DOI: https://doi.org/10.24144/2409-6857. 2023.1(61).133-141
УДК 519.6

Червак-Смерічко О.Ю.

ОДИН ІЗ СПОСОБІВ ВІДШУКАННЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНИХ АЛЬТЕРНАТИВ: ПОБУДОВА НАДКРИТЕРІЇВ ПАРЕТІВСЬКОЇ ЗГОРТКИ БАГАТЬОХ КРИТЕРІЇВ

Розглядається паретівська згортка багатьох критеріїв, в якій всі критерії вважаються попарно рівноважливими при оцінці альтернатив. Вона, як векторний критерій, задає на множині альтернатив єдиний частковий порядок віддачі переваги однієї альтернативи перед іншою. Паретівська задача багатокритеріальної оптимізації має багато непорівнянних оптимальних альтернатив, відшукання яких потребує розробки спеціальних методів. Так досліджується один із підходів до знаходження цих альтернатив. Це заміна паретівської задачі однією або багатьма задачами, оптимальні альтернативи в яких є оптимальними альтернативами і в паретівській задачі. З цією метою вводяться поняття надкритерію та підкритерію будь-якого критерію. Доводиться, що будь-яка альтернатива, оптимальна за будь-яким надкритерієм даного критерію є й оптимальною альтернативою за даним критерієм на множині допустимих альтернатив. Для паретівської згортки багатьох критеріїв пропонується загальний спосіб побудови її скалярного надкритерію, частинним випадком якого є скалярний надкритерій як додатна лінійна комбінація критеріїв. Доводиться, що лексикографічна і парето лексикографічна згортка багатьох критеріїв є надкритерієм їх паретівської згортки. Отже, розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською згорткою зводиться до розв'язання задач скалярної або лексикографічної оптимізації.

Ключові слова надкритерій критерію, підкритерій критерію, паретівська згортка критеріїв, парето-лексикографічна згортка критеріїв.

Постановка проблеми . Однією з основних операцій цілеспрямованої діяльності є вибір. Кожна складна практична задача вибору є багатокритеріальною. Але, так як альтернатива, оптимальна за кожним з багатьох критеріїв, існує дуже рідко, то ці критерії, як правило, *згортаються* в один єдиний критерій за допомогою тих чи інших умов узгодження. Різні такі умови визначають й різні згортки критеріїв, отже, і різні задачі багатокритеріальної оптимізації. Дуже часто використовуються *скалярні* й *векторні* згортки багатьох критеріїв. Серед *скалярних згорток* широко розповсюджена лінійна згортка як додатна лінійна комбінація критеріїв, коефіцієнти якої характеризують відносну важливість кожного з них. В цьому випадку багатокритеріальна задача вибору зводиться до *однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією*. Однією з найбільш поширених *векторних згорток* критеріїв є *паретівська згортка*, в якій всі критерії вважаються попарно рівноважливими при оцінці альтернатив. Паретівська згортка багатьох критеріїв, як векторний критерій, задає на множині альтернатив єдиний порядок (в розумінні *краще, гірше, рівноцінно*), який є *згорткою* порядків, заданих на ній його компонентами. Цей порядок є частковим порядком. У зв'язку з цим паретівська задача багатокритеріальної оптимізації має багато непорівнянних оптимальних альтернатив, відшукання яких потребує розробки спеціальних методів. Одним із підходів до знаходження цих альтернатив є заміна паретівської задачі однією або багатьма іншими задачами, оптимальні альтернативи в яких є оптимальними альтернативами і в паретівській задачі.

Згортка багатьох критеріїв в один векторний критерій може бути одержана і на основі умови попарної різної важливості критеріїв. Цю згортку називають лексикографічною згорткою, а відповідну задачу відшукання альтернативи, оптимальної в ній, – задачею лексикографічної оптимізації. Критеріальний порядок, який задається цією згорткою є повним порядком на множині альтернатив.

Формулювання, розробка та дослідження методів заміни будь-якої задачі паретівської багатокритеріальної оптимізації, для розв'язання якої не існує формальних методів, однією або

©**Червак-Смерічко О.Ю.**,кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економіки і підприємництва,ДВНЗ «Ужгородський національний університет», e-mail: olesyachervak@gmail.com,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6891-7307, тел.:095-496-51-23

багатьма простішими задачами оптимізації, такими, щоб їх оптимальні розв'язки були б оптимальними розв'язками і для даної задачі є актуальною проблемою і потребує додаткового розгляду та дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Властивостям і методам розв'язування паретівських багатокритеріальних задач оптимізації присв'ячено багато наукових праць, число яких нараховує уже декілька сотень найменувань.

