the lowest value of the AIC for both datasets.

**4. Conclusions.** Two new families of distributions were proposed: the spliced-scale generalized double Lomax distribution and the exponentiated generalized double Lomax distribution. These families can be successfully used for modeling heavy-tailed asymmetric data, e.g. stock returns.

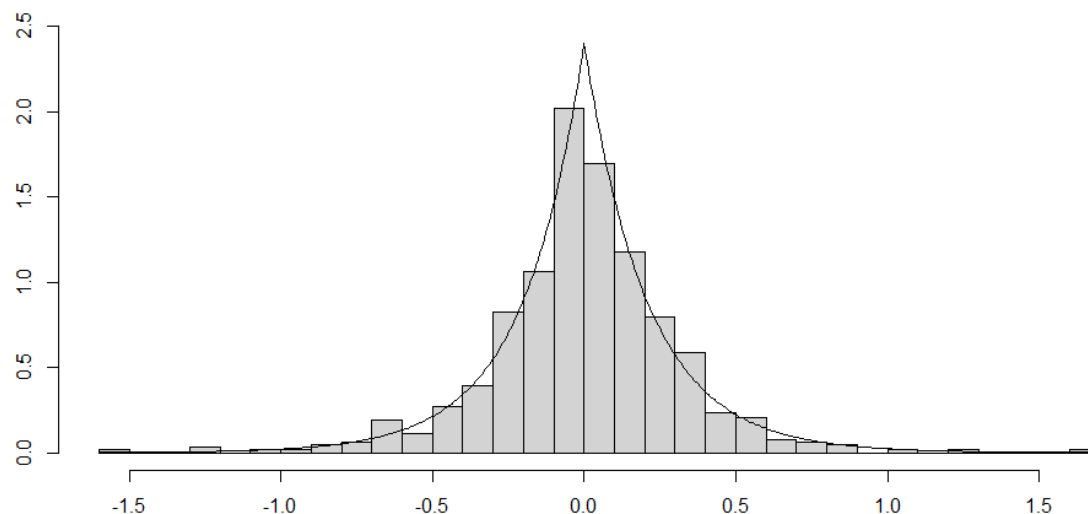


Figure 6. The histogram and the EGDL pdf for REX dataset

## References

1. Fares, A. S. M., & Gopal, V. V. H. (2016). The generalized double Lomax distribution with applications. *Statistica*, 76(4), 341–352.
2. Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2013). A New method for generating families of continuous distributions. *Metron*, 71(1), 63–79.
3. Goerg, G. M. (2011). Lambert  $W$  random variables — a new family of generalized skewed distributions with applications to risk estimation. *The Annals of Applied Statistics*, 5(3), 2197–2230.
4. Lee, C., Famoye, F., & Alzaatreh, A. Y. (2013). Methods for generating families of univariate continuous distributions in the recent decades. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 5(3), 219–238.
5. Rezaei, S., Sadr, B. B., Alizadeh, M. & Nadarajah, S. (2016). Topp-Leone generated family of distributions: properties and applications. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 6(46), 2893–2909.
6. Al-Hussaini, E. K., & Ahsanullah, M. (2015). *Exponentiated distributions*. Paris: Atlantis Press.
7. Fernández, C., & Steel, M. F. (1998). On Bayesian modeling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 359–371.
8. Yahoo! Finance, Danaher Corporation (DHR). (2022). Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/DHR>
9. Yahoo! Finance, International Flavors & Fragrances Inc. (IFF). (2022). Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/IFF>
10. Jones, M. C., & Pewsey, A. (2009). Sinh-arcsinh distributions. *Biometrika*, 96(4), 761–780.
11. Jones, M. C., & Faddy, M. J. (2003). A skew extension of the  $t$ -distribution, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 65(1), 159–174.
12. Yahoo! Finance, Bassett Furniture Industries, Incorporated (BSET). (2022). Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/BSET>
13. Yahoo! Finance, REX American Resources Corporation (REX). (2022). Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/REX>
14. Kotz, S., Kozubowski, T., & Podgórski, K. (2001). *The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance*.

New York: Springer Science & Business Media.

**Турчин Є. В.** Асиметричні аналоги узагальненого подвійного розподілу Ломакса: властивості та застосування.

Розглянуто два аналоги так званого узагальненого подвійного розподілу Ломакса. Це узагальнений подвійний розподіл Ломакса із “кусково-сталим параметром масштабу” та “піднесений до ступеня” узагальнений подвійний розподіл Ломакса. Вивчені властивості цих розподілів. Придатність нових розподілів для реальних застосувань підтверджена їх підгонкою до наборів даних по приростам на ціни акцій.

**Ключові слова:** узагальнений подвійний розподіл Ломакса, метод максимальної правдоподібності, момент, ентропія, квантиль.

### Список використаної літератури

1. Fares A. S. M., Gopal V. V. H. The generalized double Lomax distribution with applications. *Statistica*. 2016. Vol. 76 No. 4. P. 341–352.
2. Alzaatreh A., Lee C., Famoye F. A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*. 2013. Vol. 71, No. 1. P. 63–79.
3. Goerg, G. M. Lambert  $W$  random variables — a new family of generalized skewed distributions with applications to risk estimation. *The Annals of Applied Statistics*. 2011. Vol. 5, No. 3. P. 2197–2230.
4. Lee C., Famoye F., Alzaatreh A. Y. Methods for generating families of univariate continuous distributions in the recent decades. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*. 2013. Vol. 5, No. 3. P. 219–238.
5. Rezaei S., Sadr B. B., Alizadeh M., Nadarajah S. Topp-Leone generated family of distributions: properties and applications. *Communications in Statistics — Theory and Methods*. 2016. Vol. 6, No. 46. P. 2893–2909.
6. Al-Hussaini E. K., Ahsanullah M. Exponentiated distributions. Paris : Atlantis Press, 2015.
7. Fernández C., Steel M. F. On Bayesian modeling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*. 1998. Vol. 93, No. 441. P. 359–371.
8. Yahoo! Finance, Danaher Corporation (DHR). URL: <https://finance.yahoo.com/quote/DHR> (date of access: 01.02.2022).
9. Yahoo! Finance, International Flavors & Fragrances Inc. (IFF). (2022). URL: <https://finance.yahoo.com/quote/IFF> (date of access: 01.02.2022).
10. Jones M. C., Pewsey A. Sinh-arcsinh distributions. *Biometrika*. 2009. Vol. 96, No. 4. P. 761–780.
11. Jones M. C., Faddy M. J. A skew extension of the  $t$ -distribution, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*. 2003. Vol. 65, No. 1. P. 159–174.
12. Yahoo! Finance, Bassett Furniture Industries, Incorporated (BSET). URL: <https://finance.yahoo.com/quote/BSE> (date of access: 01.02.2022).
13. Yahoo! Finance, REX American Resources Corporation (REX). (2022). URL: <https://finance.yahoo.com/quote/REX> (date of access: 01.02.2022).
14. Kotz S., Kozubowski T., & Podgórski K. The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance. New York : Springer Science & Business Media, 2001.

Одержано 15.04.2023

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).103-116](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).103-116)**С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, М. М. Діхтярук<sup>2</sup>, В. Ф. Лазар<sup>3</sup>, М. М. Маляр<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
провідний науковий співробітник,  
доктор технічних наук, професор  
[babich\\_sy@ukr.net](mailto:babich_sy@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

<sup>2</sup> Хмельницький національний університет,  
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,  
кандидат фізико-математичних наук  
[mega-dihtyaruk@ukr.net](mailto:mega-dihtyaruk@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0819-3842>

<sup>3</sup> Мукачівський державний університет,  
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,  
кандидат технічних наук  
[vflazar@gmail.com](mailto:vflazar@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

<sup>4</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,  
доктор технічних наук  
[mykola.malyar@uzhnu.edu.ua](mailto:mykola.malyar@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПРУЖНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТРИНГЕРА І ДВОХ СМУГ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

В рамках лінеаризованої теорії пружності розглядається плоска контактна задача про передачу навантаження від нескінченного неоднорідного стрингера до двох однакових пружних смуг з початковими (залишковими) напруженнями, які защемлені однією гранню. Дослідження проведені в загальному вигляді для великих початкових деформацій і деяких варіантів теорії малих початкових деформацій, для довільної структури пружного потенціалу. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є одержано основні інтегро-диференціальні рівняння розв'язок яких представлено у вигляді квазірегулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив наявних початкових (залишкових) напружень у смугах на закон розподілу контактних напружень по лінії контакту з нескінченним неоднорідним стрингером.

**Ключові слова:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактні задачі, інтегральне перетворення Фур'є.

**1. Вступ.** Незважаючи на велику кількість літератури в якій розглядаються контактні задачі лінеаризованої теорії пружності [1, 2, 3, 4], дослідження з проблем пружної контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями в нашій країні і за кордоном з'явилися порівняно недавно. Лише останнім часом дослідження контактної взаємодії попередньо напружених тіл набуває особливого інтересу в зв'язку з впровадженням в практику нових штучних матеріалів, які можуть витримувати великі початкові деформації. Інколи доцільно штучно створювати початкові напруження (залишкові і технологічні) для компенсації і регулювання тих напружень, які виникають в елементах конструкцій під

час її експлуатації, а також для підвищення міцності. Це в основному пов'язано з тим, що при дослідженні задач про контактну взаємодію пружних тіл з початковими напруженнями лінійна теорія пружності не враховує впливу цих напружень. Для спрощення процесу досліджень їх можна врахувати в рамках лінеаризованої теорії пружності [5, 6, 1, 7]. Врахування початкових напружень в рамках лінеаризованої теорії пружності призводить до нових постановок задач взаємодії деформованих тіл, що істотно відрізняються від постановок класичних задач теорії пружності. І хоча при вирішенні цих завдань системи основних диференціальних рівнянь, вирази для визначення складових тензора напружень і структура граничних умов відрізняється від відповідних систем рівнянь і виразів тензора напружень теорії пружності, вони за своєю природою і структурою, споріднені звичайним контактним змішаним задачам [8, 9, 10, 11]. У цій роботі дана постановка і загальний метод вирішення поставленого завдання в разі пружних потенціалів довільної форми в загальному вигляді для теорій великих (скінченних) початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій.

При постановці зазначених завдань у всіх реферованих роботах приймаються чотири припущення, які є основними в теорії, що розглядає контактну взаємодію тіл з початковими напруженнями і пружних накладок (стрингерів):

- 1) контактна взаємодія пружної накладки без початкових напружень з попередньо напруженим пружним тілом здійснюється після виникнення в останньому початкового напруженого стану;
- 2) діючі на пружну накладку зовнішні навантаження викликають в попередньо напруженому тілі збурення напруженого деформівного стану за величиною значно менші відповідних величин початкового напруженого стану;
- 3) початковий напружений стан одного з взаємодіючих тіл має таку структуру, що в області їх взаємодії можна (приблизно, з достатнім ступенем точності) вважати початковий напружений стан однорідним;
- 4) розв'язок лінеаризованих задач теорії пружності про контактну взаємодію попередньо напружених тіл і пружних накладок – єдиний.

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 12, 13, 14] представлено розв'язки контактної задачі про контактну взаємодію нескінченного неоднорідного стрингера з попередньо напруженими смугами. Дослідження проведено у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих (скінчених) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Дотримуючись [6, 1, 15, 16] всі дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану  $y_i$ , що пов'язані з лагранжевими координатами  $x_i$  співвідношеннями  $y_i = \lambda_i x_i$  ( $i = 1, 2$ ), де  $\lambda_i$  — коефіцієнти видовжень, що визначають переміщення початкового стану в напрямках осей координат. При виконанні умов 1–4 в області контакту  $L_k \{a_k, b_k\}$  для пружних накладок і пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями, мають місце граничні умови при

$$y_2 = 0; \quad u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1); \quad \forall (y_1) \in L_k. \quad (1)$$

$$\frac{du}{dy_1} = \frac{du_1}{dy_1}; \quad \frac{dv}{dy_1} = \frac{du_2}{dy_1}; \quad \forall (y_1) \in L_k. \quad (2)$$



Граничні умови (1)–(2) разом з положеннями (1–4) та умовами рівноваги

$$p = \int_{a_k}^{y_1} \tau(t) dt, \tag{3}$$

замикають постановку лінеаризованих задач про контактну взаємодію пружних накладок (скінченних, нескінченних ( $a_k = -\infty$ ;  $b_k = +\infty$ )), що підсилюють пружну смугу.

**2. Постановка задачі і основні розв’язуючі рівняння.** Нехай нескінченні пружні смуги товщиною  $H$  з початковими напруженнями защемлені гранями  $y_2 = \pm H$ , а іншими своїми гранями з’єднані між собою нескінченним неоднорідним пружним стрингером малої товщини  $h$  (рис. 1).

Підсилені таким чином нескінченні попередньо напружені смуги перебувають під дією прикладених до з’єднувального нескінченного неоднорідного стрингера розподілених горизонтальних сил інтенсивності  $q_0(y_1)$  відповідно до (рис. 1). Необхідно встановити закони розподілу нормальних  $p(y_1)$  і горизонтальних  $q(y_1)$  напружень в області контакту.

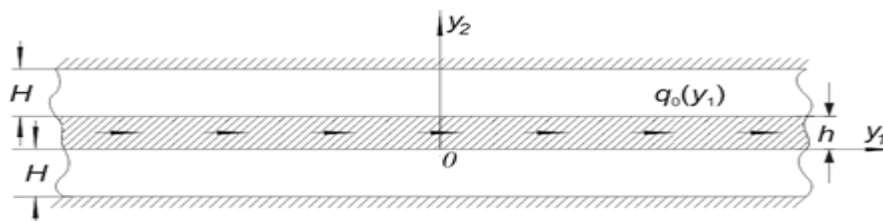


Рис. 1. .

При дослідженні області контакту, що до стрингера робимо припущення, що він під дією прикладеного навантаження і тільки тангенціальних контактних напружень розтягується або стискається як стрижень, що знаходиться в одновісному напруженому стані [17, 18, 19, 20]. Також припускаємо, що вздовж горизонтальної осі вертикальні пружні переміщення сталі. Останнє припущення обумовлене малістю товщини стрингера, так як її зміни від точки до точки в процесі деформації незначні і ними можна знехтувати.

Позначимо інтенсивності нормальних і тангенціальних контактних напружень, які діють вздовж лінії з’єднання стрингера з пружними попередньо напруженими смугами  $p(y_1)$  і  $q(y_1)$ , а вертикальні і горизонтальні переміщення відповідно  $u_1(y_1)$  і  $u_2(y_1)$ .

Перейдемо до отримання основних систем розв’язуючих рівнянь для поставленої задачі. З цією метою спочатку розглянемо рівновагу стрингера.

Із умови рівноваги частини стрингера  $(-\infty, x)$  отримаємо

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt, \quad (-\infty < y_1 < \infty) \tag{4}$$

Тут мається на увазі, що поперечний переріз стрингера прямокутний шириною якого дорівнює одиниці, а  $\sigma_{y_1 y_1}$  — осьове напруження в напрямку осі  $Oy_1$ .

Відповідно до закону Гука знаходимо осьове напруження в напрямку осі  $Oy_1$

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = E_1 \varepsilon_{y_1 y_1}(y_1), \quad (5)$$

де

$$\varepsilon_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{du(y_1)}{dy_1}. \quad (6)$$

Тут  $u(y_1)$  — горизонтальні переміщення точок пружного стрингера,  $E_1$  — модуль пружності стрингера.

Враховавши (4)–(6), знаходимо

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt, \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (7)$$

З припущення, що стрингер в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, можемо написати

$$D \frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = p(y_1) - p_0(y_1), \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (8)$$

Тут  $v(y_1)$  — вертикальні переміщення точок стрингера;  $D$  — жорсткість стрингера на згин;  $p_0(y_1), p(y_1)$  — інтенсивність вертикальних сил.

На лінії контакту стрингера з пружними смугами мають місце умови

$$u(y_1) = u_1(y_1), \quad v(y_1) = u_2(y_1), \quad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty), \quad (9)$$

де  $u_1(y_1), u_2(y_1)$  — переміщення точок в пружних смугах з початковими напруженнями. Потрібно визначити закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання стрингера з попередньо напруженими смугами.

Для визначення невідомих переміщень і напружень по лінії контакту стрингера з смугами запишемо граничні умови задачі для вільних від защемлення граней пружних смуг з початковими напруженнями від прикладеної під кутом  $\alpha_0$  сили  $P$  [6, 21, 22]

$$\tilde{Q}_{22}(y_1, 0) = -P\delta(y_1) \sin \alpha_0; \quad \tilde{Q}_{11}(y_1, 0) = -P\delta(y_1) \cos \alpha_0, \quad (10)$$

$$u_1(y_1 - t) = 0; \quad u_2(y_1 - t) = 0; \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (11)$$

де  $\delta(y_1)$  — дельта-функція Дірака.

В результаті розв'язування поставленої задачі функції впливу від дії тангенціальної сили (при  $\alpha_0 = 0$ ) для рівних коренів характеристичного рівняння [1] ( $n_1 = n_2$ ) такі:

$$h_{21}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha, \quad (12)$$

$$h_{22}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha.$$

Для нерівних коренів ( $n_1 \neq n_2$ ) можемо записати

$$\begin{aligned} h_{21}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{H}_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha, \\ h_{22}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{H}_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Ядра  $H_{ij}(\alpha)$  і  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  відповідно мають вигляд [2, 23, 24], для  $n_1 = n_2$ :

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0 [-(s+1)(s_1 \xi(\alpha) - \alpha \varphi_1) + \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s] = \\ &= m_0 [-(s+1)(s_1 \operatorname{sh} \alpha \varphi_1 \operatorname{ch} \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1) + \\ &\quad + \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha), \\ H_{22}(\alpha) &= i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [s \cdot s_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 + (\alpha \varphi_1)^2 - \\ &\quad - \alpha \varphi_1 \xi(\alpha) - s_1^2 \operatorname{sh}^2(\alpha \varphi_1) - s \cdot s_1] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha), \end{aligned} \tag{14}$$

для  $n_1 \neq n_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{21}(\alpha) &= m_0 [-ss_1(\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) - s \xi_3(\alpha) + s(\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) + \xi_3(\alpha)] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha), \\ \tilde{H}_{22}(\alpha) &= i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [1 - s_1 \operatorname{ch}(2\alpha \varphi_2) + ss_1 \xi_1(\alpha) \\ &\quad + s\alpha \varphi_1 \xi_4(\alpha) + ss_1(\alpha \varphi_1)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \\ &\quad - ss_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_2 - s_1^2(\alpha \varphi_1) \xi_4(\alpha) + \xi_3(\alpha)] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha), \end{aligned} \tag{15}$$

тут  $n_1$  і  $n_2$  корені визначального рівняння [1, 25]. Величини, що фігурують в формулах (12), (13), (14), (15) виражені через відомі параметри початкового напруженого стану [1, 2, 26].

**3. Розв’язуюча система рекурентних систем рівнянь.** Використовуючи принцип суперпозиції, переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями в напрямку осей  $Oy_1$  і  $Oy_2$  від одночасної дії нормальних і тангенціальних напружень для стисливих і нестисливих тіл в випадку потенціалів довільної структури визначаються формулами [1]

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^\infty h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^\infty h_{12}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau, \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^\infty h_{21}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^\infty h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Дотримуючись [1, 12], згідно прийнятих припущень і позначень, задачу можна сформулювати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{du_2(y_1)}{dy_1} &= 0, \quad (-\infty < y_1 < \infty), \\ E_1(y_1) \frac{du_1(y_1)}{dy_1} &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - q_0(t)] dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Зробивши припущення, що неоднорідність матеріалу стрингера змінюється за законом

$$E_1(y_1) = [(1 + \delta f(y_1))], \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (18)$$

де  $f(y_1)$  — деяка відома функція,  $\delta$  — малий параметр.

Використавши граничні умови контакту (9) і представивши невідомі контактні напруження  $p_0(y_1)$ ,  $q_0(y_1)$  в вигляді ряду за степенями малого параметра

$$q_0(y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k q^{(k)}(y_1), \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (19)$$

можемо записати розв'язуючу систему рекурентних систем інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{du_2^{(0)}(y_1)}{d(y_1)} = 0, \quad (-\infty < y_1 < \infty) \quad (20)$$

$$E_0 h \frac{d^2 u_1^{(0)}(y_1)}{d(y_1)^2} = 2q^{(0)}(y_1) - q_0(y_1),$$

$$\frac{du_2^{(k)}(y_1)}{d(y_1)} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (-\infty < y_1 < \infty) \quad (21)$$

$$E_0 h \frac{d^2 u_1^{(k)}(y_1)}{d(y_1)^2} = 2q^{(k)}(y_1) - q_0^{(k-1)}(y_1),$$

де

$$q_0^{(k-1)}(y_1) = h_0 \frac{d}{d(y_1)} \left[ f(y_1) \frac{du_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right], \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau) p^{(k)}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q^{(k)}(\tau) d\tau,$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p^{(k)}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - \tau) q^{(k)}(\tau) d\tau,$$

$$(k = 0, 1, \dots), \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

$$f_1^{(k-1)}(y_1) = D_0 \frac{d^2}{d(y_1)^2} \left[ f(y_1) \frac{d^2 u_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)^2} \right], \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (22)$$

$$f_2^{(k-1)}(y_1) = E_0 h \frac{d}{d(y_1)} \left[ f(y_1) \frac{du_1^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right], \quad D_0 = E_0 I.$$

Тут  $D_0$  — нульовий член розкладання в ряд.  $D(y_1) = IE_1(y_1)$  — жорсткість стрингера на згин,  $I$  — параметр неоднорідності.

Система (20) описує контактну задачу для однорідного нескінченного стрингера [23, 27, 28], кожна наступна система з (21) відрізняється від попередньої тільки зовнішнім навантаженням. Отже, розв’язок контактної задачі для попередньо напруженої смуги, підсиленої неоднорідним нескінченим стрингером, зводиться до розв’язування ряду однорідних контактних задач, які відрізняються між собою тільки зовнішніми навантаженнями. Нульовий наближений розв’язок, тобто розв’язок системи (20) за допомогою перетворення Фур’є побудований в [3] і має вигляд

$$p(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha^2 H_{21}^*(\alpha) \tilde{q}_0(\alpha) + H_{22}^*(\alpha) \tilde{p}_0(\alpha)] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha; \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (23)$$

$$q(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H_{11}^*(\alpha) \tilde{q}_0(\alpha) - iH_{12}^*(\alpha) \tilde{p}_0(\alpha)] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha.$$

Тут величини  $H^{-1}(\alpha)$ ,  $H_{ij}^*(\alpha)$  ( $i, j = 1, 2$ ), виражаються через відомі функції  $H_{ij}(\alpha)$  та  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  ( $i, j = 1, 2$ ), які визначаються згідно формул для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1, 2, 5, 25] в випадку контрректної структури пружних потенціалів. Решта наближень розв’язків в випадках впливу неоднорідності матеріалу стрингера будуються аналогічним чином.  $\tilde{p}_0(\alpha)$  та  $\tilde{q}_0(\alpha)$  — Фур’є, а  $\mu$  — коефіцієнт Ляме.

Таким чином,  $k$ -ве наближення має вигляд

$$p^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^{(k)}(s) e^{-isy_1} ds, \quad q^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{(k)}(s) e^{-isy_1} ds, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де

$$P^{(k)}(s) = Ds^2 \left\{ \tilde{f}_1^{(k-1)}(s) [E_0hs^2H_{22}(s) + 1] - E_0hs^3\tilde{f}_2^{(k-1)}(s)H_{12}(s) \right\} / L(s),$$

$$Q^{(k)}(s) = -IE_0hs \left\{ \tilde{f}_2^{(k-1)}(s) [D_0hs^4H_{11}(s) + 1] + \right. \quad (24)$$

$$\left. + D_0hs^3\tilde{f}_1^{(k-1)}(s)H_{12}(s) \right\} / L(s), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

є трансформантами Фур’є контактних напружень.

В (24):

$$L(s) = [D_0s^4H_{11}(s) - 1] [E_0hs^2H_{22}(s) + 1] + D_0E_0s^4hH_{12}^2(s),$$

$$(j = 1, 2), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

тут  $F$  — оператор перетворення Фур’є для вказаної функції (функціонал).

Застосувавши до (20) і (21) інтегральне перетворення Фур'є, відносно трансформант контактних напружень, отримаємо наступні системи:

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1)p^{(0)}(y_1) - Ih_{12}(y_1)Q^{(0)}(y_1) &= 0, \\ E_0hy_1^2h_{21}(y_1)p^{(0)}(y_1) - [E_0hy_1^2h_{22}(y_1) + 2]Q^{(0)}(y_1) &= Q_0(y_1), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1)p^{(k)}(y_1) - Ih_{12}(y_1)Q^{(k)}(y_1) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots), \\ E_0hy_1^2h_{21}(y_1)p^{(k)}(y_1) - [E_0hy_1^2h_{22}(y_1) + 2]Q^{(k)}(y_1) &= Q_0^{(k-1)}(y_1), \end{aligned} \quad (26)$$

де

$$p^{(k)}(y_1) = F[p^{(k)}(y_1)], \quad Q^{(k)}(y_1) = F[q^{(k)}(y_1)], \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$Q_0(y_1) = F[q_0(y_1)], \quad Q_0^{(k-1)}(y_1) = F[q_0^{(k-1)}(y_1)],$$

$I$  — параметр неоднорідності, а  $h_{ij}(y_1)$  — функції впливу, вирази яких задаються формулами: для рівних коренів  $n_1 = n_2$ :

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha, \\ h_{12}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

для нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\begin{aligned} h_{11}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha, \\ h_{12}(y_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут  $h_{ij}(\alpha)$ ,  $i, j = 1, 2$  функції впливу, які характеризують переміщення граничних точок грані  $y_2 = 0$  нескінченної пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями від одиничної горизонтальної сили, ядра  $H_{ij}(\alpha)$  і  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  відповідно мають вигляд (14), (15).

Після знаходження трансформант контактних напружень з систем (25), (26) і застосувавши обернене перетворення Фур'є отримаємо вирази нульового і  $k$ -го наближення нормальних і тангенціальних напружень

$$\begin{aligned} p^{(0)}(y_1) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{12}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0(\alpha) \operatorname{sign} \alpha e^{-i\alpha y_1} d\alpha, \quad (-\infty < y_1 < \infty); \\ q^{(0)}(y_1) &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

$$p^{(k)}(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{12}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0^{(k-1)}(\alpha) \operatorname{sign} \alpha e^{-i\alpha y_1} d\alpha, \quad (-\infty < y_1 < \infty);$$

$$q^{(k)}(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} Q_0^{(k-1)}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha.$$
(30)

Тут величини  $H(\alpha)$ ,  $H_{ij}^*(\alpha)$  ( $i, j = 1, 2$ ) виражаються через відомі функції  $H_{ij}(\alpha)$  та  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  ( $i, j = 1, 2$ ), які визначаються згідно формул для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1, 2, 29, 30] в випадку контрєктної структури пружних потенціалів.

Вирази контактних напружень (29) описують розв'язок контактної задачі для однорідного стрингера, але вони одночасно є також нульовим наближенням розв'язку задачі для неоднорідного стрингера. Решта наближень розв'язків, що виражаються формулами (30) демонструють вплив неоднорідності стрингера. Слід відмітити, що цим способом можна розв'язувати контактні задачі для пружного тіла, підсиленого нескінченим стрингером з слабкою неоднорідністю, яка змінюється за законом

$$E_1(y_1) = [(1 + \delta f(y_1))], \quad (-\infty < y_1 < \infty),$$

де  $f(y_1)$  — деяка відома функція,  $\delta$  — малий параметр.

**4. Розв'язок систем розв'язуючих рівнянь.** Застосувавши до обох частин системи (23), інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $y_1$  і використавши теорему про згортку, знайдемо вирази для контактних напружень в пружних смугах з початковими напруженнями.

Нульове наближення для випадків рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння набере вигляду (23), якщо в цих формулах провести заміну:

- ✓ для рівних коренів ( $n_1 = n_2$ ):  $H_{ij}^*(\alpha)$  на  $H_{ij}(\alpha)$ ,
- ✓ для нерівних коренів ( $n_1 \neq n_2$ ):  $H_{ij}^*(\alpha)$  на  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ ,
- ✓ де ядра  $H_{ij}(\alpha)$  та  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  відповідно мають вигляд (14) і (15).

Розглянемо числові приклади для нестисливих тіл неогуківського матеріалу (потенціал Трелоара) (рис. 2–3).

Тут  $p(\xi)$ ,  $q(\xi)$  — безрозмірні контактні нормальні і тангенціальні напруження в пружних смугах з початковими напруженнями. Значення  $\lambda_1 = 1$  відповідає класичній теорії пружності і збігається з результатами роботи [18, 31],  $\lambda_1 = 0; 0,8; 0,4$  — відповідає початковим напруженням стиснення, а  $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$  — початкові напруження розтягування,  $\xi$  є безрозмірною координатою початкового напруженого стану в пружній смузі з початковими напруженнями.

Аналіз графіків показує, що у випадку стиснення ( $\lambda_1 < 1$ ) наявність початкових напружень у пружній смузі призводить до значного зменшення контактних напружень, у випадку розтягування ( $\lambda_1 > 1$ ) — до їх збільшення.

**5. Висновок.** В роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу зосередженого горизонтального навантаження від злегка неоднорідного нескінченного пружного стрингера

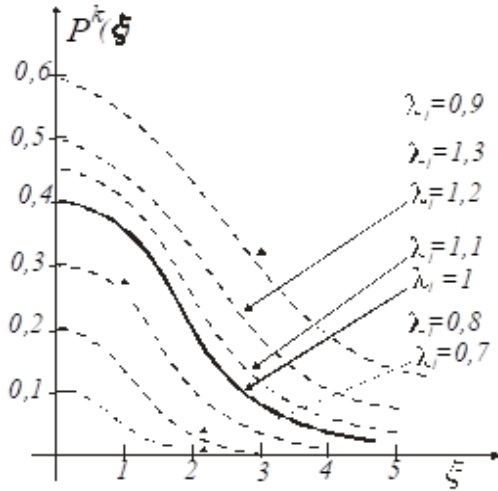


Рис. 2. .

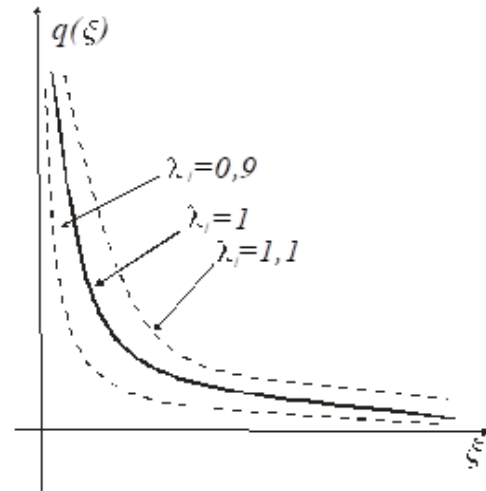


Рис. 3. .

до двох попередньо напружених смуг з защемленими вільними від навантаження гранями. Дослідження були проведені в цілому для теорії великих початкових деформацій та декількох варіантів теорії малих початкових деформацій у випадку довільної структури пружного потенціалу. Розв'язок задачі зведено відносно нормальних і тангенціальних контактних напружень до розв'язуючої системи рекурентних систем інтегро-дифференціальних рівнянь розв'язок яких побудовано за степенями малого параметра. Нульовий наближений розв'язок неоднорідної задачі будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлено у вигляді інтегралів Фур'є. Дослідження, представлені в статті дають можливість зробити низку узагальнених висновків, що стосуються впливу початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль при нескінченній накладці, що взаємодіє з попередньо напруженими смугами.

1. У загальному випадку для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1, 30] для розглядуваного в рамках лінеаризованої теорії пружності класу контактних задач сформульовано загальний метод розв'язування, який дає можливість отримати розв'язок поставлених задач, якщо відомий розв'язок аналогічних лінійних (без початкових напружень) задач.
2. У випадку рівних коренів визначального рівняння [1,30] для тіл з пружними потенціалами довільної форми напруження і переміщення на кінцях пружних накладок мають особливість, яка повністю збігається з особливістю в аналогічних задачах класичної лінійної теорії пружності. З нерівними коренями для тіл з пружними потенціалами довільної форми не вдається довести співпадання порядків вказаних особливостей.
3. Контактні напруження на лінії контакту з пружною накладкою значно залежать від початкових напружень. Більш істотний вплив кількісного характеру початкові напруження проявляють в високоеластичних матеріалах. Якісний вплив має ідентичний характер.

#### РЕЗЮМЕ.

В рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального зосередженого навантаження від



неоднорідного нескінченного в обох напрямках стрингера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Розв'язок задачі зводиться відносно нормальних і тангенціальних контактних напружень, до системи рекурентних систем інтегро-дифференційних рівнянь, яка розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлені у вигляді інтегралів Фур'є.

Початкові напруження в пружних смугах призводять до істотної зміни закону розподілу контактних напружень; при цьому в разі стискування контактні напруження значно зменшуються (в разі розтягування — збільшуються), а переміщення в разі стискування значно зростають (при розтягуванні — зменшуються). Істотніший вплив (кількісного характеру) початкові (залишкові) напруження мають у високоеластичних матеріалах в порівнянні з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має аналогічний характер.

### Список використаної літератури

1. Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. Київ: Вища шк., 1995. 305 с.
2. Діхтярук М. М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Пр. 4-го Міжнародного симпозиуму з трибофатикої (ISTF)*, 2002. С. 426–431.
3. Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Доповіді національної академії наук*, 2004. № 3. С. 46–49.
4. Yuan W. K., Long J. M., Ding Y. and Wang G. F., Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension. *Journal of Applied Mechanics*, 2017. Vol. 84, No. 1. P. 1–12.
5. Бабич С. Ю., Діхтярук Н. Н., Дегтярь С. В. Контактная задача для двух одинаковых полос с начальными напряжениями, усиленных периодически расположенными креплениями. *Прикл. механика*, 2019. Т. 55, № 6. С. 56–63.
6. Бабич С. Ю., Діхтярук Н. Н. Передача нагрузки от бесконечного неоднородного стрингера к заземленной одной гранью упругой полосе с начальными напряжениями. *Прикл. механика*, 2020. Т. 56, № 6. С. 1–10.
7. Рудницький В. Б., Діхтярук Н. Н. Контактная задача о взаимодействии бесконечного стрингера и двух одинаковых полос с начальными напряжениями. *Прикл. механика*, 2017. Т. 53, № 2. С. 41–48.
8. Akopyan V. N., Mirzoyan S. A., Mkhitaryan S. M. The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack. *Int. Appl. Mech.*, 2015. Vol. 51, No. 2. P. 176–186.
9. Aleksandrov V. M. Optimal control of linear systems with interval constraints. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2015. Vol. 55, No. 5. P. 758–775.
10. Babich, S. Y., Yarets'ka N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 2021. Vol. 57, No. 6 P. 297–305.
11. Moses O. P., Adewale A. O., Olusegun O. A. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*, 2016. Vol. 4, No. 1. P. 51–58.
12. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия: Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 795 с.
13. Guz A. N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review). *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 3. P. 231–252.

14. Guz A. N. Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community. *Int. Appl. Mech.*, 2015. Vol. 51, No. 1. P. 1–11.
15. Babich S. Y., Dikhtyaruk N. N. Load Transfer from an Infinite Inhomogeneous Stringer to a Prestressed Elastic Strip Clamped at One Edge. *International Applied Mechanics*, 2020. Vol. 56, No. 6. P. 708–716.
16. Yaretskaya N. A. The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer. *Bulletin of NAS of Ukraine*, 2014. No. 1. P. 57–62.
17. Рудницький В. Б., Дихтярук Н. Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикл. механика*, 2002. Т. 38, № 11. С. 81–88.
18. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
19. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Int. Appl. Mech.*, 2004. Vol. 40, No. 3. P. 290–296.
20. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Prikladnaya Mekhanika*, 2004. Vol. 40, No. 3. P. 63–70.
21. Guz A. N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review). *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 1. P. 1–57.
22. Dikhtyaruk N. N. Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, 2016. Vol. 83, No. 3. P. 51–61.
23. Дихтярук Н. Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. *Прикл. механика*, 2004. Т. 40, № 3. С. 63–70.
24. Dikhtyaruk N. N., Kurinenko O. V., Poplavskaya E. A., Samaruk N. N. Interaction Between a Finite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *Int. Appl. Mech.*, 2019. Vol. 55, No. 1. P. 79–85.
25. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 4. P. 378–388.
26. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, 2017. Vol. 53, No. 2. P. 149–155.
27. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*, 2004. Vol. 40, No. 7. P. 744–765.
28. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Initially stressed elastic strip strengthened by elastic stringers. *Prikladnaya Mekhanika*, 2002. Vol. 38, No. 11, P. 81–87.
29. Babich S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., Degtyar, S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 2019. Vol. 55, No. 6. P. 629–635.
30. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *Int. Appl. Mech.*, 2002. Vol. 38, No. 11. P. 1354–1360.
31. Bosakov S. V. Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates. *Int. Appl. Mech.*, 2014. Vol. 50, No. 6. P. 651–663.

**Babich S. Yu., Dikhtyaruk M. M., Lazar V. F., Malyar M. M.** Contact problem for an infinite elastic inhomogeneous stringer and two strips with initial stresses.

In the framework of the linearized theory of elasticity, a flat contact problem is considered to transfer the load from an infinite heterogeneous stringer to two identical elastic bands with initial (residual) stresses that are clogged with one grade. Studies are generally conducted for large initial deformations and some variants of the theory of small initial deformations, for an arbitrary structure of elastic potential. With the Fourier integral transformation, the main integro-differential solutions of the solution of which are presented in the form of quasi-regulating infinite systems of algebraic equations. The influence of existing initial (residual) stresses in strips to the law of distribution of contact stresses along the contact line with an infinite heterogeneous stringer is investigated.

**Keywords:** Contact problems, the linearized elasticity theory resiliency, resilient protective strap, initial (residual) tension, initial deformations.

## References

1. Guz', O. M., Babich, S. Yu., & Rudnits'kii, V. B. (1995). *Kontaktna vzaemodiya pruzhnikh til z pochatkovimi napruzheniyami*. Kyiv: Vishcha shk.
2. Dikhtyaruk, M. M. (2002). Vznachennya funktsii vplivu dlya pruzhnoi smugi z pochatkovimi (zalishkovimi) napruzheniyami. *Pr. 4-go Mizhnarodnogo simpoziumu z tribofatiki (ISTF)*, 426–431.
3. Dikhtyaruk, M. M. (2004). Periodichna kontaktna zadacha dlya pruzhnoi smugi z pochatkovimi (zalishkovimi) napruzheniyami. *Dopovidi natsional'noi akademii nauk*, 46–49.
4. Yuan, W. K., Long, J. M., Ding, Y., & Wang, G. F. (2017). Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension. *Journal of Applied Mechanics*, 84(1), 1–12.
5. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar', S. V. (2019). Kontaktnaya zadacha dlya dvukh odinakovykh polos s nachal'nymi napryazheniyami, usilennykh periodicheski raspolozhennymi krepleniyami. *Prikl. mekhanika*, 55(6), 56–63.
6. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Peredacha nagruzki ot beskonechnogo neodnorodnogo stringera k zashchemlennoi odnoi gran'yu uprugoi polose s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikl. mekhanika*, 56(6), 1–10.
7. Rudnitskii, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Kontaktnaya zadacha o vzaimodeistvii beskonechnogo stringera i dvukh odinakovykh polos s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikl. mekhanika*, 53(2), 41–48.
8. Akopyan, V. N., Mirzoyan, S. A., & Mkhitarian, S. M. (2015). The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack. *Int. Appl. Mech.*, 51(2), 176–186.
9. Aleksandrov, V. M. (2015). Optimal control of linear systems with interval constraints. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 55(5), 758–775.
10. Babich, S. Y., & Yarets'ka, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(6), 297–305.
11. Moses, O. P., Adewale, A. O., & Olusegun, O. A. (2016). Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*, 4(1), 51–58.
12. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami*. Germaniya, Saarbrücken LAP LAMBERT Academic Publishing.
13. Guz, A. N. (2015). Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review). *Int. Appl. Mech.*, 50(3), 231–252.
14. Guz, A. N. (2015). Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community. *Int. Appl. Mech.*, 51(1), 1–11.
15. Babich, S. Y., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load Transfer from an Infinite Inhomogeneous Stringer to a Prestressed Elastic Strip Clamped at One Edge. *International Applied Mechanics*, 56(6), 708–716.
16. Yaretskaya, N. A. (2014). The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer. *Bulletin of NAS of Ukraine*, 1, 57–62.
17. Rudnitskii, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). Uprugaya polosa s nachal'nymi napryazheniyami, usilennaya uprugimi nakladkami. *Prikl. mekhanika*, 38(11), 81–88.
18. Sarkisyan, V. S. (1983). *Kontaktnye zadachi dlya poluploskosti i polos s uprugimi nakladkami*. Erevan: Izd. Erevan. un-ta.
19. Dikhtyaruk, N. N. (2004). Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Int. Appl. Mech.*, 40(3), 290–296.
20. Dikhtyaruk, N. N. (2004). Equilibrium of a prestressed strip reinforced with elastic plates. *Prikladnaya Mekhanika*, 40(3), 63–70.
21. Guz, A. N. (2014). Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review). *Int. Appl. Mech.*, 50(1), 1–57.

22. Dikhtyaruk, N. N. (2016). Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, 83(3), 51–61.
23. Dikhtyaruk, N. N. (2004). O ravnovesii polosy s nachal'nymi napryazheniyami, usilennoi uprugimi nakladkami. *Prikl. mekhanika*, 40(3), 63–70.
24. Dikhtyaruk, N. N., Kurinenko, O. V., Poplavskaya, E. A., & Samaruk, N. N. (2019). Interaction Between a Finite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *Int. Appl. Mech.*, 55(1), 79–85.
25. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *Int. Appl. Mech.*, 50(4), 378–388.
26. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, 53(2), 149–155.
27. Babich, S. Yu., Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2004). Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*, 40(7), 744–765.
28. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). Initially stressed elastic strip strengthened by elastic stringers. *Prikladnaya Mekhanika*, 38(11), 81–87.
29. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar, S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 55(6), 629–635.
30. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *Int. Appl. Mech.*, 38(11), 1354–1360.
31. Bosakov, S. V. (2014). Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates. *Int. Appl. Mech.*, 50(6), 651–663.

Одержано 15.03.2023

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).117-130](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).117-130)**С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, Н. О. Ярецька<sup>2</sup>, В. Ф. Лазар<sup>3</sup>, М. В. Микоряк<sup>4</sup>**<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,

провідний науковий співробітник,

доктор технічних наук, професор

babich\_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115><sup>2</sup> Хмельницький національний університет,

доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,

кандидат фізико-математичних наук

yaretskano@khmnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878><sup>3</sup> Мукачівський державний університет,

доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,

кандидат технічних наук

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X><sup>4</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,

здобувач першого (бакалаврського) рівня вищої освіти,

mykoryak.maryna@student.uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3066-8912>

## ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА ТА ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Стаття присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та двох пружних півпросторів з початковими напруженнями в аналітичному вигляді без врахування сил тертя. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння.

Дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампа та пружних основ (півпросторів) однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь.

Для дослідження задачі використовується велика кількість фундаментальних результатів таких як: перетворення Ханкеля, парні інтегральні рівняння, ортогональні поліноми та інші методи теорії контактних задач лінійної теорії пружності. Числовий аналіз представлений для потенціалу Трелоара у вигляді графіків. Відзначено достатній вплив початкових (залишкових) напружень у двох пружних півпросторах

та пружному циліндричному штампі на розподіл контактних напружень в області контакту.

**Ключові слова:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, циліндричний штамп, півпростір.

**1. Вступ.** Актуальною задачею сучасного машинобудування та будівництва споруд є підвищення довговічності, зносостійкості та надійності механізмів, машин та інженерних конструкцій. Звісно, широке коло наукових досліджень у межах механіки деформованого твердого тіла сприяє успішному її розв'язку. Від методів розрахунку передачі навантаження у деталях машин та конструкціях залежать ряд завдань, таких як: збільшення термінів експлуатації машин та споруд, зменшення їх ваги, зниження собівартості матеріалів, економічної сумісності тощо.

У багатьох публікаціях періодичних наукових видань та працях навчального і монографічного характеру [1, 2] досить детально вивчені питання, що стосуються контактних задач для пружних, пластичних та в'язко пружних тіл без дії на них початкових напружень. Кількість таких публікацій доволі велика. Але запити сучасної інженерно-технічної практики висувають до дослідників ряд задач, які потребують використання більш ускладнених моделей до яких належать моделі суцільних середовищ. До факторів, які мають бути врахованими під час контактної взаємодії твердих деформованих тіл, відносять: поверхневі властивості матеріалу, тертя, жорсткість поверхні, тепловиділення, зносостійкість поверхні тіл тощо [3, 4]. Отже, під час контактної взаємодії тіл важливим є фактор врахування початкових напружень.

Незважаючи на те, що в останні десятиліття розвиток контактних задач досягнув суттєвих успіхів, у механіці твердого деформованого тіла все ще залишається ряд проблем, які вимагають уваги наукової спільноти. До них належать питання врахування початкових напружень під час контактної взаємодії пружних тіл. Дані дослідження представлені великою кількістю наукових статей, серед яких відзначимо роботи [5 – 15].

