Системи лінійних рівнянь. Метод Ґаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Лектор — доц. Шапочка І. В.

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

27 вересня 2022 року

Протягом усієї лекції

Протягом усієї лекції F — множина

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел.

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q},$$

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R},$$

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною F

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F.

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F. Число a_{ij},

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, $\ldots$, x_n над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j називається коефіцієнтом,

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j називається коефіцієнтом, число b_i

Протягом усієї лекції F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Тобто

$$\text{або} \quad F = \mathbb{Q}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad F = \mathbb{C}.$$

Під системою лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною Fбудемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа,

$$a_{ij}, \quad b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

— деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j називається коефіцієнтом, число b_i називається вільним членом i-го рівняння.

Приклади систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases}$$

Приклади систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 3y + 6z &= -2, \\ -x + 3y + 2z &= \ \ 4, \\ 2x - 7y + 5z &= \ \ 45, \\ 2x - 6y - 4z &= -8; \end{cases}$$

Приклади систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 3y + 6z &= -2, \\ -x + 3y + 2z &= \ \ 4, \\ 2x - 7y + 5z &= \ 45, \\ 2x - 6y - 4z &= -8; \end{cases}$$

$$\left\{ \ 2x + y = 5; \right.$$

Приклади систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 3y + 6z &= -2, \\ -x + 3y + 2z &= \ \ 4, \\ 2x - 7y + 5z &= \ 45, \\ 2x - 6y - 4z &= -8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 &= 1, \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 &= 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1. \end{cases}$$

Систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

називають системою лінійних однорідних рівнянь.

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці,

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$,

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$, то матриця (3)

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$, то матриця (3) називається квадратною матрицею порядку n.

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$, то матриця (3) називається квадратною матрицею порядку n.

Діагональ цієї матриці,

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$, то матриця (3) називається квадратною матрицею порядку n.

Діагональ цієї матриці, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$, то матриця (3) називається квадратною матрицею порядку n.

Діагональ цієї матриці, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута (тобто, що складається з елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$)

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка називається матрицею із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею).

Число a_{ij} називають елементом матриці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю цієї матриці.

Якщо $s = n$, то матриця (3) називається квадратною матрицею порядку n.

Діагональ цієї матриці, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута (тобто, що складається з елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$) називається головною діагоналлю.

Означення 1

Матриця A,

Означення 1

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (1),

Означення 1

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (1), називається матрицею системи лінійних рівнянь.

Означення 1

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (1), називається матрицею системи лінійних рівнянь.

$s \times (n+1)$-матриця,

Означення 1

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (1), називається матрицею системи лінійних рівнянь.

$s \times (n+1)$-матриця, перші n стовпці якої такі ж як у матриці A,

Означення 1

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (1), називається матрицею системи лінійних рівнянь.

$s \times (n+1)$-матриця, перші n стовпці якої такі ж як у матриці A, а останній складається із вільних членів системи рівнянь (1)

Означення 1

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (1), називається матрицею системи лінійних рівнянь.

$s \times (n+1)$-матриця, перші n стовпці якої такі ж як у матриці A, а останній складається із вільних членів системи рівнянь (1) називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь.

Приклад системи лінійних рівнянь, її матриці та розширеної матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Приклад системи лінійних рівнянь, її матриці та розширеної матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Приклад системи лінійних рівнянь, її матриці та розширеної матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад системи лінійних рівнянь, її матриці та розширеної матриці

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад системи лінійних рівнянь, її матриці та розширеної матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 = 7, \\ 8x_1 + 9x_2 = 1, \\ -5x_1 - 6x_2 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ -5 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \\ -5 & -6 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Означення 2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1)

Означення 2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел

Означення 2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ множини F,

Означення 2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ множини F, що кожне рівняння цієї системи перетворюється в тотожність

Означення 2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ множини F, що кожне рівняння цієї системи перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих x_i відповідно числами γ_i

Означення 2

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n множини F, що кожне рівняння цієї системи перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих x_i відповідно числами γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Приклад системи лінійних рівнянь та її розв'язку

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$0,\ 1,\ -1$ є розв'язком СЛР (4).

Приклад системи лінійних рівнянь та її розв'язку

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$0,\ 1,\ -1$ є розв'язком СЛР (4).

$0,\ -1,\ 1$ також є розв'язком СЛР (4).

Приклад системи лінійних рівнянь та її розв'язку

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$0,\ 1,\ -1$ є розв'язком СЛР (4).

$0,\ -1,\ 1$ також є розв'язком СЛР (4).

$1,\ 0,\ -1$ не є розв'язком СЛР (4).

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається сумісною,

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок,

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною** у протилежному випадку.

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною** у протилежному випадку, тобто якщо вона немає жодного розв'язку.

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною** у протилежному випадку, тобто якщо вона немає жодного розв'язку.

Означення 4

Сумісна система лінійних рівнянь називається **визначеною**,

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною** у протилежному випадку, тобто якщо вона немає жодного розв'язку.

Означення 4

Сумісна система лінійних рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок,

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною** у протилежному випадку, тобто якщо вона немає жодного розв'язку.

Означення 4

Сумісна система лінійних рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок, і **невизначеною**,

Означення 3

Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною у протилежному випадку, тобто якщо вона немає жодного розв'язку.