Так, в роботі [1] розглянуто нові підходи до побудови економіко-математичної моделі багатокритеріальної оптимізації виробничої програми підприємства і методів знаходження її найкращого рішення. Так, при спробі вирішити багатокритеріальну задачу виробничого планування виявляється, що її цільова функція є вектором і, завдання зводиться до векторної (перетівської) оптимізації номенклатурії асортименту майбутньої виробничої програми.

В[2] розглядаються моделі, в яких множина альтернатив, на якій необхідно здійснити вибір, впорядковується за визначеним порядком віддачі переваги В[3]. В[4] розглядаються питання вибору рішень за наявності кількох числових критеріїв. Викладається оригінальний загальний підхід до вирішення багатокритеріальних завдань за наявності кількісної інформації щодо переваги особи, яка приймає рішення (ОПР). Вважаються виконаними чотири аксіоми «розумного» вибору.

Робота [5] присвячена оптимумам (по) Парето, що грають важливу роль при аналізі багатокритеріальних завдань прийняття рішень. У ній розбирається змістовний зміст, теоретичне та практичне значення поняття оптимального щодо Парето (ефективного) рішення, докладно розглядаються різноманітні умови оптимальності, досліджуються структура та властивості множини Парето, викладається теорія двоїстості багатокритеріальних завдань. Коротко обговорюються питання побудови безлічі Парето та перевірки оптимальності рішень.

Паретівськи оптимальні альтернативи розглядаються в багатьох працях з теорії ігор, математичної економіки, теорії статистичних рішень, дослідження операцій, теорії оптимального керування і в інших наукових дисциплінах, в яких вивчаються багатокритеріальні моделі вибору.

Формування цілей дослідження методів розв'язання задач паретівської багатокритеріальної оптимізаці . Цілями дослідження є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю, що дасть можливість розв'язувати багато важливих задач багатокритеріального вибору, для яких не існує формальних методів знаходження їх оптимальних альтернатив, зокрема, задач паретівської оптимізації.

Для досягнення цілей були поставлені наступні завдання:

– розглянути основні поняття, які використовуються в дослідженні, що дасть можливість глибше і в повній мірі зрозуміти об'єкт дослідження і подальші викладки;

– ввести нові поняття *надкритерію і підкритерію* заданого критерію, що дасть можливість побудувати нові згортки критеріїв, які можна буде використовувати замість паретівської згортки для знаходження парето-оптимальних альтернатив;

– побудувати скалярні згортки багатьох критеріїв як надкритеріїв їх паретівської згортки, що дасть можливість зводити задачі паретівської оптимізації до задач скалярної оптимізації, для яких є формальні методи розв'язання;

– розглянути лексикографічну згортку багатьох критеріїв, як надкритерій їх паретівської згортки, що дасть можливість задачі паретівської оптимізації зводити до задач лексикографічної оптимізаці а, задачі лексикографічної оптимізації до послідовності задач скалярної оптимізації

Опис основного матеріалу дослідження методів розв'язування задач паретівської багатокритеріальної оптимізації

1. Паретівська згортка багатьох критеріїв

Розглядається вибір на допустимій множині $X \subset R^n$ за критеріями, які, визначаються однією і тією шкалою, як множиною оцінок R з заданим на ній порядком за допомогою відношення *більше*, але різними функціями оцінок

$$c_j,\ j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

Альтернатива $\mathbf{x} \in X$ вважається *кращою* альтернативи $\mathbf{y} \in X$ за критерієм c_j, якщо і тільки якщо $c_j(\mathbf{x}) > c_j(\mathbf{y})$; альтернативи $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y} \in X$ вважаються *рівноцінними* за цим критерієм, якщо і тільки якщо $c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y})$.

В цьому випадку постає питання, яка допустима альтернатива $\mathbf{x}_* \in X$ може бути результатом вибору за цими критеріями. Це питання є вічним в теорії вибору: різні цілі, які переслідуються при виборі, визначають й різні допустимі альтернативи, які можуть бути результатом цього цілеспрямованого вибору. Ціль виражається через умови узгодження при оцінці альтернатив. Ці умови, як правило, виражають *порівняння критеріїв між собою.* У випадку кількісного їх порівняння, тобто порівняння їх значень (оцінок), одержуються згортки цих критеріїв в один єдиний *скалярний критерій.* У випадку ж порівняння критеріїв за відносною їх важливістю при оцінці альтернатив одержуються їх згортки в один єдиний *векторний критерій* [1, ст 413; 2, ст.117].

