Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Натуральний степінь комплексного числа

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

20 вересня 2022 року

Нехай γ

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа,

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

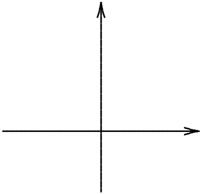
Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.

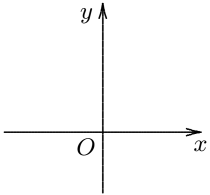
Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



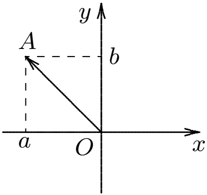
Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



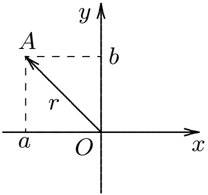
Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



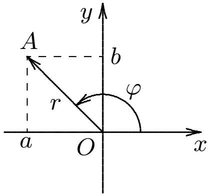
Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



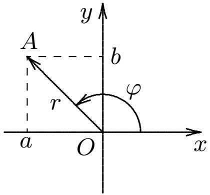
Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

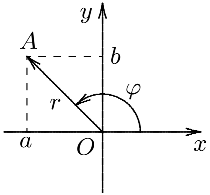
Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

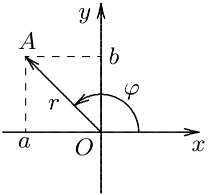
Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r,

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

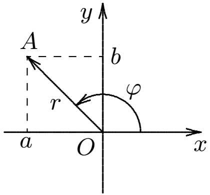
Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут,

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

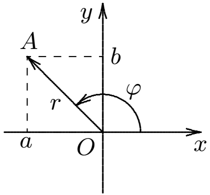
Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox,

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

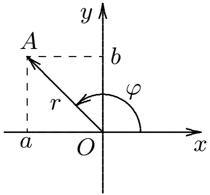
Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox, — через φ.

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.

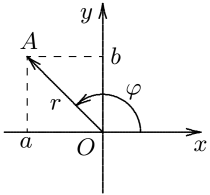


Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox, — через φ. Тоді

$$a = r\cos\varphi,$$

Нехай γ є деяким ненульовим комплексним числом і $\gamma = a + bi$ — алгебраїчна форма запису цього числа, де a, b — дійсні числа, i, нагадаємо, є уявною одиницею.

Далі, припустимо, що комплексне число γ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) на комплексній площині.



Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox, — через φ. Тоді

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi =$$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i$$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає,

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (2)$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число,

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число,

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа.

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (2)$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (3)$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа. Дійсне число r

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2+b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа. Дійсне число r у цьому записі називається *модулем* комплексного числа γ

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа. Дійсне число r у цьому записі називається *модулем* комплексного числа γ і позначається $|\gamma|$,

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа. Дійсне число r у цьому записі називається *модулем* комплексного числа γ і позначається $|\gamma|$, а число φ — *аргументом* числа γ.

Тому комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

Означення 1

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа. Дійсне число r у цьому записі називається *модулем* комплексного числа γ і позначається $|\gamma|$, а число φ — *аргументом* числа γ. Аргумент комплексного числа γ позначається $\arg\gamma$.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.

Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a+bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| =$$

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a+bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1+i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2}$$

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a+bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1+i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1+i)$,

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1+i)$, то

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a+bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1+i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1+i)$, то

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1+i)$, то

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1 + i)$, то

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тому $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$.

Якщо $\gamma \in \mathbb{C} \setminus 0$, то $|\gamma| \in \mathbb{R}$ і $|\gamma| > 0$. Далі, $|0| = 0$. Модуль будь якого комплексного числа визначається цим числом однозначно.
Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Приклад 1. Записати у тригонометричній формі комплексне число $-1 + i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль комплексного числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1+i)$, то

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Звідси $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тому $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$. Отже,

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

є тригонометричною формою комплексного числа $-1 + i$.

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1,

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2,

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, *записаних у тригонометричній формі:*

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

справджується рівність

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (4)$$

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

справджується рівність

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{4}$$

Тобто модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів співмножників;

Теорема 1

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

справджується рівність

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{4}$$

Тобто модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів співмножників; аргумент добутку комплексних чисел дорівнює сумі аргументів співмножників (з точністю до доданку кратного 2π).