Оскільки початкові напруження присутні практично в усіх компонентах деталей машин та конструкцій, елементах будівель та споруд й, навіть, у кровоносних судинах живих істот, то їх врахування є важливою задачею теорії пружності.

Для компенсації контактних характеристик, що виникають у процесі роботи в елементах конструкцій доречно іноді навмисно створювати початкові напруження. Це дає змогу підвищити характеристики міцності конструкцій та матеріалів. А враховуючи, що нові штучні матеріали можуть витримувати достатньо великі початкові деформації, особливої актуальності набуває дослідження контактних задач для попередньо напружених тіл.

Проблема дослідження впливу початкових деформацій на напружено-деформованих стан тіл, що знаходяться у контакті, виникла у цілому ряді фундаментальних та прикладних наукових напрямків, таких як: механіка композитів, механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівних методах визначення навантажень, сейсмологія, біомеханіка, механіка гірських порід, геофізика тощо. Отже, необхідність у дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл є важливим аспектом вивчення представлених проблем.

Для правильної оцінки запасів міцності матеріалів, також, необхідно більш ефективно враховувати початкові напруження. Їх необхідно враховувати при створенні матеріалів з яких виготовляють конструкції та під час розрахунку відповідальних елементів споруд та машин. Також, це дозволить суттєво знизити матеріаломісткість конструкцій, зберігши одночасно і фундаментальні характеристики матеріалів у цілому.

Спираючись на дослідження [9] якісних та кількісних характеристик підсилення несних елементів конструкції пружними скінченними накладками (стрингерами), можна побачити, що наявність початкових напружень, достатньо сильно впливає на міцнісні ресурси матеріалів цієї конструкції. Відзначимо, що розглянуті тіла у [9] — є пружними, а контактна взаємодія між основами (тілами) відбувається після виникнення у них початкових (залишкових) напружень.

Історично, для розв'язку контактних задач, що враховують початковий напружено-деформований стан, склалися два підходи, які розвивалися паралельно. Першим підходом був розв'язок контактних задач для тіл з пружними потенціалами конкретної структури, а другим підходом було дослідження задач для пружних тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу.

Однією із перших (стосовно першого напрямку) була опублікована праця [10], в якій представлено розв'язок задачі для колової тріщини пружного нестисливого тіла з початковими напруженнями у випадку потенціалу Трелоара. До цього ж напрямку належать і наукові праці вітчизняних та зарубіжних вчених [11, 12].

Фундаментальні результати другого напрямку були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. Гузем О. М. [3, 13,14]. Ним вперше було розв'язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями. Даний метод розв'язку оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових контактних задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями (другий напрямок), отримала у працях його учнів [5, 6, 8, 9, 13–15].

На думку авторів статті, перевага другого підходу над першим полягає в тому, що другий підхід дозволяє розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. А необхідні графіки та числові результати для конкретних пружних потенціалів можуть бути отримані лише на завершальному етапі. А перший підхід передбачає розв'язок поставленої задачі лише для одного конкретного потенціалу.

Тому у даній статті дослідження контактної задачі для попередньо напружених ідентичних півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку нерівних коренів визначального рівняння [14] виконано у межах другого підходу. Причому аналітичні розв'язки у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності представлені у статті [15], а числові

результати дослідження [15] пропонуємо читачам у даній статті.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однорідні та рівні. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [1].

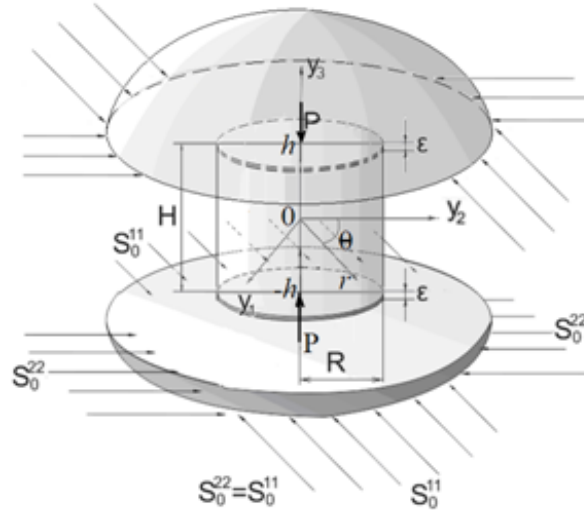


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями.

**2. Постановка задачі.** Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою  $H$  з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю  $y_3$  циліндричної системи координат  $(r, \theta, y_3)$  стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили  $P$ . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не завантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини  $y_3 = 0$  на величину  $\varepsilon$ . Величини:  $R$  — радіус циліндричного штампа,  $h = 0,5H$ .

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1 величини  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а  $S_0^{11}, S_0^{22}$  — компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. А у випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані  $y_i$  ( $i = 1, 3$ ).

Вважаємо, що початкові стани у штампах та циліндрі однорідні та рівні, а пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [9]. Крім того, дія штампа викликає в тілах



мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану  $y_i$ , які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями  $y_i = \lambda_i x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ).

У даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ( $\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$ ) характеристичного (визначального) рівняння [9].

У системі колових циліндричних координат  $(r, \theta, z_i)$ , де  $z_i = v_i^{-1} y_3$ ,  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = 1, 2$ ),  $n_1 = \xi_2'^2$ ,  $n_2 = \xi_3'^2$  такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного штампa в області контакту  $z_i = \pm h/v_i$ , де  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, \quad Q'_{33} = Q'^{(i)}_{33}, \quad Q'_{3r} = 0, \quad Q'^{(3)}_{3r} = 0, \quad (0 \leq r \leq R) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту  $z_i = \pm h/v_i$ , ( $i = \overline{1, 2}$ ):

$$Q'^{(i)}_{33} = 0, \quad Q'^{(i)}_{3r} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad (r > R) \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

3) на боковій поверхні пружного штампa  $r = R$ :

$$Q'_{rr} = 0, \quad Q'^{(3)}_{3r} = 0, \quad (|z_i| \leq h/v_i), \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодією навантаження  $P$  має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q'_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q'_{33}^{(i)}| = |Q'^{(i)}_{3r}|_{z_i = \pm H/v_i}, \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова (5) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампa із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

**3. Основні співвідношення та метод розв'язку.** Напружено-деформований стан у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [14, 15]:

$$Q'_{33}^{(i)}(\rho; \zeta_i) = \frac{C_{44}(1 + m_1)l_1}{R} \int_0^\infty F(\eta)(s e^{\eta\zeta_2} - s_3 e^{\eta\zeta_1}) J_0(\eta\rho) d\eta,$$

$$Q'_{3r}^{(i)}(\rho; \zeta_i) = -\frac{C_{44}(1 + m_1)}{v_1 R} \int_0^\infty F(\eta)(e^{\eta\zeta_2} - e^{\eta\zeta_1}) J_1(\eta\rho) d\eta, \quad (6)$$

$$U_3^{(i)}(\rho; \zeta_i) = -\frac{m_1}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} (s_2 e^{\eta\zeta_2} - s_3 e^{\eta\zeta_1}) J_0(\eta\rho) d\eta,$$

$$U_r^{(i)}(\rho; \zeta_i) = - \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} (e^{\eta\zeta_2} - s_3 e^{\eta\zeta_1}) J_1(\eta\rho) d\eta,$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} \omega'_{1313}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111}n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}; \\ \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} n_i; \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}; \\ \frac{\kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\lambda_3 q_3}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases}$$

$\xi = \frac{z_i v_i}{R}$ ,  $\zeta_i = \frac{\xi}{v_i} = \frac{z_i}{R}$ ,  $\eta = \xi R$ , ( $i = 1, 2$ ),  $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$ ,  $s_0 = (1 + m_2)(1 + m_1)^{-1}$ ,  $s_1 = (m_1 - 1)m_1^{-1}$ ,  $s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}$ ,  $s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1}$ ,  $F(\eta)$  — шукана функція,  $J_v(x)$  — функції Бесселя дійсного аргументу.

Які в області контакту ( $y_3 = \pm h$ ,  $z_i = \pm h/v_i$  ( $i = 1, 2$ )) набувають вигляду:

$$Q_{33}^{(i)}(\rho; \zeta_i) = \frac{2\varepsilon C_{44}(1 + m_1)l_1}{\pi R} \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} [s S_2^0(\rho; \zeta_2) - s_3 S_2^0(\rho; \zeta_1)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Phi_k^* [s K_1^0(\rho; \mu_k; \zeta_2) - s_3 K_1^0(\rho; \mu_k; \zeta_1)] \right\rangle \quad (7)$$

$$U_3^{(i)}(\rho; \zeta_i) = \frac{2m_1\varepsilon}{n_1\pi} \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} [s_3 S_1^0(\rho; \zeta_1) - s_2 S_1^0(\rho; \zeta_2)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Phi_k^* [s_3 K_0^0(\rho; \mu_k; \zeta_1) - s_2 K_0^0(\rho; \mu_k; \zeta_2)] \right\rangle$$

де

$$S_p^m(\rho; \zeta_i) = \int_0^{\infty} \eta^{p-1} \psi(\eta, 0) e^{\eta\zeta_i} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$$K_p^m(\rho; \mu_k; \zeta_i) = \int_0^{\infty} \eta^p \psi(\eta, \mu_k) e^{\eta\zeta_i} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$\psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta}$ ,  $\omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1(s_3 - s_2)}$ ,  $\psi(\eta, \mu_k) = \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}$ ,  $\mu_k$  — розв'язок рівняння  $J_1(\mu_k) = 0$ ,  $\chi_k$  — деякі невідомі сталі,  $F_k^*$  — величина, яка

буде представлена нижче

$$\Phi_k^* = \frac{\mu_k F_k^*}{R n_1} \left[ m_1 \left( \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \frac{n_2 \mu_k \varepsilon \omega_2 \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 R \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m_2}{n_2} \left( \frac{n_2 \mu_k \varepsilon \omega_2}{n_1 s_0 R} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{v_2 \mu_k \varepsilon \omega_2 \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{n_1 R \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right) \right].$$

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями у випадку нерівних коренів ( $\xi_2^2 \neq \xi_3^2$ ) характеристичного рівняння [14] приймемо у вигляді:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \tag{8}$$

де

$$\tilde{\chi}_1 = C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + J_0(\alpha_k r) S_2(\alpha_k z_1)],$$

$$\tilde{\chi}_2 = C_0 z_2 (3r^2 - 2z_2^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k v_2 z_2) + J_0(\alpha_k r) S_3(\alpha_k z_2)],$$

$I_\nu(x)$  — функція Бесселя уявного аргументу,  $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$ ,  $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$ ,  $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$ ,  $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$  — деякі сталі коефіцієнти,  $\alpha_k, \gamma_k$  — власні значення задачі (2)–(5).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів рівняння [14], із врахуванням граничних умов (2)–(5), представимо у вигляді

$$U_3^{(3)} = \frac{\varepsilon \omega_2}{R} \left\langle -\frac{R}{\omega_2 h \theta_6} \left[ \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{n_1} \left\{ \gamma_k^2 \left[ \frac{s_0 m_1 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_k^2}{R^2} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) \left. + \frac{m_2}{n_2} \left( \frac{v_2 \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) \frac{n_2 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \right) \right] \right\} \chi_k, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{33} &= \varepsilon C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\chi_0}{h \theta_6} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] + \right. \\
& + \frac{\omega_2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 \left[ \frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \frac{s n_2}{n_1} I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
& + \frac{\mu_k^3}{R^3 n_1} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
& + \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k z_1}{R} \right)}{v_1} + \frac{s \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \\
& \left. \left. - \frac{s v_2 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \right\} \chi_k \rangle,
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'^{-1}_{1122}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'^{-1}_{1122}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \end{cases}$$

$$(i = \overline{1, 2}), \quad \theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3},$$

$$\begin{aligned}
F_k^* &= (1 + \alpha_k^3) \gamma_k^3 \left[ \frac{n_1 \tilde{A}_k^* G_k(1; R)}{1 - \gamma_k^2 v_1^2} \left( \gamma_k v_1 \sin(\gamma_k h) \cos \left( \frac{h}{v_1} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left( \frac{h}{v_1} \right) \right) + \right. \\
& + \frac{n_2 G_k(2; R)}{1 - \gamma_k^2 v_2^2} \left( \gamma_k v_2 \sin(\gamma_k h) \cos \left( \frac{h}{v_2} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left( \frac{h}{v_2} \right) \right) \Big] / \\
& / \left( \alpha_k^3 J_0(\alpha_k R) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} E_k^* \left( \alpha_k \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \cos \left( \frac{h}{v_1} \right) + \right. \right. \right. \\
& + \operatorname{ch} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \sin \left( \frac{h}{v_1} \right) \right) + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} N_k^* \left( \alpha_k \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \cos \left( \frac{h}{v_2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{ch} \left( \frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \sin \left( \frac{h}{v_2} \right) \right) \right] \Big), \\
N_k^* &= \frac{v_2 \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{n_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},
\end{aligned}$$

$$E_k^* = \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[ \operatorname{cth} \left( \frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left( \frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \left[ \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$G_k(i; R) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) I_0(\gamma_k v_i r) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_i r} I_1(\gamma_k v_i r),$$

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{h}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \tilde{A}_k^* = -\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)}.$$

де  $\chi_k$  — шукані сталі.

Далі з подвійних інтегральних рівнянь [15] та перших граничних умов (2)–(3) визначимо невідому функцію  $F(\eta)$  для (8) через нескінченну систему констант  $\chi_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} = & \frac{2\varepsilon}{\pi} \left( (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} \psi(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} F_k^* \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( E_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left( N_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \psi(\eta, \mu_k) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

для відшукування невідомих  $\chi_0, \chi_k$ , що входять до (6), (7) та (10) отримаємо нескінченну систему:

$$\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n = \tilde{\beta}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

де

$$\tilde{\alpha}_0 = \varepsilon \left( \frac{R(v_2 + s)}{2h v_1 v_2 \theta_6 (s - s_3)} - \frac{2\omega_2}{\pi n_1} \right); \quad \tilde{\alpha}_{k0} = \frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\beta}_0 = -\frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1};$$

$$\tilde{\beta}_k = -\frac{2\varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\alpha}_{00} = 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k = & \sum_{k=1}^{\infty} F_k^* \frac{\mu_k}{R} \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + E_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{n_2} \left( N_k^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \psi(0, \mu_k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{0n} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^4 \cos(\gamma_n h) R J_0(\mu_n) \left[ \frac{\tilde{A}_n^* v_1^3 I_1(\gamma_n v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_1 R^2} + \frac{s v_2^3 I_1(\gamma_n v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\ & + \frac{\mu_n^4 \varepsilon \omega_2}{2R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \left[ \frac{1}{v_1} \left( E_n^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left( N_n^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{R v_2} \right) + M_n^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{R v_2} \right) \right) \right] F_n^* \right\}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}_{kn} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F_n^* \frac{\mu_n}{R} \psi(\mu_k, \mu_n) \left[ \frac{m_1}{n_1} \left( E_n^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left( N_n^* \operatorname{sh} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] \right\}.$$

Відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампа  $H$ .

Використавши умову рівноваги (5), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження  $P$  у вигляді

$$P = \frac{\pi \varepsilon R^2 C_{44} (1 + m_1) l_1 (v_2 + sv_1)}{v_2 v_1 h \theta_6}.$$

Визначивши невідомі сталі  $\chi_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11), обчислимо компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі за формулами (7) та (9). Розв'язки представлені у вигляді рядів через нескінченну систему констант  $\chi_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

**4. Числові результати.** Числовий аналіз представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) при наступних параметрах:  $R = 2\text{м}$ ,  $H = 20\text{м}$ ,  $h = 10\text{м}$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}\text{м}$ ,  $E = 3,92\text{МПа}$ ,  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9; 1,1; 1,2$ . Алгоритм чисельного розв'язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

Розподіл нормальних напружень  $Q'_{33}^{(3)}$  у зоні контакту (при  $z_i = h/v_i$ ) та вздовж пружного циліндра представлені на рис. 2 та 3, відповідно. Графіки для переміщень  $U_3^{(3)}$  в зоні контакту (при  $z_i = h/v_i$ ) та вздовж поперечного перерізу пружного циліндра (при  $z_i = 0$ ) зображені на рис. 4 та 5, відповідно. Маємо зауважити, що на рис. 2–5 усі величини представлені у безрозмірних координатах.

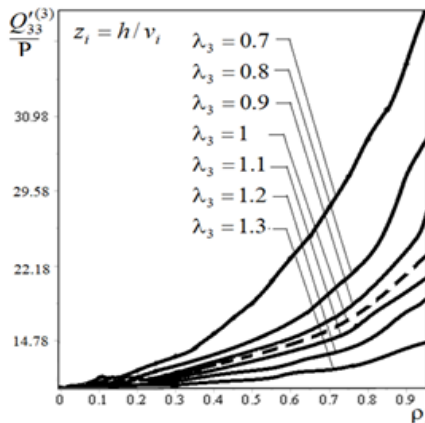


Рис. 2. Контактні напруження  $Q'_{33}^{(3)}/P$ , при  $z_i h/v_i$ .

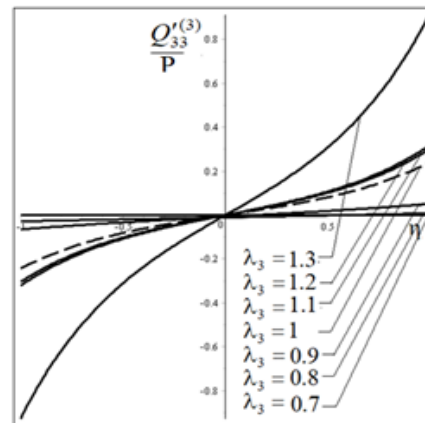


Рис. 3. Нормальні напруження  $Q'_{33}^{(3)}/P$  вздовж циліндричного штампа.

Також, на рис. 2 та 3 пунктирна крива відповідає контакту без початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ), а суцільна — з початковими напруженнями. Причому у

випадку відсутності початкових (залишкових) напружень ( $\lambda_1 = 1$ ) графік розподілу контактних напружень відповідає відомим розв'язкам контактної задачі про тиск двох півпросторів на циліндр [1].

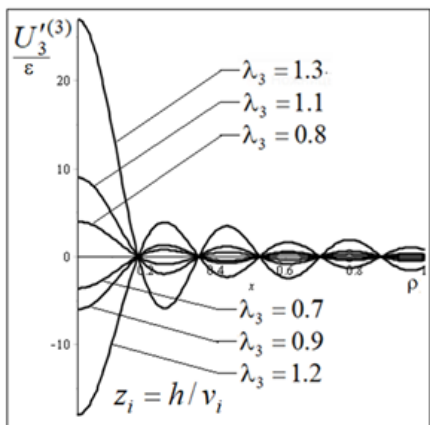


Рис. 4. Контактні переміщення  $U_3^{(3)}/\epsilon$  в зоні контакту.

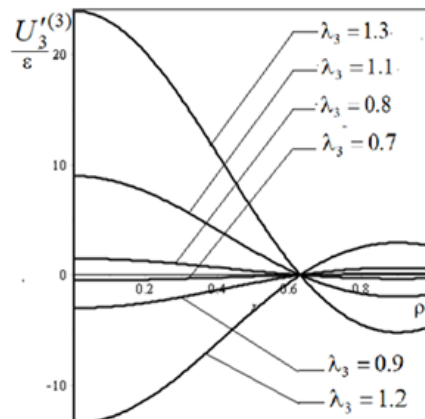


Рис. 5. Переміщення  $U_3^{(3)}/\epsilon$ , при  $z_i = 0$ .

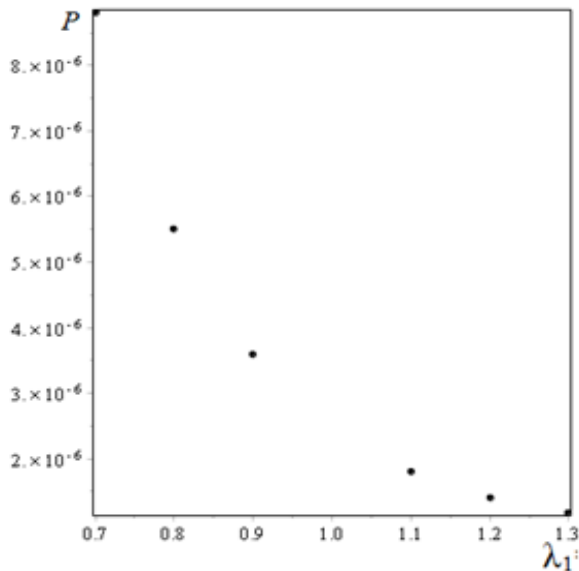


Рис. 6. Залежність рівнодійної  $P$  від коефіцієнта видовження  $\lambda_1$ .

Дискретна залежність числового значення рівнодійної навантаження  $P$  від коефіцієнта видовження  $\lambda_1$  представлена на рис. 6.

**5. Висновок.** На основі числового аналізу можна зробити висновок, що початкові напруження суттєво впливають на основні характеристики напружено-деформованого стану тіл, що контактують. Крім того, вплив початкових напружень на розподіл контактних характеристик пружних півпросторів та пружного циліндра полягає у тому, що:

- 1) у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) початкові напруження у циліндрі призводять в

зоні контакту до збільшення, а у випадку розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ) — до зменшення контактних напружень;

- 2) з рис. 3 можна побачити, що чим ближче до центрального поперечного перерізу циліндричного штампа, тим швидше нормальні напруження  $Q'_{33}{}^{(3)}/P$  прямують до нуля;
- 3) з рис. 4 та 5 бачимо, що переміщення  $U'_3{}^{(3)}/\varepsilon$  приймають значно більші значення ближче до осі циліндричного штампа, ніж до його бічної поверхні;
- 4) з рис. 6 можна зробити висновок, що значення рівнодійної навантаження  $P$  зменшуються із збільшенням коефіцієнта видовження  $\lambda_1$ , тобто при розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ) сила  $P$  приймає більші значення ніж при стиску ( $\lambda_1 < 1$ ).

З числових результатів можна відмітити значний вплив початкових напружень на контактну взаємодію двох пружних півпросторів та пружного циліндричного штампа. Тому їх врахування дозволить значно покращити точність інженерних обчислень при розрахунках на міцність конструкцій та деталей машин, а також дозволить суттєво зменшити матеріалоемність конструкцій.

### Список використаної літератури

1. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Вища школа, 1981. 136 с.
2. Semenyuk N. P., Zhukova N. B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 1. Pp. 40–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
3. Guz A. N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No. 1. Pp. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
4. Kaminsky A. O., Kurchakov E. E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No. 2. Pp. 154–159. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
5. Babich S. Yu., Glukhov Y. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 1. Pp. 43–52.
6. Babych S. Yu., Yarets'ka N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 3. Pp. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Ярецька Н. О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампа до пружного шару з початковими напруженнями. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: monograph. International Science Group. Boston: Primedia e Launch*. 2020. С. 60–80. DOI: <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>
8. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54. No. 5. Pp. 539–543. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
9. Babich S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 6. Pp. 346–356.
10. Kurashige M. Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*. 1969. Vol. 49. No. 8. Pp. 671–678.
11. Aleksandrov V. M., Arutyunyan N. Ky. Contact problems for prestressed deformed bodies. *Soviet Applied Mechanics*. 1984. Vol. 20. No. 3. P. 209–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00883134>
12. Dhaliwal R. S., Singh B. M., Rokne J. G. Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.* 1980. Vol. 18. No. 1. Pp. 169–179.
13. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями: Монография. *Кременчук «Press — Line»*. 2007. 795 с.



14. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький: вид. ПП Мельник. 2006. 710 с.
15. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Лазар В. Ф., Щекань Н. П. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 41, № 2. С. 91–102.

**Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Mikoryak M. V.** Numerical solution of the contact problem for a pre-stressed cylindrical stamp and two half-spaces with initial stresses.

The article is devoted to the solution of the contact problem for a prestressed cylindrical die and two elastic half-spaces with initial stresses in an analytical form without taking into account frictional forces. We will assume that the surfaces outside the contact boundary remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The problem is solved in the case of unequal roots of the defining equation.

The study is presented in a general form for the theory of large initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical die and the elastic bases (half-spaces) are homogeneous and equal. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (of the natural state). In addition, the influence of the cylindrical stamp causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical die and the elastic half-spaces are made of different isotropic, transversally isotropic or composite materials. In the case of orthotropic bodies, we will assume that the elastically equivalent directions coincide with the direction of the coordinate axes in the deformed state. As a result, the solutions of the given problem are presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite system of algebraic equations.

To study the problem, a large number of fundamental results are used, such as: Hankel transformation, pair integral equations, orthogonal polynomials and other methods of the theory of contact problems of the linear theory of elasticity. Numerical analysis is presented for the Treloar potential in the form of graphs. Sufficient influence of the initial (residual) stresses in two elastic half-spaces and an elastic cylindrical stamp on the distribution of contact stresses in the contact area was noted.

**Keywords:** linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, cylindrical stamp, half-space.

## References

1. Grilitskii, D. V., & Kizyma, Ya. M. (1981). *Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti*. L'vov: Vishcha shkola.
2. Semenyuk, N. P., & Zhukova, N. B. (2020). Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
3. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
4. Kaminsky, A. O., & Kurchakov, E. E. (2022). Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*, 58(2), 154–159. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
5. Babich, S. Yu., & Glukhov, Y. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(1), 43–52.
6. Babich, S. Yu., & Yaretska, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a

- Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(3), 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Yarets'ka, N. O. (2020). Matematichna model' peredachi navantazhennya vid poperedn'о napruzhenogo tsilindrichnogo shtampa do pruzhnogo sharu z pochatkovimi napruzhennyami. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: monograph. International Science Group. Boston: Primedia e Launch*, 60–80. <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>
  8. Yaretskaya, N. A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 54(5), 539–543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
  9. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*, 56(6), 346–356.
  10. Kurashige, M. (1969). Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*, 49(8), 671–678.
  11. Aleksandrov, V. M., & Arutyunyan, N. Ky. (1984). Contact problems for prestressed deformed bodies. *Soviet Applied Mechanics*, 20(3), 209–215. <https://doi.org/10.1007/BF00883134>.
  12. Dhaliwal, R. S., Singh B. M., & Rokne, J. G. (1980). Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.*, 18(1), 169–179.
  13. Guz', A. N., Babich S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007). *Statika i dinamika uprugikh osnovanii s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami: Monografiya*. Kremenchuk: «Press – Line».
  14. Guz', A. N., & Rudnitskii V. B. (2006). *Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodeistviya uprugikh tel s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami*. Khmel'nits'kii: vid. PP Mel'nik.
  15. Babich, S. Yu., Yarets'ka, N. O., Lazar, V. F., & Shchekan', N. P. (2022). Analitichni rozv'yazki statichnoi zadachi pro tisk poperedn'о napruzhenikh pivprostoriv ta pruzhnogo tsilindra z pochatkovimi napruzhennyami. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 41(2), 91–102.

Одержано 16.02.2023

УДК 004.67

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).131-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).131-149)**N. I. Boyko<sup>1</sup>, O. A. Tkachyk<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Lviv Polytechnic National University,  
Associated Professor at the Department of Artificial Intelligence,  
Ph.D.

nataliya.i.boyko@lpnu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6962-9363>

<sup>2</sup> Lviv Polytechnic National University,  
Graduate student at the Department of Artificial Intelligence,  
oleksandr.a.tkachyk@lpnu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0728-4208>

## АЛГОРИТМИ ТА МЕТОДИ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ДЛЯ РІЗНОМАНІТНИХ ДАНИХ

The study is dedicated to the comprehensive investigation of clustering methods for diverse data. The research is focused on the problems of graphic format algorithms, which is conditioned by the presence of 12 different features for clustering, 7 of which were categorical. The data is presented along 12 axes in a graphical format. To solve the problem the PCA algorithm was applied with further transformation of categorical features into numerical for dimensionality reduction to 2 components and further orthogonal superimposition of clusters on them. Clustering using the k-prototype method was provided. A sixfold decrease in PCA algorithm has drawbacks such as enormous data loss which was presented. Based on the list of conducted experiments on hierarchical clustering the pros and cons can be seen for this approach. The complexity of clustering which consists in representation of results from the analysis of big data was provided. The KAMILA algorithm that is based on distributed computing models MapReduce and gives a significant advantage was described.

**Keywords:** expectation-maximization, Structural equation modeling, K-Means for Mixed Large data, Lowest common ancestor, self-organizing map, Adaptive resonance theory, Kernel Density Estimation.

**1. Introduction.** Clustering is a technique used in data analysis and machine learning to divide the given data into groups of similar data points based on their characteristics or attributes which are called clusters. The goal of clustering is to identify patterns or structures in the data that can help to better understand the underlying data distribution, to make predictions or to enable efficient processing. Algorithms can be significantly different in that sense that what has to be included to each cluster and how to find their dependencies more effectively. Among the list of popular conceptions of clusters there are groups with the elements which can be built based on distance between them, density of areas in data spaces, intervals or specific statistical distribution [1, 4].

**The purpose of study** — applying different algorithms and methods for clustering diverse data.

**The object of this study** is to conduct an analysis and compare applied methods or algorithms, therefore to identify the most effective one that showed the most precise results.

Since the main goal in clustering analysis is to find a certain number of groups of objects which are similar between each other inside the specific group and which

are most different compared to other groups, data processing is required to identify the main direction of how it will be processed later. In order to find dependencies in objects with diverse data and apply clustering feature engineering should be applied.

Most of the algorithms used for data clustering are based on data adaptation for clustering methods for repetitive data. There are two main approaches by which clustering is performed:

- 1) Transforming numerical data into categorical features with further applying clustering methods for that feature;
- 2) Transforming categorical features into numeric forms, scaling them and applying clustering methods for numeric data.

In current investigation next research methods will be performed:

- Comparison — indicating the differences between different clustering methods.
- Calculations — searching for numerical features to use in clustering methods such as job execution time etc.
- Analysis — decomposing clustering methods into several properties or characteristics.
- Formalization — visualizing clustering algorithms as mathematical formulas.

From the practical point of view the current research can be used for diverse data clustering in different scopes. By getting familiar with this paper researchers will be able to choose optimal clustering methods based on its properties.

**2. Analysis of recent resources.** For better understanding of the principles and aspects of diverse data clustering and summarizing existing approaches, algorithms and methods which are used for data clustering, the analysis of recent resources was done. The results of analysis will be used during investigations described in next sections.

The paper [2, 11] has described different developed models and algorithms of clustering analysis, described problems of some algorithms and proposed possible solutions to solve them. As the conclusion from described content it can be said that applying ensemble methods is very promising and effective for processing diverse data.

In the research [5, 12] the main approaches of diverse data clustering is reviewed, the abilities of usage of similar algorithms is described. Application of different distances between diverse data and possible hierarchical distribution is reviewed. The work describes leading tasks and open questions in diverse data clustering areas.

Researchers [3, 15] investigated the approach of Dharmendra S. Modhia and Scott Spangler for clustering diverse data in their article. They described KAMILA algorithm and its theoretical implementation using R language with further algorithm simulation using random data. The results of clustering on “balanced” and “unbalanced” data sets were analyzed. The possible implementation of the algorithm for analyzing big data using Apache Hadoop and its results were described.

Research [6] is interesting by its analysis of basic clustering algorithms such as k-means, density-based clustering and agglomerative clustering with further implementation using C language.

In the article [7, 13] the main diverse data clustering problems were described. Applying hybrid distance techniques were analyzed. Basic steps such as data transformation with discretization and productivity of k-modes and LCA algorithms were described. As a solution of the described problems KAMILA algorithm was applied and analyzed.

Authors [8, 10] proposed a model based on mixed data clustering using SEM algorithm. Advantages and possibilities of work with incomplete data of provided solutions were described.

**3. Methods and tools of research.** The approach to clustering different types of data involves processing the data and using clustering algorithms. Clustering algorithms can be divided into several categories, including partitioning, hierarchical, model-based, neural network-based, and others.

**3.1. Data processing.** Clustering datasets in a given dataset is almost always dependent on the structure and types of data that are present within it. If there is no common structure or if the features are not well defined, clustering is likely to result in inaccurate results, as the boundaries between clusters are difficult to determine. Therefore, to achieve better clustering results, it is necessary to properly process our datasets. Almost always, it is necessary to find a balance between information loss and distortion. Data preprocessing is a critical step in clustering, as it can help to improve the quality of the clusters and reduce the impact of noise and outliers in the data. Data preprocessing techniques can include normalization, feature scaling, dimensionality reduction, and handling of missing values. Data can be categorized as categorical or numerical. Numerical data consists of ordinary numbers that represent a particular feature, such as the quantity of something, a certain distance, age, etc. Categorical data, on the other hand, represents particular groups or categories, such as race, gender, or blood groups. To find common characteristics among numerical data, algorithms are typically used to calculate distances between them. However, it is more difficult to do so with categorical data, as there are no numerical values to calculate distances [9, 10].

In all cases of clustering different types of data, the dataset contains both categorical and numerical data. This is the main challenge in such clustering scenarios. When considering the simplest approaches for finding common characteristics among different types of data, the following method is commonly used: the numerical and categorical data are separated and the Euclidean distance is calculated between the numerical data, while the Hamming distance is calculated between the categorical data. The next step is mixing, where the metrics obtained from the distance calculations of the two types are combined to find a distance between the different types of data. This is done by combining the metrics obtained from the calculations of the two types, such as the Euclidean and Hamming distances, to find a single distance metric that captures the similarities and differences between the different types of data. Of course, direct mixing will not help because the result would be no precise [11]. The reason why it is better to choose different distance metrics for numerical and categorical data is because they have different characteristics and require different approaches for calculating distances. For example, numerical data is continuous and can be measured on a scale, while categorical data consists of non-numerical values that represent particular categories or groups.

Therefore, finding a common metric that works well for both numerical and categorical data is not always straightforward and can be a challenging task.

**3.2. Divisive clustering algorithms.** The most well-studied methods for clustering different types of data belong to the family of algorithms that partition data into clearly defined groups using either purely numerical data (k-means) or purely categorical data (k-modes). The main idea behind such algorithms is to

determine the center of a cluster using numerical or categorical data, compute distances from the centroid to the objects being studied, and then process the mixed data types to find the local minimum.

The main advantages of such algorithms are their speed and ability to be parallelized (e.g., using MapReduce), which makes them suitable for working with large datasets. Some well-known algorithms in this family include Huang's, Ahmad and Dey's, Zhao, Modh and Spangler's, and Ren's [5] algorithms.

Z. Huang's algorithm [6, 11], also known as the k-prototype method, uses the Euclidean distance from the mean values to numeric data and the Hamming distance for the most common data to categorical data. However, the resulting cluster centers may not accurately reflect the clusters due to potential loss of information caused by the Hamming distance, which only considers the presence or absence of agreement between two categorical values.

Sartaj Ahmad and Gurav Deh's approach [7, 15] involves developing a new cost function and distance calculation to address the limitations of the k-prototypes algorithm. They calculate similarity between categorical data based on co-occurrence of values with other features, and also weight numerical features using this method. Overall, this algorithm performs better than the k-prototypes algorithm.

Another approach is the algorithm by V. Zhao [4], which, to avoid the drawbacks of the Hamming distance, used the frequency of occurrence of categorical data to determine the cluster centers, which also resulted in better results than using the k-prototypes algorithm.

Dharmendra S. Modha and Scott Spangler proposed an algorithm in which each data point lies in different spaces. The calculation of weights is based on the measure of distortion between different spaces of objects. For numerical features, the squared Euclidean distance is used, and for categorical features, the cosine distance is used.

M. Ren [6] uses the approach of building cluster centers based on the k-prototypes algorithm, further developing the idea of Sartaj Ahmad and Gurav Dei [7, 14] by applying a Gaussian filter to the overall distance values and combining the determination of the cluster center with the feature weights to create a new cost function. Since the initial weights are initialized with random values, this algorithm may produce different results after several runs with the same input data.

The K-prototypes algorithm defines  $G$  virtual individuals (or prototypes) as the centers of groups, constructed from the mean values per group for numerical variables and the mode per group for categorical variables. The distance between two subjects  $X$  and  $Y$  is determined as follows (Formula 1):

$$d_2(X, Y) = \sum_{j=1}^q (x_j - y_j)^2 + \gamma \sum_{j=q+1}^p \delta(x_j, y_j) \quad (1)$$

where  $\sum_{j=1}^q (x_j - y_j)^2$  is the squared Euclidean distance for continuous variables;

$\gamma \sum_{j=q+1}^p \delta(x_j, y_j)$  — Hamming distance.

The weight  $\gamma$  is used to avoid bias towards any type of attribute. It can be specified by the user or estimated using the combined variance of the data.

The minimization criteria is the total sum of distances (TSD) between the sub-

jects and the prototype of the class  $b_g$  to which they belong (Formula 2):

$$TSD = \sum_{g=1}^G \sum_{x \in C_g} \left( \sum_{j=1}^q (x_j - b_{g,j})^2 + \gamma \sum_{j=q+1}^p \delta(x_j, b_{g,j}) \right) \quad (2)$$

The K-prototypes algorithm is similar to k-means in practice: initial prototypes  $G$  are chosen as temporary cluster centers, then each subject is assigned to the nearest prototype. When all subjects are assigned, prototypes are updated to reflect their optimal class. Then subjects are reassigned to the updated prototypes if necessary, and the process repeats until the distribution becomes stable.

**3.3. Hierarchical clustering.** Hierarchical clustering methods create a hierarchy of clusters organized from top to bottom (or bottom to top). To create clusters, hierarchical algorithms require the following [13]:

1. Similarity matrix — built by finding similarities between each pair of data points. The choice of similarity metric (for building the similarity matrix) affects the shape of the clusters;
2. The linkage criterion — it determines the distance between sets of observations as a function of the pairwise distance between observations.

Most hierarchical clustering algorithms have a high computational complexity of  $O(n^3)$  and require  $O(n^2)$  memory, where  $n$  is the number of data points. For constructing a similarity matrix in the case of heterogeneous data types, the Gower distance can be used.

The Gower distance can be used to measure the dissimilarity between two records that may contain a combination of logical, categorical, numerical, or text data. The distance is always a number between 0 (identical data) and 1 (maximally different data). For numerical data, the normalized Manhattan distance is used, for ordinal data the variable is first ranked and then the Manhattan distance is used. For nominal data, the  $k$  categories are first transformed into  $k$  binary columns, and then the Dice coefficient is used.

Strategies for hierarchical clustering can be divided into two types

1. Agglomerative (or bottom-up) clustering, where each point starts as its own cluster and pairs of clusters are merged as the algorithm moves up the hierarchy.
2. Divisive (or top-down) clustering, where all points start in a single cluster and recursive splitting occurs as the algorithm moves down the hierarchy.

Agglomerative clustering starts with  $N$  clusters (one for each subject), and at each step, the two closest clusters are merged until only one cluster remains. The sequence of mergers is represented on a dendrogram to facilitate the choice of an optimal number of clusters. In general, the best cluster allocation is the one that precedes the first significant increase in within-cluster variance [1, 3].

Let's suppose that at a certain stage of aggregation, clusters  $C_i$  and  $C_j$  are the next ones to be merged. To determine the distance of the merged cluster  $C_i \cup C_j$  to any other cluster  $C_k$ , the similarity matrix needs to be updated using a single linkage method, which belongs to the family of Lance-William's algorithms (Formula 3):

$$d(C_i \cup C_j, C_k) = \alpha d(C_i, C_k) + \beta d(C_j, C_k) - \eta d(C_i, C_j). \quad (3)$$

The coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\eta$  depend on the aggregation method used. These methods for calculating distances between clusters are called linkage criteria. Using the Ward aggregation method, Formula 3 takes the following form (Formula 4):

$$\begin{aligned}
d(C_i \cup C_j, C_k) &= \frac{n_i + n_k}{n_i + n_j + n_k} d(C_i, C_k) + \\
&+ \frac{n_j + n_k}{n_i + n_j + n_k} d(C_j, C_k) - \frac{n_k}{n_i + n_j + n_k} d(C_i, C_j).
\end{aligned} \tag{4}$$

where  $n_i$ ,  $n_j$  and  $n_k$  represents corresponding sample sizes  $C_i$ ,  $C_j$  and  $C_k$ .

**3.4. Clustering algorithms based on models.** Clustering algorithms based on models assume that a data point corresponds to a model, which is typically a statistical distribution. The models are usually chosen by the user, which can lead to undesirable results if the model parameters are not well-suited to the data. Algorithms in this family are generally slower than distribution-based algorithms but can avoid undesirable information loss. Some well-known algorithms in this family include Autoclass, the Everett algorithm, ClustMD, KAMILA, the Mustaki and Papageorgiou model, Brown and Mac-Nicholas model, and the Rajan and Bhattacharyya algorithm.

The Autoclass algorithm [4] performs clustering by integrating a mixture model and Bayesian methods with a prior distribution for each feature.

B. S. Everitt [2] proposed a model-based clustering algorithm for heterogeneous data using threshold values for categorical data. Due to its high computational cost, this method is only useful for datasets that contain few categorical features.

I. Mustaki and I. Papageorgiou [5] used LCM for heterogeneous data by transforming categorical features into numerical values from 1 to  $q$ . Polynomial distributions were used for categorical features, and normal distributions for numerical features. Similar solutions were proposed by R. P. Brown and P. D. McNicholas [6], who developed a model that combines hidden features and uses the EM algorithm for model fitting.

The ClustMD algorithm [8] uses a hidden variable model for clustering heterogeneous data. It assumes that the hidden variable, along with a Gaussian mixture distribution, represents a particular data point. The EM algorithm is also used to estimate the parameters of the model. For categorical data, the Monte Carlo EM algorithm is used. The main problem with this method is the increased computational cost as the number of features increases.

V. Rajan and S. Bhattacharya [9] introduced an algorithm based on a mixture of Gaussian copulas, which can model dependencies between both categorical and numerical features. This method is faster on a significant number of datasets.

A. Foss, M. Markatou, B. Ray, and A. Heching [10] developed the KAMILA algorithm for clustering heterogeneous data. This method combines two different clustering algorithms, namely the k-means algorithm and the Gaussian mixture multinomial model. Like the k-means algorithm, KAMILA does not make significant parametric assumptions for numerical features, but instead uses the properties of Gaussian mixture multinomial models to balance the effects of numerical and categorical data without weighting them.

**3.5. Clustering algorithms based on neural networks.** Most research on clustering of heterogeneous data using neural networks focuses on the use of self-organizing maps (SOM) and adaptive resonance theory (ART). However, the use of SOM can lead to unpredictable results, such as poor data representation and



failure to match the data distribution structure. On the other hand, ART is more computationally complex but can be quite effective. ART neural network models work on the principle that provides adequate ways of clustering data alongside other popular methods that help to reduce the dimensionality of data sets. Compared to k-means clustering, ART is a parameterized algorithm. In k-means, the number of clusters has to be specified prior to the calculations, unlike ART which has a certain threshold. With this threshold, clusters can be created in real-time. Additionally, it can determine how loose or tight a cluster will be. One of the main drawbacks of using a single threshold is that it is applied to all possible clusters, for example, a threshold value may not lead to high accuracy for both dense and sparse clusters. To address this, different thresholds can be used for each cluster. To determine this threshold, the Particle Swarm Optimization (PSO) machine learning method is used. PSO performs a search for global maximum or minimum. The position of particles on each iteration is evaluated according to the fitness function. If the swarm finds the best particle, a new threshold coefficient is calculated.

When ART creates a new cluster, the threshold coefficient increases and a new swarm is initialized to optimize the performance of ART. This operation helps to expand the threshold coefficients for each cluster, optimizing each threshold for its respective cluster.

There are also other methods of traditional neural network clustering that can be applied to clustering heterogeneous data, such as Adaptive Subspace SOM, ARTMAP, and Vector Quantization.

**4. Experiments.** For applying clustering algorithms, a dataset of cardio indicators of patients in a hospital was chosen. The dataset contains 5 numeric and 7 categorical features (Fig. 1). Next, the dataset needs to be processed, for which we will remove records with missing values and convert categorical features to factors for processing categorical data in the *R* programming language.

	age	gender	height	weight	ap_hi	ap_lo	cholesterol	gluc	smoke	alco	active	cardio
1	18393	men	168	62	110	80	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
2	20226	women	156	85	140	90	well above normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	1
3	18857	women	165	64	130	70	well above normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	1
4	17623	men	169	82	150	100	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	1
5	17474	women	156	56	100	60	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
6	21914	women	151	67	120	80	above normal	above normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
7	22113	women	157	93	130	80	well above normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
8	22584	men	178	95	130	90	well above normal	well above normal	smokes	doesn't drink alco	1	1
9	17668	women	158	71	110	70	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
10	19834	women	164	68	110	60	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
11	22530	women	169	80	120	80	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
12	18815	men	173	60	120	80	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
13	14791	men	165	60	120	80	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
14	19809	women	158	78	110	70	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
15	14532	men	181	95	130	90	normal	normal	doesn't smoke	drinks alco	1	0
16	16782	men	172	112	120	80	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	1
17	21296	women	170	75	130	70	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
18	16747	women	158	52	110	70	normal	well above normal	smokes	doesn't drink alco	1	0
19	17482	women	154	68	100	70	normal	normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
20	21755	men	162	56	120	70	normal	normal	doesn't smoke	doesn't drink alco	1	0

Figure 1. Dataset with patient characteristics

So, let's assume that our dataset consists of  $N$  independent and identically distributed observations of a  $n$ -dimensional random vector of variables. To cluster this dataset, we will apply the KAMILA algorithm, which estimates unknown pa-

rameters using an iterative process similar to the EM algorithm. In other words, KAMILA also performs iterative estimation, where each iteration consists of two steps: partitioning and estimation. The partitioning step assigns each observation to a certain cluster, while the estimation step re-estimates certain cluster parameters including the newly added observation.