Однією з перших і найбільш розповсюджених є паретівська згортка критеріїв. Ця згортка визначається за допомогою умови узгодження попарної рівної важливості критеріїв (1). За умовою попарної рівної важливості критеріїв, альтернатива $\mathbf{x}$ є *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$ в цій згортці, якщо і тільки якщо альтернатива $\mathbf{x}$ є *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$ хоча б за одним з цих критеріїв і є *негіршою* за всіма іншими критеріями. Інакше, це означає, що існує $t,\ 1 \le t \le k$, такий, що $c_t(\mathbf{x}) > c_t(\mathbf{y})$ і $c_j(\mathbf{x}) > c_j(\mathbf{y})$, $j = 1, 2, ..., k$. Якщо $c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y})$, $j = 1,2, ..., k$, то альтернативи $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ вважаються *рівноцінними* в цій паретівській згортці.

Отже паретівська згортка критеріїв (1), визначена цими правилами (правилом *віддачі переваги* одній альтернативі $\mathbf{x}$ перед іншою $\mathbf{y}$ і правилом *рівноцінності* двох альтернатив $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$) задає в просторі R^k, елементами якого є k-вимірні вектори, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$, впорядкування, яке визначається наступними бінарними відношеннями.

Означення 1.1 Вектор $\mathbf{c_1} = (c_{11}, c_{12}, ..,c_{1k})$ назвемо *паретівськи більшим* за вектор $\mathbf{c_2} = (c_{21}, c_{22}, ..., c_{2k})$, або коротко, $\mathbf{c_1} >^P \mathbf{c_2}$, якщо і тільки якщо $c_{1i} \ge c_{2i}$, $i = 1, 2, ..., k$, і існує номер $t,\ 1 \le t \le k$, такий, що $c_{1t} > c_{2t}$ ($>^P$ - *паретівськи більше*).

Аналогічно, визначається й відношення *паретівськи менше* ($<^P$): вектор $\mathbf{c_1}$ *паретівськи менший* за вектор $\mathbf{c}_2$, або коротко $\mathbf{c_1} <^P \mathbf{c_2}$, якщо і тільки якщо, $c_{1i} \le c_{2i}$ $i = 1,2, ..., k$, і існує номер t, $1 \le t \le k$, такий, що $c_{1t} < c_{2t}$. Отже, якщо $\mathbf{c_1} >^P \mathbf{c_2}$, то $\mathbf{c_2} <^P \mathbf{c_1}$.

Означення 1.2 Вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$ називатимемо паретівськи додатнім вектором, якщо і тільки якщо всі його компоненти невід'ємні і хоча б одна з них є додатною, що, коротко, $\mathbf{c} >^P \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ - нульовий вектор в R^k). Аналогічно, вектор $\mathbf{c}$ паретівськи від'ємний вектор, якщо і тільки якщо всі його компоненти недодатні і хоча б одна з них є від'ємною, що, коротко, позначатимемо як $\mathbf{c} <^P \mathbf{0}$.

Означення 1.3 Вектор $\mathbf{c}$ називатимемо паретівськи невід'ємним вектором, якщо і тільки якщо або $\mathbf{c} >^P \mathbf{0}$, або $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Аналогічно, вектор $\mathbf{c}$ паретівськи недодатний вектор, якщо і тільки якщо або $\mathbf{c} <^P \mathbf{0}$, або $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Нехай $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$ – векторний критерій, складений з скалярних критеріїв (1). Тоді, в паретівській згортці критеріїв (1), альтернатива $\mathbf{x}$ є *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{y})$; альтернативи $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ *рівноцінні* в цій згортці, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{y})$.

Інакше, альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}(\mathbf{y}) >^P \mathbf{0}$. Геометрично, це означає, що $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}(\mathbf{y})$ паретівськи додатний вектор, тобто він належить паретівськи додатному напрямку в R^k. Зауважимо, що паретівськи додатним напрямком в R^k ми називаємо, формально, відкритий промінь в R^k, який виходить з початку координат, тобто з нульової точки, в напрямку паретівськи додатного вектора. Так як множина паретівськи додатних напрямків в R^k складає множину всіх паретівськи додатних векторів, які утворюють опуклий конус в R^k, то цей конус, фактично, задає, геометрично, паретівську згортку критеріїв (1).

Опуклий конус в R^k, який задає паретівську згортку критеріїв (1), позначатимемо через P. Будемо говорити також, що паретівська згортка цих критеріїв задається в R^k за допомогою відношення *паретівськи більше*: $\mathbf{x}$ *паретівськи краща* за $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{y})$.

Паретівський порядок, як єдиний порядок віддачі переваги, є частковим порядком, так як, в загальному, не кожні дві альтернативи є порівнянними в цьому порядку. Так як цей порядок задається опуклим конусом в R^k, то він є транзитивним порядком: якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{y})$ і $\mathbf{c}(\mathbf{z}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{x})$, то $\mathbf{c}(\mathbf{z}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{y})$.