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа,

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$.

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 =$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)]$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2([\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2]),$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2([\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2]),$$

тобто

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{5}$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2([\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2]),$$

тобто

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{5}$$

Співвідношення (5) є записом комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$ у тригонометричній формі,

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2([\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2]),$$

тобто

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{5}$$

Співвідношення (5) є записом комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$ у тригонометричній формі, $r_1 r_2$ — модулем комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$,

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

де r_1, r_2, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ і $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Обчислимо добуток цих чисел

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2([\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2]),$$

тобто

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{5}$$

Співвідношення (5) є записом комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$ у тригонометричній формі, $r_1 r_2$ — модулем комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$, а $\varphi_1 + \varphi_2$ — аргументом цього числа.

Доведення.

Доведення.

Отже,

$$|\gamma_1\gamma_2| = r_1 r_2,$$

Доведення.

Отже,

$$|\gamma_1\gamma_2| = r_1 r_2,$$

$$\arg(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

Доведення.

Отже,

$$|\gamma_1\gamma_2| = r_1 r_2,$$

$$\arg(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

або

$$|\gamma_1\gamma_2| = |\gamma_1| \cdot |\gamma_2|,$$

Доведення.

Отже,

$$|\gamma_1\gamma_2| = r_1 r_2,$$

$$\arg(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

або

$$|\gamma_1\gamma_2| = |\gamma_1| \cdot |\gamma_2|, \quad \arg(\gamma_1\gamma_2) = \arg\gamma_1 + \arg\gamma_2.$$

Доведення.

Отже,

$$|\gamma_1\gamma_2| = r_1 r_2,$$

$$\arg(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

або

$$|\gamma_1\gamma_2| = |\gamma_1| \cdot |\gamma_2|, \quad \arg(\gamma_1\gamma_2) = \arg\gamma_1 + \arg\gamma_2.$$

Нагадаємо, що завжди, коли йдеться про рівність аргументів комплексних чисел, цю рівність розуміють з точністю до доданка кратного 2π. $\square$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 6 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i,$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 6 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 6 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$(-3 - 3\sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{3} + i)$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$(-3-3\sqrt{3}i)\cdot(\sqrt{3}+i)=-3\sqrt{3}$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$(-3-3\sqrt{3}i)\cdot(\sqrt{3}+i)=-3\sqrt{3}-3i$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$(-3-3\sqrt{3}i)\cdot(\sqrt{3}+i)=-3\sqrt{3}-3i-9i$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 6 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\left(-3 - 3\sqrt{3}i\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 6 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 6\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\left(-3 - 3\sqrt{3}i\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -12i,$$

Приклад 2. Обчислити $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Розв'язання.

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Перейдемо до алгебраїчної форми запису перемножуваних комплексних чисел:

$$6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=6\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3-3\sqrt{3}i,$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$\left(-3-3\sqrt{3}i\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)=-3\sqrt{3}-3i-9i-3\sqrt{3}i^2=-12i,$$

$$12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=-12i.$$

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Теорема 2

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2,

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Теорема 2

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, *записаних у тригонометричній формі:*

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Теорема 2

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Теорема 2

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

справджується рівність

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big). \tag{6}$$

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Теорема 2

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

справджується рівність

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big). \tag{6}$$

Тобто модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника,

Подібне твердження можна сформулювати і для частки комплексних чисел.

Теорема 2

Для довільних комплексних чисел γ_1, γ_2, записаних у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

справджується рівність

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big). \tag{6}$$

Тобто модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки двох комплексних чисел дорівнює різниці аргументів діленого і дільника (*з точністю до доданку кратного* 2π).

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа,

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$.

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} =$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)}$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big)$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Отже,

$$\left|\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right| = \frac{|\gamma_1|}{|\gamma_2|},$$

Доведення.

Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі: $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

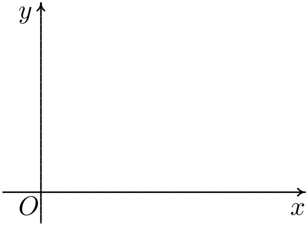
$$= \frac{r_1}{r_2}\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big) =$$

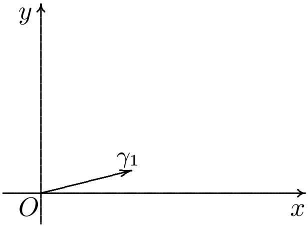
$$= \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Отже,

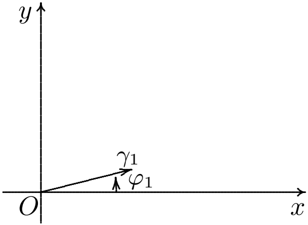
$$\left|\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right| = \frac{|\gamma_1|}{|\gamma_2|}, \qquad \arg\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) = \arg\gamma_1 - \arg\gamma_2.$$

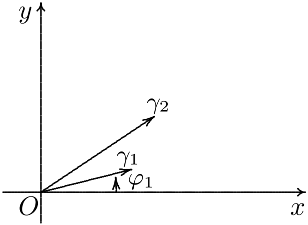
$\square$

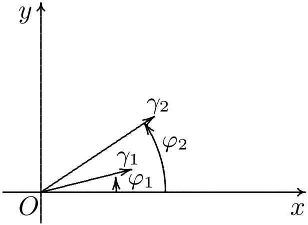

y
O
x

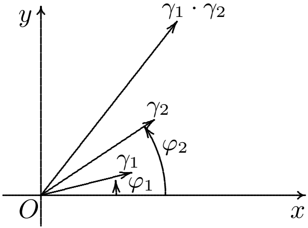


y
γ1
O
x

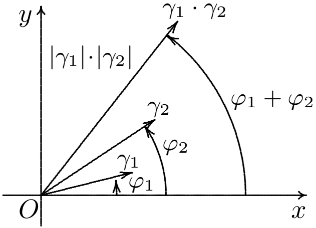

y
γ_1
φ_1
O
x

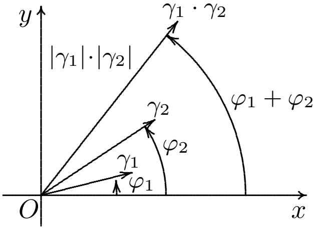

y
γ2
γ1
φ1
O
x


y
γ_2
φ_2
γ_1
φ_1
O
x

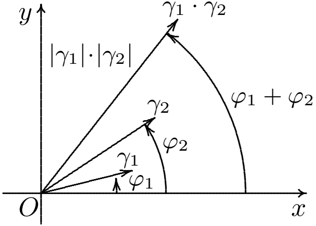


y
$\gamma_1 \cdot \gamma_2$
γ_2
φ_2
γ_1
φ_1
O
x

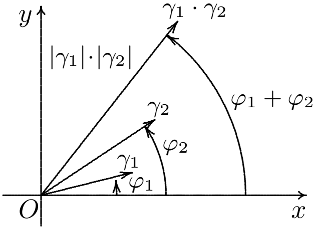

y
$\gamma_1 \cdot \gamma_2$
$|\gamma_1|\cdot|\gamma_2|$
$\varphi_1 + \varphi_2$
γ_2
φ_2
γ_1
φ_1
O
x



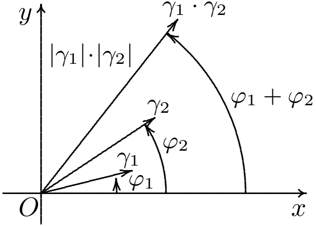
Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел виясняється тепер без великих труднощів.



Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел виясняється тепер без великих труднощів. Дійсно, вектор, що зображає добуток (частку) комплексних чисел γ_1 і γ_2, одержимо в результаті повороту проти (за) годинникової стрілки вектора, що відповідає числу γ_1, на кут φ_2 і розтягом (стиском) його в $|\gamma_2|$ раз.



Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел виясняється тепер без великих труднощів. Дійсно, вектор, що зображає добуток (частку) комплексних чисел γ_1 і γ_2, одержимо в результаті повороту проти (за) годинникової стрілки вектора, що відповідає числу γ_1, на кут φ_2 і розтягом (стиском) його в $|\gamma_2|$ раз. Певно, що останню операцію потрібно проводити у випадку $|\gamma_2| > 1$.



Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел виясняється тепер без великих труднощів. Дійсно, вектор, що зображає добуток (частку) комплексних чисел γ_1 і γ_2, одержимо в результаті повороту проти (за) годинникової стрілки вектора, що відповідає числу γ_1, на кут φ_2 і розтягом (стиском) його в $|\gamma_2|$ раз. Певно, що останню операцію потрібно проводити у випадку $|\gamma_2| > 1$. Коли ж $|\gamma_2| < 1$, тоді потрібно стискати (розтягнути) вектор γ_1 в $|\gamma_2|$ раз.

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

$$\gamma^{-1}$$

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{\gamma}$$

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right)$$

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \\ = \frac{1}{r}\left(\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right) = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \tag{7}$$

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для ненульового комплексного числа

$$\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

оберненим є число

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &= \frac{1}{\gamma} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \\ &= \frac{1}{r}\left(\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right) = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \end{aligned} \tag{7}$$

тобто

$$|\gamma^{-1}| = |\gamma|^{-1}, \quad \arg(\gamma^{-1}) = -\arg\gamma.$$

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз,

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}}.$$

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n. При цьому число α називають *основою степеня*, Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n. При цьому число α називають *основою степеня*, а натуральне число n — *показником степеня*.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n. При цьому число α називають *основою степеня*, а натуральне число n — *показником степеня*. Поняття натурального степеня можна розширити до поняття *цілого степеня*.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n. При цьому число α називають *основою степеня*, а натуральне число n — *показником степеня*. Поняття натурального степеня можна розширити до поняття *цілого степеня*. За означенням

$$\alpha^0 = 1,$$

Піднесення комплексного числа до цілого степеня.

Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа.

Означення 2

Нехай n — будь-яке натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n. При цьому число α називають *основою степеня*, а натуральне число n — *показником степеня*. Поняття натурального степеня можна розширити до поняття *цілого степеня*. За означенням

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^{-n} = \left(\alpha^{-1}\right)^n, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3

Для довільних ненульових комплексних чисел α *і* β

Теорема 3

Для довільних ненульових комплексних чисел α і β та для довільних цілих чисел m і n

Теорема 3

Для довільних ненульових комплексних чисел α і β та для довільних цілих чисел m і n справджуються рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{8}$$

Теорема 3

Для довільних ненульових комплексних чисел α і β та для довільних цілих чисел m і n справджуються рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{8}$$

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}, \tag{9}$$

Теорема 3

Для довільних ненульових комплексних чисел α і β та для довільних цілих чисел m і n справджуються рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{8}$$

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}, \tag{9}$$

$$\alpha^m \cdot \beta^m = (\alpha\beta)^m. \tag{10}$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число,

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа.

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n =$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}})$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}}$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ істинність рівності (8) очевидна.

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ істинність рівності (8) очевидна.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ істинність рівності (8) очевидна.
Якщо m і n — цілі від'ємні числа і $\alpha \neq 0$, то за означенням степеня і із доведеного раніше маємо:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n =$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ істинність рівності (8) очевидна.
Якщо m і n — цілі від'ємні числа і $\alpha \neq 0$, то за означенням степеня і із доведеного раніше маємо:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m} \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n}$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ істинність рівності (8) очевидна.
Якщо m і n — цілі від'ємні числа і $\alpha \neq 0$, то за означенням степеня і із доведеного раніше маємо:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m} \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m-n}$$

Доведення.

Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ істинність рівності (8) очевидна.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа і $\alpha \neq 0$, то за означенням степеня і із доведеного раніше маємо:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m} \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m-n} = \alpha^{m+n}.$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом.

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$).