Означення 4

Сумісна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має тільки один розв'язок, і невизначеною, якщо вона має більше як один розв'язок.

Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1)

Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, $\ldots$, x_n, Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, $\ldots$, x_n, а саме

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \cdots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{array}\right. \tag{5}$$

Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, $\ldots$, x_n, а саме

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \cdots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{cases} \tag{5}$$

Означення 5

Системи лінійних рівнянь (1) і (5)

Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n, а саме

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \dots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{cases} \tag{5}$$

Означення 5

Системи лінійних рівнянь (1) і (5) називаються еквівалентними, Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$, а саме

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \dots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{cases} \qquad (5)$$

Означення 5

Системи лінійних рівнянь (1) і (5) називаються **еквівалентними**, якщо множини їх розв'язків є рівними.

Нехай нам дано окрім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а саме

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \cdots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{cases} \tag{5}$$

Означення 5

Системи лінійних рівнянь (1) і (5) називаються **еквівалентними**, якщо множини їх розв'язків є рівними.

Еквівалентність двох систем рівнянь (1) і (5) будемо позначати символом $(1) \sim (5)$.

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь (5), то система (5) еквівалентна системі (1)

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь (5), то система (5) еквівалентна системі (1) (симетрична властивість);

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь (5), то система (5) еквівалентна системі (1) (симетрична властивість);
3) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі рівнянь (5),

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь (5), то система (5) еквівалентна системі (1) (симетрична властивість);
3) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі рівнянь (5), а ця в свою чергу еквівалентна деякій системі лінійних рівнянь $(*)$,

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь (5), то система (5) еквівалентна системі (1) (симетрична властивість);
3) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі рівнянь (5), а ця в свою чергу еквівалентна деякій системі лінійних рівнянь $(*)$, то система (1) еквівалентна системі $(*)$

Поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь (5), то система (5) еквівалентна системі (1) (симетрична властивість);
3) якщо система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі рівнянь (5), а ця в свою чергу еквівалентна деякій системі лінійних рівнянь $(*)$, то система (1) еквівалентна системі $(*)$ (транзитивна властивість).

Нехай задано деяку систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{6}$$

Нехай задано деяку систему лінійних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right. \tag{6}$$

i та j — деякі два різні числа з множини чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Будемо говорити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j, \qquad \leftarrow i\text{-ве рівняння} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \qquad \leftarrow j\text{-ве рівняння} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{7}$$

Будемо говорити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, & \leftarrow i\text{-ве рівняння} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, & \leftarrow j\text{-ве рівняння} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{7}$$

одержана із системи рівнянь (6)

Будемо говорити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \quad \leftarrow i\text{-ве рівняння} \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad \leftarrow j\text{-ве рівняння} \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{7}$$

одержана із системи рівнянь (6) за допомогою елементарного перетворення типу (I).

Будемо говорити, що система лінійних рівнянь

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, & \leftarrow i\text{-ве рівняння} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, & \leftarrow j\text{-ве рівняння} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s.
\end{cases} \tag{7}
$$

одержана із системи рівнянь (6) за допомогою елементарного перетворення типу (I).

Підкреслимо всі рівняння обох систем лінійних рівнянь (6) і (7), крім i-го та j-го рівнянь, однакові, а i-е рівняння системи (7) таке ж як j-е рівняння системи (6), а j-е рівняння системи (7) співпадає з j-им рівняння системи (6).

Далі, нехай c — деяке число з множини F.

Далі, нехай c — деяке число з множини F. Будемо говорити, що система лінійних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right.$$

Далі, нехай c — деяке число з множини F. Будемо говорити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \dots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

одержана із системи рівнянь (6) за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Теорема 1

Якщо одна із двох деяких систем лінійних рівнянь

Теорема 1

Якщо одна із двох деяких систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом скінченного числа елементарних перетворень типу (I)

Теорема 1

Якщо одна із двох деяких систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом скінченного числа елементарних перетворень типу (I) *або типу* (II),

Теорема 1

Якщо одна із двох деяких систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом скінченного числа елементарних перетворень типу (I) *або типу* (II), *то ці системи лінійних рівнянь еквівалентні.*

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує,

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку,

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.
Дійсно,

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.
Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5)

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1)

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.
Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

СЛР (1)

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*)$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*) \to \text{СЛР } (2^*)$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*) \to \text{СЛР } (2^*) \to \ldots \to \text{СЛР } (k^*),$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*) \to \text{СЛР } (2^*) \to \ldots \to \text{СЛР } (k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР }(1) \to \text{СЛР }(1^*) \to \text{СЛР }(2^*) \to \ldots \to \text{СЛР }(k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі така ж, як система лінійних рівнянь (5).