Альтернатива $\mathbf{x}_*(P) \in X$ є оптимальною (*непокращуваною*), в паретівській згортці критеріїв (1), якщо і тільки якщо не існує допустима альтернатива $\mathbf{x} \in X$, така, що $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{x}_*(P))$. Множину всіх паретівськи оптимальних альтернатив позначимо $X_*(P)$, а множину відповідних паретівськи оптимальних (непокращуваних) значень векторного критерію $\mathbf{c}$ через $C_*(P)$. Так як паретівський порядок є частковим порядком на R^k, отже й на множині альтернатив X, то множина $C_*(P)$, якщо вона містить більше одного вектора, є множиною паретівськи непорівнянних векторів.

Множину $X_*(P)$, або множину $C_*(P)$, називають, інакше, множинами Парето, відповідно, множиною Парето альтернатив і множиною Парето значень векторного критерію.

Паретівська згортка критеріїв (1) в один єдиний векторний критерій $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$ є, практично, найбільш вживаною. Тому, знаходження паретівськи непокращуваних альтернатив в теорії вибору має важливе значення [1, ст 416].

2. Узагальнені поняття надкритерію і підкритерію

Нехай χ_1, χ_2 – будь-які два критерії, задані на допустимій множині X.

Означення 2.1 Критерій χ_2 назвемо *надкритерієм* критерію χ_1, якщо і тільки якщо для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, таких, що $\mathbf{x}$ *краща* за $\mathbf{y}$ критерієм χ_1, випливає, що $\mathbf{x}$ *краща* за $\mathbf{y}$ критерієм χ_2. Критерій χ_1 назвемо *підкритерієм* критерію χ_2, якщо критерій χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 [1, ст 416, 417].

Теорема 2.1 Якщо критерій χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 на X і критерій χ_3 є надкритерієм критерію χ_2 на X, то критерій χ_3 є надкритерієм критерію χ_1 на X.

Доведення Нехай для $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y} \in X$ виконується відношення «$\mathbf{x}$ *краща* $\mathbf{y}$" за критерієм χ_1. Тоді, за умовою , що χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 на X, з даного відношення випливає інше відношення «$\mathbf{x}$ *краща* $\mathbf{y}$» за критерієм χ_2. Але, так як, за умовою, що критерій χ_3 є надкритерієм критерію χ_1 на X, з попередньоговідношення випливає відношення «$\mathbf{x}$ *краща* $\mathbf{y}$» за критерієм χ_3. Отже, з двох перших відношень і випливає останнє відношення.

Аналогічно, якщо χ_2 є підкритерієм критерію χ_3 і χ_1 є підкритерієм критерію χ_2, то χ_1 є підкритерієм критерію χ_3.

Нехай $X_*(\chi_1)$– множина непокращуваних альтернатив за критерієм χ_1, $X_*(\chi_2)$– множина непокращуваних альтернатив за критерієм χ_2.

Теорема 2.2 Якщо χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 на X, то $X_*(\chi_2) \subset X_*(\chi_1)$, тобто, кожна альтернатива, непокращувана на X за критерієм χ_2, є непокращуваною альтернативою на X і за критерієм χ_1.

Доведення Припустимо супротивне, тобто, що умова $X_*(\chi_2) \subset X_*(\chi_1)$ не виконується. Тоді, існує альтернатива $\mathbf{x}_*(\chi_2) \in X_*(\chi_2)$, яка не належить $X_*(\chi_1)$ $(\mathbf{x}_*(\chi_2) \notin X_*(\chi_1), \mathbf{x}_*(\chi_2) \in X)$. Отже, існує альтернатива $\mathbf{y} \in X$, така, що виконується відношення «$\mathbf{y}$ *краща* $\mathbf{x}_*(\chi_2)$» за критерієм χ_1.

Але, за умовою, що χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 на X, з даного відношення випливає відношення «$\mathbf{y}$ *краща* $\mathbf{x}_*(\chi_2)$» за критерієм χ_2, тобто, $\mathbf{x}_*(\chi_2)$ є покращуваною альтернативою за критерієм χ_2, що суперечить умові належності $\mathbf{x}_*(\chi_2) \in X_*(\chi_2)$. Одержане протиріччя доводить теорему.

Таким чином, якщо χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 на X і χ_3 є надкритерієм критерію χ_2 на X, то виконуються умови включення $X_*(\chi_1) \subset X_*(\chi_2) \subset X_*(\chi_3)$.

Означення 2.2 Критерій χ назвемо критерієм байдужості на X, якщо і тільки якщо кожна допустима альтернатива цієї множини є непокращуваною за цим критерієм, отже, оцінки будь-яких двох допустимих альтернатив або рівні, або непорівнянні.

З означення випливає, що критерій байдужості на X є підкритерієм будь-якого іншого критерію на X. Якщо χ – критерій байдужості на X, то $X_*(\chi) = X$, отже, якщо χ' будь-який критерій на X, а χ – критерій байдужості, то $X_*(\chi') \subseteq X_*(\chi)$[1, ст 418-426].