For example, let's take one iteration of the algorithm. First, we need to calculate the Euclidean distance for each numerical feature to use the Gaussian kernel for estimating minimum distances using formula 5:

$$f_R^{(t)}(r) = \frac{1}{Nh^{(t)}} \sum_{\ell=1}^N k \left( \frac{r - r_{\ell}^{(t)}}{h^{(t)}} \right). \quad (5)$$

We assume that the categorical features are independent of the numerical ones, and the algorithm estimates them based on the numerical ones. The algorithm makes initial assumptions, so on some iterations, the data may differ significantly and be difficult to process (Figure 2).

Categorical variable 1:	num	[1:4, 1:2]	0.356	0.357	0.363	0.357	0.644	...
Categorical variable 2:	num	[1:4, 1:2]	0.356	0.357	0.363	0.357	0.644	...
Categorical variable 3:	num	[1:4, 1:3]	0.0846	0.0823	0.0879	0.083	0.8282	...
Categorical variable 4:	num	[1:4, 1:2]	0.108	0.109	0.111	0.11	0.892	...
Categorical variable 5:	num	[1:4, 1:2]	0.9222	0.9247	0.919	0.9242	0.0778	...
Categorical variable 6:	num	[1:4, 1:2]	0.217	0.21	0.208	0.212	0.783	...
Categorical variable 7:	num	[1:4, 1:2]	0.497	0.497	0.495	0.501	0.503	...

Figure 2. Results of computing weights for categorical features.

In the given dataset, there are 7 categorical features. As the algorithm evaluates each observation based on its numerical values with projection onto categorical features, it calculates weights for each categorical feature. Then, it combines the information and assigns the observation to the cluster that was selected based on the collected information, and re-estimates the clusters.

The KAMILA.r package uses a straight stopping rule for clustering if certain groups of observations remain unchanged from one iteration to the next.

It can also be noted that our dataset contains 70,000 records, so the stopping rule will be quite useful in this case.

To visualize the clusters based on categorical and numerical data, a two-dimensional scatter plot with components on the x and y axes was used. These two components are the result of applying principal component analysis (PCA) to the data. They can be characterized as linear combinations of the input variables that account for most of the variability in the observations. From Figure 3, we can see that the data is separated into 3 clusters, and for analysis we will apply the KAMILA algorithm and the k-prototypes algorithm with manually specified number of clusters and their self-determination.

On Figure 3, the result of clustering the data into 3 clusters is shown. Comparing it with Figure 4, which shows the result of automatic selection of the number of clusters, we can see that the KAMILA algorithm is capable of choosing the cluster region incorrectly when the number of clusters is manually specified, and also this algorithm tends to merge two areas with a smaller data spread.

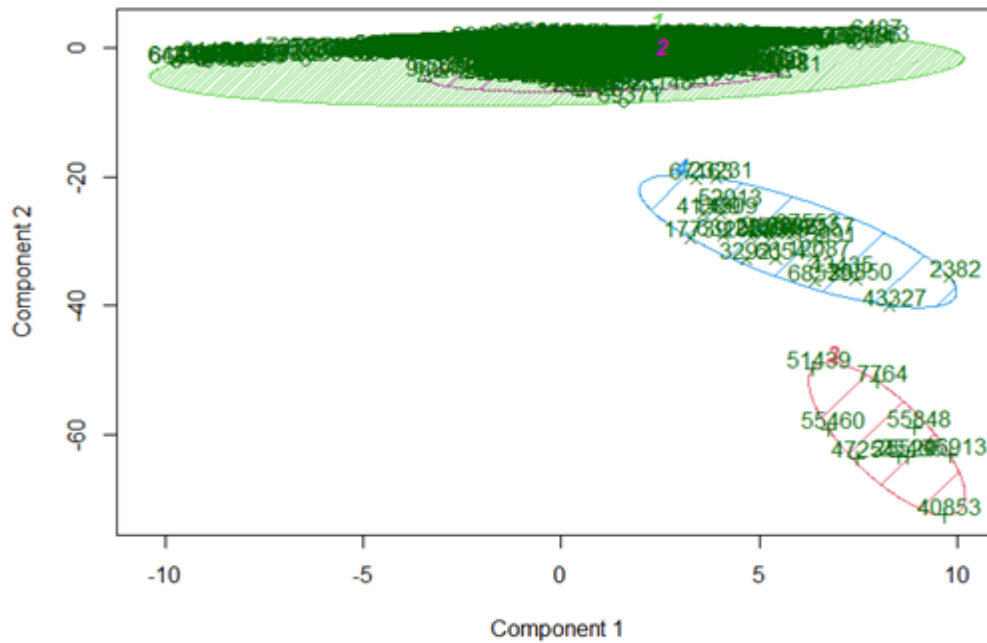


Figure 3. The result of clustering the dataset with 70,000 records into 3 clusters using the KAMILA algorithm.

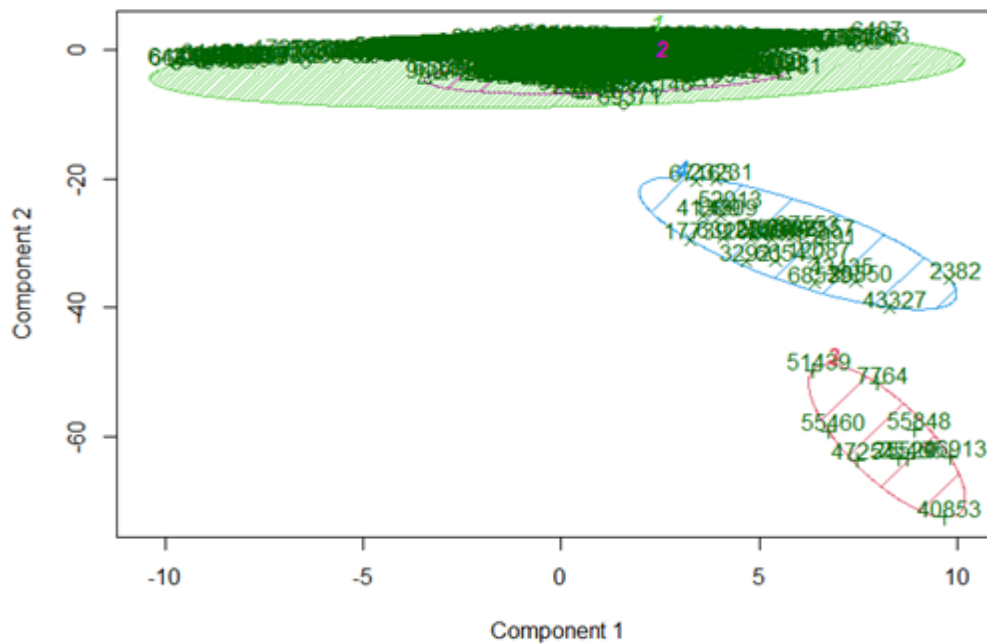


Figure 4. The result of clustering the dataset with 70,000 records using the KAMILA algorithm.

We will perform clustering by reducing the number of records by half. From Figure 5, we can see that clusters with small distances between features tend to merge when the number of records is reduced.

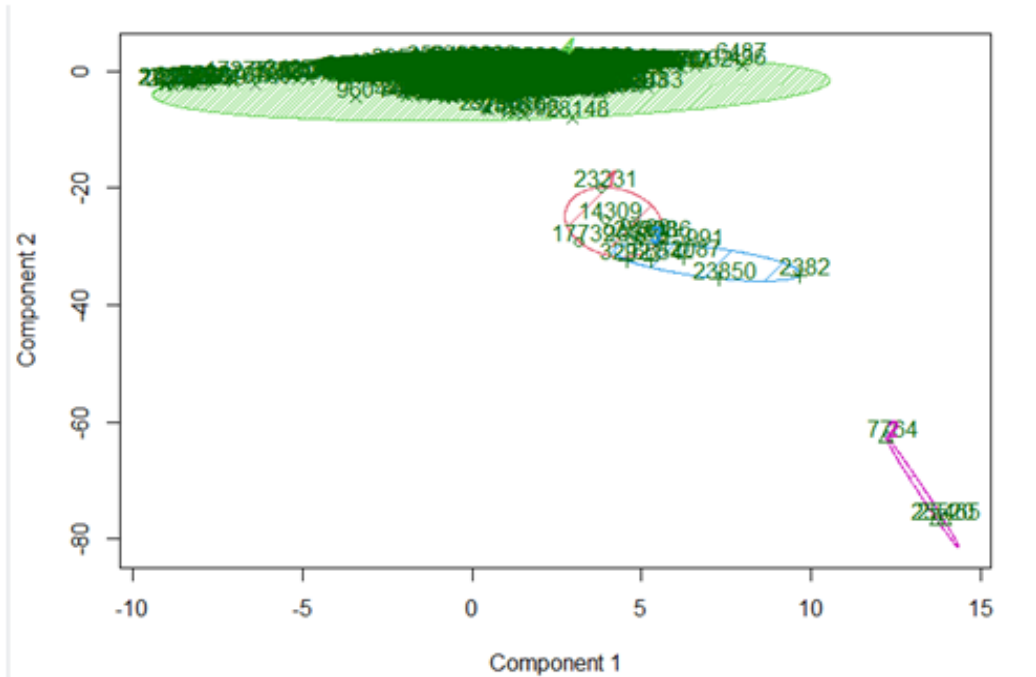


Figure 5. The result of clustering the dataset with 35,000 records using the KAMILA algorithm.

On Figures 6 and 7, the results of clustering using the k-prototypes algorithm are shown. Comparing the performance of the KAMILA and k-prototypes algorithms, it can be concluded that the k-prototypes algorithm is not able to accurately cluster the data compared to KAMILA, due to the error in weights of categorical data. However, the execution time of the KAMILA algorithm was 1.67 seconds, while the k-prototypes algorithm took 61.68 seconds.

As clustering of heterogeneous data differs significantly from traditional clustering, a hybrid distance measure for categorical and numerical values should be used to avoid certain limitations of traditional approaches.

Hybrid distance is a concept that combines each branch representing a certain feature with values and weight, which corresponds to the distance between values.

In Figure 8, a typical hierarchical concept is shown, consisting of edges and vertices, where higher-order vertices represent more general criteria, and lower-order vertices represent more specific features. To find the distance between two such vertices, the weight of the edges must be added. There are several ways to determine these weights, for example, one can first determine the distances between two child vertices, and then find the distance between higher-order vertices. The simplest way is to assign the same weight, for example 1, to all edges.

Hybrid distance with edge weight 1 is a type of distance metric used in clustering algorithms that combines different branches representing different features in a hierarchical tree structure. The weight of each edge represents the distance between two features. In the case of hybrid distance with edge weight 1, each edge is assigned a weight of 1, which makes all branches equally important in determining the overall distance between two observations.

The distance between two categorical values in the two models is the common

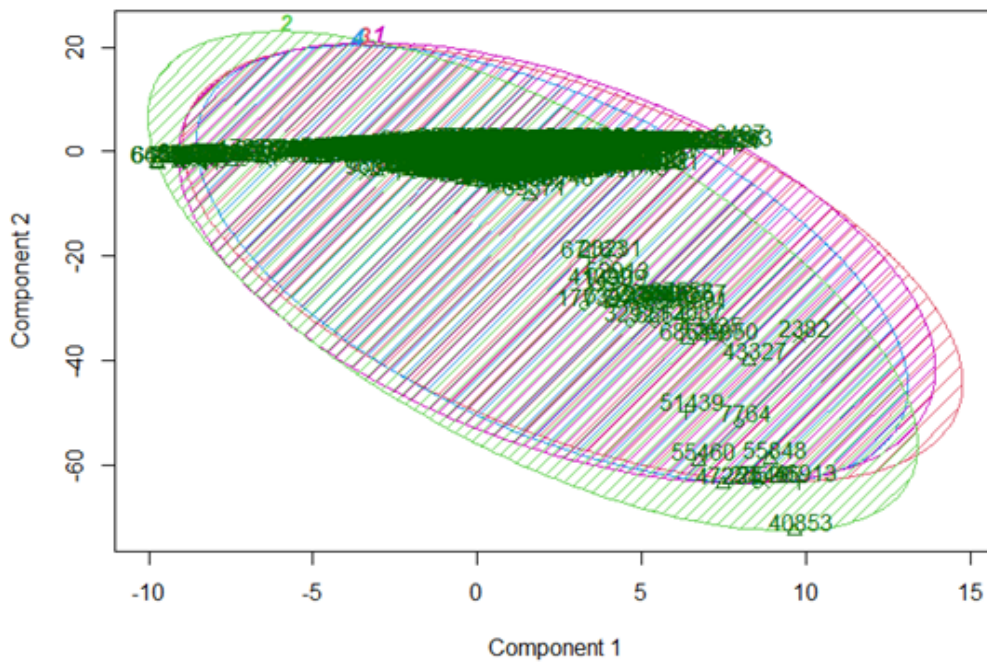


Figure 6. Result of clustering using k-prototypes algorithm on dataset with 70000 records.

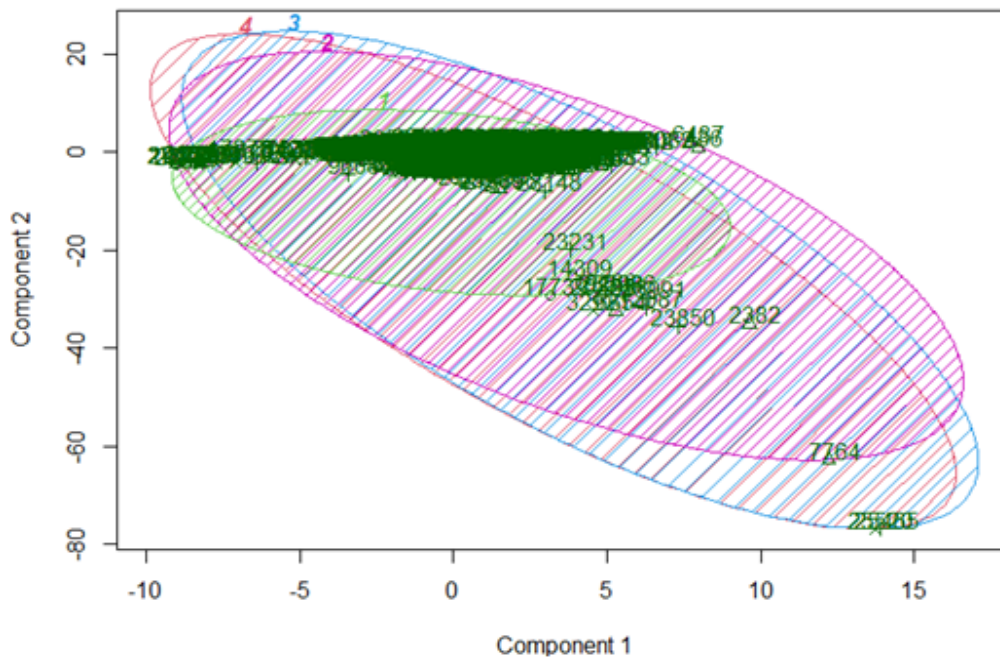


Figure 7. Result of clustering using k-prototypes algorithm on dataset with 35000 records.

weight of the path formed by two leaf nodes that represent the categorical values.

To perform hierarchical clustering, we need to calculate the Gower distance and the distance matrix. We will use the built-in libraries of the R language for this. Also, in order to see a visual result of hierarchical clustering, we need to reduce

our data to 50 rows. Once we are confident that hierarchical clustering has worked correctly, we will increase the data to obtain a more accurate result (Fig. 8).

```
1225 dissimilarities, summarized :
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.02863 0.21284 0.28658 0.29454 0.36564 0.68241
Metric : mixed ; Types = I, I, S, I, I, I, I, N, N, N, N, N, N
Number of objects : 50
```

Figure 8. General characteristics of the Gower distance.

From Figure 8, we can see that our metric has mixed data. Now we need to determine the number of clusters. To do this, we will apply the *Average Silhouette Width*.

```
$nc
[1] 2
```

Figure 9. Clusters quantity.

As can be seen, the algorithm split the described data into two clusters. Therefore, it is necessary to examine the partition more closely. The agglomerative clustering algorithm split each record in the dataset used into a specific cluster.

```
Clustering vector:
 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
 1  2  2  2  1  1  1  2  1  1  1  1  1  1  1  2  1  1  1  1  1  1  2  1  2
26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
 1  1  1  1  1  2  2  1  2  2  1  1  1  2  2  1  2  2  2  2  2  2  1  1  1
```

Figure 10. Clustering vector.

Initially, each branch forms its own cluster. Then, the closest clusters are identified and merged into one cluster. The merging process is repeated until all patterns form a single cluster. The output of hierarchical clustering is usually represented in the form of a dendrogram, as shown in Figure 10.

Now, regarding the latest calculations, let's display the hierarchical clustering graphs with different methods. The clustering algorithms vary in identifying the closest clusters for merging. The three most popular options are single linkage, complete linkage, and average linkage. The first approach measures the distance between two clusters by the minimum distance between any two points in these two clusters. In contrast, the complete linkage approach measures the distance by the maximum distance between any two points in these two clusters. For average linkage, the distance is measured by the average distance between two schemata of two clusters.

In the presented study, it is recommended to use two methods as it provides a more accurate dendrogram. The following features should be used for clustering: age, gender, height, weight of the patient, as well as whether the patient smokes, drinks alcohol, and their cardiovascular indicators: cholesterol, glucose, lower and upper blood pressure, and whether the patient does cardio exercise (see Figure 11).

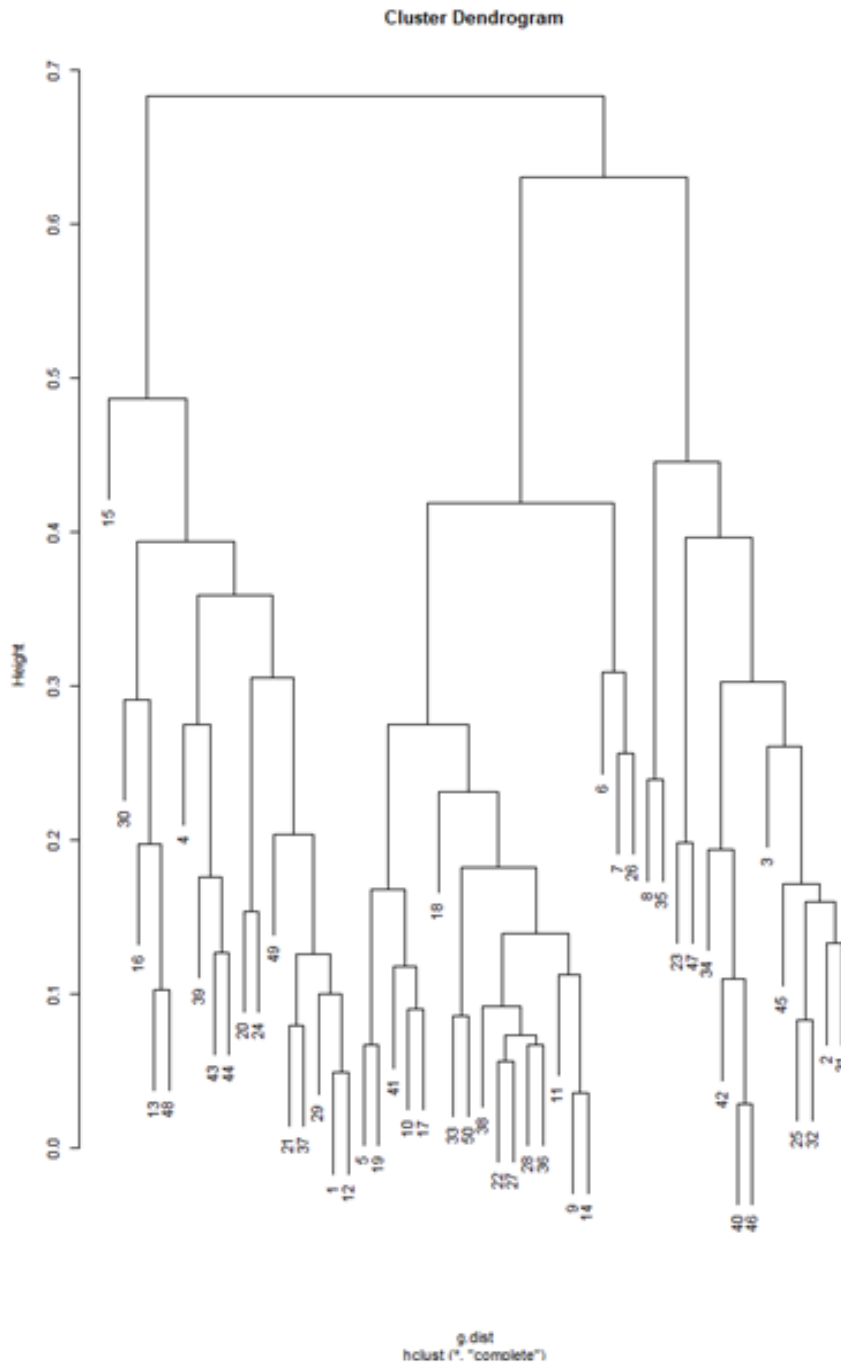


Figure 11. Results of hierarchical clustering using complete linkage method.

As expected, there are 2 clusters in the result. Let's analyze the 6th and 20th records as an example (Figure 12).

As can be seen from the dendrogram, hierarchical clustering assigned the sixth

	age	gender	height	weight	ap_hi	ap_lo	cholesterol	gluc	smoke	alco	active	cardio
6	21914	women	151	67	120	80	above normal	above normal	smokes	doesn't drink alco	0	0
20	21755	men	162	96	120	70	normal	normal	doesn't smoke	doesn't drink alco	1	0

Figure 12. The 6th and 20th records from the patient dataset.

record to cluster 2 and the 20th record to cluster 1. These two records are in different clusters because their features differ significantly from each other. For example, in the two records, the gender, cholesterol, and glucose are different. Additionally, the person from the sixth record is a smoker and leads a sedentary lifestyle, whereas the person from the 20th record exercises regularly. The common feature between the two records is cardiovascular exercise.

Now that we have confirmed that the algorithm works correctly, let's increase the amount of data to 5000.

For this amount of data, the algorithm found 4 clusters, as shown in Figure 13.

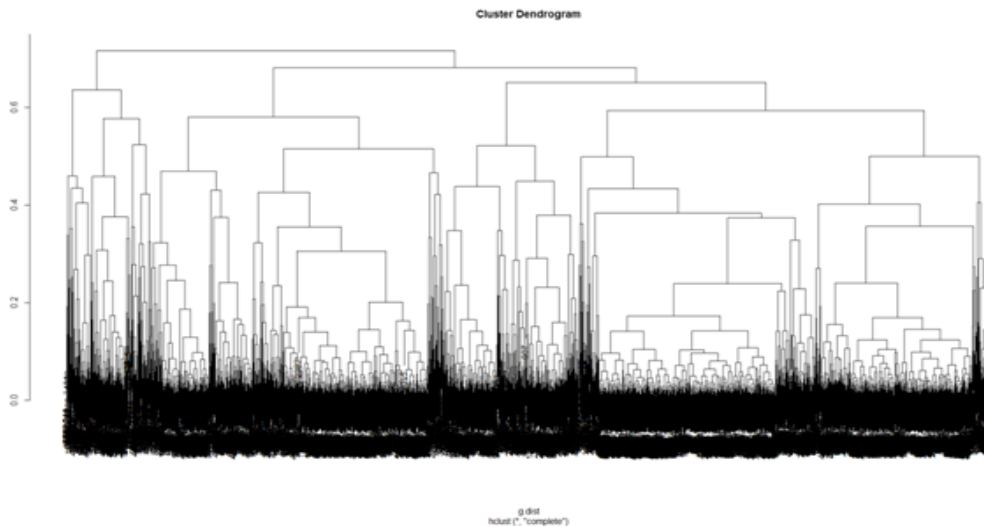


Figure 13. Amount of clusters for 5000 items.

Overall, we can see that the algorithm has divided our data into 4 clusters. Comparing hierarchical clustering with previous ones, we can say that it is quite accurate, but unfortunately it takes a lot of resources and time. It took 40 seconds to cluster 5000 data (Figure 14). If we were to cluster the entire dataset of 70000 data points, it would take up to 30 minutes, as the hierarchical clustering algorithm runs in  $O(n^3)$  time and requires  $\Omega(n^2)$  memory.

**5. Results.** During the experiments, there was a problem with presenting the results of the algorithms in a graphical format, which was due to the presence of 12 different features for clustering, 7 of which were categorical. The problem of representing data in a graphical format with 12 different features, 7 of which were categorical, was overcome by using the PCA algorithm to transform categorical features into numerical ones and reduce the dimensionality of the data to 2 components. This was followed by an orthogonal projection of the clusters onto the 2D space. The approach of using PCA to reduce dimensionality to 2 components and



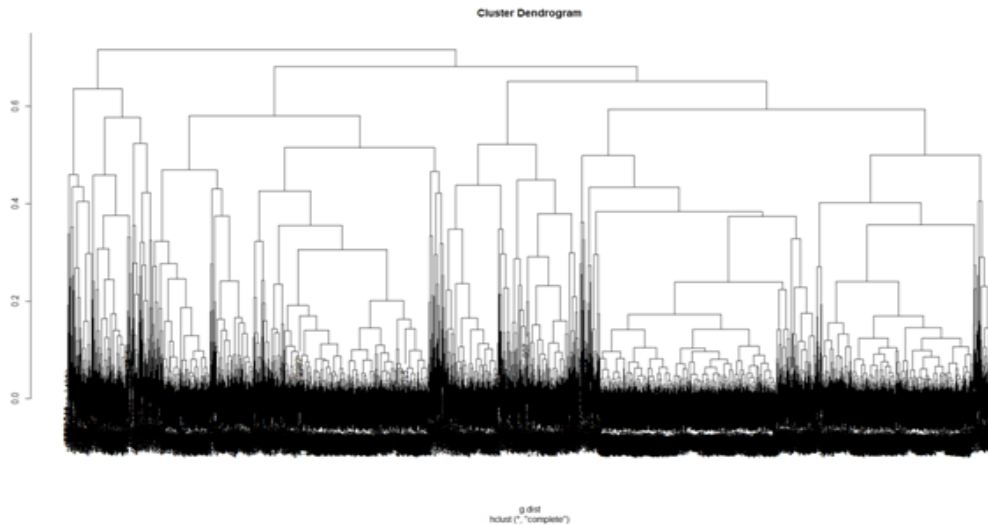


Figure 14. Results of hierarchical clustering using complete linkage method.

overlaying clusters on them helped to visualize the results of clustering algorithms, but it also resulted in significant information loss, as demonstrated by the example of applying k-prototypes clustering.

Conducting experiments on hierarchical clustering of heterogeneous data, we can note the advantages and disadvantages of this approach. Among the advantages are the ability to visually display the results of clustering using dendrograms without preprocessing the data, which avoids loss of information. Dendrograms provide the user with the ability to quickly identify typical representatives of dataset clusters. For example, using the cardio indicators dataset of hospital patients we were able to divide the patient records into 4 groups, which in practice can help in determining the approach to treating a particular patient. As an advantage of this algorithm, one can also mention the ability to quickly track the influence of different types of features on clusters and to find the distance between different categorical features. After conducting experiments, some disadvantages of hierarchical clustering of heterogeneous data can be noted, such as longer execution time compared to partitioning clustering algorithms such as K-Means and k-Prototypes, which can be explained by the quadratic complexity of hierarchical algorithms compared to linear complexity of partitioning ones. Taking into account these factors, as well as the complexity of presenting the results of analysis of large datasets, it can be noted that clustering of large datasets with mixed features is impractical, as the KAMILA algorithm implemented on the MapReduce distributed computing model will have a significant advantage in terms of speed.

Based on the experiments conducted with the k-prototypes algorithm, it can be noted that the main advantage of this method is its relative simplicity in implementation. However, in terms of other properties, the k-prototypes method lags behind the KAMILA algorithm. Some of the disadvantages of k-prototypes algorithm include the complexity of finding the weights between categorical and numerical data, which reduces the speed of the algorithm and leads to inaccurate results. Additionally, the random selection of cluster centers during initialization and the difficulty in determining the number of potential clusters make the results more variable. During

the experiment, it was observed that the accuracy of the algorithm was low, which was caused by the loss of information due to the use of the Hamming distance and the predominance of categorical data in the dataset.

The KAMILA method is a modern method of clustering heterogeneous data. Unlike the clustering algorithms demonstrated in the experiments, this algorithm is much more efficient. This algorithm is as fast as the usual k-means algorithm, but unlike this algorithm and other divisive clustering algorithms, it is much more robust to outliers, since KAMILA is a model-based algorithm using KDE. Overall, the KAMILA algorithm is a modern method for clustering heterogeneous data. Unlike the clustering algorithms demonstrated in the experiments, this algorithm is much more efficient. The algorithm is as fast as regular k-means, but unlike this algorithm and other divisive clustering algorithms, KAMILA is much more robust to outliers, as it is a model-based algorithm that uses KDE. The algorithm also accurately separates data into clusters and does not require a lot of memory during execution. Thanks to its characteristics, this algorithm can be used for clustering large datasets. Using the KAMILA algorithm is recommended when the distribution of the data is unknown.

The only significant disadvantage of this algorithm is that it can be difficult to understand. Additionally, KAMILA may produce less accurate results for data in a normal distribution.

The Average Silhouette method can be used for optimal selection of the number of clusters, which allows validating the membership of each point to a particular cluster. After running the clustering algorithm with a certain number of clusters, the silhouette analysis is applied to it, returning a number from -1 to 1. The closer this number is to 0, the closer the majority of points are to their center.

**Discussion of the results.** During the conducted research, general concepts of clustering and its methods were considered. As a result, it was examined and analyzed that mixed-type data are quite common in many fields, but there are no effective clustering strategies for such datasets. In other words, existing methods use arbitrary management strategies for clustering continuous and categorical features, which often leads to undesirable solutions dominated by one or the other type. The issues with conventional methods for clustering mixed data were characterized and it was confirmed that to use clustering methods for mixed data, it is necessary to choose a dataset with a moderate number of records so that these methods take less time, but it is also important to understand that accuracy cannot be achieved without some loss. In addition, it was understood that processed data is needed for the clustering of mixed-type data, meaning data that has been cleaned of unnecessary information and transformed into appropriate formats. The experiment also explored how to consider the similarity inherent in categorical values during hierarchical clustering, using the hierarchy of distances approach, which not only facilitates the expression of similarity but also combines several widely accepted approaches to processing categorical data.

Based on the experiments conducted, it is possible to draw conclusions about the usefulness of certain clustering algorithms for mixed-type data, depending on the required accuracy, knowledge of the dataset, its size, as well as the resources of the working station and the desired speed. Based on the analysis and experiments, it was found that hierarchical clustering was the most appropriate method

for processing the cardio patient data, despite the significant processing time. The resulting clusters were the most informative and convenient for end-users, such as hospital staff. The results demonstrate that the proposed hierarchical clustering approach can better reveal the structure of data similarity, especially when categorical attributes are involved and their values have varying degrees of similarity. The main disadvantage of hierarchical clustering is its slow algorithm, which is compensated by the absence of frequent changes in the dataset. Based on the experiments conducted, it can be concluded that the KAMILA algorithm is the most effective in meeting the requirements of both speed and accuracy. After analyzing the results of the k-prototypes algorithm, it should be noted that using this method is only advisable with significant knowledge in the subject area of the data, to properly weight the categorical and numerical data. It should also be noted that clustering mixed data using distances can result in information loss, and if accuracy is a top priority, it may be more appropriate to use clustering algorithms based on models or neural networks for clustering mixed data. In addition, it should be noted that the methods that were not used in this coursework were rejected due to their difficult implementation or lack of information about them.

**Summary.** In summary, it can be concluded that the problem of clustering mixed-type data remains challenging, and the methods investigated in this study have significant limitations. When working with a small dataset, the accuracy of the results was poor, while using a larger dataset led to higher accuracy but significantly increased computation time. It is important to carefully consider the characteristics of the dataset, the desired level of accuracy, and the available computational resources when choosing a clustering method for mixed-type data. Additionally, further research is needed to develop more efficient and accurate algorithms for clustering mixed-type data. The biggest problem is the lack of information about these methods in general. In most sources, the methods are characterized as a general concept, and experiments are almost always absent. In conclusion, it can be said that the field of clustering of heterogeneous data is not fully explored. Therefore, clustering of heterogeneous data is a challenging process that requires a lot of experience in this field and skills to implement one's work to improve existing algorithms or create new methods for clustering heterogeneous data.

## References

1. Sarker, A. (2018). Employee's performance analysis and prediction using K-means clustering & decision tree algorithm. *Global Journal of Computer Science and Technology*, 18(1), 1–5.
2. Fraley, C., & Raftery, A. E. (1998). How Many Clusters? Which Clustering Method? Answers Via Model-Based Cluster Analysis. *Technical Report*, 41(8), 578–588. <https://doi.org/10.1093/comjnl/41.8.578>
3. Murtagh, F. (2020). A survey of recent advances in hierarchical clustering algorithms which use cluster centers. *Computer Journal*, 26(4), 354–359. <https://doi.org/10.1093/comjnl/26.4.354>
4. Saxena, A., Prasad, M., Gupta, A., Bharill, N., Patel, O. P., Tiwari, A., & Lin, C. T. (2017). A review of clustering techniques and developments. *Neurocomputing*, 267, 664–681. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.06.053>
5. Sneath, P., & Sokal, R. (1973). Numerical Taxonomy. *Human Biology*, 47(2), 285–288.
6. Ptitsyn, A., Hulver, M., Cefalu, W., York, D., & Smith, S. R. (2006). Unsupervised clustering of gene expression data points at hypoxia as possible trigger for metabolic syndrome. *BMC Genomics*, 7(318), <https://doi.org/10.1186/1471-2164-7-318>
7. Tung, A. K., Hou, J., & Han, J. (2001). Spatial clustering in the presence of obstacles. Proceedings 17th International Conference on Data Engineering. Heidelberg.

- <https://doi.org/10.1109/ICDM.2002.1184042>
8. Bohm, C., Railing, K., Kriegel, H., & Kroger, P. (2004). Density connected clustering with local subspace preferences. Proc. of the 4th IEEE Intern. conf. on data mining. Los Alamitos. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-39940-9\\_605](https://doi.org/10.1007/978-0-387-39940-9_605)
  9. Boyko, N., Kmetyk-Podubinska, K., & Andrusiak, I. (2021). Application of Ensemble Methods of Strengthening in Search of Legal Information. *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*, 77, 188–200. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5_13)
  10. Boyko, N., Hetman, S., & Kots, I. (2021). Comparison of Clustering Algorithms for Revenue and Cost Analysis. Proceedings of the 5th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems. Kharkiv [in Ukrainian].
  11. Procopiuc, C. M., Jones, M., Agarwal, P. K., & Murali, T. M. (2002). A Monte Carlo algorithm for fast projective clustering. ACM SIGMOD Intern. conf. on management of data. Madison.
  12. Boyko, N. (2016). Application of mathematical models for improvement of “cloud” data processes organization. *Mathematical Modeling and Computing*, 3(2), 111–119. <https://doi.org/10.23939/mmc2016.02.111>
  13. Hossain, M. Z., Akhtar, M. N., Ahmad, R. B., & Rahman, M. (2017). A dynamic K-means clustering for data mining. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 13(2), 521–526. <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i2.pp521-526>
  14. Slamet, C., Rahman, A., Ramdhani, M. A., & Darmalaksana, W. (2016). Clustering the verses of the Holy Qur’an using K-means algorithm. *Asian Journal of Information Technology*, 15(24), 5159–5162.
  15. Bekiros, S., Nguyen, D. K., Sandoval, J. L., & Uddin, G. S. (2017). Information diffusion, cluster formation and entropy-based network dynamics in equity and commodity markets. *European Journal of Operational Research*, 256(3), 945–961. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.052>

**Бойко Н. І., Ткачик О. А.** Алгоритми та методи кластеризації для різноманітних даних.

Дослідження присвячено комплексному вивченню методів кластеризації різнотипових даних. Досліджуються проблеми алгоритмів графічного формату, що зумовлені наявністю 12-ти різних ознак для кластеризації, 7 з яких були категоріальні. Представлене подання даних по 12-ти осях в графічному форматі. Було вирішено застосувати алгоритм РСА з перетворенням категоріальних ознак в числові для зменшення розмірності даних до 2-х компонент й подальшого ортогонального накладання кластерів на них. Наводиться застосування кластеризації методу к-прототипів. Показане використання РСА для зменшення розмірності в 6 разів приводить до значної втрати інформації. Проведені експерименти щодо ієрархічної кластеризації різнотипових даних, можна відзначити переваги й недоліки даного підходу. Наведена складність проведення кластеризації, яка полягає у представленні результатів аналізу великих даних. Описаний алгоритм КАМІЛА, який реалізований на моделі розподілених обчислень MapReduce і дає значну перевагу по швидкодії.

**Ключові слова:** максимізація очікування, моделювання структурних рівнянь, КАу-середні для даних MixedLarge, найменший спільний предок, карта самоорганізації, теорія адаптивного резонансу, оцінка щільності ядра.

### Список використаної літератури

1. Sarker A. Employee’s performance analysis and prediction using K-means clustering & decision tree algorithm. *Global Journal of Computer Science and Technology*. 2018. Vol. 18, No. 1. P. 1–6.
2. Fraley C., Raftery A. E. How Many Clusters? Which Clustering Method? Answers Via Model-Based Cluster Analysis. *Technical Report*. 1998. Vol. 41, No. 8. P. 578–588. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/41.8.578>
3. Murtagh F. A survey of recent advances in hierarchical clustering algorithms which use cluster centers. *Computer Journal*. 2020. Vol. 26, No. 4. P. 354–359. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/26.4.354>

4. Saxena A., Prasad M., Gupta A., Bharill N., Patel O. P., Tiwari A., Lin C. T. A review of clustering techniques and developments. *Neurocomputing*. 2017. Vol. 267, 664–681. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.06.053>
5. Sneath P., Sokal R. Numerical Taxonomy. *Human Biology*. 1973. Vol. 47, No. 2. P. 285–288.
6. Ptitsyn A., Hulver M., Cefalu W., York D., Smith S. R. Unsupervised clustering of gene expression data points at hypoxia as possible trigger for metabolic syndrome. *BMC Genomics*. 2006. Vol. 7, No. 318. <https://doi.org/10.1186/1471-2164-7-318>
7. Tung A. K., Hou J., Han J. Spatial clustering in the presence of obstacles. Proceedings 17th International Conference on Data Engineering. Heidelberg, 02–06 April 2001. Heidelberg, 2001. P. 359–367. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICDM.2002.1184042>
8. Bohm C., Railing K., Kriegel H., Kroger P. Density connected clustering with local subspace preferences. Proc. of the 4th IEEE Intern. conf. on data mining. Los Alamitos, 01 November 2004. Los Alamitos, 2004. P. 27–34. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-0-387-39940-9\\_605](https://doi.org/10.1007/978-0-387-39940-9_605)
9. Boyko N., Kmetyk-Podubinska K., Andrusiak I. Application of Ensemble Methods of Strengthening in Search of Legal Information. *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. 2021. Vol. 77. P. 188–200. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5_13)
10. Boyko N., Hetman S., Kots I. Comparison of Clustering Algorithms for Revenue and Cost Analysis. Proceedings of the 5th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems. Kharkiv, 22–23 April 2021. Kharkiv, 2021. P. 1866–1877.
11. Procopiuc C. M., Jones M., Agarwal P. K., Murali T. M. A Monte Carlo algorithm for fast projective clustering. ACM SIGMOD Intern. conf. on management of data. Madison, 03 June 2002. Madison, 2002. P. 418–427. <https://doi.org/10.1145/564691.564739>
12. Boyko N. Application of mathematical models for improvement of “cloud” data processes organization. *Mathematical Modeling and Computing*. 2016. Vol. 3, No. 2. P. 111–119. <https://doi.org/10.23939/mmc2016.02.111>
13. Hossain M. Z., Akhtar M. N., Ahmad R. B., Rahman M. A dynamic K-means clustering for data mining. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*. 2017. Vol. 13, No. 2. P. 21–526. <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i2.pp521-526>
14. Slamet C., Rahman A., Ramdhani M. A., Darmalaksana W. Clustering the verses of the Holy Qur’an using K-means algorithm. *Asian Journal of Information Technology*. 2016. Vol. 15, No. 24. P. 5159–5162.
15. Bekiros S., Nguyen D. K., Sandoval J. L., Uddin G. S. Information diffusion, cluster formation and entropy-based network dynamics in equity and commodity markets. *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 256, No. 3. P. 945–961. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.052>

Одержано 16.02.2023

УДК 519.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).150-155](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).150-155)**А. Ю. Брила<sup>1</sup>, О. І. Кузка<sup>2</sup>, О. О. Погоріляк<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
[andrii.bryla@uzhnu.edu.ua](mailto:andrii.bryla@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2518-9877>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
[oleksandr.kuzka@uzhnu.edu.ua](mailto:oleksandr.kuzka@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7556-3057>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
[oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua](mailto:oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0501-4861>

## ЗАДАЧА ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ ТА ІНТЕРВАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ДОПУСТИМОСТІ

Розглядається лексикографічна задача багатокритеріальної оптимізації, у якій на деякі з критеріїв накладено додаткові умови допустимості як умови знаходження значення критерію в одному з наперед заданих інтервалів. Для розв'язання такого роду задач запропоновано підхід до знаходження оптимальних розв'язків шляхом зведення їх до задач скалярної оптимізації з використанням відповідних коефіцієнтів зваженої згортки критеріїв.

**Ключові слова:** багатокритеріальна оптимізація, задача лексикографічної оптимізації, альтернативні критерії, умови допустимості критеріїв.

**1. Вступ.** Багато задач прийняття рішень можуть бути описані з використанням деяких критеріїв, які задають особи, що приймають рішення. Наявність критеріїв дозволяє описувати конфігурації взаємозв'язків субординацій, визначених на множині критеріїв, і отримувати відповідні задачі багатокритеріальної оптимізації ([1]). Розглянемо задачу прийняття рішень, де множину допустимих розв'язків  $X \subset \mathbb{R}^n$  задано з використанням системи лінійних рівнянь і нерівностей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

$$x_j \geq \rho_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\rho_1 \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Прийняття рішень здійснюється з використанням однорідних критеріїв  $\kappa^i$ ,  $1 \leq i \leq q$  з лінійними критеріальними функціями

$$c_i(x) = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (4)$$

та шкалою з введеним на ній порядком віддачі переваги «більше». Тобто згідно з критерієм  $\kappa^i$  альтернатива  $x \in X$  є кращою за альтернативу  $y \in Y$ , якщо і тільки якщо  $c_i(x) > c_i(y)$ . Не зменшуючи загальності міркувань будемо вважати, що

$$c_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (5)$$

**2. Задача лексикографічної оптимізації.** Нехай на множині критеріїв  $\kappa^i$ ,  $1 \leq i \leq q$  згідно з певними правилами задано субординацію строгого ранжування  $Rg$ . Будемо вважати, що відносна важливість критерію  $\kappa^i$  є більшою за відносну важливість критерію  $\kappa^j$  тоді і тільки тоді, коли  $i < j$ . Тоді згідно з [1] одержуємо задачу лексикографічної оптимізації

$$\max^L c(x), \quad x \in X, \quad (6)$$

$\kappa^i$ ,  $1 \leq i \leq q$  де

$$c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_q(x)).$$

Дана задача є всебічно вивченою ([1]), і для неї існує ряд ефективних методів розв'язання, тому зведення до такого роду задач завжди призводить до спрощення підходів знаходження множини оптимальних розв'язків.

**3. Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.** Нехай у задачі (5) на критерії  $\kappa^i$ ,  $1 \leq i \leq q$  введено так звані умови допустимості ([2]), що ґрунтуються на введенні додаткового мінімального значення для критеріальної функції  $m_i$ , при досягненні якого критерій залишається допустимим

$$c_i(x) \geq m_i, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (7)$$

При порушенні даної умови критерій є недопустимим і повинен бути виключеним з розгляду. Якщо на деякий з критеріїв  $\kappa^l$  додаткової умови не накладено, то відповідне обмежуюче значення  $m_l = 0$ .

Задача знаходження оптимального розв'язку з додатковими обмеженнями допустимості і вимогою знаходження оптимального розв'язку, який дозволяє знаходити максимально можливе значення допустимого критерію якнайбільшого рангу, є задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями ([2]). Тобто задачею

$$\max^L c(x), \quad x \in \bar{X}, \quad (8)$$

де  $\bar{X}$  — це множина допустимих розв'язків  $X$  доповнена обмеженнями допустимості критеріїв.

У [2] доведено, що задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями (8) може бути зведена до задачі максимізації

$$z(x) = \sum_{i=1}^q \alpha_i c_i(x) \rightarrow \max, \quad (9)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (10)$$

$$x_j \geq \rho_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

$$c_i(x) \geq m_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (12)$$

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^q y_i = 1, \quad (14)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (15)$$

Тут числа  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_q$  вибрано згідно з правилами [2–4] так, що функціонал

$$f(x) = \bar{\alpha}_1 c_1(x) + \bar{\alpha}_2 c_2(x) + \dots + \bar{\alpha}_q c_q(x), \quad (16)$$

задає лексикографічний порядок віддачі переваги на множині крайніх точок допустимої множини  $X$  і розв'язок задачі

$$\max f(x), \quad x \in X, \quad (17)$$

є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації (6).