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.
Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР }(1) \to \text{СЛР }(1^*) \to \text{СЛР }(2^*) \to \ldots \to \text{СЛР }(k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі така ж, як система лінійних рівнянь (5). Тоді

$$\text{СЛР }(1)$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*) \to \text{СЛР } (2^*) \to \ldots \to \text{СЛР } (k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі така ж, як система лінійних рівнянь (5). Тоді

$$\text{СЛР } (1) \sim \text{СЛР } (1^*)$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*) \to \text{СЛР } (2^*) \to \ldots \to \text{СЛР } (k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі така ж, як система лінійних рівнянь (5). Тоді

$$\text{СЛР } (1) \sim \text{СЛР } (1^*) \sim \text{СЛР } (2^*)$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.
Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР }(1) \to \text{СЛР }(1^*) \to \text{СЛР }(2^*) \to \ldots \to \text{СЛР }(k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі така ж, як система лінійних рівнянь (5). Тоді

$$\text{СЛР }(1) \sim \text{СЛР }(1^*) \sim \text{СЛР }(2^*) \sim \ldots \sim \text{СЛР }(5).$$

Доведення

Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Дійсно, нехай систему лінійних рівнянь (5) одержали із системи лінійних рівнянь (1) за допомогою деякого числа k елементарних перетворень типу (I) або (II).

$$\text{СЛР } (1) \to \text{СЛР } (1^*) \to \text{СЛР } (2^*) \to \ldots \to \text{СЛР } (k^*),$$

Остання система лінійних рівнянь (k^*) у цій діаграмі така ж, як система лінійних рівнянь (5). Тоді

$$\text{СЛР } (1) \sim \text{СЛР } (1^*) \sim \text{СЛР } (2^*) \sim \ldots \sim \text{СЛР } (5).$$

Отже,

$$\text{СЛР } (1) \sim \text{СЛР } (5).$$

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1)

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5)

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1)

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I),

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь.

Доведення

Нехай γ_1, γ_2, ..., γ_n — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є також розв'язком системи (5),

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є також розв'язком системи (5), оскільки вона складається із тих же рівнянь, що і система (1),

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є також розв'язком системи (5), оскільки вона складається із тих же рівнянь, що і система (1), тільки помінявся порядок їхнього запису.

Доведення

Нехай γ_1, γ_2, ..., γ_n — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що γ_1, γ_2, ..., γ_n є також розв'язком системи (5), оскільки вона складається із тих же рівнянь, що і система (1), тільки помінявся порядок їхнього запису. Аналогічно, довільний розв'язок системи (5)

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є також розв'язком системи (5), оскільки вона складається із тих же рівнянь, що і система (1), тільки помінявся порядок їхнього запису. Аналогічно, довільний розв'язок системи (5) є розв'язком системи (1).

Доведення

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (5) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме зміною місцями деякого i-го та деякого j-го рівнянь. Тоді справджуються рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases}$$

Очевидно, це означає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є також розв'язком системи (5), оскільки вона складається із тих же рівнянь, що і система (1), тільки помінявся порядок їхнього запису. Аналогічно, довільний розв'язок системи (5) є розв'язком системи (1). Тому множини розв'язків системи лінійних рівнянь (1) і (5) є рівними.

Доведення

Якщо ж система лінійних рівнянь (1) є несумісною,

Доведення

Якщо ж система лінійних рівнянь (1) є несумісною, то такою є і система рівнянь (5).

Доведення

Якщо ж система лінійних рівнянь (1) є несумісною, то такою є і система рівнянь (5). Тому що за сказаним вище, у протилежному випадку ми б одержали суперечність.

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5)

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1)

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II),

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II),

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1)

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння,

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$,

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$.

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5)

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1),

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5).

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$

$$= a_{i1}\gamma_1 + ca_{j1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + ca_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n + ca_{jn}\gamma_n =$$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$

$$= a_{i1}\gamma_1 + ca_{j1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + ca_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n + ca_{jn}\gamma_n =$$

$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + c(a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n) =$$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$

$$= a_{i1}\gamma_1 + ca_{j1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + ca_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n + ca_{jn}\gamma_n =$$

$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + c(a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n) =$$

$$= b_i + cb_j.$$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$

$$= a_{i1}\gamma_1 + ca_{j1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + ca_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n + ca_{jn}\gamma_n =$$

$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + c(a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n) =$$

$$= b_i + cb_j.$$

Остання рівність слідує із того, що система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$
$$= a_{i1}\gamma_1 + ca_{j1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + ca_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n + ca_{jn}\gamma_n =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + c(a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n) =$$
$$= b_i + cb_j.$$

Остання рівність слідує із того, що система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ задовольняє i-е та j-е рівняння системи рівнянь (1),

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1} + ca_{j1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{j2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})\gamma_n =$$
$$= a_{i1}\gamma_1 + ca_{j1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + ca_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n + ca_{jn}\gamma_n =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + c(a_{j1}\gamma_1 + a_{j2}\gamma_2 + \cdots + a_{jn}\gamma_n) =$$
$$= b_i + cb_j.$$

Остання рівність слідує із того, що система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє i-е та j-е рівняння системи рівнянь (1), тобто

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i,$$

Доведення

Нехай тепер система лінійних рівнянь (5) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали інше j-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (5) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи рівнянь (5). Далі, обчислимо

$$(a_{i1}+ca_{j1})\gamma_1+(a_{i2}+ca_{j2})\gamma_2+\cdots+(a_{in}+ca_{jn})\gamma_n =$$

$$= a_{i1}\gamma_1+ca_{j1}\gamma_1+a_{i2}\gamma_2+ca_{j2}\gamma_2+\cdots+a_{in}\gamma_n+ca_{jn}\gamma_n =$$

$$= (a_{i1}\gamma_1+a_{i2}\gamma_2+\cdots+a_{in}\gamma_n)+c(a_{j1}\gamma_1+a_{j2}\gamma_2+\cdots+a_{jn}\gamma_n) =$$

$$= b_i + cb_j.$$

Остання рівність слідує із того, що система чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ задовольняє i-е та j-е рівняння системи рівнянь (1), тобто

$$a_{i1}\gamma_1+a_{i2}\gamma_2+\cdots+a_{in}\gamma_n = b_i,$$

$$a_{j1}\gamma_1+a_{j2}\gamma_2+\cdots+a_{jn}\gamma_n = b_j.$$

Доведення

Це означає, що розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

Доведення

Це означає, що розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ системи рівнянь (1)

Доведення

Це означає, що розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ системи рівнянь (1) задовольняє також i-е рівняння системи рівнянь (5).