3 Скалярні надкритерії паретівської згортки

Як відомо, паретівська згортка критеріїв є векторною згорткою, тобто, критеріальна функція в цій згортці є векторною функцією на X. Але, існує багато способів згорток критеріїв (1), у яких критеріальна функція є скалярною функцією на X [2, ст.121].

Пропонується застосовувати в подальшому одну з загальних скалярних згорток цих критеріїв, яка як критерій є надкритерієм паретівської згортки.

Нехай

$$c'_j, \quad j = 1,2,...,k \qquad (2)$$

– будь-які скалярні критерії на X, такі, що c'_j і c_j еквівалентні критерії на X.

Теорема 3.1 Тоді, якщо c' є сумою критеріїв (2), тобто $c'(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} c'_j(\mathbf{x})$, то критерій c' є надкритерієм паретівської згортки критеріїв (1) на X.

Доведення Нехай $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ – будь-які допустимі альтернативи, для яких виконується паретівське відношення $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{y})$.

Тоді, для доведення теореми, треба показати, що виконується й нерівність $c'(\mathbf{x}) > c'(\mathbf{y})$. За означенням відношення *паретівськи більше* ($>^P$), паретівська нерівність $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^P \mathbf{c}(\mathbf{y})$ означає, що виконуються нерівності $c_j(\mathbf{x}) \geq c_j(\mathbf{y})$, $j = 1,2,...k$, і існує номер t, $1 \leq t \leq k$, такий, що $c_t(\mathbf{x}) > c_t(\mathbf{y})$. Але, так як критерій c'_j еквівалентний критерію c_j ($j = 1,2,...,k$), то виконуються нерівності $c'_j(\mathbf{x}) \geq c'_j(\mathbf{y})$, $j = 1,2,..,k$, де для критерію c'_t виконується строга нерівність $c'_t(\mathbf{x}) > c'_t(\mathbf{y})$. Отже, склавши ліві і праві частини нерівностей $c'_j(\mathbf{x}) \geq c'_j(\mathbf{y})$, одержимо строгу нерівність $\sum_{j=1}^{k} c'_j(\mathbf{x}) > \sum_{j=1}^{k} c'_j(\mathbf{y})$, тобто $c'(\mathbf{x}) > c'(\mathbf{y})$.

У найпростішому випадку, згідно вищевикладеного сума критеріїв (1) (тобто критерій $c(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} c_j(\mathbf{x})$) є надкритерієм паретівської згортки цих критеріїв, так як кожен з критеріїв (1) є еквівалентним собі критерієм.

Важливим, і тому часто вживаним, є скалярний надкритерій c' паретівської згортки скалярних критеріїв (1), який є додатною лінійною комбінацією цих критеріїв: $c' = \sum_{j=1}^{k} c'_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j c_j$, де $\alpha_j > 0$, $j = 1,2,...,$ k. Тут критерій $c'_j = \alpha_j c_j$ ($j = 1,2,...,k$) є еквівалентним критерієм критерію c_j, так як α_j додатне число. Кожен набір додатних коефіцієнтів α_j, в цьому випадку, визначає надкритерій паретівської згортки $\mathbf{c}$. Різні додатні набори цих коефіцієнтів визначають, взагалі кажучи, й різні надкритерії паретівської згортки.

Зазначимо, якщо множина C є опуклою багатогранною множиною, то існує скінченне число додатних наборів значень коефіцієнтів α_j, $j = 1,2,...,k$, таких, що множини оптимальних альтернатив задач максимізації на C відповідних надкритеріїв, визначених цими додатними наборами коефіцієнтів, повністю покривають множину $C_*(P)$.

Скалярні надкритерії паретівської згортки дають можливість зводити знаходження оптимальних альтернатив в паретівській багатокритеріальній задачі до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації. Побудова таких надкритеріїв зводиться до побудови (або відшукання) скалярних критеріїв, еквівалентних скалярним критеріям (1). Таким чином, проблема знаходження оптимальних альтернатив в паретівській задачі оптимізації зводиться, частково, до проблеми відшукання еквівалентних скалярних критеріїв. Способів відшукання таких еквівалентних критеріїв, очевидно, існує дуже багато. Тому виникає потреба у відшуканні якомога простіших еквівалентних скалярних критеріїв. Серед таких простих способів є, часто вживаний, розглянутий нами вище спосіб, за яким скалярний надкритерій паретівської згортки визначається як додатна лінійна комбінація критеріїв (1). Але, зауважимо, що цей спосіб не завжди дає можливість знаходити будь-яку оптимальну альтернативу в паретівській багатокритеріальній задачі [2, ст.121-124].