Зміст змінних  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  задається так

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо вибираємо } j\text{-товий критерій,} \\ 0, & \text{якщо не вибираємо } j\text{-товий критерій,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (18)$$

**4. Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями та інтервальними обмеженнями допустимості.** Розглянемо випадок, коли, на відміну від задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями з умовами допустимості (7), на деякі критерії  $\kappa^i$ ,  $i \in H$ , накладаються умови допустимості, що можуть містити декілька інтервалів

$$p_l^i \leq c_i(x) \leq h_l^i, \quad i \in H, \quad l = 1, 2, \dots, q_i, \quad (19)$$

де

$$p_l^i, h_l^i \geq 0, \quad i \in H, \quad l = 1, 2, \dots, q_i. \quad (20)$$

Тобто, критерій  $\kappa^i$ ,  $i \in H$  вважається допустимим, якщо виконується одна з умов (19). Якщо не виконується жодна з умов (19), то критерій вважається недопустимим і повинен бути виключений з подальшого розгляду.

Задачу знаходження оптимального розв'язку з додатковими обмеженнями допустимості (19) і вимогою знаходження оптимального розв'язку, який дозволяє знаходити максимально можливе значення допустимого критерію якнайбільшого рангу, назвемо задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями з інтервальними обмеженнями допустимості. Позначимо таку задачу

$$\max L^{alt} c(x), \quad x \in \bar{\bar{X}}, \quad (21)$$

де  $\bar{\bar{X}}$  — множина допустимих розв'язків  $X$  доповнена обмеженнями допустимості (19).

Нехай числа  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_q$ , як і раніше вибрано згідно з правилами [2] так, що функціонал (16) задає лексикографічний порядок віддачі переваги на множині



крайніх точок допустимої множини  $X$ . Змінні  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  задаються, як у (18).

Розглянемо задачу

$$g(x) = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + \dots + \alpha_q c_q(x) \rightarrow \max, \quad (22)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (23)$$

$$x_j \geq \rho_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

$$p_l^i y_l^i \leq c_i(x) \leq h_l^i y_l^i + (1 - y_l^i) c_i^{\text{sup}}, \quad i \in H, \quad l = 1, 2, \dots, q_i, \quad (25)$$

$$y_i \leq \sum_{l=1}^{q_i} y_l^i, \quad i \in H, \quad (26)$$

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^q y_i = 1, \quad (28)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (29)$$

$$y_l^i \in \{0, 1\}, \quad i \in H, \quad l = 1, 2, \dots, q_i. \quad (30)$$

Величини  $c_i^{\text{sup}}$ ,  $i \in H$  — верхня межа значень критеріальної функції критерію  $\kappa^i$  на множині допустимих розв'язків  $X$ .

**Теорема 1.** *Розв'язок задачі (22)–(30) є розв'язком задачі (21).*

**Доведення.** Проведемо доведення методом від супротивного. Нехай  $x^*$  — оптимальний розв'язок задачі (22)–(30) і він відповідає допустимому критерію  $\kappa^{l^*}$  зі значенням критеріальної функції  $\hat{c}_{l^*}$ . Припустимо, що він не розв'язком задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями з інтервальними обмеженнями допустимості (21). Тобто існує такий допустимий критерій  $\kappa^k$  з оптимальним розв'язком  $\hat{x}^k \in X$  і значенням  $\hat{c}_k$ , що  $k < l^*$  (тобто ранг критерію  $\kappa^k$  є вищим за критерій  $\kappa^{l^*}$ ).

Якщо  $x^*$  є оптимальним розв'язком, то відповідне значення  $y_{l^*} = 1$  і  $\alpha_{l^*} = \bar{\alpha}_{l^*}$ . А отже, враховуючи обмеження (25)–(30), одержуємо, що

$$g(x^*) = \bar{\alpha}_{l^*} c_{l^*}(x^*).$$

Аналогічно, якщо припустити, що критерій  $\kappa^k$  є допустимим у  $\hat{x}^k \in X$ , то  $y_k = 1$  і  $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$ . Тоді

$$g(\hat{x}^k) = \bar{\alpha}_k c_k(\hat{x}^k).$$

Враховуючи вибір коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_q$ , одержуємо

$$g(\hat{x}^k) > g(x^*).$$

Одержане протиріччя доводить теорему.

За умови, коли потрібно знайти оптимальний розв'язок з використанням  $r$  допустимих критеріїв якнайвищого рангу, обмеження (28) повинно бути замінено обмеженням

$$\sum_{i=1}^q y_i = r. \quad (31)$$

У випадку, коли обмеження ставиться тільки на допустимість критеріїв, а не на їх кількість, то обмеження (28) повинно бути виключено з розгляду.

**5. Висновки.** У роботі розглянуто один з випадків, коли у задачі лексикографічної оптимізації на деякі з критеріїв накладено умови допустимості з інтервальними обмеженнями. Наявність такого роду обмежень не дозволяє застосувати відомі ефективні методи лексикографічної оптимізації. Для знаходження розв'язків запропоновано підхід, заснований на використанні коефіцієнтів додатної лінійної згортки критеріїв, які дозволяють будувати скалярні згортки критеріїв, що наводять порядок віддачі переваги, еквівалентний лексикографічному на множині крайніх точок допустимої множини. Такий підхід дозволяє зводити розглядувану задачу до задачі скалярної оптимізації і застосувати відомі ефективні методи.

### Список використаної літератури

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород : УжНУ, 2002. 312 с.
2. Брила А. Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 1, № 32. С. 54–60. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1\(34\).60-68](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).60-68)
3. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 5. С. 135–138.
4. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев : Наукова думка, 2003. 264 с.
5. Сергиенко І. В., Шило В. П., Рощин В. О. Дискретна оптимізація. Алгоритми та їхнє ефективне використання. Київ : Наукова думка, 2020. 144 с.
6. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Семенова Н. В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ*. 2000. № 6. С. 39–46.
7. Семенова Н. В., Колечкіна Л. М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ : Наукова думка, 2009. 266 с.
8. Семенова Н. В., Колечкіна Л. Н., Нагорная А. Н. Многокритериальные задачи лексикографической оптимизации с линейными целевыми функциями на нечетком множестве альтернатив. *Information science & Computing*. Sofia : Institute of Information Theories and Applications FOI ITNEA, 2009. P. 139–148.
9. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва : Наука, 1982. 256 с.
10. Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москва : Сов. радио, 1975. 192 с.

**Bryla A. Yu., Kuzka O. I., Pohoriliak O. O.** The Lexicographic Optimization Problem with alternative criteria and interval admissibility conditions.

The Lexicographic Multi-Criteria Optimization Problem with additional criteria's admissibility conditions is considered. The admissibility conditions are satisfied if the criterion's value belongs to one of the predetermined intervals. To solve the problem an approach of finding optimal solutions by reducing them to scalar optimization problems using the appropriate coefficients of the weighted convolution of criteria is proposed.

**Keywords:** Multi-Criteria Optimization Problem, Lexicographic Optimization Problem,

alternative criteria, criterion's admissibility conditions.

## References

1. Chervak, Yu. Yu. (2002). *Optymizaciya. Nepokrashuvaniy vybir* [Optimization. Unbeatable selection]. Uzhhorod: UzhNU [in Ukrainian].
2. Brila A. Yu. (2018). On solving a Lexicographic Optimization Problem with interval coefficients and alternative criteria. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics*, 1(32), 54–60. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1\(34\).60-68](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).60-68) [in Ukrainian].
3. Bryla, A. Yu. (2008). Dostizhimost optimalnyh reshenij linejnoy zadachi mnogokriterialnoj optimizacii po vzveshennoj summe kriteriev raznoj vazhnosti v tranzitivnoj subordinacii [Achievement of optimal solutions of the linear problem of multicriteria optimization on a weighted sum of criteria of different importance in transitive subordination]. *Cybernetics and system analysis*, 5, 135–138 [in Russian].
4. Sergienko, I. V., & Shilo, V. P. (2003). *Problems of discrete optimization: problems, methods of solution, research*. Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian].
5. Sergienko, I. V., Shilo, V. P., & Roschyn, V. O. (2020). *Discrete optimization. Algorithms and their effective use*. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
6. Sergienko, I. V., Lebedeva, T. T., & Semenova, N. V. (2000). On the existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and systems. analysis*, 6. 39–46 [in Ukrainian].
7. Semenova, N. V., & Kolechkina, L. M. (2009). *Vector problems of discrete optimization on combinatorial sets: research and solution methods*. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
8. Semenova, N. V., Kolechkina, L. N., & Nagornaya A. N. (2009). Multicriteria lexicographic optimization problems with linear objective functions on a fuzzy set of alternatives. In *Information science & Computing*. (139–148). Sofia: Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA [in Ukrainian].
9. Podinovskiy, V. V., & Nogin, V. D. (1982). *Pareto-optimal'nyye resheniya mnogokriterial'nykh zadach*. Moscow: Nauka [in Russian].
10. Podinovskij, V. V., & Gavrilov, V. M. (1975). *Optimizaciya po posledovatelno primenyayemym kriteriyam* [Optimization by successive criteria]. Moscow: Soviet Radio [in Russian].

Одержано 04.05.2023

УДК 519.925.51

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).156-165](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).156-165)**В. Ю. Глагола**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
провідний інженер-програміст ЦІТ,  
[veronika.smolanka@uzhnu.edu.ua](mailto:veronika.smolanka@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8380-1967>

**СИНТЕЗ КОМБІНОВАНОЇ НЕЙРОМЕРЕЖЕВОЇ МОДЕЛІ  
ПРОГНОЗУВАННЯ**

В роботі запропоновано метод побудови комбінованої моделі для прогнозування часових рядів. У роботі розглянуті класичні базові моделі прогнозування і на їх основі будується комбінована модель, яка допускає нейромережеву реалізацію. Множина базових моделей є динамічною, тобто у цю множину можуть вноситися нові моделі прогнозування, можуть видалятися моделі залежно від властивостей часових рядів. Для синтезу комбінованої моделі прогнозування з заданим кроком прогнозу, на початку визначається оптимальний крок передісторії. Будується функціонал і для фіксованого кроку прогнозу методом авторегресії визначається оптимальний крок передісторії, що визначає проміжок часу на якому проводиться аналіз точності моделей з базової множини. У процесі побудови комбінованої моделі для кожної базової моделі визначається ваговий коефіцієнт з яким вона входить у комбіновану модель. Вагові коефіцієнти базових моделей визначаються на підставі їх точності прогнозування на часовому періоді, визначеного кроком передісторії. Вагові коефіцієнти відображають міру впливу базових моделей на точність прогнозування комбінованої моделі. Після побудови комбінованої моделі проводиться її навчання та визначаються ті базові моделі, які будуть внесені в остаточну комбіновану модель прогнозування. Внаслідок такого підходу, як показують конкретні приклади, у багатьох випадках вдалося істотно покращити точність прогнозування комбінованої моделі.

**Ключові слова:** часовий ряд, модель прогнозування, навчання, комбінована модель, крок прогнозу.

**1. Вступ.** Ринкова сфера діяльності широко застосовує прогнозування, що покращує планування виробничих потужностей і фінансових можливостей підприємств. Створення відповідних економіко-математичних моделей, обумовлює ефективне використання наявних ресурсів у процесі виробництва і надання послуг.

У визначенні стратегій розвитку підприємств важливу роль відіграє обчислення прогнозів економічних і фінансових показників та чинників. Достатньо щоб була відома достовірна інформація про діяльність підприємства в минулому, для того щоб отримати потрібні прогнози на майбутнє, для цього можна застосовувати різні методи прогнозування. Найважливішим у виборі методу є мета й деталізації прогнозних чинників і середовища. Вибір методу і моделі, які використовуються для прогнозування залежать також від внутрішніх закономірностей часових рядів та від зовнішніх впливових факторів. Наведений в роботі метод синтезу нейромережі для прогнозування сприяє у вирішенні проблеми знаходження «найефективнішої» моделі, що будується на основі базових моделей.

В процесі проведення даного дослідження, поряд з загальнонауковими методами були використані відомі методи прогнозування часових рядів, серед яких

авторегресійна модель [1], метод найменших квадратів і найменших квадратів з вагами [2], метод експоненційного згладжування (метод Брауна) [3], методи екстраполяції [4].

Проблемам прогнозування кількісних показників різних процесів та явищ на основі ретроспективних даних, які знайшли своє відображення у часових рядах, присвячено ряд сучасних наукових досліджень. В основі таких досліджень лежать різні концепції. В [5, 6, 7] виконано порівняльний аналіз основних моделей машинного навчання для прогнозування часових рядів.

Основу сучасних досліджень становлять гібридні прогнозуючі моделі, в яких в різний спосіб поєднано декілька методів прогнозування [8, 9]. Застосування таких моделей часто дозволяє покращувати точність прогнозу шляхом врахування особливостей часових рядів. В [10, 11] розроблено метод синтезу прогнозуючої схеми на основі базових прогнозуючих моделей, який дозволяє для кожного конкретного часового ряду в автоматизованому режимі визначити результати прогнозування методами, які забезпечують мінімізацію похибки прогнозування в заданій системі базисних моделей. Робота [12] присвячена розробці еволюційного методу для прогнозування часових рядів, застосування якого дозволяє покращити якість прогнозу, в порівнянні з моделями прогнозування, які включені в базову прогнозуючу модель. Також, для прогнозування пропонується застосовувати динамічну обчислювальну систему нейронних мереж [13, 14].

Проведений аналіз сучасних наукових джерел дає підстави стверджувати, що актуальною є розробка нових моделей прогнозування, які б дозволяли на основі реалізації ідеї «конкуренції» базових прогнозних моделей отримувати більш точні результати прогнозу для конкретних часових рядів.

**2. Визначення пріоритетів базових моделей прогнозування і побудова прогнозуючої нейромережі.** Нехай  $v_1, v_2, \dots, v_t, \dots, v_n$  часовий ряд, що відповідає послідовністю значень виробничого або фінансового показника деякого підприємства,  $v_t$  — значення досліджуваного показника у момент часу  $t$ , а  $n$  — число реалізацій даного показника.

Прогнозне значення  $\tilde{v}_t$  показника  $v_t$  у момент часу  $t$  можна записати так:

$$\tilde{v}_t = f(a_1, \dots, a_r, v_{t-1}, \dots, v_{t-k}, t),$$

де  $a_1, \dots, a_r$  — параметри моделі,  $k$  — глибина передісторії. Для знаходження параметрів  $a_1, \dots, a_r$ , як правило будується функціонал

$$L(a_1, \dots, a_r) = \sum_{t=k+1}^n (v_t - \tilde{v}_t)^2,$$

і мінімізація цього функціоналу проводиться методом найменших квадратів. Після знаходження  $a_1^*, \dots, a_r^*$  параметрів  $a_1, \dots, a_r$ , які мінімізують функціонал  $L$ , отримані оптимальні параметри прогнозування часового ряду  $v_t$  для моделі  $f$ . В залежності від типу функцій  $f$  маємо різні оптимальні моделі прогнозування часового ряду.

Перед побудовою нейромережі для заданого кроку прогнозу  $\tau$  методом авторегресії знаходимо оптимальний крок передісторії  $k_\tau^*$  [11]. Після визначення  $k_\tau^*$  для фіксованого  $\tau = \tau_0$  розглянемо різні моделі прогнозування  $M_1, M_2, \dots, M_q$  часового ряду з кроком прогнозу  $\tau$  на часовому періоді  $n - k_\tau^* + 1, n - k_\tau^* +$

2, ..., n. На основі отриманих результатів прогнозу за вищенаведеними методами побудуємо наступну таблицю

Таблиця 1.

Прогнозні значення часового ряду відносно різних моделей

Моделі прогнозування	Прогнозні значення часового ряду за період $n - k_\tau^* + 1, n - k_\tau^* + 2, \dots, n$			
	$v_{n-k_\tau^*+1}$	$v_{n-k_\tau^*+2}$	$\dots$	$v_n$
$M_1$	$\tilde{v}_{n-k_\tau^*+1}^{(1)}$	$\tilde{v}_{n-k_\tau^*+2}^{(1)}$	$\dots$	$\tilde{v}_n^{(1)}$
$M_2$	$\tilde{v}_{n-k_\tau^*+1}^{(2)}$	$\tilde{v}_{n-k_\tau^*+2}^{(2)}$	$\dots$	$\tilde{v}_n^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$M_q$	$\tilde{v}_{n-k_\tau^*+1}^{(q)}$	$\tilde{v}_{n-k_\tau^*+2}^{(q)}$	$\dots$	$\tilde{v}_n^{(q)}$

У кожному стовпчику  $v_{n-k_\tau^*+1}, v_{n-k_\tau^*+2}, \dots, v_n$  Таблиці 1 знаходимо найменше квадратичне відхилення між прогнозними і фактичними значеннями відповідних членів часового ряду. Математично це можна записати так:

Нехай

$$j_1 = n - k_\tau^* + 1, \quad \varepsilon_1 = \min \left\{ \left( v_{j_1} - \tilde{v}_{j_1}^{(1)} \right)^2, \left( v_{j_1} - \tilde{v}_{j_1}^{(2)} \right)^2, \dots, \left( v_{j_1} - \tilde{v}_{j_1}^{(q)} \right)^2 \right\},$$

$$j_2 = n - k_\tau^* + 2, \quad \varepsilon_2 = \min \left\{ \left( v_{j_2} - \tilde{v}_{j_2}^{(1)} \right)^2, \left( v_{j_2} - \tilde{v}_{j_2}^{(2)} \right)^2, \dots, \left( v_{j_2} - \tilde{v}_{j_2}^{(q)} \right)^2 \right\},$$

.....

$$j_{(k_\tau^*)} = n, \quad \varepsilon_{k_\tau^*} = \min \left\{ \left( v_n - \tilde{v}_n^{(1)} \right)^2, \left( v_n - \tilde{v}_n^{(2)} \right)^2, \dots, \left( v_n - \tilde{v}_n^{(q)} \right)^2 \right\}.$$

Визначимо множини  $I_1, I_2, \dots, I_{k_\tau^*}$  наступним чином:

$$I_1 = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, q\} \mid \varepsilon_1 = \left( v_{j_1} - \tilde{v}_{j_1}^{(i)} \right)^2 \right\},$$

$$I_2 = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, q\} \mid \varepsilon_2 = \left( v_{j_2} - \tilde{v}_{j_2}^{(i)} \right)^2 \right\},$$

.....

$$I_{k_\tau^*} = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, q\} \mid \varepsilon_{k_\tau^*} = \left( v_n - \tilde{v}_n^{(i)} \right)^2 \right\},$$

і побудуємо наступну таблицю

де

$$a_{ps} = \begin{cases} \beta^{k_\tau^* - s}, & O : I > s \in I_s, \\ 0, & O : I > s \notin I_s, \end{cases}$$

$$s_p(\beta) = \sum_{j=1}^{k_\tau^*} a_{pj}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (p = 1, 2, \dots, q; s = 1, 2, \dots, k_\tau^*).$$

Таблиця 2.

Параметри базових моделей прогнозування

Моделі прогнозування	$j_1$	$j_2$	$\dots$	$j_{k^*}$	Результуючий стовпчик
$M_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1k^*}$	$S_1(\beta)$
$M_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2k^*}$	$S_2(\beta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$M_q$	$a_{q1}$	$a_{q2}$	$\dots$	$a_{qk^*}$	$S_q(\beta)$

За допомогою  $S_p(\beta)$  та  $S(\beta) = \sum_{p=1}^q S_p(\beta)$  визначимо вагові коефіцієнти прогнозуючих моделей  $M_p$  ( $p \leq q$ ) з якими вони входять у наступну прогнозуючу схему

$$\tilde{v}_{n+\tau} = \frac{S_1(\beta)}{S(\beta)} \tilde{v}_{n+\tau}^{(1)} + \frac{S_2(\beta)}{S(\beta)} \tilde{v}_{n+\tau}^{(2)} + \dots + \frac{S_q(\beta)}{S(\beta)} \tilde{v}_{n+\tau}^{(q)}$$

За допомогою параметрів  $S_p(\beta)$  ( $p = 1, 2, \dots, q$ ) визначимо пріоритети базових моделей прогнозування наступним чином: модель  $M_i$  має більш високий пріоритет у прогнозуванні ніж модель  $M_j$  для заданого часового ряду з кроком прогнозу  $\tau$  відносно параметра  $\beta$ , якщо  $S_i(\beta) > S_j(\beta)$ .

**Алгоритм навчання комбінованої моделі прогнозування часових рядів** Нехай  $v_1, v_2, \dots, v_n$  часовий ряд. Навчання комбінованої моделі для прогнозування часових рядів здійснюємо за наступним алгоритмом:

Крок 1. Задаємо крок прогнозу  $\tau = \tau_0$ .

Крок 2. Методом авторегресії визначаємо оптимальний крок передісторії  $k^*$ .

Крок 3. Проведемо прогнозування часового ряду відносно базових моделей  $M_1, M_2, \dots, M_q$  з кроком  $\tau$  на періоді  $n - k^* + 1, n - k^* + 2, \dots, n$ , де  $n$  — кількість членів в часовому ряді. На основі отриманих результатів прогнозу відносно цих моделей побудуємо Таблицю 1.

Крок 4. Задаємо  $m$  точок  $\beta_r = \frac{r}{m}$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) в інтервалі  $(0, 1]$  і для кожного фіксованого  $\beta = \beta_r$  будуємо Таблицю 2. З ненульових елементів результуючого стовпчика цієї таблиці побудуємо упорядковану множину  $U_r = (S_{r_1}(\beta_r) \geq S_{r_2}(\beta_r) \geq \dots \geq S_{r_{q_r}}(\beta_r))$ .

Крок 5. Визначимо множину найвпливовіших моделей  $U_r^*$ , які будуть включені у комбіновану модель відносно  $\beta = \beta_r$ . На початку прийемо, що  $U_r^* = \{M_{r_1}\}$ . Тоді прогноз проводиться за формулою:  $\tilde{v}_{n+\tau} = \tilde{v}_{n+\tau}^{(r_1)}$ .

Знаходимо значення функціоналу  $H_1(\beta_r)$  :

$$H_1(\beta_r) = \sum_{i=1}^{k^*} \left( v_{j_i} - \tilde{v}_{j_i}^{(r_1)} \right)^2,$$

де  $j_i = n - k^* + i$ .

Задаємо правило включення моделі  $M_{r_2}$  у комбіновану модель.

Розглянемо модель прогнозування:

$$\tilde{v}_{n+\tau} = \frac{S_{r_1}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{n+\tau}^{(r_1)} + \frac{S_{r_2}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{n+\tau}^{(r_2)},$$

де  $S(\beta_r) = S_{r_1}(\beta_r) + S_{r_2}(\beta_r)$ .

Обчислимо значення функціоналу  $H_2(\beta_r)$ :

$$H_2(\beta_r) = \sum_{i=1}^{k_r^*} \left( v_{j_i} - \frac{S_{r_1}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{j_i}^{(r_1)} - \frac{S_{r_2}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{j_i}^{(r_2)} \right)^2.$$

Якщо  $H_2(\beta_r) < H_1(\beta_r)$ , тоді модель  $M_{r_2}$  включаємо у множину  $U_r^*$ , тобто

$$U_r^* = \{M_{r_1}\} \cup \{M_{r_2}\}.$$

Умовою включення моделі  $M_{r_3}$  у множину  $U_r^*$  є виконання нерівності  $H_3(\beta_r) < H_2(\beta_r)$ , де

$$H_3(\beta_r) = \sum_{i=1}^{k_r^*} \left( v_{j_i} - \frac{S_{r_1}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{j_i}^{(r_1)} - \frac{S_{r_2}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{j_i}^{(r_2)} - \frac{S_{r_3}(\beta_r)}{S(\beta_r)} \tilde{v}_{j_i}^{(r_3)} \right)^2,$$

і

$$S(\beta_r) = S_{r_1}(\beta_r) + S_{r_2}(\beta_r) + S_{r_3}(\beta_r).$$

Процес побудови множини  $U_r^*$  для кожного  $r$  продовжуємо до виконання умов включення моделей із  $U_r$  ( $r = 1, 2, \dots, q_r$ ).

Крок 6. Нехай

$$U_r^* = \{M_{r_1}, M_{r_2}, \dots, M_{r_{h_r}}\}$$

і

$$H_{r_{h_r}^*}(\beta_{r^*}) = \min \{H_{r_{h_r}}(\beta_r) \mid r = 1, 2, \dots, m\}.$$

Тоді прогнозування проводиться на основі базових моделей множини  $U_{r^*}^* = \{M_{r_1^*}, M_{r_2^*}, \dots, M_{r_{h_r}^*}\}$  за формулою:

$$\tilde{v}_{n+\tau} = \frac{S_{r_1^*}(\beta_{r^*})}{S(\beta_{r^*})} \tilde{v}_{n+\tau}^{(r_1^*)} + \frac{S_{r_2^*}(\beta_{r^*})}{S(\beta_{r^*})} \tilde{v}_{n+\tau}^{(r_2^*)} + \dots + \frac{S_{r_{h_r}^*}(\beta_{r^*})}{S(\beta_{r^*})} \tilde{v}_{n+\tau}^{(r_{h_r}^*)},$$

де

$$S(\beta_{r^*}) = S_{r_1^*}(\beta_{r^*}) + S_{r_2^*}(\beta_{r^*}) + \dots + S_{r_{h_r}^*}(\beta_{r^*}).$$

Слід відмітити, що кожна із базових моделей допускає реалізацію одним нейронним елементом відносно  $\tau$  і  $k_r^*$ . Ваговий вектор нейронного елемента відповідної моделі визначається оптимальними значеннями параметрів  $\tau$  і  $k_r^*$ , а його функція активації реалізує відповідну прогнозуючу модель.

Синтезована нейронна мережа реалізує комбіновану модель прогнозування часових рядів на основі базових моделей  $\{M_1, M_2, \dots, M_q\}$  відносно  $\tau$  і оптимальних параметрів  $k_r^*$  і  $r^*$ .

**3. Аналіз якості побудованої нейромережевої моделі прогнозування.** Важливим етапом прогнозування є верифікація прогнозів, тобто оцінювання їх точності та їх обґрунтованості. На етапі верифікації використовують різні критерії, які дають можливість оцінити якість прогнозу.



Для оцінки якості прогнозу побудованої нейромережевої моделі застосовували критерію MRE (Mean Relative Error) – середня відносна похибка. MRE визначається за формулою:

$$MRE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{v_t - \tilde{v}_t}{v_t} \right|,$$

де  $v_t$  – значення часового ряду у момент часу  $t$ ;  $\tilde{v}_t$  – прогнозне значення  $v_t$ .

Середню відносну похибку (MRE) можна використовувати для порівняння двох (або більше) різних прогнозів одного й того ж часового ряду: кращим вважається той прогноз, у якого значення MRE є меншим.

За критерієм середньої відносної похибки оцінимо якість прогнозу нейромережі шляхом порівняння її результатів з результатами класичних прогнозуючих моделей:  $M_1$  – авторегресії,  $M_2$  – метод найменших квадратів,  $M_3$  – метод найменших квадратів з вагами,  $M_4$  – метод Брауна,  $M_5$  – метод екстраполяції,  $M_6$  – складний метод екстраполяції.

Ефективність прогнозу побудованої нейромережі показано на даних чисельності наявного населення (за оцінкою) в Україні у 2015–2019 роках [15].

Результати прогнозу моделей  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  і комбінованої нейромережі наводяться у наступних таблицях:

Таблиця 3.

Чисельність населення України 2015–2019 роках (якість прогнозу з кроком  $\tau = 1$ )

	Метод авто-регресії $M_1$	Метод най-мен-ших ква-дратів $M_2$	Метод най-мен-ших ква-дратів з вагами $M_3$	Метод Брау-на $M_4$	Комбіно-вана модель	Реальні дані
Прогно-зоване значення	41,884	41,888	43,068	52,745	40,579	41,09

Параметри, які були використані для синтезу нейромережі:

$$n = 5; \quad k_7^* = 2.$$

Для методу найменших квадратів та найменших квадратів з вагами функція для апроксимації тренда визначається за формулою:

$$w_t = \sum_{i=1}^m a_i t^{i-1}$$

Рис. 1. Рис. 1. Прогнозування чисельності населення України 2020 року.  
Форма 1.

Таблиця 4.

Чисельність населення України 2015-2019 роках (якість прогнозу з кроком  $\tau = 1$ )

	Метод екстраполяції $M_5$	Складний метод екстраполяції $M_6$	Комбінована модель	Реальні дані
Прогнозоване значення	42,008	41,888	40,695	41,09

Рис. 2. Прогнозування чисельності населення України 2020 року. Форма 2.

Параметри для синтезу неймережі:

$$n = 5; \quad k_{\tau}^* = 3; \quad \beta = 0,4.$$

Проаналізувавши дані останніх таблиць бачимо, що найбільш оптимальне прогнозоване значення, а отже і найменшу середню відносну похибку, має побудована неймережева модель.

**4. Висновки та перспективи подальших досліджень.** В цій роботі розроблено метод синтезу нейромережевої моделі для прогнозування часових рядів на основі базових моделей прогнозування, які допускають зображення в нейробазисі. На етапі синтезу нейромережі для заданого кроку прогнозу визначається оптимальний крок передісторії і пріоритети базових моделей за якістю прогнозу.

Ефективність прогнозу побудованої нейромережевої моделі прогнозування було показано на реальних показниках кількості населення України за п'ять років. Для оцінки якості прогнозу нейромережі і для її порівняння з іншими моделями прогнозування було вибрано критерії MRE. Отримані в роботі результати показують, що згідно цьому критерію найвищу точність прогнозу має нейромережа, побудована на основі комбінованої моделі.

### Список використаної літератури

1. Бокс Дж., Дженкінс Г. Аналіз часових рядів. Прогноз і управління. Том 1. Москва : Мир, 1974. 406 с.
2. Іванов В. В. Аналіз часових рядів та прогнозування економічних показників. Харків, 1999. 230 с.
3. Кухарев В. І., Саллі В. І., Ерперт А. М. Економіко-математичні методи та моделі в плануванні та управлінні. Київ, 1991. 302 с.
4. Яренко А. В. Систематизація кількісних методів прогнозування кон'юнктури ринку маркетингових досліджень. Київ, 2015. С. 1–13.
5. Ахмед Н. К., Атія А. Ф., Гаяр Н. Е., Ель-Шишні Х. Емпіричне порівняння моделей машинного навчання для прогнозування часових рядів. *Економетричні огляди*. 2010. Т. 29, № 5-6. С. 594–621. DOI: <https://doi.org/10.1080/07474938.2010.481556>
6. Долгих С., Мулеса О. Аналіз епідеміологічних факторів Covid-19: визначення основних факторів за допомогою машини. *Матеріали семінару CEUR*. 2833. 2021. С. 114–123. DOI: <https://doi.org/10.1101/2020.06.01.20119560>
7. Шмуєлі Г., Ліхтендаль (молодший) К. К. Практичне прогнозування часових рядів за допомогою  $r$ : практичний посібник. 2016.
8. Цао Дж., Лі З., Лі Дж. Модель прогнозування фінансових часових рядів на основі SEEMDAN і LSTM. *Physica A: Статистична механіка та її застосування*. 2019. С. 127–139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.11.061>
9. Ханделвал І., Адхікарі Р., Верма Г. Прогнозування часових рядів за допомогою гібридних моделей ARIMA та ANN на основі декомпозиції DWT. *Procedia Computer Science*. 2015. Т. 48. С. 173–179. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.04.167>
10. Гече Ф., Мулеса О., Батюк А., Волощук В. The Combined Time Series Forecasting Model. *Перша міжнародна конференція IEEE з інтелектуального аналізу та обробки потоків даних (DSMP), 21-25 серпня, Львів, Україна*. 2020. С. 272–275. DOI: <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204311>
11. Гече Ф., Батюк А., Мулеса О., Вашкеба М. Розробка ефективної моделі прогнозування часових рядів. *Міжнародний журнал перспективних досліджень у сфері комп'ютерної техніки та технологій*. 2015. Т. 4, № 12. С. 4377–4386.
12. Мулеса О. Ю., Снитюк В. Є. Розробка еволюційного методу прогнозування часових рядів. *Автоматизація технологічних і господарських процесів*. Т. 12, № 3. С. 4–9. DOI: <https://doi.org/10.15673/atbp.v12i3.1854>
13. Сміл С. Гібридний метод експоненціального згладжування та рекурентних нейронних мереж для прогнозування часових рядів. *Міжнародний журнал прогнозування*. 2020. Т. 36, № 1. С. 75–85. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.03.017>
14. Сю В., Пен Х., Цзен Х., Чжоу Ф., Тянь Х., Пен Х. Гібридний метод моделювання для прогнозування часових рядів на основі моделі лінійної регресії та глибокого навчання. *Applied Intelligence*. 2019. Т. 49, № 8. С. 3002–3015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10489-019-01426-3>
15. Киридон А. М. Україна. 30 років незалежності. Київ, 2021. 536 с.

## Hlahola V. Yu. Synthesis of the combined neural network forecasting model.

The paper proposes a method of building a combined model for forecasting time series. In the work, classic basic models of forecasting are considered and a combined model is built on their basis, which allows neural network implementation. The set of basic models is dynamic, that is, new forecasting models can be added to this set, models can be deleted depending on the properties of the time series. For the synthesis of a combined forecasting model with a given forecast step, the optimal step of the background history is determined at the beginning. A functional is built, and for a fixed step of the forecast, the optimal step of the history is determined by the autoregression method, which determines the time interval during which the analysis of the accuracy of the models from the base set is carried out. In the process of building a combined model, the weight factor with which it is included in the combined model is determined for each basic model. The weighting coefficients of the basic models are determined on the basis of their forecasting accuracy in the time period determined by the history step. The weighting coefficients reflect the degree of influence of the base models on the forecasting accuracy of the combined model. After the combined model is built, it is trained and the basic models that will be included in the final combined forecasting model are determined. As a result of this approach, as concrete examples show, in many cases it was possible to significantly improve the forecasting accuracy of the combined model.

**Keywords:** time series, forecasting model, training, combined model, step forecast.

## References

1. Boxing, J., & Jenkins, G. (1974). *Time series analysis. Forecast and management. Volume 1*. Moscow: Peace [in Ukrainian].
2. Ivanov, V. V. (1999). *Time series analysis and forecasting of economic indicators*. Kharkiv: KhNU [in Ukrainian].
3. Kukharev, V. I., Sally, V. I., & Erpert, A. M. (1991). *Economic and mathematical methods and models in planning and management.*, Kyiv: High school [in Ukrainian].
4. Yarenko, A. V. (2015). *Systematization of quantitative methods forecasting the market condition marketing research*. Kyiv: National University of Technology and Design [in Ukrainian].
5. Ahmed, N. K., Atiya, A. F., Gayar, N. E., & El-Shishiny, H. (2010). An empirical comparison of machine learning models for time series forecasting. *Econometric Reviews*, 29(5-6), 594–621. <https://doi.org/10.1080/07474938.2010.481556>
6. Dolgikh, S. & Mulesa, O. (2021). Covid-19 epidemiological factor analysis: Identifying principal factors with machine. *CEUR Workshop Proceedings, 2833*, 114–123 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.1101/2020.06.01.20119560>
7. Shmueli, G., & Lichtendahl (Jr.), K. C. (2016). *Practical time series forecasting with r: A hands-on guide*. Axelrod Schnell Publishers.
8. Cao, J., Li, Z., & Li, J. (2019). Financial time series forecasting model based on CEEMDAN and LSTM. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 127–139. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.11.061>
9. Khandelwal, I., Adhikari, R., & Verma, G. (2015). Time series forecasting using hybrid ARIMA and ANN models based on DWT decomposition. *Procedia Computer Science*, 173–179. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.04.167>
10. Geche, F., Mulesa, O., Batyuk, A., & Voloshchuk V. (2020). The Combined Time Series Forecasting Model. *IEEE Firs International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP), August 21-25, Lviv, Ukraine*, 272–275 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204311>
11. Geche, F., Batyuk, A., Mulesa, O., & Vashkeba, M. (2015). Development of effective time series forecasting model. *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology*, 4(12), 4377–4386 [in Ukrainian].
12. Mulesa, O. Yu., & Snytyuk, V. Ye. (2020). Development of an evolutionary method for time series forecasting. *Automation of technological and business processes*, 12(3), 4–9 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.15673/atbp.v12i3.1854>
13. Smyl, S. (2020). A hybrid method of exponential smoothing and recurrent neural net-

- works for time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 36(1), 75–85. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.03.017>
14. Xu, W., Peng, H., Zeng, X., Zhou, F., Tian, X., & Peng, X. (2019). A hybrid modelling method for time series forecasting based on a linear regression model and deep learning. *Applied Intelligence*, 49(8), 3002–3015. <https://doi.org/10.1007/s10489-019-01426-3>
  15. Kyrydon, A. M. (2021). Ukraine. 30 years of independence. A brief guide, Kyiv [in Ukrainian].

Одержано 10.04.2023

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).166-175](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).166-175)**Н. В. Ічанська<sup>1</sup>, М. В. Лисенко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,  
доцент кафедри вищої та прикладної маткматики,  
кандидат фізико-математичних наук  
itm.ichanska@np.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5963-9288>

<sup>2</sup> Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,  
доцент кафедри комп'ютерних технологій та інформаційних систем,  
кандидат фізико-математичних наук  
lysenkop1@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0995-2991>

## ПРОГНОЗУВАННЯ ВИДОБУТКУ НАФТИ В УКРАЇНІ ЗА ДОПОМОГОЮ АДАПТИВНИХ МОДЕЛЕЙ

У статті розглянуто моделювання життєвого циклу видобутку нафти. Проаналізовано сутність, переваги й недоліки цих підходів. Авторами розв'язано задачу апроксимації методами математичного моделювання: експоненційного вирівнювання, Хольта та прогнозування на основі нейромережових технологій. У роботі надано класифікацію цих методів, зазначено важливість їх застосування з метою знаходження ефективних шляхів розв'язку проблем розвитку промислового комплексу та первинного сектору економіки України, базовою складовою якої є видобувна галузь.

Розглянуте моделювання життєвих циклів видобутку нафти дає можливість відобразити прогноз у вигляді трикутного нечіткого числа, тобто вказати можливі очікувані значення. Адаптивні моделі прогнозування — це моделі, які використовують дисконтування даних і можуть швидко пристосовуватись до зміни умов, змінюючи свою структуру та параметри.

Метод експоненційного вирівнювання ґрунтується на тому, що при прогнозуванні ряд динаміки показників вирівнюється на основі зваженої ковзної середньої, де вагові коефіцієнти визначаються експоненційним законом розподілу. Для прогнозування на основі нейромережових технологій використана нейронна мережа Feed-forward back propagation, що містить три прошарки нейронів — вхідний, проміжний та вихідний. У роботі показано, що найменше прогнозоване значення одержується при застосуванні методу експоненційного вирівнювання, дещо більше при застосуванні методу Хольта і найбільше при використанні нейронних мереж.

**Ключові слова:** життєвий цикл, прогнозування, видобуток нафти, модель Хольта, штучні нейронні мережі, метод експоненційного вирівнювання.

**1. Вступ.** Енергетичний комплекс України є ключовим елементом її економіки та важливою галуззю для забезпечення життєвого рівня населення та розвитку промисловості. Зокрема, енергетика забезпечує роботу міст та сіл, працю підприємств та індустрії, а також опалення житлових будинків.

На жаль, Україна стикається з проблемами у галузі енергетики, зокрема залежністю від імпорту енергоносіїв, високими тарифами на електроенергію для населення та промисловості, застарілою технікою виробництва електроенергії та недостатньою ефективністю енергосистеми.

Однак, Україна має потенціал для розвитку відновлюваної енергетики, зокрема сонячної та вітрової, що може зменшити залежність від імпорту енергоносіїв та знизити витрати на енергію для населення та промисловості.

Крім того, розвиток енергоефективності та використання новітніх технологій виробництва енергії може допомогти зменшити негативний вплив на навколишнє середовище та забезпечити стале економічне зростання країни.

Отже, розвиток енергетичного комплексу України є важливою задачею, яка вимагає комплексного підходу та залучення інвестицій для впровадження новітніх технологій та забезпечення сталого розвитку країни.

Надзвичайно важливою задачею для забезпечення сталого розвитку економіки країни та її енергетичної безпеки є підтримання позитивної динаміки обсягів видобутку нафти в Україні, яка використовується як основне джерело енергії для виробництва електроенергії, опалення та транспорту. Нафтопереробні підприємства є одними з найбільших промислових об'єктів країни, які забезпечують значну кількість робочих місць і надходжень до бюджету.

Промисловий комплекс є однією з основних галузей національної економіки, його розвиток має важливе значення для забезпечення стійкого економічного зростання країни. У науковій літературі з питань розвитку промислового комплексу України можна відзначити праці таких вчених, як О. І. Амоша, В. П. Вишневський, І. О. Галиця, М. О. Кизим, Ю. В. Кіндзерський, О. Й. Лесько, А. Д. Олійник, О. В. Пирог, І.В. Причеп, В. Є. Хаустова, А. В. Шевченко, Т. М. Юсупова, М. Ю. Сушко, М. М. Якубовський та ін. [1, 2]. Усі ці дослідження спрямовані на вдосконалення практичних рекомендацій з питань розвитку промисловості, її підвищення конкурентоспроможності та ефективності. В цілому, науковий підхід до проблем розвитку промислового комплексу України може допомогти знайти ефективні шляхи для вирішення складних завдань, пов'язаних зі зниженням обсягів виробництва. Використання математичної моделі у прогнозуванні видобутку нафти є необхідним і ефективним інструментом для визначення майбутніх обсягів виробництва та вирішення ряду економічних та технічних завдань. Моделювання дозволяє побудувати математичну модель на основі наявних даних та встановити залежності між факторами, які впливають на процес видобутку нафти.

Засновниками засад використання апарату адаптивного моделювання соціально-економічних процесів є Г. Браун [3], А. Тейл, С. Вейдж [4], П. Вінтерса [5]. Тема адаптивного моделювання виробничих процесів та прогнозування економічних показників підприємства є актуальною як на міжнародному, так і на внутрішньому рівнях. Чимало вітчизняних та закордонних учених займаються дослідженням цієї теми з метою вдосконалення методів та підвищення ефективності їх застосування у практичній діяльності., зокрема: Т. С. Клебанова, В. М. Геєць, Н. А. Кізіма, В. В. Давніс, В. Тінякова, Н. В. Климович, О. Г. Николаєва та інші [6, 7]. Результати досліджень цих учених дозволяють удосконалювати методи адаптивного моделювання та застосовувати їх для прогнозування економічних показників підприємств, підвищення ефективності виробничих процесів та раціонального використання ресурсів.

**2. Постановка задачі.** Математичне моделювання є перспективним напрямом сучасних досліджень, воно ефективно використовується в багатьох галузях: науці, техніці, економіці, соціології та інших сферах (див., наприклад [8–11]).

Математичні моделі дозволяють відтворити й аналізувати різні процеси та явища, що допомагає зрозуміти їх поведінку, зробити прогнози та приймати

обґрунтовані рішення.

Основною задачею моделювання видобутку нафти є розробка математичної моделі, яка б дозволяла прогнозувати майбутні обсяги видобутку з високою точністю на основі статистичних даних про минулий видобуток та інші фактори, що впливають на цей процес. Для побудови моделі можна використовувати різні методи, такі як регресійний аналіз, часові ряди, нейронні мережі тощо. Після побудови моделі можна здійснити її верифікацію, тобто перевірку її точності та адекватності на основі порівняння прогнозованих значень з реальними даними.

Отримана модель може бути використана для прогнозування майбутніх обсягів видобутку нафти, що дає змогу зробити ефективні рішення з планування виробничих процесів, оптимізації витрат на експлуатацію обладнання та планування розвитку нафтового господарства.

**Мета статті** полягає у прогнозуванні життєвого циклу видобутку нафти з використанням методів математичного моделювання, а саме адаптивних моделей і нейромережевого підходу, а також порівнянні вибраних методів.

**Метою цієї статті** є застосування методів математичного моделювання, таких як адаптивні моделі та нейромережевий підхід, для прогнозування життєвого циклу видобутку нафти та порівняння ефективності обраних методів.

**3. Основний результат.** При розробленні стратегічних програм розвитку нафтовидобувної промисловості України потрібні науково обґрунтовані прогнози динаміки показників, що характеризують дану галузь економіки. Такі прогнози дають можливість виявити тенденції в розвитку цієї галузі, що необхідно для ефективного стратегічного планування.

Для одержання прогнозів обсягів видобування нафти в Україні на 2023–2024 роки вибрано три методи прогнозування: метод експоненційного вирівнювання, метод Хольта та прогнозування на основі нейромережевих технологій. Одержані результати дають можливість відобразити прогноз у вигляді трикутного нечіткого числа, тобто вказати можливі очікувані значення даного показника разом із відповідними значеннями функції належності.

Інформаційною базою прогнозування є відомі значення обсягів видобування нафти в Україні протягом ретроспективного періоду від 2003 до 2020 року [12]. Позначимо ці обсяги через  $x(t)$ , де  $t$  — порядковий номер року в ретроспективному періоді. Значення величини  $x(t)$  наведено в таблиці 1.