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ $(|n| = -n)$. Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n =$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n}$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}})$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ $(|n| = -n)$. Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) =$$

$$= (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m-(-n) \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{-n \text{ раз}} \cdot \underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}})$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) =$$

$$= (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m-(-n) \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{-n \text{ раз}} \cdot \underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}}$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) =$$

$$= (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m-(-n) \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{-n \text{ раз}} \cdot \underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) =$$

$$= (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m-(-n) \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{-n \text{ раз}} \cdot \underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

Інші випадки доводяться аналогічно. Таким чином рівність (8) доведена для довільних цілих чисел m і n.

Доведення.

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) =$$

$$= (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m-(-n) \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{-n \text{ раз}} \cdot \underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

Інші випадки доводяться аналогічно. Таким чином рівність (8) доведена для довільних цілих чисел m і n.
Доведення ж рівностей (9) і (10) аналогічні доведенню попередньої рівності. Вони вимагають нескладних технічних обчислень і тому залишаємо їх читачеві на самостійну роботу. Слід зауважити, що для доведення рівності (10) окрім асоціативної властивості потрібно використати ще й комутативну властивість множення комплексних чисел. $\square$

Теорема 4

Для довільного комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

Теорема 4

Для довільного комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, записаного в тригонометричній формі,*

Теорема 4

Для довільного комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *записаного в тригонометричній формі, та довільного цілого числа* n

Теорема 4

Для довільного комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, записаного в тригонометричній формі, та довільного цілого числа* n *справджується рівність*

$$\alpha^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{11}$$

Теорема 4

Для довільного комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *записаного в тригонометричній формі, та довільного цілого числа* n *справджується рівність*

$$\alpha^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{11}$$

яка називається формулою Муавра.

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n.

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n.

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.Тоді

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n =$$

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.Тоді

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] \cdot \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{n-1}$$

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.Тоді

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] \cdot \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{n-1} =$$
$$= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] \cdot \left[r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)\right]$$

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.Тоді

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] \cdot \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{n-1} =$$

$$= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] \cdot \left[r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)\right] =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.Тоді

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]\cdot\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{n-1} =$$
$$= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]\cdot\left[r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)\right] =$$
$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

тобто формула (11) справджується і для показника n.

Доведення.

Спочатку методом математичної індукції доведемо правильність формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, є правильна.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Припустимо, що вона істинна для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тобто

$$\alpha^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.Тоді

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]\cdot\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{n-1} =$$
$$= \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]\cdot\left[r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)\right] =$$
$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

тобто формула (11) справджується і для показника n. Отже, за принципом математичної індукції вона справджується для будь-якого натурального показника n.

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число.

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом.

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників,

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n =$$

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n}$$

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n}$$

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}\right]^{-n}(\cos(-n)(-\varphi) + i\sin(-n)(-\varphi))$$

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$

$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n} =$$

$$= \left[r^{-1}\right]^{-n}(\cos(-n)(-\varphi) + i\sin(-n)(-\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}\right]^{-n}(\cos(-n)(-\varphi) + i\sin(-n)(-\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, і для будь-якого цілого від'ємного показника формула (11) є правильною.

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$

$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n} =$$

$$= \left[r^{-1}\right]^{-n}(\cos(-n)(-\varphi) + i\sin(-n)(-\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, і для будь-якого цілого від'ємного показника формула (11) є правильною.

При $n = 0$ істинність формули (11) очевидна.

Доведення.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і істинність формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}\right]^{-n}(\cos(-n)(-\varphi) + i\sin(-n)(-\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, і для будь-якого цілого від'ємного показника формула (11) є правильною.

При $n = 0$ істинність формули (11) очевидна. Теорему доведено. □

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі.

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1 - \sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} =$$

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8}$$

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8} =$$

$$= 2^{-8}\left(\cos\tfrac{8\pi}{3} + i\sin\tfrac{8\pi}{3}\right)$$

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8} =$$

$$= 2^{-8}\left(\cos\tfrac{8\pi}{3} + i\sin\tfrac{8\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{256}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)$$

Приклад 3. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8} =$$

$$= 2^{-8}\left(\cos\tfrac{8\pi}{3} + i\sin\tfrac{8\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{256}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{512} + \tfrac{\sqrt{3}}{512}i.$$