4. Лексикографічна згортка багатьох критеріїв як надкритерій їх паретівської згортки

Розглянемо лексикографічну згортка критеріїв (1). Як відомо, ця згортка базується на строгому ранжируванні. Нехай j_1-ий критерій має найвищий ранг, j_2-ий критерій має нижчий за нього ранг, і т.д., j_k-ий критерій має найнижчий ранг.

Тоді, альтернатива $\mathbf{x}$ вважається *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) > c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

$$c_{j_2}(\mathbf{x}) > c_{j_2}(\mathbf{y}),$$

або

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$

$$c_{j_2}(\mathbf{x}) = c_{j_2}(\mathbf{y}),$$

$$c_{j_3}(\mathbf{x}) > c_{j_3}(\mathbf{y}),$$

або і т.д.,

або

$$c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y}),\ j = j_1, j_2, ..., j_{k-1}$$

$$c_{j_k}(\mathbf{x}) > c_{j_k}(\mathbf{y}).$$

Альтернатива $\mathbf{x}$ вважається *рівноцінною* альтернативі $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $c_j(\mathbf{x}) = c_j(\mathbf{y})$, $j = 1,2,...,k$. Інакше, альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо значення $(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), ..., c_{j_k}(\mathbf{x}))$ векторного критерію $\mathbf{c} = (c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_k})$ *лексикографічно більше* за значення $(c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), ..., c_{j_k}(\mathbf{y}))$ цього векторного критерію, (в подальшому, відношення *лексикографічно більше* позначатимемо через $>^L$). Альтернатива $\mathbf{x}$ *рівноцінна* альтернативі $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо

$$(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), ..., c_{j_k}(\mathbf{x})) = (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), ..., c_{j_k}(\mathbf{y}))$$

[2, ст.190].

Відомо, що число всіх різних ранжирувань критеріїв (1) дорівнює числу перестановок індексів $1,2,...,k$, яке рівне $k!$. Отже, з цих критеріїв можна утворити $k!$ різних їх лексикографічних згорток. Зазначимо, що паретівська згортка цих критеріїв єдина, бо вона не залежить від впорядкування цих критеріїв, так як її основою є попарна рівноважливість критеріїв. Основою ж лексикографічної згортки, в якій критерії ранжируються, є попарна їх різноважливість.

Не втрачаючи загальності міркувань, припустимо, що критерії (1) ранжировані в порядку зростання їх номерів: c_1 має найвищий ранг, c_2 має ранг, нижчий за ранг критерію c_1, і т.д., c_k має найнижчий ранг. Отже, альтернатива $\mathbf{x}$ є *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) >^L \mathbf{c}(\mathbf{y})$, і альтернатива $\mathbf{x}$ *рівноцінна* альтернативі $\mathbf{y}$, якщо і тільки якщо $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{y})$. Таким чином, лексикографічна згортка критеріїв (1) є критерієм, який визначається шкалою як множиною векторних оцінок R^k, впорядкованою за допомогою відношення *лексикографічно більше*, і векторною критеріальною функцією $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$. Зазначимо, що лексикографічне впорядкування в R^k є повним впорядкуванням , тому непокращуване значення векторного критерію $\mathbf{c}$ єдине (назвемо його лексикографічним максимумом множини C). Отже, якщо $\mathbf{c}^*$ є лексикографічним максимумом векторної функції $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ на множині X , то множиною оптимальних альтернатив в цій лексикографічній згортці є підмножина допустимих альтернатив, у яких векторна функція $\mathbf{c}$ досягає значення $\mathbf{c}^*$: $X_* = \{\mathbf{x} \in X | \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^*\}$.

Знаходження альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці критеріїв (1), зводиться до розв'язання k однокритеріальних задач оптимізації. Покрокова схема цього зведення виглядає так: [2, ст.292]

<u>1-ий крок.</u> Розв'язується задача

max $c_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X$. (3)

Якщо задача (3) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці не існує. Нехай c_1^* є максимумом критерію $c_1(\mathbf{x})$ на X: $X_2 = \{\mathbf{x} \in X | c_1(\mathbf{x}) = c_1^*\}$. Тоді переходимо до другого кроку.

<u>2-ий крок.</u> Розв'язується задача

max $c_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X_2$. (4)

Якщо задача (2.11) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці також не існує. Нехай c_2^* є максимумом критерію $c_2(\mathbf{x})$ на X_2: $X_3 = \{\mathbf{x} \in X_2 | c_2(\mathbf{x}) = c_2^*\}$. Тоді переходимо до третього кроку. І так далі.