Модель Хольта являє собою адаптивну модель, що включає два параметри — коефіцієнт  $\alpha$  згладжування ряду та коефіцієнт  $\beta$  згладжування тренду. При прогнозуванні на основі моделі Хольта для кожного року ретроспективного періоду обчислюється значення функцій  $g(t)$  та  $r(t)$  за допомогою рівностей

$$g(t) = \alpha x(t) + (1 - \alpha)(g(t - 1) + r(t - 1)),$$

$$r(t) = \beta (g(t) - g(t - 1)) + (1 - \beta)r(t - 1).$$

При цьому вважається, що при  $t = 1$  мають місце рівності  $g(1) = x(1)$ ,  $r(1) = 0$ .

$$x_i(T + j) = g_i(T) + jr_i(T).$$

Очікувані значення обсягів видобування нафти в прогнозному періоді визначаємо із рівності

$$x(T + j) = g(T) + jr(T),$$



Таблиця 1.

Видобуток нафти в Україні протягом 2003–2020 років.

$t$	Рік	Видобуто нафти
1	2003	2.8
2	2004	3
3	2005	3.1
4	2006	3.3
5	2007	3.3
6	2008	3.2
7	2009	2.9
8	2010	2.6
9	2011	2.4
10	2012	2.3
11	2013	2.2
12	2014	2
13	2015	1.8
14	2016	1.6
15	2017	1.5
16	2018	1.6
17	2019	1.7
18	2020	1.7

де  $T$  — тривалість ретроспективного періоду ( $T = 18$ ),  $j$  — номер року в прогностичному періоді,  $x(T + j)$  — очікуване значення показника в  $j$ -тий рік прогностичного періоду.

Для оцінювання точності прогнозу визначаємо для кожного року ретроспективного періоду, починаючи від другого, визначаємо абсолютну похибку прогнозу на один період за формулою

$$\Delta(t) = x(t) - g(t) - r(t) \text{ та } \delta_i(t) = \frac{\Delta_i^2(t)}{x_i^2}.$$

Точність прогнозу оцінюється величиною

$$\lambda = 1 - \frac{\sum_{t=2}^T \delta(t)}{T - 1}, \text{ де } \delta(t) = \frac{\Delta^2(t)}{x^2(t)}.$$

Значення коефіцієнтів  $\alpha$  та  $\beta$  підбираються емпірично. Приймаються такі їх величини, для яких оцінка  $\lambda$  точності прогнозу є найвищою. Нами вибрано значення  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.9$ , при яких  $\lambda = 99.67\%$ . Результати прогнозування відображені в таблиці 2.

Таким чином використання моделі Хольта дає можливість зробити висновок, що видобування нафти в Україні в 2023 та 2024 роках дещо зросте порівняно із 2020 роком, але не досягне рівня 2014 року. В 2023 році очікуване значення обсягу видобування складає 1.78836, а в 2024 році 1.81426.

Метод експоненційного вирівнювання дає можливість при прогнозуванні динаміки показників надавати переважного значення новішим даним. Ряд динаміки, що містить статистичні дані, вирівнюється на основі зваженої ковзної

Таблиця 2.

Визначення очікуваних обсягів видобування нафти в Україні методом Хольта.

Рік	$t$	$x(t)$	$g(t)$	$r(t)$	$j$	$x(T+j)$	$g(t)+r(t)$	$\Delta(t)$	$\delta(t)$	$\lambda$
Ретроспективний період										
2003	1	2.8	2.8	0.00000			2.8			
2004	2	3	2.98	0.16200			2.8	0.20000	0.00444	
2005	3	3.1	3.10	0.12798			3.14200	-0.04200	0.00018	
2006	4	3.3	3.29	0.18291			3.23218	0.06782	0.00042	
2007	5	3.3	3.32	0.04025			3.47613	-0.17613	0.00285	
2008	6	3.2	3.22	-0.08762			3.35786	-0.15786	0.00243	
2009	7	2.9	2.92	-0.27243			3.12817	-0.22817	0.00619	
2010	8	2.6	2.61	-0.31324			2.65038	-0.05038	0.00038	
2011	9	2.4	2.39	-0.22560			2.29179	0.10821	0.00203	
2012	10	2.3	2.29	-0.11510			2.16358	0.13642	0.00352	99.67%
2013	11	2.2	2.20	-0.09182			2.17126	0.02874	0.00017	
2014	12	2	2.01	-0.17712			2.10531	-0.10531	0.00277	
2015	13	1.8	1.80	-0.20418			1.83341	-0.03341	0.00034	
2016	14	1.6	1.60	-0.20350			1.59916	0.00084	0.00000	
2017	15	1.5	1.49	-0.11960			1.39641	0.10359	0.00477	
2018	16	1.6	1.58	0.06667			1.37004	0.22996	0.02066	
2019	17	1.7	1.69	0.11229			1.64367	0.05633	0.00110	
2020	18	1.7	1.71	0.02590			1.80666	-0.10666	0.00394	
Прогнозний період										
2021					1	1.73656				
2022					2	1.76246				
2023					3	1.78836				
2024					4	1.81426				

середньої, де вагові коефіцієнти визначаються експоненційним законом розподілу. Для апроксимації показника обсягу видобування нафти обираємо поліном третього ступеню  $w_t = \eta_0 + \eta_1 t + \eta_2 \frac{t^2}{2!}$ . Коефіцієнти  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  визначаємо такими, щоб величина суми квадратів відхилень  $\sum_{t=1}^T (x(t) - w_t)^2$  реальних значень  $x(t)$  річних обсягів видобування нафти від апроксимованих значень  $w_t$  стала мінімальною. Емпіричним шляхом підбираємо значення коефіцієнта  $\gamma \in [0.2; 0.6]$ , який відображає рівень зростання ваги недавніх значень показника. Нами обрано значення  $\gamma = 0.58$ . При  $t = 1$  значення вирівняних рядів обчислюємо за формулами

$$\begin{cases} w_t^1 = \eta_0 - \frac{1-\nu}{\nu} \cdot \eta_1 + \frac{(1-\nu) \cdot (2-\nu)}{2 \cdot \nu^2} \eta_2; \\ w_t^2 = \eta_0 - \frac{2(1-\nu)}{\nu} \cdot \eta_1 + \frac{2(1-\nu) \cdot (3-2\nu)}{2 \cdot \nu^2} \eta_2; \\ w_t^3 = \eta_0 - \frac{3(1-\nu)}{\nu} \cdot \eta_1 + \frac{3(1-\nu) \cdot (4-3\nu)}{2 \cdot \nu^2} \eta_2. \end{cases}$$

Для значень  $t$  від 2 до  $T$  значення вирівняних рядів обчислюються за допомогою рекурентних рівностей

$$\begin{aligned} w_t^1 &= (1 - \nu)w_{t-1}^1 + \nu x(t), \\ w_t^2 &= (1 - \nu)w_{t-1}^2 + \nu w_t^1, \\ w_t^3 &= (1 - \nu)w_{t-1}^3 + \nu w_t^2. \end{aligned}$$

При цьому на кожній ітерації динамічно змінюються коефіцієнти  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$ . Їх значення обчислюються із рівностей

$$\begin{cases} \eta_0 = 3w_t^1 - 3w_t^2 + w_t^3; \\ \eta_1 = \frac{\nu}{2(1-\nu)^2} [(6 - 5\nu)w_t^1 - 2(5 - 4\nu)w_t^2 + (4 - 3\nu)w_t^3]; \\ \eta_2 = \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} (w_t^1 - 2w_t^2 + w_t^3). \end{cases}$$

Щоб одержати прогнозовані значення обсягів видобутку нафти на 2023 та 2024 роки скористаємося рівністю

$$x(T + \theta) = \eta_0 + \eta_1\theta + \eta_2 \frac{\theta^2}{2!},$$

де  $\theta$  — порядковий номер року в прогнозному періоді, а значення коефіцієнтів  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  визначаються на останній ітерації обчислення, тобто при  $t = T = 18$ . Оскільки ретроспективний період закінчується в 2020 році, то 2023 та 2024 рокам відповідають значення  $\theta = 3$  та  $\theta = 4$ .

Результати прогнозування відображені в таблиці 3.

Таблиця 3.

Визначення очікуваних обсягів видобування нафти в Україні методом експоненційного вирівнювання.

$t$	$x(t)$	$w_t$	$(x(t) - w_t)^2$	$w_t^1$	$w_t^2$	$w_t^3$	$\eta_0$	$\eta_1$	$\eta_2$
1	2.8	3.2474	0.20017	3.39260	3.46070	3.52680	3.32250	-0.07310	-0.00200
2	3	3.1683	0.02832	3.19630	3.32850	3.42765	3.03105	-0.21483	-0.03305
3	3.1	3.0852	0.00022	3.14815	3.23833	3.33299	3.06246	-0.07896	0.00449
4	3.3	2.9981	0.09114	3.22408	3.23120	3.28209	3.26072	0.10230	0.04377
5	3.3	2.907	0.15445	3.26204	3.24662	3.26436	3.31061	0.09831	0.03316
6	3.2	2.8119	0.15062	3.23102	3.23882	3.25159	3.22819	0.00462	0.00497
7	2.9	2.7128	0.03504	3.06551	3.15216	3.20188	2.94191	-0.17901	-0.03694
8	2.6	2.6097	0.00009	2.83275	2.99246	3.09717	2.61805	-0.29720	-0.05500
9	2.4	2.5026	0.01053	2.61638	2.80442	2.95079	2.38667	-0.29221	-0.04167
10	2.3	2.3915	0.00837	2.45819	2.63130	2.79105	2.27170	-0.20654	-0.01337
11	2.2	2.2764	0.00584	2.32909	2.48020	2.63562	2.18231	-0.14030	0.00432
12	2	2.1573	0.02474	2.16455	2.32237	2.47900	2.00552	-0.16083	-0.00120
13	1.8	2.0342	0.05485	1.98227	2.15232	2.31566	1.80551	-0.18683	-0.00671
14	1.6	1.9071	0.09431	1.79114	1.97173	2.14370	1.60192	-0.20216	-0.00863
15	1.5	1.776	0.07618	1.64557	1.80865	1.97617	1.48693	-0.15198	0.00444
16	1.6	1.6409	0.00167	1.62278	1.71572	1.84594	1.56715	0.00031	0.03730
17	1.7	1.5018	0.03928	1.66139	1.68855	1.76725	1.68576	0.10167	0.05153
18	1.7	1.3587	0.11649	1.68070	1.68463	1.72594	1.71415	0.08953	0.03738
			$\Sigma =$ =1.09232						
$\theta$	$x(T + \theta)$								
1	1.708								
2	1.722								
3	1.739								
4	1.759								

Таким чином використання моделі експоненційного вирівнювання дає можливість прогнозувати певне зростання обсягів видобування нафти в Україні в 2023 та 2024 роках дещо зросте порівняно із 2020 роком, але очікуваний приріст видобутку дещо менший, ніж при використанні моделі Хольта. В 2023 році очікуване значення обсягу видобування складає 1.78836, а в 2024 році 1.81426. Для прогнозування на основі нейромережових технологій використана нейронна мережа Feed-forward back propagation, що містить три прошарки нейронів — вхідний, проміжний та вихідний. Вхідний прошарок містить один нейрон, на який надходять вхідні сигнали, що передаються без перетворення нейронам проміжного прошарку. Проміжний прошарок включає три нейрони  $N_1$ ,  $N_2$  та  $N_3$ . Кожний із цих нейронів має один вхід, на який подається вихідний сигнал від нейрона із вхідного прошарку. Параметрами нейронів  $N_1$ ,  $N_2$  та  $N_3$  є вагові коефіцієнти  $w_{11}$ ,  $w_{12}$  та  $w_{13}$ , на які множаться одержані цими нейронами вхідні

сигнали, та зміщення  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  і  $a_{13}$ . Під час навчання мережі ці параметри змінюються, щоб забезпечити відповідність одержаних на виході мережі сигналів відомим еталонам. Для нейронів проміжного прошарку вибрана однакова функція активації  $\text{tansig}(x) = \frac{1}{1+e^{2x}} - 1$ . Одержавши на вхід сигнал  $Q$ , нейрон  $N_i$  перетворює його у вихідний сигнал  $g_i = \text{tansig}(w_{1i}Q + a_{1i})$ , який передається єдиному нейрону  $N_0$  вихідного прошарку. Нейрон вихідного прошарку має три входи, яким відповідають вагові коефіцієнти  $w_{21}$ ,  $w_{22}$  та  $w_{23}$ . Він виробляє вихідний сигнал  $g = \text{tansig}(w_{21}g_1 + w_{22}g_2 + a_2)$ , де  $a_2$  — зміщення вихідного нейрону. На етапі навчання ці вихідні сигнали порівнюються із еталонними значеннями і в залежності від одержаного відхилення здійснюється коригування величин  $w_{11}$ ,  $w_{12}$ ,  $w_{13}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $w_{21}$ ,  $w_{22}$ ,  $w_{23}$  та  $a_2$ .

При навчанні мережі на її вхід подаються значення  $X(t) = \frac{t}{T+T_0+1}$ , де  $t$  — номер року в ретроспективному періоді,  $T$  — тривалість ретроспективного періоду,  $T_0$  — тривалість періоду прогнозування. Таким чином забезпечується лінійна залежність вхідних сигналів від змінної  $t$  і належність цих сигналів до проміжку  $[0; 1]$ , що є обов'язковим для нейронних мереж даного виду. В якості еталонних значень для навчання мережі вибираємо значення  $L(t) = \frac{x(t)}{x^{\max}}$ , де  $x^{\max}$  — максимальне значення величини  $x(t)$  по всім рокам ретроспективного періоду. Такий вибір еталонних значень пояснюється тим, що вихідні сигнали мережі належать до проміжку  $[0; 1]$ .

В результаті навчання мережі її параметри приймають наступні значення:  $w_{11} = -4.1267$ ,  $w_{12} = -4.0231$ ,  $w_{13} = -3.687$ ,  $a_{11} = 4.2792$ ,  $a_{12} = 0.43241$ ,  $a_{13} = -4.7517$ ,  $w_{21} = -0.1333$ ,  $w_{22} = 0.57099$ ,  $w_{23} = 0.23894$  та  $a_2 = 0.069667$ . Ці параметри використані для одержання прогнозованих значень обсягів видобування нафти на 2023 та 2024 роки. Для цього на вхід мережі подаються значення  $X(21) = 0.91304$  та  $X(22) = 0.95652$ , що відповідають даним рокам. Одержимо відповідні вихідні значення 0.57598 та 0.57807. Помноживши їх на  $x^{\max} = 3.3$ , визначаємо очікувані значення обсягів видобутку нафти — 1.901 на 2023 рік та 1.908 на 2024 рік.

Динаміка видобутку нафти в Україні в 2003–2020 роках із прогнозом на 2023 та 2024 роки відображена на рисунку 1.

Таким чином найменше прогнозоване значення одержується при застосуванні методу експоненційного вирівнювання, дещо більше при застосуванні методу Хольта і найбільше при використанні нейронних мереж.

Визначимо прогноз у вигляді трикутного нечіткого числа. Нехай  $\Phi_E$  — прогнозоване значення, одержане методом експоненційного вирівнювання,  $\Phi_H$  — методом Хольта,  $\Phi_N$  — методом нейронних мереж. Має місце нерівність  $\Phi_E < \Phi_H < \Phi_N$ . Визначимо функцію належності нечіткого трикутного числа такою формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < \Phi_E, \\ \frac{x - \Phi_E}{\Phi_H - \Phi_E}, & \text{якщо } \Phi_E \leq x \leq \Phi_H, \\ \frac{\Phi_N - x}{\Phi_N - \Phi_H}, & \text{якщо } \Phi_H \leq x \leq \Phi_N, \\ 0, & \text{якщо } x > \Phi_N. \end{cases}$$

Одержане нечітке трикутне число визначає прогноз видобутку нафти. Графік нечітких прогнозів для 2023 та 2024 років наведено на рисунку 2.

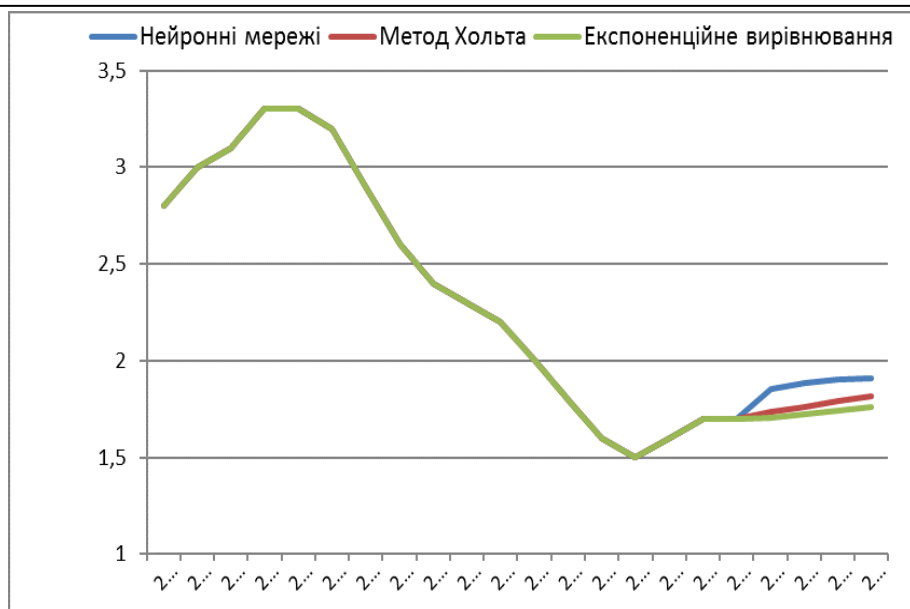


Рис. 1. Динаміка видобутку нафти в Україні в 2003–2020 роках із прогнозом на 2023 та 2024 роки.

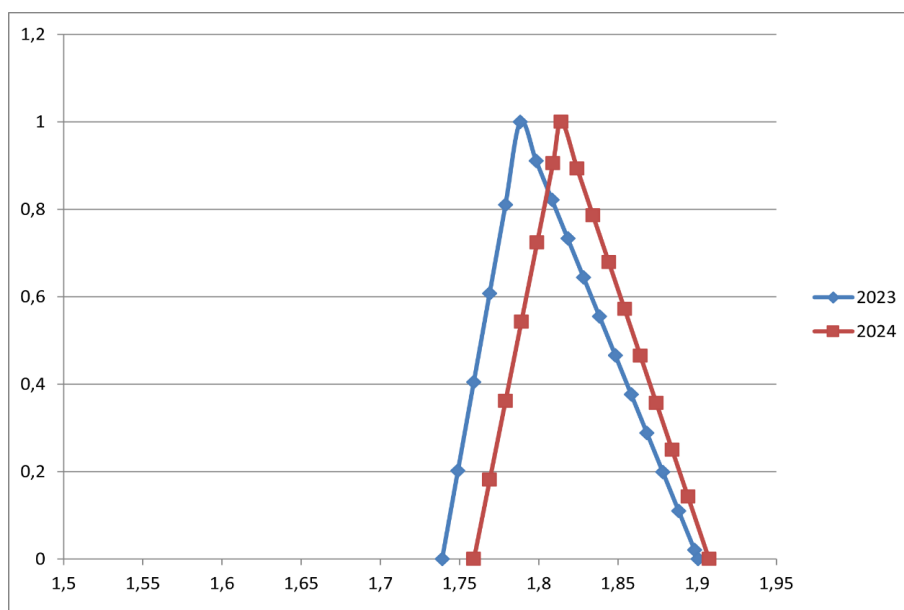


Рис. 2. Прогнози обсягів видобутку нафти на 2023 та 2024 роки у вигляді нечітких трикутних чисел.

**4. Висновки.** Підтримання позитивної динаміки обсягів видобутку нафти в Україні є критично важливим завданням для уряду та бізнесу. Необхідно залучати інвестиції в галузь, розробляти нові родовища та застосовувати нові технології для підвищення ефективності видобутку нафти. Крім того, необхідно активно розвивати альтернативні джерела енергії та стимулювати енергоефективність в промисловості та господарстві, щоб зменшити залежність від нафтового палива.

Використання адаптивних моделей є перспективним напрямком для прогнозування обсягів видобутку нафти. При цьому вибір підходу до моделювання залежить від конкретної задачі та наявності необхідних даних для побудови моделі.

Прогнозування видобутку нафти з використанням адаптивних моделей є ефективним підходом, який допомагає покращити точність прогнозування, адже таке моделювання дозволяє адаптуватися до змін, умов і параметрів нафтового ринку, що гарантує забезпечення більш точних прогнозів. Зауважимо, що точність прогнозів залежить від якості, обсягу вхідних даних та ефективності методів моделювання.

### Список використаної літератури

1. Сушко М. Ю. Аналіз сучасного стану розвитку промислової галузі України. *Вісник економічної науки України*. 2017. Т. 32, № 1. С. 93–98.
2. Юсупова Т. М. Дослідження проблем вітчизняної промисловості в контексті пошуку шляхів відродження її економічного потенціалу. *Вісник економіки транспорту і промисловості*. 2013. Т. 43. С. 107–110.
3. Brown G. R. *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. New York : Dover Phoenix Editions, 2004. 454 p.
4. Theil H., Wage S. Some observations on adaptive forecasting. *Management Science*. 1964. Vol. 10. P. 198–206.
5. Winters P. R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*. 1960. Vol. 6. P. 324–342.
6. Klebanova T. S., Rudachenko O. O. Forecasting of indicators of financial activity of the enterprise of housing and communal services using adaptive models. *Biznes-inform*. 2015. Vol. 1. P. 143–148.
7. Ніколаєва О. Г. Прогнозування видобутку нафти і газу за допомогою нейромережевого моделювання і трендових моделей. *Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету. Серія : Економіка і менеджмент*. 2018. Вип. 31. С. 121–126.
8. Онищенко В., Ічанська Н., Скриль В., Фурманчук О. Економіко-математичне моделювання інноваційного розвитку підприємств будівельної галузі. *Конспекти лекцій з цивільної інженерії : Матеріали 3-ї Міжнародної конференції з будівельних інновацій*. Springer, 2022. 697–709. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2\\_65](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65)
9. Гудзь С. А., Ічанська Н. В., Рендюк С. П., Молчанов П. О. Оптимізація розрахункової схеми двопротітних прогонів у каркасній системі з порталними рамами із застосуванням в'язевих підкосів. *Збірник наукових праць. Галузеве машинобудування, будівництво*. 2021. Вип. 1, № 56. С. 30–36. DOI: <https://doi.org/10.26906/znp.2021.56.2504>
10. Горік А. В., Піскунов В. Г., Серов М. І. Аналітичне рішення задачі про вигин неоднорідного некруглого циліндричного тіла. *Міжнародна прикладна механіка*. 2002. Т. 38. С. 1261–1271. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>
11. Горік А. В., Піскунов В. Г., Серов М. І., Андреева Н. В. та співавт. Аналітичне рішення задачі про вигин складеної балки на основі вдосконаленої моделі деформування. *Міцність матеріалів*. 1999. Т. 31, С. 85–98. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02509745>
12. Міністерство енергетики та вугільної промисловості України. URL: <https://mev.gov.ua/> (дата звернення: 25.04.2023).

**Ichanska N. V., Lysenko M. V.** Oil Production Forecasting in Ukraine using Adaptive Models and Neural Networks.

The article deals with the modeling of the life cycle of oil production. The essence, advantages, and disadvantages of these approaches are analyzed. The authors solved the problem of approximation using mathematical modeling methods: exponential smoothing, Holt's method, and forecasting based on neural network technologies. It is provided a classification of these methods and highlights their importance for finding effective solutions to problems in the development of the industrial complex and the primary sector of the

economy of Ukraine, whose basic component is the extractive industry.

The modeling of the life cycles of oil production enables the forecast to be reflected in the form of a triangular fuzzy number, that is, to indicate possible expected values. Adaptive forecasting models are models that use data discounting and can quickly adapt to changing conditions by changing their structure and parameters.

The exponential smoothing method is based on the fact that in forecasting the dynamics of indicators, the series is smoothed based on a weighted moving average, where the weight coefficients are determined by an exponential distribution law. For forecasting based on neural network technologies, a feed-forward back-propagation neural network was used, which contains three layers of neurons - input, intermediate, and output. The paper shows that the smallest forecast value is obtained when using the exponential smoothing method, somewhat larger when using Holt's method, and the largest when using neural networks.

**Keywords:** life cycle, forecasting, oil production, Holt's method, artificial neural networks, exponential smoothing method.

## References

1. Sushko, M. Yu. (2017). Analysis of the Current State of the Industrial Sector of Ukraine. *Bulletin of the Economic Science of Ukraine*, 32(1), 93–98 [in Ukrainian].
2. Yusupova, T. M. (2013). Study of the problems of the domestic industry in the context of the search of ways for revival of its economic potential. *Bulletin of the economy of transport and industry*, 43, 107–110. [in Ukrainian].
3. Brown, G. R. (2004). *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. New York: Dover Phoenix Editions.
4. Theil, H., & Wage, S. (1964). Some observations on adaptive forecasting. *Management Science*, 10, 198–206.
5. Winters, P. R. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, 6, 324–342.
6. Klebanova, T. C., & Rudachenko, O. O. (2015). Forecasting of indicators of financial activity of the enterprise of housing and communal services using adaptive models. *Business-Inform*, 1, 143–148.
7. Nikolayeva, O. H. (2018). Forecasting oil and gas production using neural network modeling and trend models. *Scientific Bulletin of the International Humanitarian University. Series: Economics and management*, 31, 121–126 [in Ukrainian].
8. Onyshchenko, V., Ichanska, N., Skryl, V., & Furmanchuk, O. (2022). Economic and Mathematical Modeling of Innovative Development of Enterprises in the Construction Industry. Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovation, *Lecture Notes in Civil Engineering*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2\\_65](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65).
9. Hudz, S., Ichanska, N., Rendyuk, S., & Molchanov, P. (2021). Optimization of the double-span purlins design sketch in a framework with portal frames through the rafter stays application. *Academic journal. Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 1(56), 30–36. <https://doi.org/10.26906/znp.2021.56.2504>
10. Horik, A. V., Piskunov, V. H., & Sierov, M. I. (2002). The Analytical Solution of the Bending Problem for an Inhomogeneous Noncircular Cylindrical Body. *International Applied Mechanics*, 38, 1261–1271. <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>.
11. Horik, A. V., Piskunov, V. H., Sierov, M. I., & Andreeva, N. V. (1999). Analytic solution of the problem of bending of a composite beam on the basis of an improved model of deformation. *Strength of Materials*, 31, 85–98. <https://doi.org/10.1007/BF02509745>
12. Ministry of Energy and Vugile Industry of Ukraine. Retrieved from <https://mev.gov.ua/> [in Ukrainian].

Одержано 04.05.2023

УДК 517.95

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).176-182](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).176-182)**В. В. Кириченко<sup>1</sup>, Є. В. Лесіна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Національний університет біоресурсів і природокористування України,  
доцент кафедри комп'ютерних наук,  
кандидат фізико-математичних наук  
v.kyrychenko@nubip.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2387-2261>

<sup>2</sup> Донецький національний технічний університет,  
доцент кафедри вищої математики і фізики,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
eugenia.lesina@donntu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9803-6727>

## ФОРМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КУЛІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО УЛЬТРАГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПОЛІНОМІАЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

В роботі знайдено формальний розв'язок задачі Діріхле у кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною. Процедура побудови розв'язку базується на апараті сферичних функцій та теорії гіпергеометричного рівняння Гаусса. Складності доведення його гладкості пов'язані з тим, що кожен наступний член формального ряду виражається через попередній за допомогою громіздких рекурентних співвідношень.

**Ключові слова:** ультрагіперболічне рівняння, задача Діріхле, сферичні функції, гіпергеометричне рівняння Гаусса, коефіцієнти Фур'є, метод двоїстості рівняння-область.

**1. Вступ.** У роботі [1] одного з авторів отримано повну класифікацію випадків існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле в одиничній  $n$ -вимірній кулі для однорідного ультрагіперболічного рівняння з використанням апарату сферичних функцій та за допомогою методу двоїстості рівняння-область [2]. Дослідження охоплює як випадок зональних, так і випадок тесеральних сферичних функцій. Вузлові лінії зональних гармонік утворені паралелями, що ділять кульову поверхню на зони, у межах кожної з яких значення сферичної функції зберігає знак, а при переході через вузлову лінію змінює його на протилежний; а вузлові лінії тесеральних гармонік утворені перетином паралелей та меридіанів, які ділять кульову поверхню на клітини (всередині кожної клітини значення сферичної функції зберігає знак, а при переході через її межу змінює його на протилежний). Було доведено критерій однозначної розв'язності задачі Діріхле для ультрагіперболічного рівняння у кулі, який формулюється в термінах нулів ортогональних поліномів Якобі.

В даній роботі за допомогою теорії гіпергеометричного рівняння та сферичних функцій побудовано формальний розв'язок першої крайової задачі в кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною.

**2. Основний результат.** Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$



у  $n$ -вимірній кулі  $\Omega = \{x \in R^n : 1 - x^2 > 0\}$  для наступного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_{k+1}^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = f, \quad (2)$$

вважаючи, що функція  $f$  у правій частині (2) є поліномом. Тут  $0 < k < n$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

Розкладатимемо шукану функцію  $u$  і відому функцію  $f$  в ряд за сферичними гармоніками, спираючись на міркування, які наведено у роботі [1]. При цьому відповідні розкладання матимуть такий вигляд:

$$u(x', x'') = \sum_{\tilde{l}=1}^{L_i} \sum_{l=1}^{L_j} u_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'') S_{\tilde{l}}^i(\tau') S_l^j(\tau''),$$

$$f(x', x'') = \sum_{\tilde{l}=1}^{L_i} \sum_{l=1}^{L_j} f_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'') S_{\tilde{l}}^i(\tau') S_l^j(\tau'').$$

Зауважимо, що  $\tau' = \frac{x'}{|x'|}$ ,  $\tau'' = \frac{x''}{|x''|}$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ . Крім того, сферичні функції порядків  $i$  та  $j$  розкладені за базисами  $\{S_{\tilde{l}}^i\}_{\tilde{l}=1}^{L_i}$ ,  $\{S_l^j\}_{l=1}^{L_j}$ .

Після підстановки зазначених розкладів у рівняння (2) та прирівнювання коефіцієнтів Фур'є  $u_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'')$ ,  $f_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'')$  при однакових базисних сферичних функціях приходимо до рівняння

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'} \cdot \frac{\partial}{\partial R'} + \frac{I_i}{R'^2} - a^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial R''^2} + \frac{n-k-1}{R''} \frac{\partial}{\partial R''} + \frac{J_j}{R''^2} \right\} \right] u_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'') = f_{\tilde{l}}^{ij}(R', R''),$$

яке можна записати в еквівалентній формі:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'} \frac{\partial}{\partial R'} + \frac{\partial^2}{\partial \left(-\frac{R'^2}{a^2}\right)} + \frac{n-k-1}{\left(-\frac{R''}{a}\right)} \frac{\partial}{\partial \left(-\frac{R''}{a}\right)} + \frac{I_i}{R'^2} + \frac{J_j}{\left(-\frac{R''^2}{a^2}\right)} \right] u_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'') = f_{\tilde{l}}^{ij}(R', R''), \quad (3)$$

де  $I_i = -i(i+k-2)$ ,  $J_j = -j(j+n-k-2)$ .

При переході до сферичних координат умова Діріхле (1) перетворюється на умову вигляду:

$$u|_{R'^2+R''^2=1} = 0,$$

звідки  $u = (R'^2 + R''^2 - 1) \tilde{u}$  (в силу теореми Безу [3]). Таким чином,

$$u_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'') = (R'^2 + R''^2 - 1) \tilde{u}_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'').$$

Тепер, поклавши  $\tilde{R}''^2 = -\frac{R''^2}{a^2}$ , що означає  $R''^2 = -a^2 \tilde{R}''^2$ , одержимо:

$$u_{\tilde{l}}^{ij}(R', R'') = \left( R'^2 - a^2 \tilde{R}''^2 - 1 \right) \tilde{u}_{\tilde{l}}^{ij}(R', \tilde{R}'').$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial R'^2} + \frac{k-1}{R'} \cdot \frac{\partial}{\partial R'} + \frac{I_i}{R'^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{R}''^2} + \frac{n-k-1}{\tilde{R}''} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{R}''} + \frac{J_j}{\tilde{R}''^2} \right] \times \quad (4)$$

$$\times \left( R'^2 - a^2 \tilde{R}''^2 - 1 \right) \tilde{u}_{\tilde{u}}^{ij} \left( R', \tilde{R}'' \right) = f_{\tilde{u}}^{ij} \left( R', \tilde{R}'' \right).$$

Далі, перейшовши до полярних координат  $(\rho, \varphi) : R' = \rho \cos \varphi, \tilde{R}'' = \rho \sin \varphi$ , отримаємо із (4) наступну рівність:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{n-k-1}{\rho^2} \cot \varphi - \frac{k-1}{\rho^2} \tan \varphi \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{I_i}{\rho^2 \cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \right] \left[ (\rho^2 \cos^2 \varphi - a^2 \rho^2 \sin^2 \varphi - 1) \tilde{u}_{\tilde{u}}^{ij}(\rho, \varphi) \right] = f_{\tilde{u}}^{ij}(\rho, \varphi).$$

Виконавши розкладання функцій  $\tilde{u}_{\tilde{u}}^{ij}(\rho, \varphi)$  та  $f_{\tilde{u}}^{ij}(\rho, \varphi)$  за степенями  $\rho$  і підставивши отримане в (5), для старшого степеня однорідності  $m$  матимемо:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{n-k-1}{\rho^2} \cot \varphi - \frac{k-1}{\rho^2} \tan \varphi \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \frac{I_i}{\rho^2 \cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \right] \left\{ \rho^{2+m} \tilde{u}_{\tilde{u}}^{ij}(\varphi) \right\} = \rho^m f_{\tilde{u}}^{ij}(\varphi),$$

де  $\tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi)$  та  $f_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi)$  — тригонометричні поліноми від  $\cos \varphi$  та  $\sin \varphi$ . Виходячи з того, що

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{n-k-1}{\rho^2} \cot \varphi - \frac{k-1}{\rho^2} \tan \varphi \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \frac{I_i}{\rho^2 \cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \right] \left\{ \rho^{2+m} \tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi) \right\} =$$

$$= \rho^m \left[ \left( \tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij} \right)''(\varphi) + ((n-k-1) \cot \varphi - (k-1) \tan \varphi) (\tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij})'(\varphi) + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \left( (m+2)(m+n) + \frac{I_i}{\cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\sin^2 \varphi} \right) \tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi) \right],$$

рівність (6) після ділення на  $\rho^m$  перетвориться на звичайне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, а саме:

$$\left( \tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij} \right)''(\varphi) + ((n-k-1) \cot \varphi - (k-1) \tan \varphi) (\tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij})'(\varphi) + \quad (7)$$

$$+ \left( (m+2)(m+n) + \frac{I_i}{\cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\sin^2 \varphi} \right) \tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi) = f_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi).$$

При цьому відповідне однорідне рівняння (7) приводиться до гіпергеометричного рівняння Гаусса

$$y(1-y) \frac{d^2 w}{dy^2} + [C - (A+B+1)y] \frac{dw}{dy} - ABw = 0,$$

так, як це показано в роботі [4].

Слід підкреслити, що в [4] знайдено та описано всі розв'язки гіпергеометричного рівняння. Його дослідження полягає у детальному аналізі так званого виродженого випадку, в якому розв'язок може бути виражений через будь-які два з 24 рядів Куммера (див. [5]).

Розглянемо для визначеності випадок 1) твердження 2.1 роботи [4]. У такій ситуації одним із розв'язків гіпергеометричного рівняння є функція

$$w(y) = F\left(1 - \frac{m+i+j+n}{2}, 2 + \frac{m-i-j}{2}, 2 - i - \frac{k}{2}, y\right),$$

але тоді функція

$$Z(y) = y^{\frac{1}{2}(2-i-k)}(y-1)^{\frac{1}{2}(2-j-n+k)} \times \\ \times F\left(1 - \frac{m+i+j+n}{2}, 2 + \frac{m-i-j}{2}, 2 - i - \frac{k}{2}, y\right),$$

буде, відповідно, розв'язком диференціального рівняння

$$y^2(1-y)^2 Z'' - \frac{1}{2}y(1-y)(ny-k) Z' + \frac{1}{4}[I_i + ((m+2)(m+n) - I_i + J_j)y - (m+2)(m+n)y^2] Z = 0.$$

Звідси робимо висновок, що розв'язок однорідного диференціального рівняння (7) можна записати у вигляді:

$$\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) = (\cos \varphi)^{2-i-k}(\sin \varphi)^{2-j-n+k} \times \\ \times F\left(1 - \frac{m+i+j+n}{2}, 2 + \frac{m-i-j}{2}, 2 - i - \frac{k}{2}, \cos^2 \varphi\right).$$

Повертаючись до неоднорідного рівняння (7), зробимо в ньому підстановку

$$\tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi) = \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) \cdot v(\varphi),$$

де  $\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)$  — знайдений вище ненульовий розв'язок рівняння (7), тоді (див. [6]) матимемо:

$$v''(\varphi) + \left(\frac{2(\tilde{u}_m^{(0)})'}{\tilde{u}_m^{(0)}} + (n-k-1)\cot \varphi - (k-1)\tan \varphi\right) \cdot v'(\varphi) = \frac{f_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi)}{\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi)}.$$

Останнє рівняння допускає пониження порядку і зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Як показано в довіднику [6], загальний розв'язок рівняння (7) має наступний вигляд:

$$\tilde{u}_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi) = c_1 \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) + c_2 \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) \cdot \int \frac{d\varphi}{E(\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi))^2} + \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) \times \\ \times \int \frac{1}{E(\tilde{u}_m^{(0)}(\varphi))^2} \left(\int E \tilde{u}_m^{(0)}(\varphi) f_{\tilde{u}_m}^{ij}(\varphi) d\varphi\right) d\varphi. \quad (8)$$

У рівності (8)  $c_1, c_2$  — довільні сталі,

$$E = \exp \int \left[ (n - k - 1) \cot \varphi - (k - 1) \tan \varphi \right] d\varphi = (\sin \varphi)^{n-k-1} (\cos \varphi)^{k-1}.$$

Повернемось знову до рівняння (5). Позначивши оператор

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{n-k-1}{\rho^2} \cot \varphi - \frac{k-1}{\rho^2} \tan \varphi \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{I_i}{\rho^2 \cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\rho^2 \sin^2 \varphi},$$

із (5) для наступного степеня однорідності  $m - 2$  отримаємо співвідношення

$$\mathcal{L} \left( \rho^m \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) \right) - \mathcal{L} \left( \rho^m \tilde{u}_{\tilde{l}_m}^{ij}(\varphi) \right) = \rho^{m-2} f_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi).$$

Звідси

$$\mathcal{L} \rho^m \left\{ \left( \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) - \tilde{u}_{\tilde{l}_m}^{ij}(\varphi) \right) \right\} = \rho^{m-2} f_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi),$$

що рівносильне рівності

$$\rho^{m-2} \tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[ \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) - \tilde{u}_{\tilde{l}_m}^{ij}(\varphi) \right] = \rho^{m-2} f_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi), \quad (9)$$

де

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( (n - k - 1) \cot \varphi - (k - 1) \tan \varphi \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + (m + 2)(m + n) + \frac{I_i}{\cos^2 \varphi} + \frac{J_j}{\sin^2 \varphi}.$$

Розділивши обидві частини рівності (9) на  $\rho^{m-2}$  і позбувшись однієї з двох змінних, отримаємо рівняння відносно невідомої функції  $\tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi)$ :

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) = \mathcal{Q}(\varphi) + f_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi). \quad (10)$$

Тут  $\mathcal{Q}(\varphi) = \tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tilde{u}_{\tilde{l}_m}^{ij}(\varphi)$  — результат дії оператора  $\tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$  на знайдений вище розв'язок  $\tilde{u}_{\tilde{l}_m}^{ij}(\varphi)$  рівняння (7).

Дослідження отриманого диференціального рівняння другого порядку (10) подібне до дослідження рівняння (7). Спочатку розглядається відповідне однорідне рівняння і знаходиться один з його нетривіальних розв'язків  $\tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi)$ . Потім за допомогою підстановки, описаної в книзі [6] на с. 144, можна перейти від рівняння (10) до рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. При цьому шуканий загальний розв'язок рівняння (10) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) &= c_3 \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi) + c_4 \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi) \cdot \int \frac{d\varphi}{E \left( \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi) \right)^2} + \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi) \times \\ &\times \int \frac{1}{E \left( \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi) \right)^2} \left( \int E \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij(0)}(\varphi) \left[ f_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) + \mathcal{Q}(\varphi) \right] d\varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Продовжуючи аналіз рівняння (5), в якому невідома функція та права частина розкладені в ряд за степенями  $\rho$ , на наступному кроці одержимо співвідношення для степеня однорідності  $m - 4$ :

$$\mathcal{L} \left( \rho^{m-2} \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij}(\varphi) \right) - \mathcal{L} \left( \rho^{m-2} \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) \right) = \rho^{m-4} f_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij}(\varphi).$$

Після ділення на  $\rho^{m-4}$  останнє рівняння стає рівнянням, що залежить від однієї змінної, і процедура знаходження його розв'язку  $\tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij}(\varphi)$  така сама, як у випадку рівнянь (7) та (10). Отже,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij}(\varphi) &= c_5 \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij(0)}(\varphi) + c_6 \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij(0)}(\varphi) \cdot \int \frac{d\varphi}{E\left(\tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij(0)}(\varphi)\right)^2} + \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij(0)}(\varphi) \times \\ &\times \int \frac{1}{E\left(\tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij(0)}(\varphi)\right)^2} \left( \int E \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij(0)}(\varphi) \left[ f_{\tilde{l}_{m-4}}^{ij}(\varphi) + \tilde{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tilde{u}_{\tilde{l}_{m-2}}^{ij}(\varphi) \right] d\varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

**3. Висновки та перспективи подальших досліджень.** При вивченні питань однозначної розв'язності задачі Діріхле для ультрагіперболічного рівняння в кулі (див. [1], [4]) був застосований метод двоїстості рівняння-область, що дозволило встановити критерій порушення єдиності розв'язку даної задачі в термінах нулів класичних поліномів Якобі.

Метою даної роботи було знайти формальний розв'язок першої крайової задачі в кулі для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння з поліноміальною правою частиною, базуючись на спостереженнях та дослідженні, що наводиться у роботі [1]. Важливо підкреслити, що в процесі побудови розв'язку застосовано апарат сферичних функцій та теорію гіпергеометричного рівняння Гаусса.

Поступово виводячи з рівняння (5) співвідношення, які пов'язують різні степені однорідності шуканої функції та правої частини, починаючи зі старшого степеня, одержали скінченний набір рівнянь, з яких визначаються компоненти розкладання розв'язку задачі (1), (2). У такий спосіб вказано процедуру побудови формального розв'язку задачі Діріхле для неоднорідного ультрагіперболічного рівняння в одиничній кулі. В отриманому ряді кожен наступний член може бути виражений через попередній за допомогою рекурентних співвідношень.

### Список використаної літератури

1. Бурский В. П., Кириченко Е. В. Однозначная разрешимость задачи Дирихле в шаре для ультрагиперболического уравнения. *Дифференциальные уравнения*. 2008. Т. 44, № 4. С. 467–479.
2. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 2002. 316 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва : Наука, 1968. 431 с.
4. Кириченко Е. В. О решении дифференциального уравнения, возникающего в задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре. *Труды ИПММ НАНУ*. 2005. Т. 10. С. 59–71.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. *Функции Лежандра*. Москва : Наука, 1965.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Наука, 1971. 576 с.

**Kyrychenko V. V., Lesina E. V.** On the solution of the first boundary value problem in a ball for a nonhomogeneous ultrahyperbolic equation.

In the paper, a formal solution of the Dirichlet problem in a ball for a nonhomogeneous ultrahyperbolic equation with a polynomial right-hand side is found. The solution construction procedure is based on the apparatus of spherical functions and the theory of Gauss's hypergeometric equation. Difficulties in proving its smoothness are due to the fact that each subsequent term of the formal series is expressed in terms of the previous one using cumbersome recurrence relations.

**Keywords:** ultrahyperbolic equation, Dirichlet problem, spherical functions, hypergeometric Gauss equation, Fourier coefficients.

## References

1. Burskii, V. P., & Kyrychenko, E. V. (2008). Unique solvability of the Dirichlet problem in a ball for an ultrahyperbolic equation. *Differential Equations*, 44(4), 467–479 [in Russian].
2. Burskii, V. P. (2002). *Methods for studying boundary value problems for general differential equations*. Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
3. Kurosh, A. G. (1968). *Higher algebra course*. Moscow: Nauka [in Russian].
4. Kyrychenko, E. V. (2005). On the solution of a differential equation arising in the Dirichlet problem for an ultrahyperbolic equation in a ball. *Proceedings of IAMM NASU*, 10, 59–71 [in Russian].
5. Bateman, G., & Erdelyi, A. (1965). *Higher transcendental functions. Hypergeometric function. Legendre functions*. Moscow: Nauka [in Russian].
6. Kamke, E. (1971). *Handbook of ordinary differential equations*. Moscow: Nauka [in Russian].