Доведення

Це означає, що розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ системи рівнянь (1) задовольняє також i-е рівняння системи рівнянь (5). З усього сказаного слідує, що система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

Доведення

Це означає, що розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ системи рівнянь (1) задовольняє також i-е рівняння системи рівнянь (5). З усього сказаного слідує, що система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є розв'язком системи рівнянь (5).

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n є розв'язком системи (5).

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1)

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5)

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь додати j-е помножене на $-c$.

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь додати j-е помножене на $-c$. Тому із попередніх міркувань випливає, що γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи рівнянь (1).

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь додати j-е помножене на $-c$. Тому із попередніх міркувань випливає, що γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи рівнянь (1).
Залишилось відзначити,

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь додати j-е помножене на $-c$. Тому із попередніх міркувань випливає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є розв'язком системи рівнянь (1).

Залишилось відзначити, що несумісність однієї системи тягне за собою несумісність іншої,

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел γ_1, γ_2, $\dots$, γ_n є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь додати j-е помножене на $-c$. Тому із попередніх міркувань випливає, що γ_1, γ_2, $\dots$, γ_n є розв'язком системи рівнянь (1).

Залишилось відзначити, що несумісність однієї системи тягне за собою несумісність іншої, оскільки у протилежному випадку ми одержали б суперечність.

Доведення

Нехай тепер навпаки система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є розв'язком системи (5). Тоді систему рівнянь (1) можна отримати із системи (5) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи рівнянь додати j-е помножене на $-c$. Тому із попередніх міркувань випливає, що $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є розв'язком системи рівнянь (1).

Залишилось відзначити, що несумісність однієї системи тягне за собою несумісність іншої, оскільки у протилежному випадку ми одержали б суперечність. Теорему доведено.

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду.

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1)

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$,

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю,

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду

$$0 = b,$$

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду

$$0 = b,$$

де $b \neq 0$,

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду

$$0 = b,$$

де $b \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь є несумісною.

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду

$$0 = b,$$

де $b \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь є несумісною. Прикладом такої несумісної системи лінійних рівнянь

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи лінійних рівнянь (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду

$$0 = b,$$

де $b \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь є несумісною.
Прикладом такої несумісної системи лінійних рівнянь є наступне рівняння

$$0x_1 + 0x_2 = 1.$$

Нарешті,

Нарешті, якщо система лінійних рівнянь місить рівняння вигляду

$$0 = 0,$$

Нарешті, якщо система лінійних рівнянь місить рівняння вигляду

$$0 = 0,$$

то домовимось його не писати.

Нарешті, якщо система лінійних рівнянь місить рівняння вигляду

$$0 = 0,$$

то домовимось його не писати. Це не впливає на множину розв'язків цієї системи лінійних рівнянь, оскільки будь-який впорядкований набір із n чисел із множини F є розв'язком рівняння вигляду

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0.$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \end{cases}$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\left\{\begin{aligned} c_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ c_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned}\right.$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad\quad c_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \end{cases}$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots . \end{cases}$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_s, \end{cases}$$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_s, \end{cases} \tag{8}$$

де $r \leq n$,

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_s, \end{cases} \tag{8}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$,

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду

$$\left\{\begin{aligned} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n &= d_r, \\ 0 &= d_{r+1}, \\ \dots & \\ 0 &= d_s, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \neq 0$

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_s, \end{cases} \tag{8}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$,

Означення 6

Система лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_s, \end{cases} \tag{8}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, називається **системою лінійних рівнянь східчастого вигляду**.

Приклади систем лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} \underline{4x_1} + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ \quad\;\, \mid \underline{9x_2} + 7x_3 + 3x_4 = 8, \\ \quad\quad\quad\;\, \mid \underline{\;\; x_3} - 4x_4 = 1, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\, \mid \underline{6x_4 = 7;} \end{cases}$$

Приклади систем лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} \underline{4x_1} + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ \qquad | \ \underline{9x_2} + 7x_3 + 3x_4 = 8, \\ \qquad\qquad | \ \underline{x_3} - 4x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad | \ \underline{6x_4 = 7}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{-x_1 + 2x_2 + x_3} - 5x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad | \ \underline{3x_4 = 5}; \end{cases}$$

Приклади систем лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} \underline{4x_1} + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ \quad\quad \mid \underline{9x_2} + 7x_3 + 3x_4 = 8, \\ \quad\quad\quad\quad \mid \underline{x_3} - 4x_4 = 1, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \mid \underline{6x_4 = 7}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{-x_1 + 2x_2 + x_3} - 5x_4 = 1, \\ \quad\quad\quad\quad \mid \underline{3x_4 = 5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -4, \\ \quad \mid \underline{2x_2 - 3x_3 + 6x_4} + 9x_5 - 8x_6 = 21, \\ \quad\quad\quad\quad \mid \underline{x_5} - 4x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad \mid \underline{0 = 15.} \end{cases}$$

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків.