<u>k-ий крок.</u> Розв'язується задача

max $c_k(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X_{k-1}$. (5)

Якщо задача (5) не має оптимального розв'язку, то оптимальної альтернативи в лексикографічній згортці не існує. Нехай c_k^* є максимумом критерію $c_k(\mathbf{x})$ на X_{k-1}: $X_k^* = \{\mathbf{x} \in X_{k-1} | c_k(\mathbf{x}) = c_k^*\}$. Тоді X_k^* є множиною оптимальних альтернатив в лексикографічній згортці критеріїв (1).

Очевидно, описана схема, яку ми назвемо схемою скаляризації, дає можливість знаходити множину всіх альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці критеріїв (1). Зазначимо тут, що множини альтернатив, оптимальних в різних лексикографічних згортках критеріїв (1) є, взагалі кажучи, різними підмножинами допустимої множини X, число цих підмножин рівне $k!$.

Теорема 4.1 Нехай критерії (1) ранжировані в порядку $c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_k}$. Тоді відповідна їм лексикографічна згортка на множині X є надкритерієм їх паретівської згортки на X.

Доведення. Нехай $\mathbf{x} \in X$ *краща* $\mathbf{y} \in X$ в паретівській згортці критеріїв (1). Тоді виконуються нерівності $c_j(\mathbf{x}) \geq c_j(\mathbf{y})$, $j = 1,2,...,k$,
і існує t, $1 \leq t \leq k$, таке, що виконується строга нерівність $c_t(\mathbf{x}) > c_t(\mathbf{y})$.

Нехай r $(1 \leq r \leq k)$ – найменший індекс, такий, що $c_{j_r}(\mathbf{x}) > c_{j_r}(\mathbf{y})$. Тоді, якщо $r = 1$, то

$$(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), ..., c_{j_k}(\mathbf{x})) >^L (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), ..., c_{j_k}(\mathbf{y})).$$

Якщо ж $r > 1$, то з нерівностей $c_j(\mathbf{x}) \geq c_j(\mathbf{y})$, $j = 1,2,...,k$ випливає, що

$$c_{j_1}(\mathbf{x}) = c_{j_1}(\mathbf{y}),$$
$$c_{j_2}(\mathbf{x}) = c_{j_2}(\mathbf{y}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{j_{r-1}}(\mathbf{x}) = c_{j_{r-1}}(\mathbf{y}).$$

Отже, $(c_{j_1}(\mathbf{x}), c_{j_2}(\mathbf{x}), ..., c_{j_k}(\mathbf{x})) >^L (c_{j_1}(\mathbf{y}), c_{j_2}(\mathbf{y}), ..., c_{j_k}(\mathbf{y}))$ (існування номера r, $1 \leq r \leq k$, випливає з існування строгої нерівності $c_t(\mathbf{x}) > c_t(\mathbf{y})$). Таким чином, якщо $\mathbf{x}$

краща за **y** в паретівській згортці, то **x** *краща* за **y** і в будь-якій розглядуваній лексикографічній згортці критеріїв (1), звідки, за означенням надкритерію, ця лексикографічна згортка є надкритерієм паретівської згортки критеріїв (1).

Теорема 4.1 дає можливість зводити відшукання альтернатив, оптимальних в паретівській згортці критеріїв (1), до відшукання альтернатив, оптимальних в лексикографічній згортці цих критеріїв [2, ст.192].

Висновки і перспективи подальших досліджень дослідження методів розв'язування задач паретівської багатокритеріальної оптимізації

За результатами дослідження методів розв'язування задач паретівської багатокритеріальної оптимізації можна зробити висновок:

1. Розглянуто основні поняття, які використовуються при проведенні дослідження, що дало можливість глибше і в повній мірі зрозуміти цілі , мету і завдання дослідження і подальші викладки.

Основним поняттям дослідження є паретівська згортка критеріїв. Це згортка, яка визначається за допомогою умови узгодження попарної рівної важливості критеріїв c_j, $j = 1, 2, ..., k$.

За умовою попарної рівної важливості критеріїв, альтернатива **x** є *кращою* за альтернативу **y** в цій згортці, якщо і тільки якщо альтернатива **x** є *кращою* за альтернативу **y** хоча б за одним з цих критеріїв і є *негіршою* за всіма іншими критеріями.

Отже паретівська згортка критеріїв, визначена такими правилами *віддачі переваги* одній альтернативі **x** перед іншою **y** і правилом *рівноцінності* двох альтернатив **x** і **y** задає в просторі R^k, елементами якого є k-вимірні вектори, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_k)$, впорядкування, яке визначається бінарним відношенням паретівськи більше (менше);

2. Введено нові поняття *надкритерію і підкритерію* будь якого критерію і доведено, що альтернатива, оптимальна за надкритерієм і підкритерієм є і оптимальною за даним критерієм.