Одержано 16.04.2023

**Н. Е. Кондрук**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат технічних наук

[natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua](mailto:natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

**АНАЛІЗ ТЕХНІК ЗМЕНШЕННЯ РОЗМІРНОСТІ В  
МАШИННОМУ НАВЧАННІ**

Багато сучасних наборів даних мають високу розмірність, яка може призводити до проблем з перевантаженням моделей, зменшенням ефективності обробки даних та збільшення часу навчання. Тому дослідження застосування технік зменшення розмірності даних є важливою задачею для покращення продуктивності та швидкості аналізу. В роботі проведено огляд та оцінка ефективності сучасних технік для зменшення розмірності високорозмірного ознакового простору даних з метою візуалізації та попередньої обробки даних. Для цього розроблено інформаційно-аналітичну систему на Python, що реалізує PSA, t-SNE, Isomap, UMAP. В якості тестового набору даних був обраний високорозмірний набір «DARWIN» з 451 ознакою. В результаті експерименту всі техніки в цілому показали подібні результати візуалізації даних. t-SNE виявився найефективнішим методом попередньої обробки даних для цього датасету, покращивши точність kNN на 21% і SVC на 4%. Отримані результати доводять, що застосування сучасних методів зменшення розмірності даних може сприяти побудові більш ефективних моделей та прогнозів. Майбутні дослідження передбачають оцінку синергії технік аналізу даних та машинного навчання для вирішення конкретних прикладних задач.

**Ключові слова:** редукція, зменшення розмірності, візуалізація даних, високорозмірні дані.

**1. Вступ.** Методи редукції є важливим інструментом для візуалізації даних в машинному навчанні та інтелектуальному аналізі даних. Вони дозволяють зменшити кількість ознак, зберігаючи при цьому значущі характеристики, що приводить до покращення зрозумілості та інтерпретованості даних. Візуалізація є першим етапом аналізу, мета якого полягає в тому, щоб зрозуміти дані, перш ніж перейти до більш цілеспрямованого моделювання та дозволяє: зрозуміти дані швидше та більш ефективно, ніж тільки аналіз числових значень; визначити залежності та взаємозв'язки між ознаками; виявити відхилення та аномалії; прийняти обґрунтовані рішення.

Зменшення розмірності — це перетворення високорозмірних даних в значущу представлення меншої розмірності. Ідеальною має бути зменшена репрезентація з розмірністю, яка відповідає внутрішній розмірності даних. Внутрішня розмірність даних — це мінімальна кількість параметрів, необхідних для пояснення спостережуваних властивостей даних [1]. Традиційно, зменшення розмірності здійснювалося за лінійними техніками, такими як аналіз головних компонент (PCA) [2], факторний аналіз та класичне масштабування [1]. Однак, вони виявились неефективними при обробці складних нелінійних даних. Протягом останнього десятиліття було запропоновано велику кількість нелінійних технік зменшення розмірності: t-розподілене вкладення стохастичної близькості (t-SNE) [3, 4], Isomap [5], UMAP [6] та інші.

Для зменшення розмірності у машинному навчанні використовуються різноманітні методи, які можна розділити на параметричні та непараметричні, лінійні та нелінійні моделі [1]. Кожен з цих підходів має свої переваги та обмеження, тому їх вибір залежить від конкретних потреб та характеристик даних.

Метою роботи є огляд сучасних технік зменшення розмірності та дослідження ефективності їх використання для візуалізації і попередньої обробки високорозмірних даних в задачах машинного навчання та аналізу даних.

**2. Моделі і методи.** Лінійні параметричні методи — це підхід до зменшення розмірності даних, який базується на їх перетворенні з високорозмірного простору в простір меншої розмірності, зберігаючи при цьому якомога більше інформації. При цьому, застосовується лінійне перетворення даних, яке описується матрицею — параметром моделі, яку можна знайти шляхом мінімізації певної функції втрат, такої як середньоквадратична похибка або сума квадратів похибок.

До лінійних параметричних методів належать: метод головних компонент (PCA), лінійний дискримінантний аналіз (LDA) та канонічний кореляційний аналіз (CCA).

PCA — це метод зменшення розмірності даних, який використовується для їх відображення у простір меншої розмірності. Він дозволяє перетворити вхідні дані в нові ортогональні змінні, які називаються головними компонентами (principal components), кожна з яких є лінійною комбінацією вхідних ознак. В процесі метод головних компонент формує головні компоненти в порядку спадання їх дисперсії. Перша головна компонента описує напрям, в якому дисперсія даних максимальна. Друга головна компонента обирається таким чином, щоб максимізувати залишкову дисперсію після вилучення першої, і так далі. Цей процес продовжується до тих пір, поки не будуть обрані всі головні компоненти або досягнута певна попередньо визначена їхня кількість [1]. Отримані головні компоненти можна використовувати для зменшення розмірності даних. Для цього вилучаються менш важливі компоненти, які не містять значимої інформації і залишаються більш суттєві.

Лінійні параметричні методи зазвичай працюють добре, якщо дані незашумлені та мають лінійну структуру. В інших випадках використовують нелінійні непараметричні методи. Такі методи називаються непараметричними, оскільки вони не припускають жодної апріорної інформації про розподіл даних [1].

Один з найбільш популярних непараметричних методів — це t-розподілене вкладення стохастичної близькості t-SNE (t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding). В основі лежить ідея, що точки високовимірного простору, які близькі одна до одної, повинні відповідати таким же близьким точкам в низькорозмірному просторі. Цей метод використовує ймовірнісну модель для знаходження розподілу ймовірностей сусідства між точками високовимірного простору та низькорозмірного простору. За допомогою градієнтного спуску вирішується задача мінімізації відстаней між відповідними точками у двох просторах [3, 4].

Ще один альтернативний непараметричний метод — це UMAP (Uniform Manifold Approximation and Projection). UMAP використовує геометричну конструкцію, яка називається "єдиним гладким наближенням до множини щоб знайти більш точне низькорозмірне відображення кожної точки та ієрархію кластерів. Він використовує ідею топологічного аналізу та ріманової геометрії для зна-



ходження нижньої межі відстаней між точками високорозмірного простору та проєкції їх на низькорозмірну площину з мінімальною втратою інформації [6]. UMAP враховує локальну структуру даних, щоб створити карту, яка зберігає відносну відстань між точками та ієрархічну структуру даних. Метод застосовує випадкові перетворення, щоб зменшити перенавчання та покращити якість проєкції. Він є потужним та досить швидким методом зменшення розмірності, який може бути застосований до великих обсягів даних.

Isomap (Isometric Feature Mapping) — є одним з методів нелінійного зниження розмірності даних. Він використовується для відображення взаємного розташування точок у високорозмірному просторі на низькорозмірний, зберігаючи при цьому геометричні властивості даних.

Основна ідея Isomap полягає в тому, щоб побудувати граф сусідства, де кожна точка представлена як вузол, а ребра відображають взаємну близькість між точками. Потім використовують алгоритм Флойда-Уоршелла геодезичного відстаневого перетворення, який обчислює найкоротші шляхи між усіма парами точок у графі. Геодезична відстань — це найкоротший шлях між двома точками на поверхні многовиду. За допомогою цих підходів обчислюється низькорозмірне представлення, де відстані між точками якомога ближчі до геодезичних відстаней у високорозмірному просторі [5].

Isomap є потужним інструментом для знаходження нелінійних структур у даних і використовується в різних областях, таких як комп'ютерний зір, обробка сигналів, біоінформатика та інші. Він допомагає знизити розмірність даних, зберігаючи при цьому їх внутрішню структуру і геометричні відношення між ними. У порівнянні з PCA, Isomap здатний знайти більш складні форми многовидів, зокрема з урахуванням нелінійних форм. Також Isomap може бути використаний для заповнення пропущених даних.

### 3. Експерименти.

1. Постановка задачі. Обраний набір даних для порівняльної характеристики методів зменшення розмірності є «DARWIN» [7–9], який містить дані про почерк 174 учасників, що описано 451 атрибутами. Завдання класифікації полягає в тому, щоб відрізнити хворих на хворобу Альцгеймера від здорових людей.

2. Візуалізація даних. Для розв'язання цього завдання було зменшено розмірність простору ознак до 2D методами PCA, T-SNE, UMAP, Isomap.

При використанні методу головних компонент (рис. 1а) пояснювальна дисперсія становила всього 16,8%, що вказує на втрату великої кількості інформації при такій редукції. Щоб пояснювальна дисперсія становила не менше 90% необхідно було б взяти 79 головних компонент, але це не дозволить візуалізувати дані.

На рис. 1б показано візуалізацію згенеровану t-SNE при значенні перплеક્сії — 30. Даний параметр визначає баланс між врахуванням глобальної та локальної структури даних. t-SNE не враховує геометричну структуру даних високорозмірного простору.

На рис. 1в представлено візуалізацію методом Isomap, а на рис. 1г методом UMAP із кількістю сусідів — 10 (в обох методах) та мінімальною відстанню — 0,1. Маленькі значення параметра «n\_neighbors» означають, що, намагаючись оцінити простір, в якому розподілені дані, алгоритм обмежується малим оточенням навколо кожної точки, тобто намагається вловити локальну структуру даних.

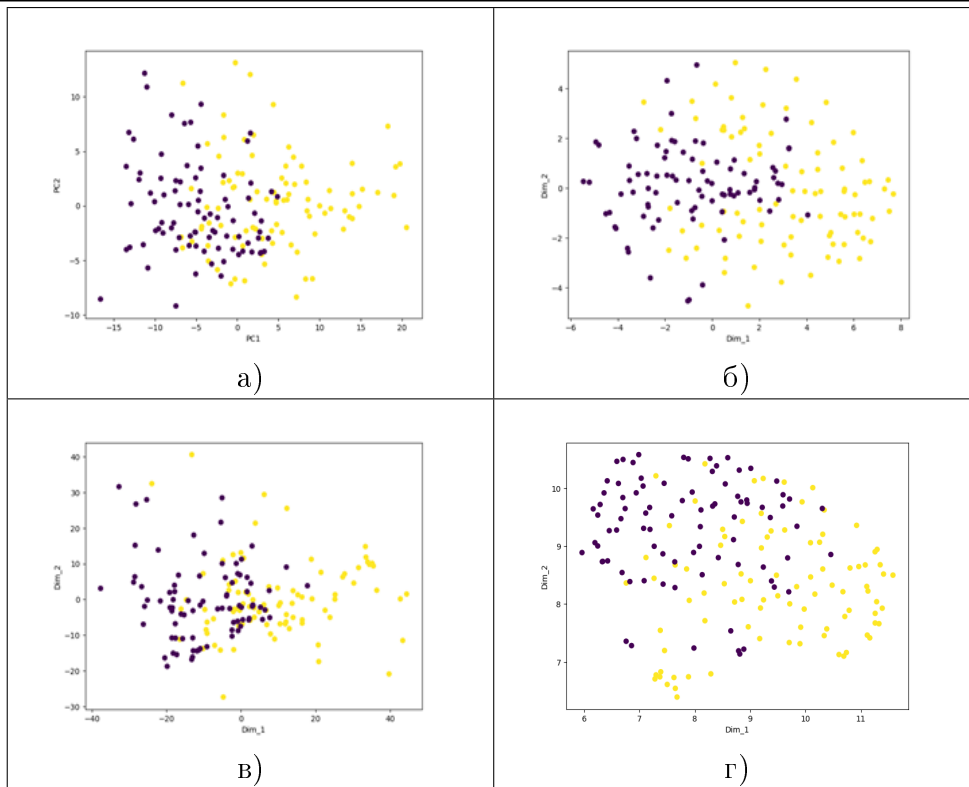


Рис. 1. 2D візуалізація набору даних «DARWIN» методами: а) PSA, б) t-SNE, в) Isomap, г) UMAP.

З іншого боку, великі значення змушують алгоритми враховувати точки у більшому околі, зберігаючи глобальну структуру даних, але упускаючи деталі. Слід зазначити, що метод UMAP є досить сильно варіативним.

Проаналізувавши отримані графічні результати можна стверджувати, що в цілому всі алгоритми відображають схожу кластерну структуру даних: кластери не мають чіткого відокремлення, тобто їх границі розмиті. Наявність великої кількості «граничних» об'єктів буде знижувати ефективність алгоритмів кластеризації та класифікації.

3. Дослідження застосування методів редукції, для попередньої обробки даних. З метою підвищення ефективності роботи методів навчання з учителем в даній частині буде досліджено чи підвищиться точність моделей застосованих до редукованого простору ознак. Дослідження проведено для методів найближчих сусідів (kNN) [10] та опорних векторів (SVM) [11]. Для порівняльного аналізу гіперпараметри моделей взято за замовчуванням. Також попередньо проведена стандартизація даних, тобто приведення всіх ознак до однієї шкали (Standard Scaler). В якості індексів оцінки ефективності моделей взято середню похибку роботи методу кросвалідації при розбитті даних на 5 сукупностей.

Проаналізувавши дані табл. 1 очевидно, що найефективнішим методом попередньої обробки для методів найближчих сусідів та опорних векторів є редукція простору ознак t-SNE. Крім того, для методу kNN ефективність підвищувалась завжди із використанням будь-якого підходу редукції. Для методу SVC тільки одна техніка (t-SNE) покращила результат.

Оцінка точності моделей шляхом перехресної перевірки.

Точність (стандар- тне відхилен- ня) моделі	Без попе- редньої обробки методами редукції	Попередня 2D редукція ознаково- го простору за PCA	Попередня 2D редукція ознаково- го простору за t-SNE	Попередня 2D редукція ознаково- го простору за UMAP	Попередня 2D редукція ознаково- го простору за Isomap
kNN	0,64(0,12)	0,68(0,21)	0,85(0,14)	0,73(0,12)	0,73(0,11)
SVC	0,83(0,14)	0,69(0,19)	0,87(0,12)	0,75(0,2)	0,77(0,17)

**4. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Дане дослідження є розвитком напрямку прикладного аналізу даних [12–16].

Досліджено ефективність використання різних технік (PCA, t-SNE, Isomap, UMAP) редукції високорозмірного ознакового простору даних, як для візуалізації даних так і для застосування цих технік до їх попередньої обробки. Зроблено порівняльний аналіз отриманих результатів. Очевидно, що необхідно застосувати ряд різних технік зменшення розмірності для визначення найефективнішої до кожної окремої прикладної задачі. Розроблена інформаційно-аналітична система на мові програмування Python та бібліотек scikit-learn, umap-learn, що реалізує описаний підхід. В якості апробаційної моделі обрано високорозмірний (451 ознака) набір даних «DARWIN». В ході експериментального дослідження для його візуалізації всі техніки в загальному показали однаковий результат. Найефективнішим методом попередньої обробки даних виявився t-SNE, що покращив точність kNN на 21%, а SVC на 4%.

Отже, застосування сучасних технік редукції може значно полегшити аналіз та розуміння даних у машинному навчанні, а також допомогти у побудові більш ефективних моделей та прогнозів.

Перспективні дослідження полягають у дослідженні ефективності застосування та поєднання різних технік аналізу даних та машинного навчання до розв'язання прикладних задач.

#### Список використаної літератури

1. Gisbrecht A., Hammer B. Data visualization by nonlinear dimensionality reduction. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*. 2015. No. 5. P. 51–73. DOI: <https://doi.org/10.1002/widm.1147>
2. Bro R., Smilde A. Principal component analysis. *Analytical methods*. 2014. Vol. 6, No. 9. P. 2812–2831. DOI: <https://doi.org/10.1039/c3ay41907j>
3. Maaten L., Hinton G. Visualizing Data using t-SNE. *Journal of Machine Learning Research*. 2008. No. 9. P. 2579–2605.
4. Hinton G., Roweis S. Stochastic Neighbor Embedding. *Neural Information Processing Systems*. 2002. No. 15. P. 1–8.
5. Tenenbaum J., Silva V., Langford J. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. *Science*. 2000. Vol. 290. P. 2319–2323. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.290.5500.2319>
6. McInnes L., Healy J., Melville J. UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction. *arXiv:1802.03426 [stat.ML]*. 2020. P. 1–63. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.03426>

7. Fontanella F. DARWIN. *UCI Machine Learning Repository*. URL: <https://archive-beta.ics.uci.edu/dataset/732/darwin>
8. Cili N. D. An experimental protocol to support cognitive impairment diagnosis by using handwriting analysis. *Procedia Computer Science*. 2018. No. 141. P. 466–471. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.10.141>
9. Cili N. D. Diagnosing Alzheimer's disease from online handwriting. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2022. Vol. 111. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.104822>
10. Cover T., Hart P. Nearest neighbor pattern classification. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1967. No. 13. P. 21–27.
11. Cortes C., Vapnik V. Support-vector networks. *Machine Learning*. 1995. No. 20. P. 273–297.
12. Кондрук Н. Е. Використання мір подібності в методах класифікації. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 1, № 38. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148)
13. Kondruk N. E. Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2018. Vol. 3, No. 48. P. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
14. Kondruk N. E., Malyar M. M. Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. P. 436–441. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
15. Kondruk N., Malyar M. Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. International Conference "Computational Intelligence", 28–30 September 2021. Kyiv-Uzhhorod, 2021. P. 112–121. URL: [https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper\\_11.pdf](https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf)
16. Кондрук Н. Е. Моделі багатофакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)

## Kondruk N. E. Analysis of Dimensionality Reduction Techniques in Machine Learning.

Many modern datasets have high dimensionality, which can lead to issues such as model overload, decreased data processing efficiency, and increased training time. Therefore, researching the application of data dimensionality reduction techniques is an important task for improving productivity and analysis speed. This work provides an overview and evaluation of the effectiveness of contemporary techniques for reducing the dimensionality of high-dimensional feature spaces in data, aiming at data visualization and preprocessing. To accomplish this, an information analytics system was developed in Python, that implements PCA, t-SNE, Isomap, and UMAP. The "DARWIN" dataset with 451 features was selected as the test dataset. The experimental results showed similar data visualization outcomes for all techniques overall. t-SNE proved to be the most effective data preprocessing method for this dataset, improving the accuracy of kNN by 21% and SVC by 4%. The obtained results demonstrate that modern data dimensionality reduction methods can contribute to constructing more effective models and predictions. Future research will involve evaluating the synergy between data analysis techniques and machine learning to address specific applied problems.

**Keywords:** reduction, dimensionality reduction, data visualization, high-dimensional data.

## References

1. Gisbrecht, A., & Hammer, B. (2015). Data visualization by nonlinear dimensionality reduction. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 5, 51–73. <https://doi.org/10.1002/widm.1147>
2. Bro, R., & Smilde, A. (2014). Principal component analysis. *Analytical methods*, 6(9), 2812–2831. <https://doi.org/10.1039/c3ay41907j>
3. Maaten, L., & Hinton, G. (2008). Visualizing Data using t-SNE, *Journal of Machine Learning Research*, 9, 2579–2605.
4. Hinton, G., & Roweis, S. (2002). Stochastic Neighbor Embedding. *Neural Information Processing Systems*, 15, 1–8.

5. Tenenbaum, J., Silva, V., & Langford, J. (2000). A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. *Science*, 290, 2319–2323. <https://doi.org/10.1126/science.290.5500.2319>
6. McInnes, L., Healy, J., & Melville, J. (2020). UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction. *arXiv:1802.03426 [stat.ML]*, 1–63. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.03426>
7. Fontanella, F. DARWIN. *UCI Machine Learning Repository*. Retrieved from <https://archive-beta.ics.uci.edu/dataset/732/darwin>
8. Cilia, N. D. (2018). An experimental protocol to support cognitive impairment diagnosis by using handwriting analysis. *Procedia Computer Science*, 141, 466–471. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.10.141>
9. Cilia, N. D. (2022). Diagnosing Alzheimer’s disease from online handwriting. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 111, 104822. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.104822>
10. Cover, T., & Hart, P. (1967). Nearest neighbor pattern classification. *IEEE Transactions on Information Theory*, 13, 21–27.
11. Cortes, C., & Vapnik, V. (1995). Support-vector networks. *Machine Learning*, 20, 273–297.
12. Kondruk, N. E. (2021). Use of similarity measures in classification methods. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(38), 85–91. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148)
13. Kondruk, N. E. (2018). Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 3(46), 98–105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
14. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (2021). Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybern. Syst. Anal.*, 57, 436–441. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
15. Kondruk, N., & Malyar, M. (2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems, Kyiv-Uzhhorod. Retrieved from [https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper\\_11.pdf](https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf)
16. Kondruk, N. E. (2022). Models of multivariate forecasting. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)

Одержано 02.05.2023

УДК 004.65

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).190-194](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).190-194)**Є. В. Крилов<sup>1</sup>, В. А. Нікітін<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,  
доцент кафедри інформаційних систем та технологій,  
кандидат технічних наук  
ekrylov1964@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/>

<sup>2</sup> Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,  
аспірант кафедри інформаційних систем та технологій  
19valeranikitin96@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4509-1204>

## ВИКОРИСТАННЯ ТРАНЗАКЦІЙНОГО ГОДИННИКА ДЛЯ ПРИШВИДШЕННЯ ПРОЦЕСУ УЗГОДЖЕННЯ ДАНИХ В РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ

Однією з найважливіших властивостей розподіленої системи, які використовують NoSql бази даних, є **узгодженість даних** (consistency). Якщо кількість вузлів розподіленої системи велика, то процес узгодження даних може займати значний час. Для пришвидшення цього процесу в даній статті запропоновано використовувати **транзакційний годинник**. Його особливість полягає в тому, що в процесі виконання запитів до залежних баз даних на різних вузлах розподіленої системи, фіксуються всі транзакції, які в режимі реального часу передаються в транзакційний годинник на головному вузлі. Транзакції обробляються та формується результуюча транзакція, яка розповсюджується на всі залежні бази даних системи з врахуванням пріоритетів. Серед усіх даних розподіленої бази даних визначаються **критичні дані**, для яких швидкість узгодження є найбільш важливим.

**Ключові слова:** бази даних, розподілені системи, NoSql, узгодженість даних, узгодженість, транзакції, транзакційний годинник.

**1. Вступ.** Створення розподіленої системи є необхідністю у випадку широкого розповсюдження та великого навантаження. Окрім цього, це дозволяє підтримувати продуктивність сервісу на високому рівні незалежно від географічного розташування, зберігаючи час користувачів та розвантажуючи канали зв'язку. Даний підхід дозволяє відносно легко масштабувати систему додаючи нові вузли, що у свою чергу покращує доступність, оскільки при відмові одного вузла існують інші, які здатні виконувати необхідні функції.

Не дивлячись на суттєві переваги, такі системи можуть мати неузгодженість даних між репліками [1]. Існують різні механізми, які дозволяють покращити це, використовуючи синхронізацію подій у таких системах або за рахунок архітектурних рішень [2]. Одним із таких механізмів є логічні годинники, які дозволяють підтримувати послідовний порядок подій у системі, фіксуючи хронологічні та причинно-наслідкові зв'язки [3]. Яскравими прикладами можуть бути логічний годинник Лемпорта та векторні годинники [4]. Особливістю таких годинників є те, що не потрібно використовувати фізично синхронний глобальний годинник.

**2. Постановка задачі.** Процес узгодження даних в розподілених системах виконується зазвичай наступним чином. На різних вузлах системи в базах даних відбуваються зміни. В певний час, коли ці зміни треба узгодити виконується

процедура синхронізації даних двох залежних вузлів. Для цього використовуються алгоритми PULL, PUSH та PULL and PUSH. Недоліком цих алгоритмів є те, що вони:

1. Починають працювати в певний визначений час.
2. Обмін інформацією виконується без врахування критично важливих даних.
3. Вони не враховують транзакції, які відбуваються з даними, які зберігаються на різних вузлах залежних баз даних.

Існують задачі, для яких узгодженість даних є критично важливим. Наприклад, платіжна система. Якщо клієнт знімає кошти зі свого рахунку на сервері в Києві, то ця інформація повинна миттєво розповсюджуватися на інші вузли, які знаходяться в Варшаві чи Вашингтоні. З іншого боку, якщо клієнт змінює свою адресу, є можливість трохи затримати узгодженість цих даних. Другий приклад, система оренди номерів в готелях. Процедура бронювання номеру є критично важливою з точки зору узгодженості, а зміна внутрішньої службової інформації готелю не має такої критичності.

Тому задачу **пришвидшення швидкодії процесу узгодження даних** в розподілених системах треба розглядати як завдання **максимально швидко узгодження критично важливих даних** в залежних базах даних. Для цього необхідно визначити критично важливі дані в системі та розробити алгоритм, який дозволяє максимально швидко їх узгоджувати.

**3. Загальний алгоритм узгодження даних в розподілених системах з використанням транзакційного годинника.** Загальна схема процесу узгодженості даних з використанням транзакційного годинника показана на рисунку 1.

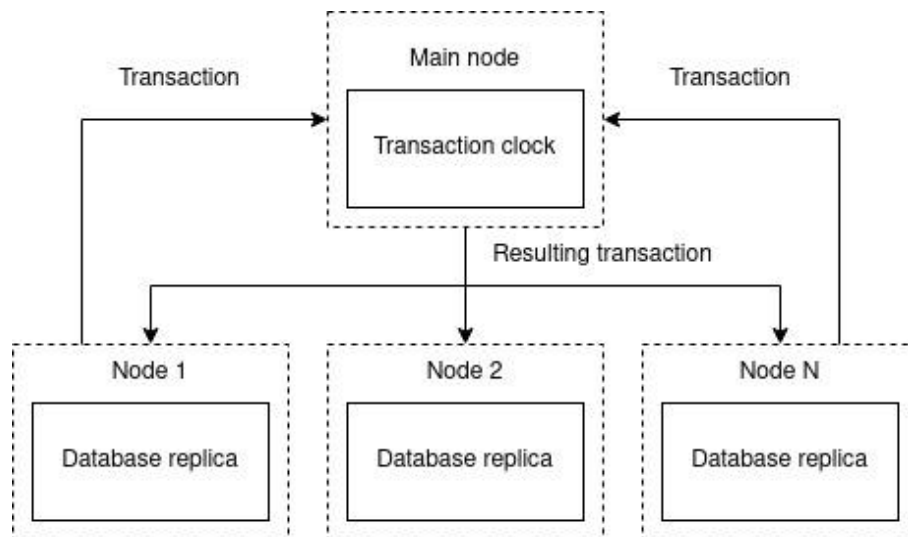


Рис. 1. Загальна схема процесу узгодженості даних з використанням транзакційного годинника.

Узгодження даних між різними вузлами системи виконується за наступним алгоритмом:

1. Всі операції зміни даних (Update, Delete) на залежних базах даних оформлюються в транзакції та миттєво передаються у чергу транзакційного годинника, яка знаходиться на головному вузлі.

2. Всі транзакції, які змінюють репліковані дані, зберігаються у відповідному стеку та обробляються за допомогою транзакційної логіки. Після цього отримуємо результуючу транзакцію, яку передаємо на всі залежні вузли.
3. Для прискорення процесу узгодження **критичних даних** та враховуючи можливий стан гонки, кожен запис бази даних отримує свій пріоритет. В цьому випадку критичні дані завжди будуть мати максимальний пріоритет. Послідовність обробки складних транзакцій в транзакційному годиннику буде виконуватися відповідно до пріоритетів змінених записів.

Слабким місцем даного механізму є головний вузол, на якому знаходиться транзакційний годинник, оскільки при його недоступності втрачається можливість створення результуючої транзакції. У такому випадку, система все-одно залишається працеспроможною на читання, а транзакції залишаються у локальній черзі на кожному вузлі до моменту відновлення головного вузла або переключенням на резервний.

**4. Залежні та незалежні бази даних.** В складній розподіленій системі можуть бути залежні та незалежні бази даних. Будемо називати бази даних залежними, якщо вони зберігають репліковані дані. Наприклад, дані про банківський рахунок однієї людини чи дані про бронювання номерів готелю, які можна продивлятися та змінювати на різних вузлах розподіленої системи.

Залежні бази даних потребують узгодження, а незалежні — ні. Тому для розмежування залежних та незалежних баз даних введемо поняття матриці залежності  $MS$ , яку математично можна представити у вигляді (1).

$$MS_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \text{ та } j \text{ БД залежні,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ та } j \text{ БД незалежні,} \end{cases} \quad (1)$$

де  $i$  — номер вузла,  $j$  — номер запису.

**5. Математична модель транзакційного годинника.** Математично транзакційний годинник ( $TS$ ) можна представити у вигляді (2).

$$TS_{i,j} = f(P_{g_n}, N, T_a, O, SZ, NZ), \quad (2)$$

де  $P_{g_n}$  — динамічний пріоритет  $n$ -транзакції,

$N$  — номер запису,

$T_a$  — вектор абсолютного часу транзакції,

$O$  — операція транзакції,

$SZ$  — вектор старих значень,

$NZ$  — вектор нових значень.

Вектор абсолютного часу транзакції певного вузла можна розрахувати за формулою (3).

$$T_{a_i} = T_{S_i} - T_{O_i}, \quad (3)$$

де  $T_{S_i}$  — час транзакції  $i$ -го вузла,  $T_{O_i}$  — відносна похибка  $i$ -го вузла.

Динамічний пріоритет транзакції можна представити формулою (4).

$$P_{g_n} = f(P_{S_n}, T_{a_n}), \quad (4)$$

де  $P_{S_n}$  — статичний пріоритет  $n$ -го запису,  $T_{a_n}$  — вектор абсолютного часу  $n$ -ої транзакції.



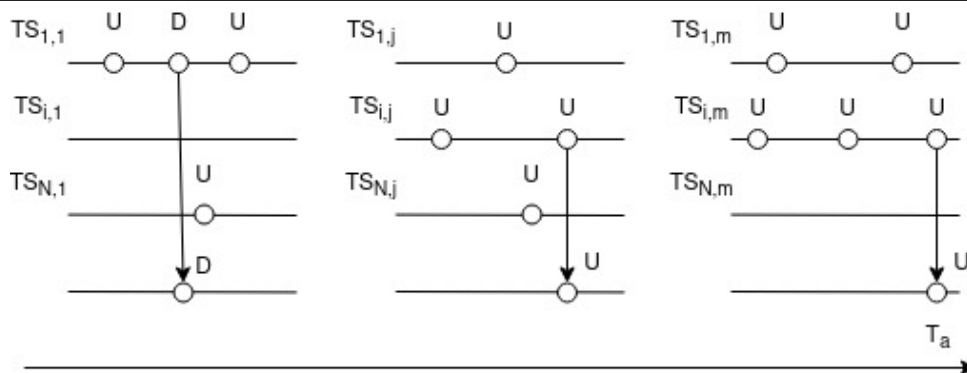


Рис. 2. Приклад роботи транзакційного годинника.

**6. Логіка транзакційного годинника.** На рисунку 2 можна побачити приклад роботи транзакційного годинника.

На даному рисунку  $TS_{i,j}$  — транзакція, яка відбулася на  $i$ -му вузлі,  $j$ -запису. Під час обробки в транзакційному годиннику їх може бути декількох. Наприклад, для транзакції  $TS_{1,1}$  — відбулися послідовно операції Update, Delete, Update. Транзакційна логіка повинна проаналізувати всі складні транзакції різних вузлів для одного запису та підготувати результуючу транзакцію. Результуючу транзакцію розраховуємо відповідно формули (5).

$$\begin{aligned} U_1 &\rightarrow U_2 \rightarrow \dots \rightarrow U_N = U_N, \\ U_1 &\rightarrow D \rightarrow \dots \rightarrow U_N = D. \end{aligned} \quad (5)$$

Слід зазначити, що транзакції накопичуються на кожному вузлі по мірі надходження і передаються на головний вузол, якщо значення пріоритету транзакцій найбільше. Особливу увагу має операція Delete, яка має більший пріоритет, оскільки видалення відбувається на всіх вузлах системи і через це, її пріоритет більше, ніж у транзакцій з іншими операціями.

**7. Висновки.** Таким чином, у даній статті запропоновано новий алгоритм узгодження даних у розподілених системах. Він відрізняється від існуючих тим, що процес узгодження даних в залежних базах даних працює безперервно. Цей алгоритм базується на безперервній обробці транзакцій, які надходять від залежних вузлів. Результатом обробки є результуюча транзакція, яка отримується внаслідок роботи транзакційної логіки. Вона розповсюджується до усіх залежних вузлів для узгодження реплікованих даних. Запропонований механізм пріоритетів записів залежних баз даних дає можливість змінити послідовність розгляду транзакцій і таким чином забезпечити пришвидшення узгодження критично важливих даних. Визначення конкретного коефіцієнту пришвидшення є подальшим напрямком дослідження.

#### Список використаної літератури

1. Andrew S. T., van Steen M. Distributed Systems: Principles and Paradigms (2nd Edition). Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, 2007. 702 p.
2. Nikitin V., Krylov E. A collision-resistant hashing algorithm for maintaining consistency in distributed NoSQL databases. *Adaptive Systems of Automatic Control Interdepartmental scientific and technical collection*. 2022. Vol. 2, No. 41. P. 45–57. DOI: <https://doi.org/10.20535/1560-8956.41.2022.271338>

3. Raynal M. About logical clocks for distributed systems. *ACM SIGOPS Operating Systems Review*. 1992. Vol. 26, No. 101. P. 41–48. DOI: <https://doi.org/10.1145/130704.130708>
4. Lamport L. Time, clocks, and the ordering of events in a distributed system. *Communications of the ACM*. 1978. Vol. 21, No. 7. P. 558–565. DOI: <https://doi.org/10.1145/3335772.3335934>

**Krylov E. V., Nikitin V. A.** Usage of transaction clock to speed up the data consistency process in distributed systems.

One of the most important properties of a distributed system that uses NoSql databases is data consistency. If the number of nodes of the distributed system is large, then the process of data consistency can take a significant amount of time. To speed up this process, this article suggests using a transactional clock. This feature is that in the process of executing requests to dependent databases on different nodes of the distributed system, all transactions are recorded, which are transmitted in real time to the transaction clock on the main node. Transactions are processed and the resulting transaction is formed, which is distributed to all dependent databases of the system, taking into account priorities. Among all the data in a distributed database, critical data is identified for which the speed of consistency is most important.

**Keywords:** databases, distributed systems, NoSql, consistency of data, consistency, transactions, transaction clock.

## References

1. Tanenbaum, A. S., & van Steen, M. (2007). *Distributed Systems: Principles and Paradigms (2nd Edition)*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
2. Nikitin, V., & Krylov, E. (2022). A collision-resistant hashing algorithm for maintaining consistency in distributed NoSQL databases. *Adaptive Systems of Automatic Control Interdepartmental scientific and technical collection*, 2(41), 45–57. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.41.2022.271338>
3. Raynal, M. (1992). About logical clocks for distributed systems. *ACM SIGOPS Operating Systems Review*, 26(101), 41–48. <https://doi.org/10.1145/130704.130708>
4. Lamport, L. (1978). Time, clocks, and the ordering of events in a distributed system. *Communications of the ACM*, 21(7), 558–565. <https://doi.org/10.1145/3335772>

Одержано 30.04.2023

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).195-202](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).195-202)**І. А. Мич<sup>1</sup>, В. В. Ніколенко<sup>2</sup>, О. В. Варцаба<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук

ihor.mych@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,  
кандидат фізико-математичних наук

volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики,  
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

## ЕКВАЦІОНАЛЬНЕ ОПИСАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО НЕПОВНИХ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У даній роботі розглядається клас булевих алгебр, які включають в себе операції сума за модулем два, диз'юнкцію, кон'юнкцію, заперечення, константи 0 та 1. Введені поняття сигнатурної тотожності, за допомогою якої можна змінювати сигнатуру алгебр цього класу, та поняття еквівалентного кластеру алгебр. Усі функціонально неповні алгебри утворюють двадцять один кластер. У роботі знайдені повні системи тотожностей для всіх тридцяти чотирьох функціонально неповних алгебр даного класу.

**Ключові слова:** універсальна булева алгебра, еквівалентність, повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, еквівалентний кластер.

**1. Вступ.** Загальна теорія алгебр як математична дисципліна почала існувати з 1935 року. Саме тоді Біркгоф опублікував свої перші статті, в яких доводить теореми про повноту для еквівалентної логіки, яка відіграє особливу роль у математиці, оскільки класи алгебр, які найбільше цікавлять алгебраїстів, або аксіоматично визначені тотожностями або тісно пов'язані з таким класом [1]. Особливе місце у теорії функцій двозначної логіки займає булева алгебра, яка застосовується у задачах обробки інформації, роботі з базами даних, логічному програмуванні, для конструювання та аналізу роботи комп'ютерів та інше.

Дана робота є продовженням робіт [2–6], в яких проведені еквівалентні дослідження алгебр заданими над бінарними квадратними матрицями, в сигнатуру яких входять операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. У роботі [7] розроблена методика знаходження повних систем тотожностей для деяких класів булевих алгебр. Знайдені повні системи тотожностей алгебр, які належать кубу Буля і Жегалкіна.

**2. Основні результати.** Нехай задано клас універсальних булевих алгебр  $M = \{U = \langle A, \Omega \rangle\}$ ,  $A = \{0, 1\}$ ,  $\Omega$  — деяка множина булевих операцій. Позначимо через  $R(U)$  множину всіх тотожностей алгебри  $U$ .

**Означення 1.** Алгебри  $U_1$  і  $U_2$  називають еквівалентними, якщо  $R(U_1) = R(U_2)$ .

**Означення 2.** Алгебра  $U_1$  екваціонально вкладається в алгебру  $U_2$ , якщо  $R(U_1) \subset R(U_2)$ .

Якщо сигнатури алгебр  $U_1$  і  $U_2$  не співпадають, то вони не є екваціонально еквівалентними. Якщо алгебра  $U_1$  екваціонально вкладається в алгебру  $U_2$ , то  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ .

Нехай задані алгебри  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$  і  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  такі, що  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ .

**Означення 3.** Тотожність  $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$  називається сигнатурною, якщо  $F_2(\varphi)$  — формула, яка реалізує операцію  $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ , а  $F_1(\psi)$  — формула, яка побудована з операцій алгебри  $U_1$ .

Наприклад, якщо  $U_1 = \langle A, \{\wedge, \vee, \neg\} \rangle$  і  $U_2 = \langle A, \{\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \rangle$ , то сигнатурними є тотожності  $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$ ,  $x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$ .

**Означення 4.** Система тотожностей  $H \subset R(U)$  називається повною в  $U$ , якщо використовуючи операцію суперпозиції, можна довести довільну тотожність  $F_1 = F_2$  до лексикографічної рівності.

Питання чи мають алгебри скінченні повні системи тотожностей є відкритим навіть для скінчених алгебр.

Нехай алгебри  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$  і  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  такі, що  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , і для кожної операції  $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$  знайдена сигнатурна тотожність  $F_2(\varphi) = F_1(\psi)$ . Множину цих сигнатурних тотожностей позначимо через  $R(\Omega_2 - \Omega_1)$ .

**Теорема 1.** Якщо для алгебри  $U_1$  знайдена повна система тотожностей  $H(U_1)$ , то повна система тотожностей  $H(U_2)$  алгебри  $U_2$  дорівнює  $H(U_1) \cup R(\Omega_2 - \Omega_1)$ .

**Доведення.** Доведення теореми впливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операції  $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$  з формули алгебри  $U_2$ , звівши їх до формул алгебри  $U_1$ , для якої знайдена повна система тотожностей  $H(U_1)$ .

**Означення 5.** Алгебра  $U = \langle A, \Omega \rangle \in M$  має екваціональну потужність  $k$  у класі алгебр  $M$ , якщо в ній можна побудувати  $k$  сигнатурних тотожностей.

**Означення 6.** Алгебра  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$  екваціонально вкладається в алгебру  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  якщо для кожної операції  $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$  існують сигнатурні тотожності.

За допомогою цих сигнатурних тотожностей формули алгебри  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  можна звести до формул алгебри  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ . Те, що алгебра  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$  екваціонально вкладається в алгебру  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  будемо позначати  $R(U_1) \subset R(U_2)$

**Означення 7.** Алгебри  $U_1, U_2, \dots, U_t \in N$  утворюють екваціональний кластер  $N$ , якщо

- 1)  $\forall U_i, U_j$  існує така послідовність алгебр  $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_l} \in N$ , що  $R(U_i) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \dots \subset R(U_{i_l}) = R(U_j)$ .
- 2)  $\forall U_k \in N$  не існує  $U_i \in M$  такої, що  $R(U_i) \subset R(U_k)$ .

Потужність екваціонального кластера  $|N|$  визначається кількістю алгебр, які входять до його складу.

Розглянемо клас булевих універсальних алгебр

$$M_6 = \{U = \langle A, \Omega \rangle \mid \Omega \in \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus\}\}.$$

Алгебри цього класу утворюють шестимірний сигнатурний куб (рис. 1), який містить шістдесят чотири алгебри.

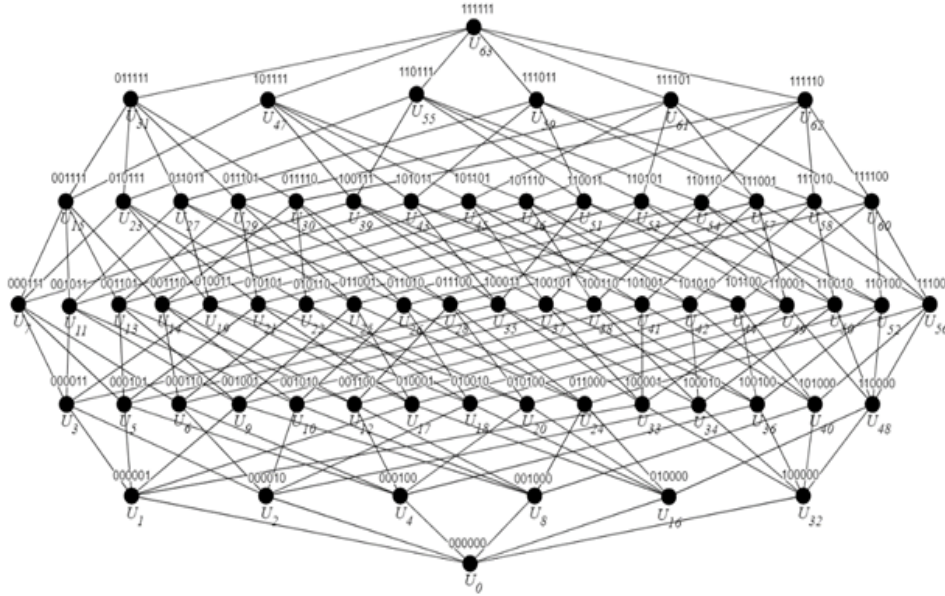


Рис. 1. Сигнатурний шестимірний куб класу алгебр  $M_6$ .

Знайдемо повні системи тотожностей всіх алгебр цього класу. Для частини цих алгебр ця задача була розв’язана в [6]. Кожній алгебрі  $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle \in M_6$  поставимо у відповідність шестимірний булевий вектор  $B_i(U_i) = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \alpha_4^i, \alpha_5^i, \alpha_6^i)$ , де  $\alpha_1 = 1$ , якщо  $\oplus \in \Omega_1$ ,  $\alpha_1 = 0$ , якщо  $\oplus \notin \Omega_V$ ;  $\alpha_2 = 1$ , якщо  $\vee \in \Omega_V$ ,  $\alpha_2 = 0$ , якщо  $\vee \notin \Omega_V$ ;  $\alpha_3 = 1$ , якщо  $\wedge \in \Omega_V$ ,  $\alpha_3 = 0$ , якщо  $\wedge \notin \Omega_V$ ;  $\alpha_4 = 1$ , якщо  $\neg \in \Omega_V$ ,  $\alpha_4 = 0$ , якщо  $\neg \notin \Omega_V$ ;  $\alpha_5 = 1$ , якщо  $1 \in \Omega_V$ ,  $\alpha_5 = 0$ , якщо  $1 \notin \Omega_V$ ;  $\alpha_6 = 1$ , якщо  $0 \in \Omega_V$ ,  $\alpha_6 = 0$ , якщо  $0 \notin \Omega_V$ .

Опишемо всі кластери у множині алгебр  $M_6$ .

Перший кластер  $N_0$  складають алгебри, які мають екваціональну потужність 0, тобто в цих алгебрах не існує сигнатурних тотожностей. Цей клас складається з сімнадцяти алгебр, кожна з яких є одноелементним екваціональним кластером. Шістнадцять алгебр цього класу утворюють сигнатурний граф, представлений на рис. 2.

Повна система тотожностей алгебр класу  $N_0$  екваціональна потужності, яка дорівнює нулю.

1. Алгебра  $U_0 = \langle A, \emptyset \rangle$ .  $H(U_0) = \{x_i = x_i\}$ .
2. Алгебра  $U_1 = \langle A, 0 \rangle$ .  $H(U_1) = \{x_i = x_i, 0 = 0\}$ .
3. Алгебра  $U_2 = \langle A, 1 \rangle$ .  $H(U_2) = \{x_i = x_i, 1 = 1\}$ .
4. Алгебра  $U_3 = \langle A, 0, 1 \rangle$ .  $H(U_3) = \{x_i = x_i, 0 = 0, 1 = 1\}$ .
5. Алгебра  $U_4 = \langle A, \neg \rangle$ .  $H(U_4) = \{x_i = x_i, \bar{x} = x\}$ .
6. Алгебра  $U_8 = \langle A, \wedge \rangle$ .  $H(U_8) = \{x_i = x_i, x_1x_1 = x_1, x_1x_2 = x_2x_1, (x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)\}$ .