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.
Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{9}$$

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{9}$$

де $r \leq n$,

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.
Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{9}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$,

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{9}$$

де $r \le n$, $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \neq 0$

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь — знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{9}$$

де $r \le n$, $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \ne 0$ $(j = 1,\, 2,\, \ldots,\, r)$.

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь.

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \\ \end{cases}$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \dots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \end{cases}$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$,

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\left\{\begin{aligned} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \dots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{1n}\chi_n &= d_1, \\ c_{2k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{2n}\chi_n &= d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ c_{rk_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{rn}\chi_n &= d_r. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10)

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \dots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ c_{2k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{rk_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_r} = c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n)$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \dots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \dots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ c_{2k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{rk_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$,

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r = \frac{d_r}{c_{rn}}, \tag{12}$$

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r = \frac{d_r}{c_{rn}}, \tag{12}$$

якщо $k_r = n$.

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \dots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \dots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \dots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \dots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r = \frac{d_r}{c_{rn}}, \tag{12}$$

якщо $k_r = n$. Отже, χ_{k_r} виражається через χ_{k_r+1}, χ_{k_r+2}, ..., χ_n

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел χ_1, χ_2, $\ldots$, χ_n множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r = \frac{d_r}{c_{rn}}, \tag{12}$$

якщо $k_r = n$. Отже, χ_{k_r} виражається через χ_{k_r+1}, χ_{k_r+2}, $\ldots$, χ_n (за умови $k_r < n$),

Припустимо, що система рівнянь (9) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (10) слідує, що

$$\begin{aligned} \chi_{k_r} &= c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n) = \\ &= \frac{1}{c_{rk_r}} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n), \end{aligned} \tag{11}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r = \frac{d_r}{c_{rn}}, \tag{12}$$

якщо $k_r = n$. Отже, χ_{k_r} виражається через $\chi_{k_r+1}, \chi_{k_r+2}, \ldots, \chi_n$ (за умови $k_r < n$), причому χ_{k_r} визначається цими числами однозначно.

Далі,

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10)

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c_{r-1\,k_{r-1}}^{-1} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n)$$

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c_{r-1\,k_{r-1}}^{-1} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \dots - c_{r-1\,n}\chi_n) =$$
$$= \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \dots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c_{r-1\,k_{r-1}}^{-1} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n) =$$
$$= \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Підставляючи у праву частину рівності (13)

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c^{-1}_{r-1\,k_{r-1}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \dots - c_{r-1\,n}\chi_n) = \\ = \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \dots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Підставляючи у праву частину рівності (13) замість χ_{k_r} значення правої частини рівності (11)

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c_{r-1\,k_{r-1}}^{-1} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \dots - c_{r-1\,n}\chi_n) =$$
$$= \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \dots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Підставляючи у праву частину рівності (13) замість χ_{k_r} значення правої частини рівності (11) (або (12)

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c^{-1}_{r-1\,k_{r-1}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n) = \\ = \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Підставляючи у праву частину рівності (13) замість χ_{k_r} значення правої частини рівності (11) (або (12) у залежності $k_r < n$ чи $k_r = n$),

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c_{r-1\,k_{r-1}}^{-1} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n) = \\ = \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Підставляючи у праву частину рівності (13) замість χ_{k_r} значення правої частини рівності (11) (або (12) у залежності $k_r < n$ чи $k_r = n$), одержимо, що $\chi_{k_{r-1}}$

Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (10) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c^{-1}_{r-1\,k_{r-1}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n) =$$
$$= \frac{1}{c_{r-1\,k_{r-1}}} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n). \quad (13)$$

Підставляючи у праву частину рівності (13) замість χ_{k_r} значення правої частини рівності (11) (або (12) у залежності $k_r < n$ чи $k_r = n$), одержимо, що $\chi_{k_{r-1}}$ однозначно визначається числами $\chi_{k_{r-1}+1}$, $\chi_{k_{r-1}+2}, \ldots, \chi_{k_r-1}, \chi_{k_r+1}, \ldots, \chi_n$.

Продовжуючи цей процес,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n.

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ виражаються через інші із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Причому числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9),

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9).

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ виражаються через інші із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Причому числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ виражаються через інші із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Причому числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною.

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки.

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує,

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує, тобто всі невідомі x_1, x_2, ..., x_n

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує, тобто всі невідомі x_1, x_2, ..., x_n є головними, Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, $\ldots$, χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, $\ldots$, χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, $\ldots$, χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, $\ldots$, χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, $\ldots$, x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує, тобто всі невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n є головними, то система рівнянь (9) має лише один єдиний розв'язок, Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, $\ldots$, χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, $\ldots$, χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, $\ldots$, χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, $\ldots$, χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, $\ldots$, x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує, тобто всі невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n є головними, то система рівнянь (9) має лише один єдиний розв'язок, тобто вона є визначеною.

Продовжуючи цей процес, підіймаючись знизу до верху по системі рівностей (10), врешті решт одержимо, що числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} виражаються через інші із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n. Причому числа χ_{k_1}, χ_{k_2}, ..., χ_{k_r} однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел χ_1, χ_2, ..., χ_n, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (9).

Назвемо невідомі x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r} головними невідомими системи лінійних рівнянь (9), а інші невідомі, якщо такі існують, — вільними.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (9). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною. Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує, тобто всі невідомі x_1, x_2, ..., x_n є головними, то система рівнянь (9) має лише один єдиний розв'язок, тобто вона є визначеною. Нами доведена наступна теорема.

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді,

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$,

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$, *де* $b \neq 0$.

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$*, де* $b \neq 0$*. Сумісна система лінійних рівнянь східчастого вигляду*

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$. Сумісна система лінійних рівнянь східчастого вигляду є визначеною

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$. Сумісна система лінійних рівнянь східчастого вигляду є визначеною тоді і тільки тоді,

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$. Сумісна система лінійних рівнянь східчастого вигляду є визначеною тоді і тільки тоді, коли число її рівнянь

Теорема 2

Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$*, де* $b \neq 0$*. Сумісна система лінійних рівнянь східчастого вигляду є визначеною тоді і тільки тоді, коли число її рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Означення 7

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими

Означення 7

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими ми будемо називати систему n алгебраїчних виразів,

Означення 7

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими ми будемо називати систему n алгебраїчних виразів, які залежать від деяких параметрів таких,

Означення 7

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими ми будемо називати систему n алгебраїчних виразів, які залежать від деяких параметрів таких, що підставляючи замість цих параметрів

Означення 7

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими ми будемо називати систему n алгебраїчних виразів, які залежать від деяких параметрів таких, що підставляючи замість цих параметрів довільні значення із множини F,

Означення 7

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими ми будемо називати систему n алгебраїчних виразів, які залежать від деяких параметрів таких, що підставляючи замість цих параметрів довільні значення із множини F, ми одержимо множину всіх розв'язків заданої системи лінійних рівнянь.

Теорема 3 (Ґаусс)

Будь-яка система лінійних рівнянь з n невідомими

Теорема 3 (Ґаусс)

Будь-яка система лінійних рівнянь з n невідомими з коефіцієнтами з множини F

Теорема 3 (Ґаусс)

Будь-яка система лінійних рівнянь з n невідомими з коефіцієнтами з множини F еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Доведення

Доведемо більш строге твердження.

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II)

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1.

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.
Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Припустимо,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Припустимо, що довільну систему лінійних рівнянь,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Припустимо, що довільну систему лінійних рівнянь, що складаються з менш як s рівнянь,

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Припустимо, що довільну систему лінійних рівнянь, що складаються з менш як s рівнянь, за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II)

Доведення

Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Припустимо, що довільну систему лінійних рівнянь, що складаються з менш як s рівнянь, за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, $x_2, \ldots, x_n$

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю,

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо,

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.
Якщо серед рівнянь системи (1)

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.
Якщо серед рівнянь системи (1) є таке,

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, ..., x_n вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.
Якщо серед рівнянь системи (1) є таке, у якого коефіцієнт біля невідомої x_1 не дорівнює нулю,

Доведення

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими x_1, $x_2, \dots, x_n$ вигляду (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду.
Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.
Якщо серед рівнянь системи (1) є таке, у якого коефіцієнт біля невідомої x_1 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 1$.

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю,

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю,

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д.,

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих,

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти.

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує,

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує, оскільки хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує, оскільки хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.
За домовленістю

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує, оскільки хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

За домовленістю перепишемо систему лінійних рівнянь у вигляді

$$\left\{ a_{1k_1}x_{k_1} + a_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \right.$$

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує, оскільки хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

За домовленістю перепишемо систему лінійних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} + a_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2k_1}x_{k_1} + a_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Доведення

Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує, оскільки хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

За домовленістю перепишемо систему лінійних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} + a_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2k_1}x_{k_1} + a_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{sk_1}x_{k_1} + a_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases}$$

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$,

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує,

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \dots, s\}$

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$.

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2,$ 3, $\ldots,$ $s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1).

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \tag{14}$$

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2,$ 3, $\ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{array}\right. \qquad (14)$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1)

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \tag{14}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1) і в якій коефіцієнт a'_{1k_1} не дорівнює нулю.

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{array}\right. \tag{14}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1) і в якій коефіцієнт a'_{1k_1} не дорівнює нулю.

Якщо ж $a_{1k_1} \neq 0$,

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{array}\right. \tag{14}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1) і в якій коефіцієнт a'_{1k_1} не дорівнює нулю.

Якщо ж $a_{1k_1} \neq 0$, то просто перепозначимо a_{ij} через a'_{ij}

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2,\ 3,\ \dots,\ s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \tag{14}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1) і в якій коефіцієнт a'_{1k_1} не дорівнює нулю.

Якщо ж $a_{1k_1} \neq 0$, то просто перепозначимо a_{ij} через a'_{ij} , а b_j через b'_j

Доведення

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \tag{14}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1) і в якій коефіцієнт a'_{1k_1} не дорівнює нулю.

Якщо ж $a_{1k_1} \neq 0$, то просто перепозначимо a_{ij} через a'_{ij} , а b_j через b'_j для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14):

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше,

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$;

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше,

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.;

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше,

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$.