Введення цих понять дає можливість впорядкувати задачі вибору на одній і тій же допустимій множині альтернатив; знайти і побудувати такі згортки багатьох критеріїв, які є надкритеріями і підкритеріями паретівської згортки критеріїв і можуть бути використані для знаходження парето−оптимальних альтернатив. Можливо це на основі доведенного твердження, що альтернатива, яка є оптимальною за надкритерієм (підкритерієм) будь-якого критерію є оптимальною і за цим критерієм.

Так, критерій χ_2 назвають *надкритерієм* критерію χ_1, якщо і тільки якщо для **x, y** єX, таких, що **x** *краща* за **y** за критерієм χ_1, випливає, що **x** *краща* за **y** і за критерієм χ_2. Критерій χ_1 назвемо *підкритерієм* критерію χ_2, якщо критерій χ_2 є надкритерієм критерію χ_1.

Якщо $X_*(\chi_1)$ – множина непокращуваних альтернатив за критерієм χ_1, $X_*(\chi_2)$ – множина непокращуваних альтернатив за критерієм χ_2 і χ_2 є надкритерієм критерію χ_1 на X, то $X_*(\chi_2) \subset X_*(\chi_1)$, тобто,кожна альтернатива, непокращувана на X за критерієм χ_2, є непокращуваною альтернативою на X і за критерієм χ_1;

3. Для паретівської згортки багатьох критеріїв запропоновано загальний спосіб побудови її скалярного надкритерію. Його частинним випадком є скалярний надкритерій як додатна лінійна комбінація критеріїв.

Скалярні надкритерії паретівської згортки дають можливість зводити знаходження оптимальних альтернатив в паретівській багатокритеріальній задачі до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації. Побудова таких надкритеріїв зводиться до побудови (або відшукання) скалярних критеріїв, еквівалентних скалярним критеріям c_j, $j = 1,2, ..., k$;

4. Розглянуто лексикографічну згортку багатьох критеріїв, таку, що базується на умові попарної різної їх важливості (критерії ранжировані за важливістю). Вона є надкритерієм паретівської згортки і зводиться до послідовності задач скалярної оптимізації. При цьому задачі паретівської оптимізації до задач лексикографічної оптимізаці, для яких є формальні методи розв'язання.

Таким чином, показано, що розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською згорткою зводяться до розв'язання задач скалярної або лексикографічної оптимізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Червак О. Ю. Оптимізація виробничої програми підприємства. Надкритерії паретівської згортки в

багатокритеріальній оптимізації// Соціально-економічний та технічний розвиток підприємств: проблеми, рішення, оцінка ефективності. Колективна монографія / за заг. ред..Л.М. Савчук.-Дніпропетровськ: Пороги, 2016,- с.413-426
2. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. - Ужгород, Ужгородський національний університет, 2002.-312с.
3. Червак О.Ю. Надкритерії в однокритеріальній оптимізації. Науковий вісник УжНУ, Вип 27, серія «Математика і інформатика» – Ужгород, 2015 с. 163-168.
4. Ногин В.Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 272 с.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982. - 254 С.

REFERENCES

1. Chervak, O. Yu. (2016). Optymizatsiya vyrobnychoyi prohramy pidpryyemstva. Nadkryteriyi paretivs′koyi z hortky v bahatokryterial′niy optymizatsiyi [Optimization of the production program of the enterprise. Supercriteria of the Paretian convolution in multicriteria optimization]. Sotsial′no-ekonomichnyy ta tekhnichnyy rozvytok pidpryyemstv: problemy, rishennya, otsinka efektyvnosti – Socio-economic and technical development of enterprises: problems, solutions, evaluation of efficiency, Savchuk, L.M. (Eds.).Dnipropetrovs′k: Porohy [in Ukrainian].
2. Chervak, Yu. Yu. (2002). Optymizatsiya. Nepokrashchuvanyy vybir [Optimization. An unimproved choice]. Uzhhorod, Uzhhorods′kyy natsional′nyy universytet [in Ukrainian].
3. Chervak, O. Yu. (2015). Nadkryteriyi v odnokryterial′niy optymizatsiyi [Supercriteria in single-criteria optimization]. Naukovyy visnyk UzhNU seriya «Matematyka i informatyka» – Scientific Bulletin of UzhNU series «Mathematics and Informatics», 27, 163-168. [in Ukrainian].
4. Nogin, V. D. (2016). Suzhenie mnozhestva Pareto: aksiomaticheskiy podkhod [Narrowing of the Pareto set: an axiomatic approach]. — M.: FYZMATLYT [in Russian].
Podinovskiy, V. V., Nogin, V. D. (1982). Pareto-optimal′nye reshenyya mnogokriteryal′nykh zadach Pareto-optimal solutions to multicriteria problems []. M.: Nauka [in Russian]

Отримано 12.02.2023