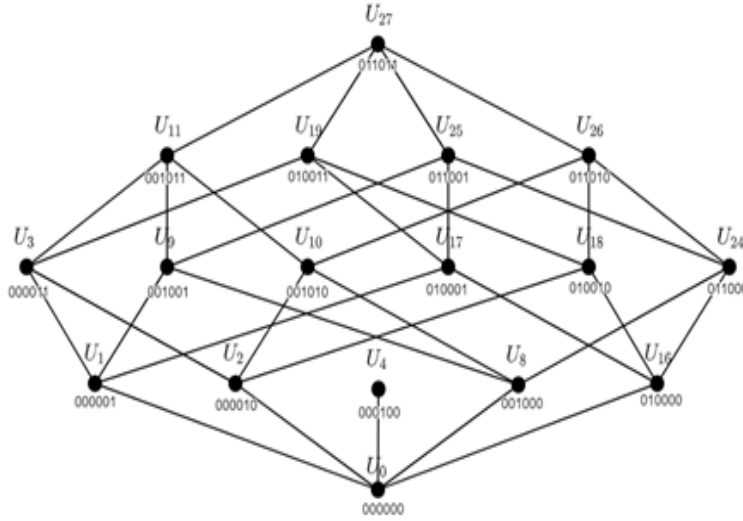


Рис. 2. Сигнатурний граф екваціональних алгебр потужності нуль.

7. Алгебра  $U_{16} = \langle A, \vee \rangle$ .  $H(U_{16}) = \{x_i = x_i, x_1 \vee x_1 = x_1, x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\}$ .
8. Алгебра  $U_{17} = \langle A, \vee, 0 \rangle$ .  $H(U_{17}) = \{H(U_{16}) \cup H(U_2), x \vee 1 = 1\}$ .
9. Алгебра  $U_9 = \langle A, \wedge, 0 \rangle$ .  $H(U_9) = \{H(U_1) \cup H(U_8), 0 \wedge x = 0\}$ .
10. Алгебра  $U_{10} = \langle A, 1, \wedge \rangle$ .  $H(U_{10}) = \{H(U_8) \cup H(U_2), x \wedge 1 = x\}$ .
11. Алгебра  $U_{18} = \langle A, 1, \vee \rangle$ .  $H(U_{18}) = \{H(U_2) \cup H(U_{16}), x \vee 1 = 1\}$ .
12. Алгебра  $U_{24} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$ .  $H(U_{24}) = \{H(U_8) \cup H(U_{16}), x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3, x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3), x_1 \vee x_1x_2 = x_1, x_1(x_1 \vee x_2) = x_1\}$ .
13. Алгебра  $U_{11} = \langle A, 0, 1, \wedge \rangle$ .  $H(U_{11}) = \{H(U_9) \cup H(U_{10})\}$ .
14. Алгебра  $U_{19} = \langle A, 0, 1, \vee \rangle$ .  $H(U_{19}) = \{H(U_{17}) \cup H(U_{18})\}$ .
15. Алгебра  $U_{25} = \langle A, 0, \wedge, \vee \rangle$ .  $H(U_{25}) = \{H(U_9) \cup H(U_{17}) \cup H(U_{24})\}$ .
16. Алгебра  $U_{26} = \langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$ .  $H(U_{26}) = \{H(U_{10}) \cup H(U_{18}) \cup H(U_{24})\}$ .
17. Алгебра  $U_{27} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee \rangle$ .  $H(U_{27}) = \{H(U_{11}) \cup H(U_{19}) \cup H(U_{25}) \cup H(U_{26})\}$ .

**Наслідок 1.** Повною системою тотожностей алгебри  $U_{27} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee \rangle$  є система тотожностей, яка включає повні системи тотожностей алгебр  $U_{11} = \langle A, 0, 1, \wedge \rangle$ ,  $U_{19} = \langle A, 0, 1, \vee \rangle$ ,  $U_{25} = \langle A, 0, \wedge, \vee \rangle$ ,  $U_{26} = \langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$ .

Виписавши тотожності цих алгебр, отримаємо систему:

1.  $x_1 \vee x_1 = x_1$ ;  $x_1 \wedge x_1 = x_1$ .
2.  $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ ;  $x_1x_2 = x_2x_1$ .
3.  $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$ ;  $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$ .
4.  $(x_1 \vee x_2)x_3 = x_1x_3 \vee x_2x_3$ ;  $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$ .
5.  $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$ ;  $x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$ .
6.  $0 \wedge x_1 = 0$ ;  $1 \wedge x_1 = x_1$ ;  $0 \vee x_1 = x_1$ ;  $1 \vee x_1 = 1$ .

Нехай  $F_1$  і  $F_2$  — формули алгебри  $U_{27}$ . Використовуючи тотожності (6), нуль і одиницю можна опустити або вони перетворяться у функції, які тотожно дорівнюють нулю або одиниці. За допомогою тотожностей (1–4) формули  $F_1$  і  $F_2$  зводяться до диз'юнктивної нормальної форми. Тотожності (5) дають можливість отримати диз'юнктивну нормальну форму, в якій кожна елементарна

кон'юнкція не є власною частиною іншої. У роботі [6] показано, що таке представлення є єдиним відносно лексикографічного впорядкування.

Клас алгебр  $N_1$ , які мають екваціональну потужність 1, складається з двох алгебр  $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$  і  $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$ . Сигнатурна тотожність  $x \oplus x = 0$  дає можливість переходити від формули одної алгебри до іншої. Ці алгебри утворюють двоелементний екваціональний кластер.

18. Алгебра  $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$ .  $H(U_{32}) = \{x_1 \oplus x_1 = x_2 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2) = x_1, (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)\}$ .

19. Алгебра  $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$ .  $H(U_{33}) = \{x \oplus x = 0, H(U_{32})\}$ .

Трьохелементний кластер  $N_2$  утворюють алгебри  $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$ ,  $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$  і  $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$ .

20. Алгебра  $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$ .  $H(U_5) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$ . У цій алгебрі формули, за допомогою тотожності  $\bar{\bar{x}} = x$ , можуть бути приведені до формул вигляду  $x, \bar{x}, 0, \bar{0}$ .

21. Алгебра  $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$ .  $H(U_6) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$ . Формули можуть бути приведені до формул вигляду  $x, \bar{x}, 1, \bar{1}$ .

22. Алгебра  $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$ .  $H(U_7) = \{\bar{\bar{x}} = x, \bar{1} = 0, \bar{0} = 1\}$ .

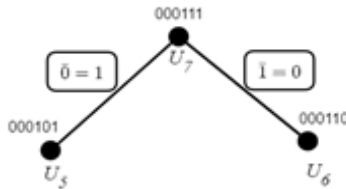


Рис. 3. Перший шестиелементний екваціональний кластер.

У класі  $M_6$  побудовано два шістьелементних екваціональних кластери. Перший такий кластер  $N_3$  утворюють алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$ ,  $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee \rangle$ ,  $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0 \rangle$ ,  $U_{49} = \langle A, \oplus, \vee, 0 \rangle$ ,  $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$ ,  $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$ . Цей екваціональний кластер можна зобразити у вигляді графа (рис. 4).

Алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$ ,  $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee \rangle$  мають екваціональну потужність два, алгебри  $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0 \rangle$ ,  $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$  мають екваціональну потужність один, а алгебра  $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$  має нульову екваціональну потужність. На ребрах графів вказані сигнатурні тотожності, які дають можливість перейти від сигнатури однієї алгебри до іншої.

У роботі [6] знайдена повна система тотожностей алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$ . Вона складається з наступних тотожностей:

1.  $x \oplus x = y \oplus y$ .
2.  $x \oplus y = y \oplus x$ .
3.  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ .
4.  $y \oplus x \oplus x = y$ .
5.  $x \wedge x = x$ .
6.  $x \wedge y = y \wedge x$ .
7.  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ .
8.  $(x \oplus y) \wedge z = x \wedge z \oplus y \wedge z \oplus x \wedge y \wedge z$ .
9.  $x \oplus x \wedge y = x$ .

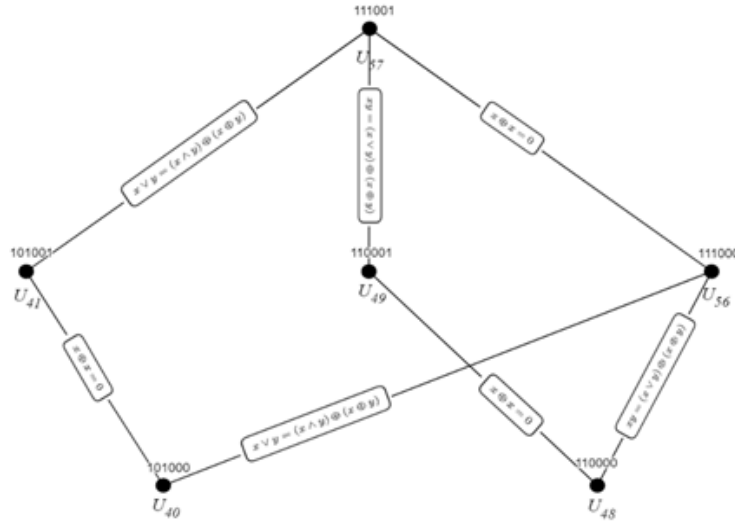


Рис. 4. Перший шестиелементний екваціональний кластер.

23. Алгебра  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$ .  $H(U_{40}) = \{1 - 9\}$ .

Використаємо екваціональний кластер для знаходження повних систем тотожностей інших алгебр кластера. З теореми 1 випливає, що повні системи тотожностей алгебр  $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0 \rangle$ ,  $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$ ,  $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$  можемо отримати з повної системи тотожностей алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$  приєднанням відповідних сигнатурних тотожностей, зображених на рисунку 4.

24. Алгебра  $U_{41} = \langle A, \oplus, \wedge, 0 \rangle$ .  $H(U_{41}) = \{H(U_{40}) \cup x \oplus x = 0\}$ .

25. Алгебра  $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$ .  $H(U_{56}) = \{H(U_{40}) \cup x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)\}$ .

26. Алгебра  $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$ .  $H(U_{57}) = \{H(U_{41}) \cup xy = xy \oplus (x \oplus y)\}$ , або

$$H(U_{57}) = \left\{ H(U_{56}) \cup xy = x \oplus E = 0 \right\}.$$

Доведемо на прикладі останньої алгебри, що повна система тотожностей алгебри  $U_{57} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge, 0 \rangle$  складається з повної системи тотожностей алгебри  $U_8 = \langle A, \wedge \rangle$ , яка доповнена тотожностями  $x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)$  і  $x \oplus E = 0$ . Якщо за допомогою останніх тотожностей усунути операції  $\vee$  і  $0$ , то формули цієї алгебри перетворяться у формули алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$ .

27. Алгебра  $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee \rangle$ .  $H(U_{48}) = \{H(U_{40}) \cup x \vee y = xy \oplus (x \oplus y), xy = (x \vee y) \oplus (x \oplus y)\}$ .

Для того, щоб звести формули алгебри  $U_{48} = \langle A, \oplus, \vee \rangle$  до формул алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$  необхідно у алгебрі  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$  за допомогою сигнатурної тотожності  $xy = (x \vee y) \oplus (x \oplus y)$  перейти до формул алгебри  $U_{56} = \langle A, \oplus, \vee, \wedge \rangle$ , а далі через сигнатурну тотожність  $x \vee y = xy \oplus (x \oplus y)$  до формул алгебри  $U_{40} = \langle A, \oplus, \wedge \rangle$ .

28. Алгебра  $U_{49} = \langle A, \oplus, \vee, 0 \rangle$ .  $H(U_{49}) = \{H(U_{48}) \cup x \oplus x = 0\}$ .

Другий шестиелементний екваціональний кластер  $N_3$  складається з алгебр  $U_{34} = \langle A, \oplus, 1 \rangle$ ,  $U_{35} = \langle A, \oplus, 1, 0 \rangle$ ,  $U_{36} = \langle A, \oplus, \neg \rangle$ ,  $U_{37} = \langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ ,  $U_{38} = \langle A, \oplus, \neg, 1 \rangle$ ,  $U_{39} = \langle A, \oplus, \neg, 1, 0 \rangle$  класу  $M_6$ , який можемо зобразити у вигляді графа (рис. 5).

Наведемо повну систему тотожностей алгебри  $U_{34} = \langle A, \oplus, 1 \rangle$ :



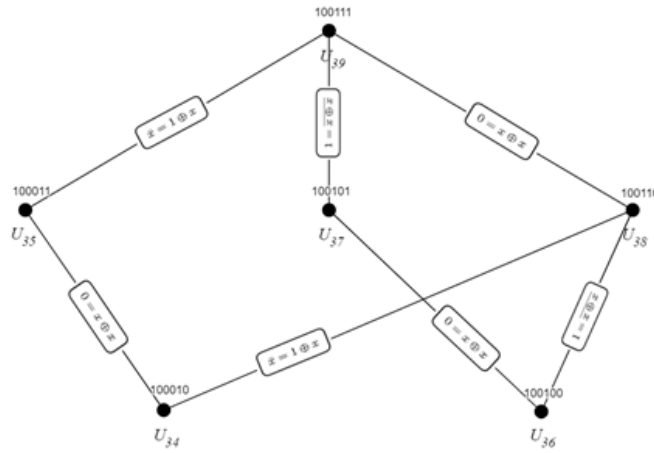


Рис. 5. Другий шестиелементний екваціональний кластер.

1.  $x \oplus y = y \oplus x$ .
2.  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ .
3.  $x \oplus x = y \oplus y = 1 \oplus 1$ .
4.  $x \oplus 1 \oplus 1 = x$ .

Тотожність 4 дозволяє отримувати формули, до складу яких входить не більше однієї одиниці. За допомогою тотожностей 1 і 2 проводимо лексикографічне впорядкування змінних. Довільну формулу можемо звести до вигляду  $1 \oplus 1$  або  $1 \oplus F$ , або  $F$ , причому формула  $F$  не містить однакових доданків. Легко показати, що формули  $F_1$  і  $F_2$  утворюють тотожність тоді і тільки тоді, коли в результаті застосування алгоритму лексикографічно впорядковані формули  $F'_1$  і  $F'_2$  співпадають.

29. Алгебра  $U_{34} = \langle A, \oplus, 1 \rangle$ .  $H(U_{34}) = \{1 - 4\}$ .
30. Алгебра  $U_{35} = \langle A, \oplus, 1, 0 \rangle$ .  $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), x \oplus x = 0\}$ .
31. Алгебра  $U_{38} = \langle A, \oplus, \neg, 1 \rangle$ .  $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), \bar{x} = x \oplus 1\}$ .
32. Алгебра  $U_{39} = \langle A, \oplus, \neg, 1, 0 \rangle$ .  $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), \bar{x} = x \oplus 1, x \oplus x = 0\}$ .
33. Алгебра  $U_{36} = \langle A, \oplus, \neg \rangle$ .  $H(U_{35}) = \{H(U_{34}), \bar{x} \oplus \bar{x} = 1, \bar{x} = x \oplus 1\}$ .
34. Алгебра  $U_{37} = \langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ .  $H(U_{36}) = \{H(U_{36}), x \oplus x = 0\}$ .

**Теорема 2.** *Функціонально неповні алгебри утворюють сімнадцять одноелементних екваціональних кластерів; один двоелементний, один трьохелементний і два шестиелементних екваціональних кластерів.*

**3. Висновки.** У даній роботі продовжено дослідження класу булевих алгебр, які включають шість операцій: константи 0 та 1, заперечення, кон'юнкцію, диз'юнкцію та суму за модулем два. Для класу даних алгебр введено поняття сигнатурних тотожностей і екваціонального кластера. За допомогою цих понять вдалося компактно описати всі повні системи тотожностей функціонально неповних булевих алгебр. Кожна із тридцяти чотирьох функціонально неповних алгебр входить в один із двадцяти одного кластера.

**Список використаної літератури**

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1935. Vol. 31. P. 433–454.

2. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2017. Вип. 1, № 30. С. 79–86. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86)
3. Мич І. А., Ніколенко В. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2017. Вип. 2, № 31. С. 123–128. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2\(31\).123-128](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128)
4. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 1, № 32. С. 124–129. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1\(32\).124-129](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129)
5. Мич І. А., Ніколенко В. В. Еквациональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2, № 33. С. 109–113. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113)
6. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В. Сигнатурна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2, № 33. С. 41–44. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).41-44](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44)
7. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В., Денис В. С. Еквациональні дослідження нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 2, № 37. С. 142–149. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149)

**Mych I. A., Nikolenko V. V., Vartsaba O. V.** Equational description of functionally incomplete Boolean algebras.

The paper has been considered a class of algebras with operations sum taken absolutely two, disjunction, conjunction, negation, constants 0 and 1. The concepts of signature identity, which can be used to change the signature of algebras, and the concept of an equational cluster of algebras are introduced. All functionally incomplete algebras form twenty-one clusters. The paper has found all complete systems of identities for thirty-four functionally incomplete algebras.

**Keywords:** universal Boolean algebra, equationality, complete system of identities, signature identity, equational cluster.

## References

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 31, 433–454.
2. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(30), 79–86. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86) [in Ukrainian].
3. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics*, 2(31), 123–128. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2\(31\).123-128](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128) [in Ukrainian].
4. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2018). Perfect disjunctive normal forms of algebra  $U_2$ . *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(32), 124–129. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1\(32\).124-129](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129) [in Ukrainian].
5. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(33), 109–113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113) [in Ukrainian].
6. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Lattice signature of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(33), 41–44. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).41-44](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44) [in Ukrainian].
7. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(37), 142–149. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149) [in Ukrainian].

Одержано 03.05.2023

УДК 519.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).203-209](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).203-209)**Д. П. Сабов<sup>1</sup>, М. М. Шаркаді<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
магістр

szabodora20@outlook.hu

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0176-8211>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат економічних наук, доцент

marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

## ПІДХОДИ ЩОДО КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КРИПТОВАЛЮТ

Криптовалюти еволюціонували з цифрової новинки до технологій на трильйон доларів, що можуть за кілька років викликати значний вплив на глобальну фінансову систему. Біткоїн та сотні інших криптовалют стають все більш популярними як інвестиційний інструмент, а також використовуються для оплати товарів та послуг, від програмного забезпечення до нерухомості [1].

В межах даної наукової роботи проведено кластеризацію криптовалют з використанням різних методів. Для проведення дослідження використано реальні дані із сервісу CryptoCompare. На першому етапі набір даних нормалізовано та стандартизовано. Далі проведено зменшення розмірності даних. На наступних етапах визначено оптимальну кількість кластерів та проведено поділ криптовалют на відповідні кластери. Для досягнення поставленої мети використано наступні методи: EDA, PCA, t-SNE, k-means, метод ліктя та силуетний метод.

**Ключові слова:** кластеризація, ефективність, ризик, аналіз даних, кореляція.

### Список умовних позначень:

P2P — Peer-to-peer;

ЄЦБ — Європейський центральний банк;

PoW — proof-of-work;

PoS — proof-of-stak;

NFT — Non fungible token (незамінні токени);

PCA — Principal component analysis (метод головних компонентів);

t-SNE — t-distributed stochastic neighbor embedding (Т-розподілене вкладення стохастичної близькості);

EDA — дослідницький аналіз даних;

K-means — метод  $k$ -середніх.

**1. Вступ.** Завдяки прогресу в криптографії з'явилась можливість безпечних комунікацій та електронних платежів через Інтернет. Використання кредитних карток є формою електронної готівки, яка покладається на довірену третю сторону для запобігання перевитратам або подвійним витратам. Протокол біткоїн вніс значний внесок у створення чистої однорангової (P2P) децентралізованої валюти, усунувши потребу в довірених третіх сторонах [3].

Наші національні валюти покладаються на центральні банки, які мають повноваження регулювати грошову масу. Ці центральні органи влади не завжди

є державними установами, як Федеральна резервна система. В останнє десятиліття Європейський центральний банк (ЄЦБ) взяв під контроль національні центральні банки Європейського Союзу. ЄЦБ заявляє про свою незалежність від національних урядів, щоб визначати монетарну політику. На жаль, роль ЄЦБ не є політично нейтральною, як це видно в нещодавній грецькій кризі. Обраний грецький уряд зазнав тиску з боку ЄЦБ, коли позбавив грецькі банки ліквідності. Той, хто володіє ключем від друкарського верстата, має величезну економічну та політичну владу [2].

Прихильники криптовалюти бачать її як демократичний інструмент, який усуває контроль центральних банків та фінансових установ над створенням та регулюванням грошей. У свою чергу, критики стверджують, що нова технологія є нерегульованою і може дати можливість злочинним та терористичним організаціям та неприйнятним режимам здійснювати фінансові операції. Вони також підкреслюють, що енергоємний майнінг криптовалют негативно впливає на навколишнє середовище [6].

Зараз фінансові регулятори реагують на швидкий розвиток криптовалют. Норми щодо їх використання значно відрізняються по всьому світу: деякі уряди вітають криптовалюту, а інші обмежують або забороняють їх використання. У своєму бажанні конкурувати з криптовалютними технологіями, центральні банки з усього світу, включаючи Федеральну резервну систему США, розглядають можливість створення власних цифрових валют.

Мотивація творців біткойн полягає у створенні форми «електронного золота», чия цілісність і не фальсифікованість покладаються на математичні властивості, а не на фізичні властивості золота або віру в центральні банки для фіатних грошей [5]. Як це взагалі можливо, коли цифровий токен можна копіювати точно, нескінченно, безкоштовно? Це було б як мати можливість легко виробляти золото, ставлячи під загрозу дефіцитність і властивості не фальсифікації, які роблять його цінним [4]. Але з іншого боку, його електронна природа робить його ідеальним для зберігання та транспортування. Основна перешкода полягає в тому, щоб запобігти можливості «подвійних витрат», тобто одночасного використання одного і того ж токена для різних платежів. Спочатку «децентралізація» та «електронність» здаються несумісними цілями. «Проблема подвійних витрат» є основною складністю створення децентралізованих електронних грошей.

**2. Основний результат.** У роботі пропонується процес підготовки набору даних криптовалют на основі кластеризації. Кластеризація є одним із найпоширеніших методів дослідницького аналізу даних, який використовується для отримання інформації щодо структури даних.

Для проведення дослідження було використано набір даних криптовалют на основі фінансових даних, який можна використовувати для машинного навчання та експериментів. Ці дані були зібрані з CryptoCompare, сервісу, що відстежує вартість та обсяги торгівлі різними криптовалютами на фінансових ринках. Розглядаються дані, які складаються з шести атрибутів (стовпців):

- 1) CoinName — назва монети (string).
- 2) Algorithm — тип алгоритму (string).
- 3) IsTrading — чи криптовалюта зараз торгується (boolean).
- 4) ProofType — тип доказу (string).

- 5) TotalCoinsMined — загальна кількість видобутих монет (int).
- 6) TotalCoinSupply — загальний запас монет (int).

У рамках даного дослідження були проведені операції з нормалізації та стандартизації набору даних. Для зменшення розміру набору даних були використані методи головних компонент та t-SNE. Окремим етапом дослідження є визначення оптимальної кількості кластерів у наборі даних криптовалют за допомогою підходів кластеризації.

Для досягнення мети використані наступні методи:

- EDA (англ. Exploratory Data Analysis) – це метод аналізу даних, який дозволяє зрозуміти їх структуру та відповідність загальним шаблонам. Цей метод може допомогти у прийнятті рішень про те, які типи моделей можуть бути прийнятними для подальшого моделювання даних.
- PCA (англ. Principal Component Analysis) є методом зменшення розмірності набору даних з метою спрощення та полегшення їхнього розуміння.
- t-SNE (англ. t-distributed Stochastic Neighbor Embedding) – використовується для візуалізації високовимірних наборів даних у вигляді дво- або тривимірних діаграм розсіювання, які легше інтерпретувати, ніж традиційні графіки. Це також корисно для візуалізації кластерів у більших наборах даних, оскільки дозволяє ідентифікувати викиди, не втрачаючи з поля зору загальні тенденції в наборі даних.
- K-means – це алгоритм машинного навчання для кластеризації даних, який створює  $k$  кластерів, групуючи схожі елементи разом. Алгоритм працює на основі розрахунку відстані між кожним елементом та центроїдом кластера, який визначається як середнє значення всіх елементів у кластері.
- Метод ліктя – це метод оцінки кількості кластерів у наборі даних, який працює шляхом аналізу відстаней між кожною точкою в кластері та його центроїдом – середньою точкою координат усіх його елементів. Після обчислення цих відстаней для кожного елемента в кожному кластері, метод ліктя визначає, де більшість точок припадає на лінію між їхніми центроїдами та середнім значенням їхнього кластера (або середнім, якщо є лише один), що дозволяє визначити оптимальну кількість кластерів для моделювання.
- Метод силуету – це метод оцінки якості кластеризації, який враховує схожість кожної точки з точками у своєму власному кластері порівняно з іншими кластерами. Використовуючи метрики подібності, такі як взаємна інформація або коефіцієнти кореляції, метод силуету визначає ступінь схожості кожної точки з її кластером та іншими кластерами. Це дозволяє оцінити якість кластеризації та вибрати найоптимальнішу кількість кластерів.

Після проведення процесу очищення даних, наступним кроком є зменшення їх розмірності. Для досягнення цієї мети використані два методи: метод аналізу головних компонент (PCA) та t-SNE.

Використання методу аналізу головних компонент дозволило виявити, що за умови використання 74 головних компонент, ми можемо зберегти більше 90% інформації, яка була присутня в оригінальному наборі даних. Це вказує на високу ефективність методу PCA при зменшенні розмірності даних.

Крім того, було використано метод t-SNE для подальшого зменшення розмірності даних до двох. Цей метод є потужним інструментом, що дозволяє візу-

алізувати високорозмірні дані у вигляді двовимірної картинки, зберігаючи при цьому інформацію про структуру та взаємозв'язки даних (рис. 1).

Аналіз матриці кореляції показав, що метод PCA продовжує використовувати значну кількість ознак (74), що змушує показувати значення кореляції для всіх змінних та їхніх скоригованих оцінок. Недоліком такого підходу є те, що надмірна кількість ознак може спричинити шум та ускладнити обробку даних. Для поліпшення роботи алгоритмів з даними, можливо застосувати додаткові методи зменшення розмірності, які дозволяють зменшити кількість ознак та зосередитися на найбільш значущих змінних.

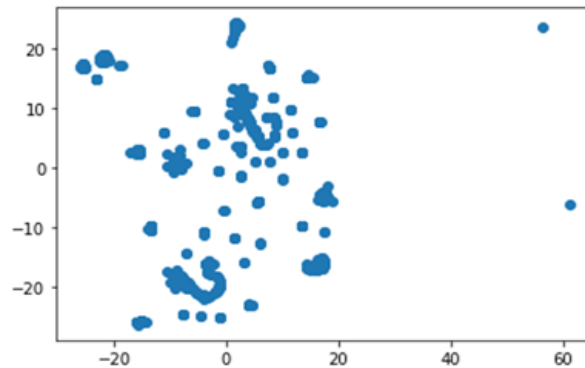


Рис. 1. Побудова результатів методу t-SNE.

Після успішного застосування методів зменшення розмірності, доцільно перейти до визначення оптимальної кількості кластерів за допомогою методу ліктя. На графіку (рис. 2) можна спостерігати точку (чітке ліктя), яка відокремлює область, де інерція змінюється помітно від іншої. У цьому випадку можливий поділ криптовалют на 7 або 8 кластерів. Однак, для точнішого визначення кількості кластерів, необхідно використовувати інші методи, такі як силуетна оцінка, який дозволяє знайти оптимальну кількість кластерів на основі даних, що допоможе у побудові більш точної класифікації криптовалют.

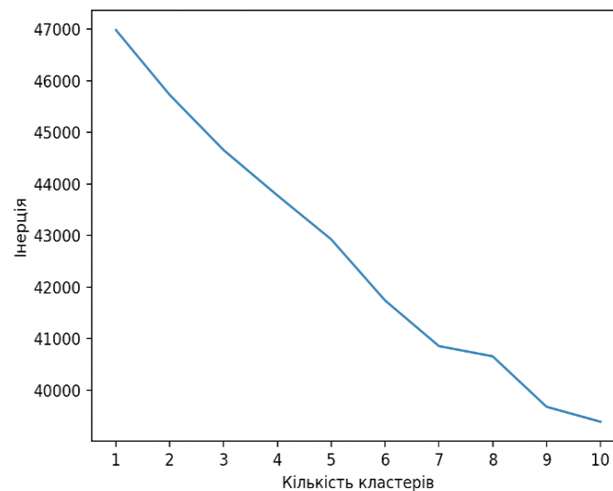


Рис. 2. Створення кривої ліктя.

У цьому дослідженні застосовано метод аналізу силуетів для визначення оптимальної кількості кластерів у кластеризації за допомогою методу  $k$ -середніх (рис. 3). З використанням оцінки Silhouette були проаналізовані кластери зі значеннями  $K = 2$ ,  $K = 3$ ,  $K = 4$  та  $K = 6$ . Після ретельного вивчення результатів, було прийнято рішення використовувати  $K = 6$  в подальшому аналізі даних.

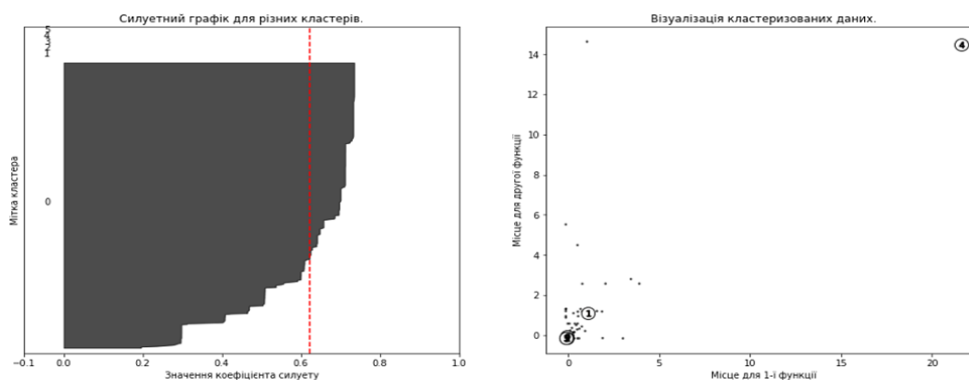


Рис. 3. Аналіз силуетів для кластеризації  $k$ -середніх на вибіркових даних з  $n\_clusters = 6$ .

Після прогнозування кластерів за допомогою методу  $k$ -середніх при  $k = 6$ , отримано чітко виділені шість груп (рис. 4). Варто зазначити, що головні компоненти, які створюються за методом головних компонент (PCA), розташовуються в порядку кількості варіацій, які вони охоплюють. Зокрема, перша головна компонента (PC1) фіксує найбільшу кількість варіацій, друга головна компонента (PC2) — другу за кількістю, і так далі. Кожна головна компонента надає певну інформацію про дані, і в методі головних компонент кількість компонент визначається кількістю характеристик у вихідних даних.

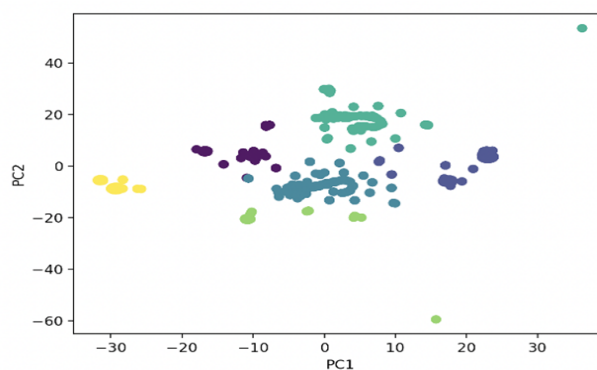


Рис. 4. Прогнозування кластерів при  $k = 6$ .

**3. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Результати даного дослідження вказують на можливість поділу криптовалют на шість кластерів. Для підтвердження зв'язку між результатами кластеризації та іншими описовими властивостями криптовалют (загальна пропозиція монет, загальна кількість видобутих монет) було проведено різні аналізи в рамках профілювання ринку криптовалют. Цей аналіз дозволив визначити, чи пов'язані пев-

ні характеристики з конкретними фінансовими показниками, встановленими за допомогою алгоритмів кластеризації. Крім того, було виявлено сильний зв'язок між технологічними характеристиками та поведінкою ринку, що відкрило нові можливості для майбутніх досліджень з метою уточнення їхніх висновків.

Це дослідження підтвердило, що дані мають фундаментальну структуру, яка була підтверджена після детального аналізу даних протягом тривалого періоду часу. Кожен алгоритм кластеризації зробив свій внесок у відкриття різних особливостей ринку криптовалют. Комбінування результатів кластеризації дозволило ефективно виявляти основні закономірності на ринку біткойнів. Сегменти кластерів, їх прототипи та опис надають зрозумілу зведену інформацію про загальні фінансові умови на ринку. Оцінюючи перетин кластерів, можна створити більш детальні профілі. Крім того, дослідники або інвестори можуть знайти окремі криптовалюти та встановити, до яких кластерів вони належать.

Дослідження, що здійснено з використанням методів кластеризації для класифікації криптовалют, відкрило нові можливості для аналізу ринку цифрових валют. Проте, наступні етапи дослідження повинні відповісти на багато важливих питань.

Однією з перспектив може стати дослідження взаємодії між криптовалютами та традиційними фінансовими інструментами. Крім того, можна провести дослідження зв'язку між кластеризацією криптовалют та їх технологічними характеристиками, такими як швидкість обробки транзакцій та розмір блоку. Під час таких досліджень можна виявити спільні зв'язки та визначити нові тенденції на ринку криптовалют, що сприятиме подальшому розвитку цього сектору.

### Список використаної літератури

1. Nakamoto S. Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. 2008. 9 p.
2. Pérez-Marco R. Bitcoin and decentralized trust protocols. *European Mathematical Society*. 2016. No. 100. P. 31–38. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1601.05254>
3. Grunspan C., Pérez-Marco R. Satoshi risk tables. *CoRR*. 2017. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.04421>
4. Giogladis E., Zeilberger D. A combinatorial-probabilistic analysis of bitcoin attacks. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2019. Vol. 25, No. 1. P. 56–63. DOI: <https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1555247>
5. Eyal I., Siler E. G. Majority is not enough: Bitcoin mining is vulnerable. *Communications of the ACM*. 2014. Vol. 61, No. 7. P. 95–102. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1311.0243>
6. Grunspan C, Pérez-Marco R. The mathematics of Bitcoin. *Newsletter of the European Mathematical Society*. 2020. Vol. 115. P. 31–37. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.00001>

### Sabov D. P., Sharkadi M. M. Approaches to clusterization of cryptocurrencies.

Cryptocurrencies have evolved from being a novel digital concept to a trillion-dollar technology that has the potential to significantly impact the global financial system in the coming years. Bitcoin and hundreds of other cryptocurrencies are gaining popularity as investment tools and are increasingly used to pay for goods and services ranging from software to real estate.

Within the context of this scientific work, cryptocurrencies were clustered using various methods. Real data from the CryptoCompare service was used for the study. At the first stage, the data set is normalized and standardized. Data dimensionality reduction was then performed. At the next stages, the optimal number of clusters was determined and cryptocurrencies were divided into the corresponding clusters. To achieve the goal, the following methods were used: EDA, PCA, t-SNE, k-means, the elbow method, and the



silhouette method.

**Keywords:** clustering, efficiency, risk, data analysis, correlation.

## References

1. Nakamoto, S. (2008). *Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system*.
2. Pérez-Marco, R. (2016). Bitcoin and decentralized trust protocols. *European Mathematical Society*, 100, 31–38. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1601.05254>
3. Grunspan, C., & Pérez-Marco, R. (2017). Satoshi risk tables. *CoRR*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.04421>
4. Giogladis, E., & Zeilberger, D. (2019). A combinatorial-probabilistic analysis of bitcoin attacks. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25(1), 56–63. <https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1555247>
5. Eyal, I., & Sirer, E. G. (2014). Majority is not enough: Bitcoin mining is vulnerable. *Communications of the ACM*, 61(7), 95–102. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1311.0243>
6. Grunspan, C, & Pérez-Marco, R. (2020). The mathematics of Bitcoin. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 115, 31–37. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.00001>

Одержано 31.04.2023

УДК 519.87:519.71:519.17

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).210-217](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).210-217)**Д. І. Симонов**

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України,  
молодший науковий співробітник, відділ мікропроцесорної техніки,  
[denys.symonov@gmail.com](mailto:denys.symonov@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6648-4736>

**КОНКУРЕНТНІ МОДЕЛІ РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРІВ  
ОБСЛУГОВУВАННЯ КЛІЄНТІВ**

Стаття присвячена розв'язанню задачі розміщення центрів обслуговування клієнтів з метою мінімізації виробничих, транспортних та інвестиційних витрат. Розглянуто два класи моделей: модель простої задачі розміщення та модель пошуку рішення на конкурентному ринку. Перший клас задач є NP-складним для пошуку точного рішення, який базується на припущенні, що витрати на відкриття об'єктів залежать від їхнього майбутнього розміщення, а інвестиційний бюджет не є обмеженням. Другий метод – це удосконалення першого класу задач шляхом надання можливості враховувати при пошуку оптимального рішення додаткові параметрів, що надає більш якісну інформацію для прийняття рішень на конкурентному ринку з урахуванням інтересів усіх зацікавлених сторін.

На відміну від наявних методів, для спрощення складності задач запропоновано еквівалентний метод розв'язання. Суть нового методу полягає в перетворенні задачі в псевдодулієву модель, що дає змогу розв'язувати задачу розміщення з поліноміальною трудомісткістю. Запропонований метод еквівалентного перетворення можна використовувати для розв'язання як задач першого класу, так і задач багатокритеріальної оптимізації розміщення.

Модель буде корисна для інвестиційних менеджерів та компаній, що планують вихід на нові ринки, у тому числі для легкої адаптації під введення нових критеріїв цільової функції та обмежень. Роботу еквівалентної моделі було продемонстровано та доведено на прикладі.

**Ключові слова:** проста задача про розміщення, задача про розміщення об'єктів на конкурентному ринку, псевдодулієва функція, межа вартості оптимального рішення задачі.

**1. Вступ.** Задача розміщення пов'язана з вирішенням головного питання – балансу потреб споживання та пропозиції. Організація, що надає послуги або продає товар, одночасно є споживачем іншого товару або послуг у ланцюзі постачання від виробника до споживача. Максимальне наближення до споживача може негативно впливати на можливість функціонування оптимального логістичного каналу, що негативно впливає на собівартість і, як результат, на конкурентоспроможність організації на ринку [1]. Особливістю задач розміщення є те, що прийняте рішення має довгострокові наслідки в мінливому середовищі, багато даних, що використовувалися в процесі прийняття рішення про обрання місця розміщення, будуть невизначеними в майбутньому, особливо ті, що стосуються попиту та уподобання клієнтів [2]. Більшість об'єктів залишаються там, де вони спочатку були розміщені.

Задача розміщення спрямована на пошук рішення щодо мінімізації витрат, пов'язаних з інвестиціями у відкриття об'єкту, логістики, виробничих витрат, спрощення доступності для клієнтів, зниження ризиків і конкуренції [3], наявність у регіоні кваліфікованого персоналу та інше. Метою задачі оптимізації є

пошук балансу між вимогами та очікуваннями як клієнтів [4], які мають різні інтереси залежно від сегментів [5], так й інвесторів. Незважаючи на важливість зазначених факторів, більшість стандартних методів пошуку оптимального місця розміщення їх не враховують при пошуку рішення. Це акцентує увагу на важливості побудови багатокритеріальних моделей пошуку рішення про розміщення, у які особа, що приймає рішення, може додати будь-які додаткові критерії.

Важливим аспектом задачі пошуку місця розміщення є моделювання взаємовідносин конкурентів, що функціонують у певній зоні обслуговування клієнтів, тобто передбачити поведінку лідера на ринку для захисту своїх інтересів від нових гравців; моделювання поведінки споживачів на імовірнісні дії постачальників-конкурентів [6].

**2. Основний результат.** Завдання цієї статті — запропонувати метод спрощення пошуку рішення для NP-складних задач розміщення [7]; запропонувати інструмент для застосування додаткових змінних у математичній моделі задачі про розміщення, що, на думку ОПР, мають можливість впливати на якість рішення про розміщення ЦОК; забезпечити простоту інтерпретації отриманих результатів користувачами без додаткових вимог до рівня їх компетенцій та зберігаючи надійність і точність аналізу за допомогою математичного моделювання.

### 3. Виклад основного матеріалу.

*Проста задача про розміщення об'єктів*

Припустимо, що особа, що приймає рішення (ОПР), приймає рішення про відкриття центрів обслуговування клієнтів (ЦОК) без врахування додаткової інформації про розміщення ЦОК конкурентів. ОПР припускає, що має можливість зробити максимально можливу конкурентну пропозицію для своїх майбутніх клієнтів, тобто [8]:

$$\min \left\{ p_{ij} \in P \mid p_{ij} = \int_0^{p^{\max}} c_{ij} \cdot f(D) dD, i \in I, j \in J \right\}, \quad (1)$$

де  $p_{ij}$  — ціна, за якою надаються послуги або товари клієнту; вона є конкурентною і влаштовує споживача;  $p^{\max}$  — максимальна ціна на певний товар у доступних для клієнта ЦОК;  $c_{ij}$  — собівартість товару або послуги;  $f(D)$  — функція попиту.

Враховуючи (1), можна зробити висновок, що для забезпечення конкурентного існування організація повинна мати коридор можливостей для обрання ціни  $c_{ij} \leq p_{ij} \leq p^{\max}$ . Задача вибору місця розміщення ЦОК полягає в пошуку множини  $S \subseteq I$ , яка задовольняє умови конкурентного існування, тобто  $S^* \in \arg \min \{f(S) \mid \emptyset \subset S \subseteq I\}$ . Цільову функцію вибору місця розміщення ЦОК можна записати так [9]:

$$f(S) = \min \left\{ \sum_{i \in S} d_i + \sum_{j \in J} \min \{c_{ij} \mid i \in S\} \right\}, \quad (2)$$

де  $d_i$  — розмір інвестицій, необхідних для відкриття ЦОК у певному місці розміщення  $x_i$ ,  $d_i \geq 0$ .

Задачу розміщення ЦОК можна переформулювати таким чином: «визначити таку підмножину вершин  $x_i \in X$  графа  $G = (X, A)$ , де  $A$  — множина дуг графа, для якої значення  $f(S)$  мінімальне, тобто задовольняє критерії оптимальності  $f(S)$ , визначені ОПП, тобто  $f(S) \leq f^{opt}(S)$ ».

Сформульована задача простого розміщення ЦОК є NP-складним завданням, тому доцільно розглянути її еквівалентний варіант, що спростить пошук рішення.

Нехай існує вектор  $\tilde{x}_i$ , для якого  $\{\tilde{x}_i \in X | \tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2 \leq \dots \leq \tilde{x}_n, i = \overline{1, n}\}$  є результатом сортування значень  $x_i$ . Якщо припустити існування бінарного вектору  $\tau_i \in \{0, 1\}$ ,  $\tau_i \neq \{1, \dots, 1\}$ , то можна отримати такі нерівності визначення максимального та мінімального значення  $\tilde{x}_i$  [10–11]:

$$\min_{i|\tau_i=0} \{\tilde{x}_i\} = \tilde{x}_0 + \sum_{l=1}^{n-1} (\tilde{x}_{l+1} - \tilde{x}_l) \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \tau_{i_l^j}, \quad 1 \leq l \leq n, \quad (3)$$

$$\max_{i|\tau_i=0} \{\tilde{x}_i\} = \tilde{x}_n - \sum_{l=1}^{n-1} (\tilde{x}_n - \tilde{x}_l) \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \tau_{i_l^j}, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (4)$$

Виконаємо ітераційне сортування рядків  $i_1^j, i_2^j, \dots, i_n^j$  стовпців матриці  $C = \{c_{ij}\}$  за умови, що отримаємо  $c_{i_1^j} \leq c_{i_2^j} \leq \dots \leq c_{i_n^j}$ .

Відповідно просту задачу розміщення ЦОК можна сформулювати так:

$$f(\tau) = \sum_{i \in I} f_i (1 - \tau_i) + \sum_{j \in J} \left( c_{i_1^j} + \sum_{l=1}^{n-1} \left( (c_{i_{l+1}^j} - c_{i_l^j}) \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \tau_{i_l^j} \right) \right), \quad (5)$$

за умов:

$$\tau_i^* = 0 \Leftrightarrow i \in S, \quad S \subseteq I, \quad (6)$$

$$\tau_i \in \{0, 1\}, \quad \tau \neq (1, \dots, 1), \quad i = \overline{1, n}, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (7)$$

**Приклад 1.** Інвестору потрібно обрати місце розміщення ЦОК з декількох ділянок  $x_i$ , що знаходяться в трьох районах міста  $f_i$  (рисунок 1).

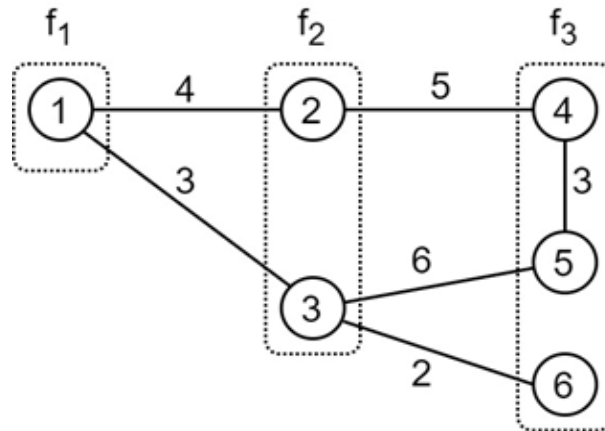


Рис. 1. Мапа імовірнісних місць розміщення ЦОК.