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь,

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях,

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого,

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого, при невідомому x_{k_1} дорівнюють нулю:

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого, при невідомому x_{k_1} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_1} + a''_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого, при невідомому x_{k_1} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_1} + a''_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad\qquad\quad a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \\ \end{cases}$$

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого, при невідомому x_{k_1} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_1} + a''_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad\qquad a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \end{cases}$$

Доведення

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (14): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого, при невідомому x_{k_1} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_1} + a''_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad\qquad a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a''_{sn}x_n = b''_s. \end{cases} \tag{15}$$

Доведення

За припущенням індукції

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь,

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь)

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II)

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду:

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \dots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a'''_{2k_2}x_{k_2} + \dots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad a'''_{rk_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'''_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'''_s, \end{cases} \tag{17}$$

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a'''_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a'''_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\ 0 = b'''_{r+1}, \\ \ldots . \\ 0 = b'''_s, \end{cases} \tag{17}$$

де $r \leq n$,

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1}+\dots+a''_{2n}x_n=b''_2, \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1}+\dots+a''_{sn}x_n=b''_s \end{cases} \qquad (16)$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a'''_{2k_2}x_{k_2}+\dots+a'''_{2k_r}x_{k_r}+\dots+a'''_{2n}x_n=b'''_2, \\ \qquad\qquad\cdot\;\cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'''_{rk_r}x_{k_r}+\dots+a'''_{rn}x_n=b'''_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=b'''_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=b'''_s, \end{cases} \qquad (17)$$

де $r \leq n,\ k_1 < k_2 < \ldots < k_r,$

Доведення

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{16}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a'''_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\ \qquad\qquad . \; . \\ \qquad\qquad\qquad a'''_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'''_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \; . \; . \; . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'''_s, \end{cases} \tag{17}$$

де $r \leq n$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $a'''_{jk_j} \neq 0$ $(j = 2, 3, \ldots, r)$.

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15)

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням,

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням, за допомогою яких із системи (16)

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням, за допомогою яких із системи (16) одержана система рівнянь (17),

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням, за допомогою яких із системи (16) одержана система рівнянь (17), ми отримаємо систему лінійних рівнянь східчастого вигляду:

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням, за допомогою яких із системи (16) одержана система рівнянь (17), ми отримаємо систему лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_2} + \cdots + a''_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + a''_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad a'''_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'''_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\ \qquad 0 = b'''_{r+1}, \\ \qquad \dots . \\ \qquad 0 = b'''_s. \end{cases}$$

Доведення

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (15) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням, за допомогою яких із системи (16) одержана система рівнянь (17), ми отримаємо систему лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$
\begin{cases}
a''_{1k_1}x_{k_2} + \dots + a''_{1k_2}x_{k_2} + \dots + a''_{1k_r}x_{k_r} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\
\qquad a'''_{2k_2}x_{k_2} + \dots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\
\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad a'''_{rk_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\
\qquad 0 = b'''_{r+1}, \\
\qquad \dots. \\
\qquad 0 = b'''_s.
\end{cases}
$$

Це завершує доведення теореми.

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь до східчастого вигляду.

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь до східчастого вигляду. Потім, скориставшись алгоритмом знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь до східчастого вигляду. Потім, скориставшись алгоритмом знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, викладеним у доведенні теореми 2, Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь до східчастого вигляду. Потім, скориставшись алгоритмом знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, викладеним у доведенні теореми 2, знайти загальний розв'язок заданої системи рівнянь.

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь до східчастого вигляду. Потім, скориставшись алгоритмом знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, викладеним у доведенні теореми 2, знайти загальний розв'язок заданої системи рівнянь. Цей спосіб знаходження множини розв'язків системи лінійних рівнянь

Отже, із доведення теореми Ґаусса випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему рівнянь до східчастого вигляду. Потім, скориставшись алгоритмом знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, викладеним у доведенні теореми 2, знайти загальний розв'язок заданої системи рівнянь. Цей спосіб знаходження множини розв'язків системи лінійних рівнянь називається методом Ґаусса розв'язування системи лінійних рівнянь.

Приклади розв'язування задач

1. Розв'язати методом Ґаусса

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad\; x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{18}$$

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи лінійних рівнянь (18)

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = \ \ 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = \ \ 4, \\ \qquad\ x_2 - \ x_3 + \ x_4 = -3, \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + \ x_4 = -3. \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи лінійних рівнянь (18) такі, що у новій системі буде тільки одне рівняння,

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \phantom{x_1 -{}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи лінійних рівнянь (18) такі, що у новій системі буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1.

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \qquad (18)$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи лінійних рівнянь (18) такі, що у новій системі буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1. Для цього досить до другого рівняння системи (18)

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи лінійних рівнянь (18) такі, що у новій системі буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1. Для цього досить до другого рівняння системи (18) додати її перше рівняння,

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи лінійних рівнянь (18) такі, що у новій системі буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1. Для цього досить до другого рівняння системи (18) додати її перше рівняння, помножене на -1.

Приклади розв'язування задач

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = \quad 1, \\ \\ \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \end{cases}$$

Приклади розв'язування задач

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 1, \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19)

Маємо

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\
 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\
 x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\
 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3.
\end{cases}
\qquad (19)
$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі,

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння,

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння,

Приклади розв'язування задач

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2.

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (19)

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \qquad (19)$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (19)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Маємо

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\
\quad - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\
\quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (19)

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\
\qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\
\\
\\
\end{cases}
$$

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (19)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{19}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (19) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (19)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{20}$$

Приклади розв'язування задач

А потім послідовно

А потім послідовно до третього

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20)

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7.

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = \quad 1, \\ \\ \\ \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = \quad 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \\ \\ \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}-2x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_3 + 4x_4 = -12, \\ -4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21)

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & + 3x_2 & & - 3x_4 = & 1, \\ & x_2 & - x_3 & + x_4 = & -3, \\ & & - 2x_3 & + 4x_4 = & -12, \\ & & - 4x_3 & + 8x_4 = & -24. \end{array}\right. \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння,

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \\ \\ \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \\ \\ \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_3 + 4x_4 = -12, \\ -4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_3 + 4x_4 = -12, \\ -4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_3 + 4x_4 = -12, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, система рівнянь (22)

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (20) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{21}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (21) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, система рівнянь (22) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 3x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases} \tag{23}$$

Приклади розв'язування задач

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною.

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим.

Приклади розв'язування задач

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c.

Приклади розв'язування задач

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$.

Приклади розв'язування задач

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (23), визначимо з нього x_2:

Приклади розв'язування задач

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (23), визначимо з нього x_2:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - c + 6 + 2c = 3 + c.$$

Приклади розв'язування задач

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (23), визначимо з нього x_2:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - c + 6 + 2c = 3 + c.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 у перше рівняння, визначимо x_1:

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (23), визначимо з нього x_2:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - c + 6 + 2c = 3 + c.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 у перше рівняння, визначимо x_1:

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3c - 9 - 3c = -8.$$

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (23), визначимо з нього x_2:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - c + 6 + 2c = 3 + c.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 у перше рівняння, визначимо x_1:

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3c - 9 - 3c = -8.$$

Отже,

$$x_1 = -8, \qquad x_2 = 3 + c, \qquad x_3 = 6 + 2c$$

Оскільки система рівнянь (23) має східчастий вигляд, то із теореми 2 випливає, що система лінійних рівнянь (18) є невизначеною. Вважатимемо x_4 вільним невідомим. Тому x_4 може дорівнювати будь-якому числу c. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2c$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (23), визначимо з нього x_2:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - c + 6 + 2c = 3 + c.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 у перше рівняння, визначимо x_1:

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3c - 9 - 3c = -8.$$

Отже,

$$x_1 = -8, \qquad x_2 = 3 + c, \qquad x_3 = 6 + 2c$$

і система дійсних чисел

$$-8,\ 3 + c,\ 6 + 2c,\ c$$

є загальним розв'язком, даної в умові завдання, системи лінійних рівнянь.

Зауваження. На прикладі розв'язання попереднього завдання можна пересвідчитися, що при відшуканні розв'язків систем лінійних рівнянь методом Ґаусса всі елементарні перетворення систем доцільно проводити над відповідними їм розширеними матрицями.

Зауваження. На прикладі розв'язання попереднього завдання можна пересвідчитися, що при відшуканні розв'язків систем лінійних рівнянь методом Ґаусса всі елементарні перетворення систем доцільно проводити над відповідними їм розширеними матрицями. І якщо A і B — матриці еквівалентних систем лінійних рівнянь, то писатимемо $A \sim B$. Проілюструємо це в наступному прикладі.

2. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases} \tag{24}$$

2. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases} \tag{24}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи (24), в якій для зручності стовпець вільних членів відокремимо вертикальною рискою

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1.

Приклади розв'язування задач

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3,

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5,

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2.

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right.$$

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right.$$

Приклади розв'язування задач

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ & & & & \end{array}\right)$$

Далі виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка матриці C четвертий, помножений на -3. Потім поміняємо місцями другий та третій рядки. Будемо мати, що

$$C \sim D = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка матриці C четвертий, помножений на -3. Потім поміняємо місцями другий та третій рядки. Будемо мати, що

$$C \sim D = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Далі, послідовно додавши до третього та четвертого рядків матриці D її другий рядок, помножений відповідно на -7 і -5, одержимо

$$D \sim F = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array}\right).$$

Нарешті, до четвертого рядка матриці D додамо третій, помножений на $-\frac{30}{40}$.

Нарешті, до четвертого рядка матриці D додамо третій, помножений на $-\frac{30}{40}$. Одержимо

$$F \sim G = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Нарешті, до четвертого рядка матриці D додамо третій, помножений на $-\frac{30}{40}$. Одержимо

$$F \sim G = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Матриця G є розширеною матрицею системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ \quad x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ \quad -40x_4 = 83, \\ \quad 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

Приклади розв'язування задач

Нарешті, до четвертого рядка матриці D додамо третій, помножений на $-\frac{30}{40}$. Одержимо

$$F \sim G = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Матриця G є розширеною матрицею системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ -40x_4 = 83, \\ 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

в якій ліва частина останнього рівняння дорівнює нулю, а права частина відмінна від нуля. Така система лінійних рівнянь немає розв'язку, тобто є несумісною. Отже, дана в умові система лінійних рівнянь є несумісною.