Обсяг необхідних інвестицій  $d_i = (30, 20, 20, 10, 10, 10)^T$ , очікувані витрати представлені матрицею витрат  $c_{ij}$ .

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 9 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 7 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 0 & 9 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 9 & 0 & 3 & 11 \\ 9 & 8 & 6 & 3 & 0 & 8 \\ 5 & 9 & 2 & 11 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Виконаємо сортування матриці з метою отримати такий порядок:  $c_{i_1^j} \leq c_{i_2^j} \leq \dots \leq c_{i_n^j}$ .

$$c_{ij}^{sort} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 8 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 11 & 9 & 11 \end{vmatrix}, \quad \tau_i^{sort} = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \\ \tau_3 & \tau_1 & \tau_6 & \tau_5 & \tau_4 & \tau_3 \\ \tau_2 & \tau_4 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_1 \\ \tau_6 & \tau_3 & \tau_5 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_5 \\ \tau_4 & \tau_5 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_6 & \tau_2 \\ \tau_5 & \tau_6 & \tau_4 & \tau_6 & \tau_1 & \tau_4 \end{vmatrix}.$$

Наведені матриці  $c_{ij}^{sort}$  і  $\tau_i^{sort}$  мають декілька варіантів, які необхідно розглянути для отримання оптимального рішення, бо  $c_{45}^{sort} = c_{55}^{sort}$  та  $c_{44}^{sort} = c_{54}^{sort}$ .

Розрахуємо значення матриці  $\{\tilde{x}_{ij}\}$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

Відповідно для прикладу, що розглядається, рівняння (5) буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} f(\tau) = & 30(1 - \tau_1) + 20(1 - \tau_2) + 20(1 - \tau_3) + 10(1 - \tau_4) + 10(1 - \tau_5) + 10(1 - \tau_6) + \\ & + 0 + 3 \cdot \tau_1 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 + 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 0 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_6 + \\ & + 0 + 4 \cdot \tau_2 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + \\ & + 0 + 2 \cdot \tau_3 + 1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + \\ & + 0 + 3 \cdot \tau_4 + 2 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 4 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 0 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + \\ & + 0 + 3 \cdot \tau_5 + 3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 0 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + \\ & + 0 + 2 \cdot \tau_6 + 3 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6. \end{aligned}$$

Якщо спростити вираз, то отримаємо:

$$\begin{aligned} f(\tau) = & 100 - 27\tau_1 - 16\tau_2 - 18\tau_3 - 7\tau_4 - 7\tau_5 - 8\tau_6 + \tau_1 \cdot \tau_2 + \tau_1 \cdot \tau_3 + \\ & + 5 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 4 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 + 6 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + \\ & + 4 \cdot \tau_2 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 + \\ & + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + 3 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 + \\ & + 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + 1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_4 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6. \end{aligned}$$

Як можна побачити з рівняння, нова задача має меншу розмірність, але є еквівалентною початковому завданню.

Проаналізуємо отримані результати з урахуванням таких умов: якщо  $f_i(\tau) \geq 0$ , то існує оптимальне рішення; якщо  $f_i(\tau) + c_i \leq 0$ , то оптимальне рішення не існує.

Зведемо результат розрахунку до таблиці 1.

Таблиця 1.

Зведена таблиця розрахунків прикладу 1.

$i$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
$f_i(\tau)$	-27	-16	-18	-7	-7	-8
$\sum c_i$	25	21	29	18	21	21
$f_i(\tau) + \sum c_i$	-2	5	11	11	14	13

Як можна побачити з наведеної таблиці, оптимальним рішенням розміщення ЦОК серед зазначених на рисунку 1 варіантів є розміщення в  $x_2$ .

Розглянемо член рівняння з найбільшим коефіцієнтом  $4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6$ . Припустимо, що  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_5 = \tau_6 = 1$  і  $\tau_3 = \tau_4 = 0$ . Значення верхньої межі вартості оптимального рішення задачі простого розміщення буде:

$$f^{UB}(\tau) = 100 - 27\tau_1 - 16\tau_2 - 7\tau_5 - 8\tau_6 + \tau_1 \cdot \tau_2 = 100 - 27 - 16 - 7 - 8 + 1 = 43.$$

Виконаємо оцінку задачі при  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_5 = \tau_6 = 1$  і  $\tau_4 = 0$ .

$$\begin{aligned} f^m(\tau) &= 100 - 27\tau_1 - 16\tau_2 - 18\tau_3 - 7\tau_5 - 8\tau_6 + \tau_1 \cdot \tau_2 + \tau_1 \cdot \tau_3 + 4 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + \\ &+ 1 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 + 6 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_6 + 2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 + \\ &+ 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \tau_5 \cdot \tau_6 = 100 - 27 - 16 - 18 - \\ &- 7 - 8 + 1 + 1 + 4 + 1 + 6 + 4 + 2 + 4 = 47. \end{aligned}$$

Як можна побачити з розрахунку  $f^m(\tau)$  і  $f^{UB}(\tau)$ , діапазон для оптимізації  $\varepsilon = f^m(\tau) - f^{UB}(\tau)$  знаходиться в межах 10 відсотків ( $\varepsilon = \frac{47-43}{43} = 9,3\%$ ), що є показником достатньо якісного рішення – обрати в ролі місця для розміщення ЦОК в  $x_2$ , але остаточне рішення приймає ОПР.

*Задача про розміщення об'єктів на конкурентному ринку*

Розглянемо задачу вибору місця розміщення ЦОК на конкурентному ринку. На момент прийняття рішення про відкриття ЦОК на ринку вже функціонує компанія-лідер  $E_1$ , яка відкрила власні ЦОК. Відповідно на ринку функціонує множина ЦОК  $E = \{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k\}$ , з якої клієнт обирає постачальника товарів або послуг. Розміщення ЦОК відбувається за принципом  $\{S_g \subseteq I | g = \overline{1, l}, S_g \cap S_g = \emptyset, \dots, S_{l-1} \cap S_l = \emptyset\}$ . Оскільки умовами задачі передбачено розподіл на «лідера» та «нового гравця», то доцільно зробити припущення про певну перевагу в бік лідера.

Визначимо змінні для:

$$\text{I лідера: } e_i^g = \begin{cases} 1, & O : I >: x_i \neq 0 \\ 0, & O : I >: x_i = 0 \end{cases}, e_i^1 \in E_1, i = \overline{1, n}, g = 1,$$

$$\text{II нового гравця: } e_i^g = \begin{cases} 1, & O : I >: x_i \neq 0 \\ 0, & O : I >: x_i = 0 \end{cases}, e_i^g \in E_g, i = \overline{1, n}, g = \overline{2, k},$$

III клієнта:  $y_j = \begin{cases} 1, & O : I >: y_j \rightarrow e_i^1 \\ 0, & O : I >: y_j \rightarrow e_i^g \end{cases}, j \in J.$

Пошук оптимального рішення базується на припущенні, що «оптимум» в задачі розміщення для лідера може тільки зростати, а в конкурентів тільки зменшуватися. Це припущення накладає ряд обмежень для ОПР, які можна усунути за допомогою введення додаткових змінних.

Цільову функцію діяльності кожної з організацій на конкурентному ринку можна записати у вигляді багатокритеріальної задачі:

$$\begin{cases} \max_{x_i \in S_g} \left\{ \sum_{i=1}^u p_{ij} \cdot y_j(x_i^g) \right\}, & i = \overline{1, u}, 1 \leq u \leq n, \\ \max_{x_i \in S_g} \left\{ \sum_{i=n-u}^n p_{ij} \cdot y_j(x_i^g) \right\}, & i = \overline{n-u, n}, \end{cases} \quad (8)$$

за умови:

$$\sum_{i=1}^n e_i^g \leq \sum_{i=1}^n x_i, \quad (9)$$

$$p_{ij} \geq c_{ij}, e_i^g \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J, x_i \geq 0. \quad (10)$$

Багатокритеріальну задачу розміщення можна спростити за допомогою псевдобулієвої функції (дивись задачу простого розміщення). Якщо  $y_j^* = \prod_{i \in I_j(x)} (1 - e_i^g)$ , то цільову функцію можна записати для лідера так:

$$\max \left\{ \sum_{j \in J} p_{ij} \cdot \prod_{i \in I_j(x)} (1 - e_i^g(x_i)) \right\}, \quad (11)$$

за умови,

$$\sum_{i=1}^n e_i^g \leq \sum_{i=1}^n x_i, \quad (12)$$

$$e_i^g \in \{0, 1\}, g = 1, i \in I, j \in J, x_i \geq 0, \quad (13)$$

для наступного гравця:

$$\max \left\{ \sum_{j \in J} p_{ij} \cdot \left( 1 - \prod_{i \in I_j(x)} (1 - e_i^1) \right) \right\}, \quad (14)$$

за умови,

$$\sum_{i=1}^n e_i^g \leq \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n e_i^1, \quad (15)$$

$$e_i^1 + e_i^2 \leq 1, \quad (16)$$

$$e_i^g \in \{0, 1\}, g = 2, i \in I, j \in J, x_i \geq 0, \quad (17)$$

Для наступних гравців розрахунок оптимального рішення розміщення є схожим на пошук рішення для «другого гравця», але в ролі обмежень додаються точки розміщення «лідера» та «другого гравця», тобто наступний гравець впорядковує множину місць імовірного розміщення ЦОК з урахуванням вільного простору.

**4. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У роботі розглянуто два класи моделей для вирішення проблеми розміщення ЦОК: модель SPLP та модель пошуку на конкурентному ринку. Перший клас задач є NP-складним для пошуку точного рішення; з метою його спрощення було запропоновано еквівалентний метод розв'язування. Другий метод надає можливість розв'язувати задачу розміщення на конкурентному ринку з урахуванням інтересів усіх зацікавлених сторін та вводити додаткові умови для моделювання, що сприяє можливості отримати більше інформації для ОПР.

У статті висунуто припущення, Симонов Д. І. що клієнт обирає постачальника товару або послуги, орієнтуючись на ціну, але в реальному конкурентному просторі доцільно розглядати не тільки ціну, а й цінність, що є багатовимірним фактором.

Новизна дослідження полягає у використанні псевдобулієвого методу перетворення задачі пошуку оптимального варіанту розміщення ЦОК в еквівалентну задачу меншого розміру. Еквівалентний метод дає змогу вирішувати задачу з поліноміальною трудомісткістю.

Необхідні подальші дослідження у цьому напрямку, спрямовані на застосування багатокритеріальних задач розміщення з використанням вагових коефіцієнтів критеріїв, що визначає ОПР або статистичний аналіз.

#### Список використаної літератури

1. Глушков В. М. Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС. Москва : «Статистика», 1975. 160 с.
2. Cabezas X., García S. A semi-Lagrangian relaxation heuristic algorithm for the simple plant location problem with order. *Journal of the Operational Research Society*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1080/01605682.2022.2150573>
3. Amar S. H., Abouabdellah A., Ouazzani Y. E. A distance reduction approach for simple plant location problem. *International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT)*, 15–18 November 2017. Rabat, Morocco, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1109/EITech.2017.8255295>
4. Pelegrín M. New variants of the simple plant location problem and applications. *Eur. J. Oper. Res.* 2022. No. 306. P. 1094–1108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.10.027>
5. Marín A., Pelegrín-García M. Adding incompatibilities to the Simple Plant Location Problem: Formulation, facets and computational experience. *Comput. Oper. Res.* 2019. No. 104. P. 174–190. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.12.018>
6. Galli L., Letchford A. N., Miller S. J. New valid inequalities and facets for the Simple Plant Location Problem. *Eur. J. Oper. Res.* 2018. No. 269. P. 824–833. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.009>
7. Galli L., Letchford A. N. A separation algorithm for the simple plant location problem. *Oper. Res. Lett.* 2021. No. 49. P. 610–615. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.orl.2021.06.011>
8. Симонов Д. І., Горбачук В. М. Метод пошуку рішень у динамічній моделі управління запасами за невизначеності. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2022. № 4. С. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.4>
9. Panos M. P., Ding-Zhu Du, Graham R. L. *Handbook of Combinatorial Optimization*. New York : Springer, 2013. 3409 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1>
10. Boros E., Hammer P. L. Pseudo-Boolean optimization. *Discret. Appl. Math.* 2002. No. 123. P. 155–225.
11. Benati S., Rizzi R., Tovey C.A. The complexity of power indexes with graph restricted coalitions. *Math. Soc. Sci.* 2015. No. 76. P. 53–63. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2015.04.001>

**Simonov D. I.** Competitive models of placement of customer service centers.



The article is devoted to solving the problem of placing customer service centers to minimize production, transport, and investment costs. Two classes of models are considered: a model of a simple placement problem and a model of finding a solution in a competitive market. The first class of problems is NP-hard for finding an exact solution, based on the assumption that the costs of establishing customer service centers depend on their future placement and that the investment budget is not a constraint. The second method is the improvement of the first class of problems by providing the opportunity to consider additional parameters when searching for the optimal solution, which provides better information for decision-making in the competitive market, considering the interests of all interested parties.

In contrast to the existing methods, to simplify the complexity of the problems, an equivalent solution method was proposed. The essence of the new method is to transform the problem into a pseudo-Boolean model, which allows for solving the placement problem with polynomial complexity. The proposed equivalent transformation method can be used both for solving problems of the first class and for solving problems of multi-criteria placement optimization.

The model will be useful for use by investment managers and companies planning to enter new markets, including due to easy adaptation to the introduction of new objective function criteria and restrictions. The work of the equivalent model was demonstrated and proved by a case study.

**Keywords:** the simple problem of placement, problem of placement of objects on a competitive market, pseudo-Boolean function, limit of the cost of the optimal solution of the problem.

## References

1. Hlushkov, V. M. (1975). *Макроекономыческые модели у прынтсыпу построеняя OHAS* [Macroeconomic models and principles of construction NAS]. Moscow: Statystyka [in Russian].
2. Cabezas, X., & García, S. (2022). A semi-Lagrangian relaxation heuristic algorithm for the simple plant location problem with order. *Journal of the Operational Research Society*. <https://doi.org/10.1080/01605682.2022.2150573>
3. Amar, S. H., Abouabdellah, A., & Ouazzani, Y. E. (2017). A distance reduction approach for simple plant location problem. *International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT)*. Rabat, Morocco. <https://doi.org/10.1109/EITech.2017.8255295>
4. Pelegrín, M. (2022). New variants of the simple plant location problem and applications. *Eur. J. Oper. Res.*, 306, 1094–1108. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.10.027>
5. Marín, A., & Pelegrín-García, M. (2019). Adding incompatibilities to the Simple Plant Location Problem: Formulation, facets and computational experience. *Comput. Oper. Res.*, 104, 174–190. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.12.018>
6. Galli, L., Letchford, A. N., & Miller, S. J. (2018). New valid inequalities and facets for the Simple Plant Location Problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 269, 824–833. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.009>
7. Galli, L., & Letchford, A. N. (2021). A separation algorithm for the simple plant location problem. *Oper. Res. Lett.*, 49, 610–615. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2021.06.011>
8. Symonov, D. I., & Gorbachuk, V. M. (2022). A method of finding solutions in a dynamic model of inventory management under uncertainty. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, 4, 31–39. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.4> [in Ukrainian].
9. Panos, M. Pardalos, Ding-Zhu, Du, & Graham, R. L. (2013). *Handbook of Combinatorial Optimization*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1>
10. Boros, E., & Hammer, P. L. (2002). Pseudo-Boolean optimization. *Discret. Appl. Math.*, 123, 155–225.
11. Benati, S., Rizzi, R., & Tovey, C. A. (2015). The complexity of power indexes with graph restricted coalitions. *Math. Soc. Sci.*, 76, 53–63. <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2015.04.001>

Одержано 28.04.2023

УДК 519.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).218-228](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).218-228)**О. Ю. Червак-Смерічко**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри економіки і підприємництва,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
[olesya.chervak@uzhnu.edu.ua](mailto:olesya.chervak@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6891-7307>

**ЛЕКСИКОГРАФІЧНА ЗГОРТКА БАГАТЬОХ КРИТЕРІЇВ ЯК  
НАДКРИТЕРІЙ ЇХ ПАРЕТІВСЬКОЇ ЗГОРТКИ**

В статті розглядається лексикографічна згортка багатьох критеріїв в один векторний критерій. Ця згортка одержана на основі умови попарної різної важливості критеріїв. Також розглянута відповідна лексикографічній згортці критеріїв задача відшукування альтернативи, оптимальної в ній, — задача лексикографічної оптимізації.

В статті доведено, що лексикографічна згортка багатьох критеріїв є надкритерієм паретівської згортки критеріїв. На основі цього доведення показано, що розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською згорткою зводиться до розв'язання задач лексикографічної оптимізації. Розглянуто також лексикографічне лінійне програмування і побудована двоїста задача, як задача лінійного програмування з векторними змінними і доведені теореми двоїстості. Описано варіант симплексного алгоритму стосовно задачі лексикографічного лінійного програмування.

**Ключові слова:** лексикографічна згортка багатьох критеріїв, векторний критерій, надкритерій паретівської згортки критеріїв.

**1. Вступ.** Розв'язання сучасних проблем в економіці неможливе без застосування моделей, які описують сприйняття людиною навколишньої дійсності. До таких моделей відносяться багатокритеріальні моделі, структура яких визначається набором найбільш суттєвих критеріїв та зв'язків між ними. Клас проблем, який описується такими моделями, є найбільш поширеним на практиці, а їх вирішення найбільш складними.

Властивостям і методам розв'язування багатокритеріальних задач оптимізації, лексикографічної оптимізації, присвячено багато наукових праць, число яких нараховує уже декілька сотень найменувань. Так в праці [1] розглядається метод знаходження оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічної багатокритеріальної оптимізації шляхом зведення її до однокритеріальної з скалярною цільовою функцією. Праця [2] присвячена розгляду симплексного алгоритму для багатокритеріальної лексикографічної задачі лінійного програмування та його удосконалення. [3] присвячена розробці та обґрунтуванню математичних моделей та обчислювальних методів розв'язання векторних задач дискретної оптимізації на комбінаторних множинах. В [4] встановлено умови існування розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою множиною допустимих розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини, конусу, що лексикографічно впорядковує її відносно критеріїв оптимізації. Саме в праці [5] введено поняття надкритерію будь-якого критерію і побудовано окремі надкритерії паретівської згортки критеріїв. Праця [6] присвячена розгляду моделей, в яких множина альтернатив, на якій необхідно здійснити вибір, впорядковується за визначеним порядком віддачі переваги. Якщо на множині альтернатив

задається багато порядків віддачі переваги, то вони згортаються в один єдиний порядок за допомогою додаткових умов підпорядкованості одних порядків іншим.

**2. Постановка задачі.** Метою дослідження є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю. Для цього, кожна з цих задач формулюється як задача з векторним критерієм, значення якого відповідно впорядковується, тобто на множині альтернатив визначається відповідний порядок віддачі переваги. Якщо цей порядок є повним порядком, то відповідна задача є задачею лексикографічної оптимізації, яка розв'язується відомими методами. Якщо порядок віддачі переваги є частковим порядком, то відповідна задача розв'язується шляхом заміни її однією або багатьма задачами, порядок віддачі переваги в яких є повним порядком на множині альтернатив, отже, кожна з них є або задачею лексикографічної оптимізації, або задачею скалярної оптимізації.

**3. Лексикографічна згортка багатьох критеріїв як надкритерій їх паретівської згортки.** Розглядаються критерії

$$c_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

Їх лексикографічна згортка базується на строгому ранжируванні. Нехай,  $j_1$ -ий критерій має найвищий ранг,  $j_2$ -ий критерій має нижчий за нього ранг, і т.д.,  $j_k$ -ий критерій має найнижчий ранг. Тоді, альтернатива  $\mathbf{x}$  вважається *кращою* за альтернативу  $\mathbf{y}$ , якщо і тільки якщо або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) > c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

$$c_{j_2}(\mathbf{x}) > c_{j_2}(\mathbf{y}),$$

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

$$c_{j_2}(\mathbf{x}) = c_{j_2}(\mathbf{y}),$$

$$c_{j_3}(\mathbf{x}) > c_{j_3}(\mathbf{y}),$$

або і т.д., або

$$c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y}), \quad j = j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$$

$$c_{j_k}(\mathbf{x}) > c_{j_k}(\mathbf{y}).$$

Альтернатива  $\mathbf{x}$  вважається *рівноцінною* альтернативі  $\mathbf{y}$ , якщо і тільки якщо  $c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Інакше, альтернатива  $\mathbf{x}$  *краща* за альтернативу  $\mathbf{y}$ , якщо і тільки якщо значення  $(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{x}))$  векторного критерію  $\mathbf{c} = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_k})$  *лексикографічно більше* за значення  $(c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{y}))$  цього векторного критерію, (в подальшому, відношення *лексикографічно більше* позначатимемо через  $>^L$ ). Альтернатива  $\mathbf{x}$  *рівноцінна* альтернативі  $\mathbf{y}$ , якщо і тільки якщо

$$(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{x})) = (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{y})).$$

Число всіх різних ранжирувань критеріїв (1) дорівнює числу перестановок індексів  $1, 2, \dots, k$ , яке рівне  $k!$ . Отже, з цих критеріїв можна утворити  $k!$  різних їх лексикографічних згорток. Паретівська згортка цих критеріїв єдина, бо вона не залежить від впорядкування цих критеріїв, так як її основою є попарна рівноважливість критеріїв. Основою ж лексикографічної згортки, в якій критерії ранжируються, є попарна їх різноважливість [6, с. 102–108].

Припустимо, що критерії (1) ранжировані в порядку зростання їх номерів:  $A_1$  має найвищий ранг,  $A_2$  має ранг, нижчий за ранг критерію  $A_1$ , і так далі,  $A_k$  має найнижчий ранг.

Отже, альтернатива  $\mathbf{x}$  є *кращою* за альтернативу  $\mathbf{y}$ , якщо і тільки якщо  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^L \mathbf{c}(\mathbf{y})$ , і альтернатива  $\mathbf{x}$  *рівноцінна* альтернативі  $\mathbf{y}$ , якщо і тільки якщо  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{y})$ .

Таким чином, лексикографічна згортка критеріїв (1) є критерієм, який визначається шкалою як множиною векторних оцінок  $R^k$ , впорядкованою за допомогою відношення *лексикографічно більше*, і векторною критеріальною функцією  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ .

Лексикографічне впорядкування в  $R^k$  є повним впорядкуванням, тому непокращуване значення векторного критерію  $\mathbf{A}$  єдине (назвемо його лексикографічним максимумом множини!) [6, с. 102–108].

Отже, якщо  $\mathbf{A}^*$  є лексикографічним максимумом векторної функції  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  на множині  $X$ , то множиною оптимальних альтернатив в цій лексикографічній згортці є підмножина допустимих альтернатив, у яких векторна функція  $\mathbf{A}$  досягає значення  $\mathbf{A}^*$ :  $X_* = \{\mathbf{x} \in X | \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^*\}$ .

Знаходження альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці критеріїв (1), зводиться до розв'язання  $k$  однокритеріальних задач оптимізації.

Покрокова схема цього зведення виглядає так:

*1-ий крок.* Розв'язується задача

$$\max c_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X. \quad (2)$$

Якщо задача (2) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці не існує.

Нехай  $A_1^*$  є максимумом критерію  $c_1(\mathbf{x})$  на:  $X_2 = \{\mathbf{x} \in X | c_1(\mathbf{x}) = c_1^*\}$ . Тоді переходимо до другого кроку.

*2-ий крок.* Розв'язується задача

$$\max c_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X_2. \quad (3)$$

Якщо задача (3) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці також не існує.

Нехай  $A_2^*$  є максимумом критерію  $A_2(\mathbf{x})$  на  $X_2$ :  $X_3 = \{\mathbf{x} \in X_2 | c_2(\mathbf{x}) = c_2^*\}$ . Тоді переходимо до третього кроку. І так далі.

*k-ий крок.* Розв'язується задача

$$\max c_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X_{k-1}. \quad (4)$$

Якщо задача (4) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці не існує.

Нехай  $A_k^*$  є максимумом критерію  $c_k(\mathbf{x})$  на  $X_{k-1}$ :  $X_k^* = \{\mathbf{x} \in X_{k-1} | c_k(\mathbf{x}) = c_k^*\}$ . Тоді  $X_k^*$  є множиною оптимальних альтернатив в лексикографічній згортці критеріїв (1).

Очевидно, описана схема, яку ми назвемо *схемою скаляризації*, дає можливість знаходити множину всіх альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці критеріїв (1).

Множини альтернатив, оптимальних в різних лексикографічних згортках критеріїв (1) є, взагалі кажучи, різними підмножинами допустимої множини  $X$  (число цих підмножин рівне  $k!$ ) [2, с. 1–3].

**Теорема 1.** *Нехай критерії (1) ранжировані в порядку  $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_k}$ . Тоді відповідна їм лексикографічна згортка на множині  $X$  є надкритерієм їх паретівської згортки на  $X$ .*

**Доведення.** Нехай  $\mathbf{x} \in X$  *краща*  $\mathbf{y} \in X$  в паретівській згортці критеріїв (1). Тоді виконуються нерівності

$$c_j(\mathbf{x}) \geq c_j(\mathbf{y}), \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{5}$$

і існує  $t$ ,  $1 \leq t \leq k$ , таке, що виконується строга нерівність

$$c_t(\mathbf{x}) > c_t(\mathbf{y}). \tag{6}$$

Нехай  $r$  ( $1 \leq r \leq k$ ) — найменший індекс, такий, що  $c_{j_r}(\mathbf{x}) > c_{j_r}(\mathbf{y})$ . Тоді, якщо  $r = 1$ , то

$$(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{x})) >^L (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{y})).$$

Якщо ж  $r > 1$ , то з нерівностей (5) випливає, що  $c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y})$ ,  $c_{j_2}(\mathbf{x}) = c_{j_2}(\mathbf{y})$ ,  $\dots$ ,  $c_{j_{r-1}}(\mathbf{x}) = c_{j_{r-1}}(\mathbf{y})$ .

Отже,  $(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{x})) >^L (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), \dots, c_{j_k}(\mathbf{y}))$  (існування номера  $r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , випливає з існування строгої нерівності (6)).

Таким чином, якщо  $\mathbf{x}$  *краща* за  $\mathbf{y}$  в паретівській згортці, то  $\mathbf{x}$  *краща* за  $\mathbf{y}$  і в будь-якій розглядуваній лексикографічній згортці критеріїв (1), звідки, за означенням надкритерію [5, с. 102–108], ця лексикографічна згортка є надкритерієм паретівської згортки критеріїв (1). Теорема доведена.

Ця теорема дає можливість зводити відшукання альтернатив, оптимальних в паретівській згортці критеріїв (1), до відшукання альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці цих критеріїв [5, с. 102–108].

**4. Лексикографічне лінійне програмування.** Задача відшукання альтернативи  $\mathbf{x}_* \in X$ , оптимальної в лексикографічній згортці  $L$  критеріїв (1), розв'язується за схемою скаляризації.

Коротко, цю задачу запишемо так:

$$\max^L c(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X. \tag{7}$$

Називатимемо її *задачею лексикографічної максимізації*, або задачею лексикографічної максимізації векторної функції  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (c_1(\mathbf{x}), c_2(\mathbf{x}), \dots, c_k(\mathbf{x}))$  на допустимій множині  $X$ .

Альтернатива  $\mathbf{x}_* \in X$ , така, що лексикографічна нерівність

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_*) \geq^L \mathbf{c}(\mathbf{x}), \tag{8}$$

виконується для всіх  $\mathbf{x} \in X$ , називається оптимальним розв'язком цієї задачі, а значення  $\mathbf{A}_* = \mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$  – лексикографічним максимумом функції на  $X$ .

Аналогічно, формулюється й задача *лексикографічної мінімізації* векторної функції  $\mathbf{A}$  на  $X$ , яку, коротко, запишемо так:

$$\min^L \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X. \quad (9)$$

Очевидно, що задача (9) зводиться до задачі лексикографічної максимізації векторної функції  $-\mathbf{A}(\mathbf{x})$  на  $X$ , так як лексикографічна нерівність  $\mathbf{c}(\mathbf{x}_*) \leq^L \mathbf{c}(\mathbf{x})$  рівносильна лексикографічній нерівності  $-\mathbf{c}(\mathbf{x}_*) \geq^L -\mathbf{c}(\mathbf{x})$ . Тому, достатньо розглядати тільки задачу (7).

Схема скаляризації, викладена вище є загальним способом розв'язання цієї задачі; вона базується на методах розв'язання однокритеріальних задач максимізації. Але, якщо критерії (1), які складають векторну функцію  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , є лінійними функціями на  $\mathbb{R}^n$ , а допустима множина  $X$  задається за допомогою лінійних обмежень, то маємо задачу *лексикографічного лінійного програмування*, частинним випадком якої є звичайна задача лінійного програмування як задача однокритеріальної максимізації лінійної функції на допустимій множині  $X$ , заданої системою лінійних обмежень [3, с. 192–203].

Нехай, лінійні критеріальні функції (1) мають вигляд:

$$c_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (10)$$

допустима множина  $X \subset \mathbb{R}^n$  задається за допомогою лінійних обмежень-рівностей

$$\sum_{j=1}^n a_{qj}x_j = a_{q0}, \quad q = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

і умов невід'ємності змінних  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Векторну лінійну функцію, складену з критеріїв (10), запишемо у формі:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j x_j, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \dots \\ c_{kj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

— задані вектори.

Систему лінійних обмежень (??) запишемо у вигляді:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{a}_0, \quad (14)$$

де

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

— задані вектори, а умову (12) у вигляді:

$$\mathbf{x} \geq^P \mathbf{0}, \quad (15)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  — вектор невідомих, а  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  — нульовий вектор.

Отже, розглядаємо задачу лексикографічної максимізації векторної функції (13) на множині  $X \subset \mathbb{R}^n$ , яка задається обмеженнями (14) і (15) [3, с. 192–203].

Легко показати, якщо функція (13) досягає на  $X$  лексикографічного максимуму, то цей максимум досягається хоча б в одній крайній точці опуклої багатогранної множини  $X$ , або, інакше, цей максимум досягається хоча б в одному базисному допустимому розв'язку системи лінійних рівнянь (14). (Базисним допустимим розв'язком цієї системи, що визначається будь-якою її канонічною формою, назвемо такий розв'язок, у якого всі невідомі приймають невід'ємні значення, а невідомі, які є незалежними в даній канонічній формі, приймають нульові значення) [2, с. 1–3].

Таким чином, вище наведену задачу можна розв'язувати за допомогою напрямленого перебору базисних допустимих розв'язків системи рівнянь (14), так як локальний лексикографічний максимум векторної лінійної функції на опуклій багатогранній множині є її глобальним її лексикографічним максимумом на цій множині.

Отже, розв'язання цієї задачі може бути здійснене за допомогою схеми симплексного алгоритму. Опишемо зміст загального кроку цієї схеми.

Припустимо, що система рівнянь (14) записана в еквівалентній їй допустимій канонічній формі:

$$\sum_{q=1}^m \mathbf{e}_q x_q + \sum_{q=m+1}^n \mathbf{b}_q x_q = \mathbf{b}_0, \quad (16)$$

де  $\mathbf{e}_q \in \mathbb{R}^m$ ,  $q = 1, 2, \dots, m$ , — одиничний вектор при базисній змінній  $x_q$ , у якого  $q$ -ва координата рівна 1, а всі інші координати рівні 0;

$$\mathbf{b}_q = \begin{pmatrix} b_{1q} \\ b_{2q} \\ \dots \\ b_{mq} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad q = m + 1, \dots, n,$$

— вектор коефіцієнтів при небазисній змінній  $x_q$ ;

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \dots \\ b_{m0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

— вектор, складений з правих частин.

Отже, точка  $\mathbf{x}_0 = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  зображає базисний допустимий розв'язок системи рівнянь (14), який визначається цією канонічною формою (16).

Користуючись рівністю (16) виразимо базисні змінні  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , через небазисні змінні  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ , і підставимо ці вирази замість цих базисних змінних у функцію (13). В результаті одержимо

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum_{q=m+1}^n \mathbf{d}_q x_q + \mathbf{d}_0, \quad (17)$$

де

$$\mathbf{d}_q = \mathbf{c}_q - \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_j b_{jq}, \quad q = m+1, \dots, n.$$

Очевидно,  $\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$ ,  $q = 1, 2, \dots, m$ . Рівності (16) і (17), разом, складають допустиму канонічну форму розглядуваної задачі лексикографічної максимізації.  $\mathbf{d}_0$  — значення векторної функції  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  в розглядуваному базисному розв'язку.

Легко показати, якщо виконуються лексикографічні нерівності

$$\mathbf{d}_q \leq^L \mathbf{0}, \quad q = m+1, m+2, \dots, n, \quad (18)$$

то цей базисний допустимий розв'язок  $\mathbf{x}_0$  є розв'язком розглядуваної задачі, тобто оптимальною альтернативою, а  $\mathbf{d}_0$  — лексикографічним максимумом векторної функції  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  на допустимій множині  $X$  [3, с. 192–203].

Нехай існує індекс  $l$ ,  $m+1 \leq l \leq n$ , такий, що  $\mathbf{d}_l >^L \mathbf{0}$ . Тоді, якщо  $\mathbf{b}_l \leq^P \mathbf{0}$ , то, очевидно, задача оптимального розв'язку не має, так як векторна функція  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  на  $X$  лексикографічно необмежена зверху. В супротивному, тобто, якщо  $\mathbf{b}_l$  містить хоча б одну додатну компоненту, здійснюється перехід до наступної допустимої канонічної форми (аналогічно, як це робиться в звичайному симплексному алгоритмі), яка визначає наступний допустимий базисний розв'язок. Продовжуючи цей процес, або знайдеться оптимальний допустимий базисний розв'язок, який є шуканою оптимальною альтернативою, або встановлюється лексикографічна необмеженість зверху векторної функції  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  на  $X$  [2, с. 1–3].

Якщо виконуються лексикографічні нерівності

$$\mathbf{c}_j - \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i b_{ij} \leq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

то базисний розв'язок  $\mathbf{x}_0$  є оптимальним розв'язком задачі (13)–(15), тобто оптимальним розв'язком задачі лексикографічної максимізації лінійної векторної функції (13), при умовах (14) і (15).

Задачу лексикографічної мінімізації лінійної векторної функції

$$\sum_{i=1}^m a_{i0} \mathbf{y}_i, \quad (20)$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_i \geq^L \mathbf{c}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$



де  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^k, i = 1, 2, \dots, m$ , — невідомі векторні змінні, назвемо двоїстою задачею до задачі (13)–(15). Легко показати, що для будь-яких допустимих розв’язків прямої задачі (13)–(15) і двоїстої задачі (20) і (21) виконується лексикографічна нерівність

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j x_j \leq^L \sum_{i=1}^m a_{i0} \mathbf{y}_i. \quad (22)$$

**Теорема 2.** *Якщо пряма задача (13)–(15) має оптимальний розв’язок, то і двоїста задача (20), (21) має оптимальний розв’язок, причому, оптимальні значення їх векторних цільових функцій співпадають.*

*Доведення.* Нехай пряма задача розв’язана симплексним методом;

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i x_i + \sum_{i=m+1}^n \mathbf{b}_i x_i = \mathbf{b}_0 \quad (23)$$

— знайдена оптимальна канонічна форма, де  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$  — одиничний вектор при базисній змінній  $x_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $i$ -ва компонента якого дорівнює 1, а всі інші компоненти дорівнюють 0;  $\mathbf{x}_0 = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$  — відповідний оптимальний базисний розв’язок задачі, який визначається канонічною формою (23). Позначимо через  $B$  матрицю порядку  $m \times m$ , складену з векторів  $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, \dots, m$ , при базисних змінних в системі рівнянь (14). Ці вектори утворюють базис в просторі  $\mathbb{R}^m$ . Тоді, виконуються лексикографічні нерівності (19). Але, так як  $\mathbf{b}_j = B^{-1} \mathbf{a}_j$ , то  $\sum_{i=1}^m \mathbf{c}_j b_{ij} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m) B^{-1} \mathbf{a}_j$  як добутку матриці, складеної з вектор-стовпців  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ , на вектор-стовпець  $B^{-1} \mathbf{a}_j$ . Отже, лексикографічні нерівності (1) запишуться так:

$$\mathbf{c}_j - (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m) B^{-1} \mathbf{a}_j \leq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Позначимо  $(\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{m0}) = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m) B^{-1}$ , де  $\mathbf{y}_{i0} \in \mathbb{R}^k$ . Тоді, нерівності (24) запишуться так:

$$\mathbf{c}_j - (\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{m0}) \mathbf{a}_j = \mathbf{c}_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_{i0} \leq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_{i0} \geq^L \mathbf{c}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

звідки  $(\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{m0}) \in$  допустимим розв’язком двоїстої задачі (20), (21).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{i0} \mathbf{y}_{i0} &= (\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{m0}) \mathbf{a}_0 = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m) B^{-1} \mathbf{a}_0 = \\ &= (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m) \mathbf{b}_0 = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j x_{j0}, \end{aligned}$$

тобто значення векторної функції (20) в допустимому розв’язку двоїстої задачі  $(\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{m0})$  дорівнює оптимальному значенню векторної функції (14)

прямої задачі. Так як, за умовою (22), повинна виконуватися лексикографічна нерівність

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j x_{j0} \leq^L \sum_{i=1}^m a_{i0} \mathbf{y}_{i0},$$

то  $\sum_{i=1}^m a_{i0} \mathbf{y}_{i0}$  є лексикографічним мінімумом функції (20), при умовах (21), тобто  $(\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{m0})$  є оптимальним розв'язком задачі (20), (21). Теорема доведена.

Двоїста задача (20) і (21) є задачею лінійного програмування відносно векторних змінних  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Ввівши допоміжні лексикографічно невід'ємні векторні змінні  $\mathbf{y}_{m+j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , запишемо цю задачу так: лексикографічно мінімізувати векторну функцію

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_{i0} \mathbf{y}_i, \quad (25)$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{m+j} = \mathbf{c}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

$$\mathbf{y}_{m+j} \geq^L \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

де  $a_{i0} = 0$ ,  $i = m+1, \dots, m+n$ .

Ця задача також розв'язується симплексним методом. Припустимо, що система лінійних рівнянь (26) з векторними змінними  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, m+n$ , записана в еквівалентній допустимій канонічній формі

$$\mathbf{y}_j + \sum_{i=n+1}^{m+n} d_{ij} \mathbf{y}_i = \mathbf{g}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

де  $\mathbf{y}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  — базисні векторні змінні, а  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = n+1, \dots, n+m$  — небазисні векторні змінні;

$$(\mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_{20}, \dots, \mathbf{y}_{n+m,0}) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$$

— відповідний базисний допустимий розв'язок, який визначається канонічною формою (28). Легко показати, якщо виконуються умови

$$a_{i0} - \sum_{j=1}^n a_{j0} d_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (29)$$

$$a_{i0} - \sum_{j=1}^n a_{j0} d_{ji} \geq 0, \quad i = m+1, \dots, m+n, \quad (30)$$

то цей базисний допустимий розв'язок є оптимальним розв'язком задачі (25)–(27). Якщо задача (25)–(27) має оптимальний розв'язок, то і задача (14)–(15) має оптимальний розв'язок, причому, оптимальні значення їх векторних цільових функцій співпадають. Якщо ці дві задачі допустимі, то кожна з них має оптимальний розв'язок [2, с. 1–3].

**5. Висновки.** Побудовано нові моделі і запропоновані методи розв'язання задач, до яких зводиться аналіз цих моделей. Вони, в сукупності, вирішують як з теоретичної, так і з практичної точки зору, важливі проблеми багатокритеріального вибору, або, інакше, важливі проблеми теорії прийняття рішень за багатьма критеріями. Результати дають можливість формалізувати процеси прийняття рішень в умовах, коли альтернативи оцінюються за багатьма критеріями, будь-яка пара з яких або є рівноважливою, або є різноважливою при оцінці альтернатив. Сформульована лексикографічна задача багатокритеріальної оптимізації, критерієм в якій є векторна згортка багатьох критеріїв, за умови, що множина цих критеріїв розбита на попарно різноважливі критерії. Якщо  $X_*(L)$  — множина оптимальних альтернатив в лексикографічній згортці багатьох критеріїв,  $X_*(P)$  — множина оптимальних альтернатив в їх паретівській згортці, то  $X_*(L) \subset X_*(P)$ . Показано, що багатокритеріальні задачі оптимізації, критеріями в яких є згортки, за умовами рівної важливості або різної важливості, або змішаної важливості критеріїв, зводяться до задач скалярної оптимізації або до задач векторної лексикографічної оптимізації. Для лінійних задач лексикографічної оптимізації запропоновано варіант симплексного методу; побудована двоїста задача (як задача з векторними змінними) і доведені відповідні теореми двоїстості.

#### Список використаної літератури

1. Брила А. Ю., Гренджа В. І. Деякі задачі лексикографічної оптимізації альтернативними критеріями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2012. Вип. 23, № 1. С. 28–31.
2. Гренджа В. І., Червак О. Ю. Узагальнення симплексного алгоритму для багатокритеріальної лексикографічної задачі лінійного програмування. Збірник наукових праць з обчислювальної математики, м. Ужгород, 1997. Ужгород, 1997. С. 1–3.
3. Семенова Н. В., Колечкіна Л. М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання: Монографія. Київ : Наукова думка, 2009. 266 с.
4. Семенова Н. В., Ломага М. М., Семенов В. В. Існування розв'язків та метод розв'язання лексикографічної задачі опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв. Доповіді Національної академії наук України, грудень 2020. с. 19–27. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovid2020.12.019>
5. Червак О. Ю. Оптимізація виробничої програми підприємства. Надкритерії паретівської згортки в багатокритеріальній оптимізації. Соціально-економічний та технічний розвиток підприємств: проблеми, рішення, оцінка ефективності. Колективна монографія. Дніпропетровськ : Пороги, 2016. с. 413–426
6. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород : Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.

**Chervak-Smerichko O. Yu.** Lexicographic convolution of multiple criteria as a supercriterion of their paretian convolution.

This article focuses on research, constructing new models, and developing methods to solve problems that involve analyzing these models. They tackle essential concerns regarding multiple criteria selection, considering both theoretical and practical aspects. Introducing a concept known as the super criterion has improved the selection process. This concept evaluates alternatives based on a shared set of options. Studies have demonstrated that any substitute that satisfies the super criterion is also the best choice based on the initial criteria for the identical range of alternatives. The choice is a significant aspect of purposeful activity. Almost every complex practical problem of choice is multi-criteria. Typically, it's challenging to find an alternative that meets all the criteria. Combining

various criteria into a single one with agreed-upon conditions by all parties involved is a practical approach to simplify the process. Various conditions lead to different criteria convolutions, resulting in distinct challenges for multiple criteria optimization. A commonly used method for evaluating alternatives is the Paretian convolution, which involves pairwise balancing all the criteria. One way to combine multiple criteria into a single vector is by assigning pairwise different levels of importance to each of them. The type of convolution used in this context is called a lexicographic convolution.

It involves solving a lexicographic optimization problem to determine the best possible alternative. Note that the criterion order given by this convolution is a complete order on the set of options. The article considers the lexicographic convolution of multiple criteria into one vector criterion. Studies have demonstrated that multiple criteria combination results in a superior criterion compared to relying solely on the Paretian convolution. This proof indicates that solving the problem of multi-criteria selection through Paretian convolution can be simplified by solving lexicographic optimization issues instead. In optimization, one area of study is lexicographic linear programming, which involves creating a dual problem that uses vector variables and is demonstrated as a linear programming problem. Proofs related to duality have been presented within this framework. Furthermore, this article explains a version of the simplex algorithm used for lexicographic linear programming.

**Keywords:** lexicographic convolution of multiple criteria, vector criterion, supercriterion of the Paretian convolution of criteria.

## References

1. Bryla, A. Yu., & Grenzha, V. I. (2012). Some problems of lexicographic optimization by alternative criteria. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and computer science*, 23(1), 28–31. [in Ukrainian].
2. Grenja, V. I., & Chervak, O. Yu. (1997). Generalization of the simplex algorithm for the multi-criteria lexicographic problem of linear programming. Collection of research papers on computational mathematics. Uzhgorod [in Ukrainian].
3. Semenova, N. V., & Kolechkina, L. M. (2009). *Vector problems of discrete optimization on combinatorial sets: research and solution methods: Monograph*. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
4. Semenova, N. V., Lomaga, M. M., & Semenov, V. V. (2020). The existence of solutions and the method of solving the lexicographic problem of convex optimization with linear criteria functions. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.019> [in Ukrainian].
5. Chervak, O. Yu. (2016). *Optimization of the production program of the enterprise. Supercriteria of the Paretian convolution in multicriteria optimization. Socio-economic and technical development of enterprises: problems, solutions, evaluation of efficiency. Collective monograph*. Dnipropetrovsk: Porogy [in Ukrainian].
6. Chervak, Yu. Yu. (2002). *Optimization. An unimproved choice*. Uzhgorod: Uzhgorod National University [in Ukrainian].

Одержано 01.05.2023

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.  
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).  
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

## Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

## References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moscow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosovannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97.* (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

## INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.  
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

### References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatel'svo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

#### Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.



**Збірник наукових праць**

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

**серія**

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Том 42 №1*

**2023**

**РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),  
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний  
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,  
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, Н. Е. Кондрук, І. І. Король, В. В. Маринець,  
К. В. Маринець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса, В. В. Поліщук, О. К. Рейтій,  
А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська, В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак,  
М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14,  
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського  
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua)