Ранг матриці

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

22 жовтня 2022 року

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел,

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.

Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.

Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.

Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix},$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.
Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.
Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Рангом матриці A

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.
Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Рангом матриці A називається ранг системи векторів-стовпців цієї матриці,

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.

Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Рангом матриці A називається ранг системи векторів-стовпців цієї матриці, тобто ранг системи векторів $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— деяка $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — деякі натуральні числа.

Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Рангом матриці A називається ранг системи векторів-стовпців цієї матриці, тобто ранг системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ранг матриці A будемо позначати символом $\operatorname{rank} A$.

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A,

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M.

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix},$$

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1

Якщо всі мінори k-го порядку матриці A

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1

Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю,

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1

Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю, тоді рівні нулю

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1

Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю, тоді рівні нулю і всі мінори матриці A,

Зауваження 1

Нехай M — деякий мінор матриці A, а M' — мінор детермінанта M. Тоді M' є мінором матриці A.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, \quad M' = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1

Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю, тоді рівні нулю і всі мінори матриці A, порядки яких більші за k.

Теорема 2

Ранг матриці A

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку

Теорема 2

Ранг матриці A *дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів*

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел,

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \leq k \leq \min(s, n))$,

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \leq k \leq \min(s, n))$, який є мінором найвищого порядку

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \leq k \leq \min(s, n))$, який є мінором найвищого порядку серед відмінних від нуля мінорів матриці A.

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \le k \le \min(s, n))$, який є мінором найвищого порядку серед відмінних від нуля мінорів матриці A. Не втрачаючи загальності міркувань,

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \leq k \leq \min(s, n))$, який є мінором найвищого порядку серед відмінних від нуля мінорів матриці A. Не втрачаючи загальності міркувань, можна вважати, що мінор M

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \leq k \leq \min(s, n))$, який є мінором найвищого порядку серед відмінних від нуля мінорів матриці A. Не втрачаючи загальності міркувань, можна вважати, що мінор M знаходиться у лівому верхньому кутку матриці

Теорема 2

Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Доведення.

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A $(1 \leq k \leq \min(s, n))$, який є мінором найвищого порядку серед відмінних від нуля мінорів матриці A. Не втрачаючи загальності міркувань, можна вважати, що мінор M знаходиться у лівому верхньому кутку матриці

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1\,k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \color{red}{M} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,k} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sk} & a_{s\,k+1} & \dots & a_{sn} \end{array}\right).$$

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів.

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M.

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Дійсно, якщо

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Дійсно, якщо

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ a_{k+1\,2} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Дійсно, якщо

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ a_{k+1\,2} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ a_{k+1\,k} \\ \vdots \\ a_{sk} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Дійсно, якщо

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ a_{k+1\,2} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ a_{k+1\,k} \\ \vdots \\ a_{sk} \end{pmatrix},$$

а

$$v_1' = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Дійсно, якщо

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ a_{k+1\,2} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ a_{k+1\,k} \\ \vdots \\ a_{sk} \end{pmatrix},$$

а

$$v_1' = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Дійсно, якщо

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ a_{k+1\,1} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \\ a_{k+1\,2} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ a_{k+1\,k} \\ \vdots \\ a_{sk} \end{pmatrix},$$

а

$$v_1' = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_k' = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{kk} \end{pmatrix},$$

Доведення.

то з рівності

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \bar{0} \in \mathbb{R}^s,$$

Доведення.

то з рівності

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \bar{0} \in \mathbb{R}^s,$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$,

Доведення.

то з рівності

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \bar{0} \in \mathbb{R}^s,$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, слідує рівність

Доведення.

то з рівності

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \bar{0} \in \mathbb{R}^s,$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, слідує рівність

$$\gamma_1 v_1' + \gamma_2 v_2' + \cdots + \gamma_k v_k' = \bar{0} \in \mathbb{R}^k.$$

Доведення.

то з рівності

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \bar{0} \in \mathbb{R}^s,$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, слідує рівність

$$\gamma_1 v_1' + \gamma_2 v_2' + \cdots + \gamma_k v_k' = \bar{0} \in \mathbb{R}^k.$$

Це в свою чергу означало б, що один із стовпців мінору M є лінійною комбінацією інших,

Доведення.

то з рівності

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k = \bar{0} \in \mathbb{R}^s,$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, слідує рівність

$$\gamma_1 v_1' + \gamma_2 v_2' + \cdots + \gamma_k v_k' = \bar{0} \in \mathbb{R}^k.$$

Це в свою чергу означало б, що один із стовпців мінору M є лінійною комбінацією інших, а тому мінор M дорівнював би нулю (це суперечить тому, що $M \neq 0$).

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу,

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$,

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A. За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A. За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$. Якщо ж $i \leq k$,

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A. За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$. Якщо ж $i \leq k$, то детермінант Δ_i має два однакові рядки,

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \ldots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A. За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$. Якщо ж $i \leq k$, то детермінант Δ_i має два однакові рядки, а саме i-й та $(k+1)$-й.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A. За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$. Якщо ж $i \leq k$, то детермінант Δ_i має два однакові рядки, а саме i-й та $(k+1)$-й. Це в свою чергу також означає, що $\Delta_i = 0$.

Доведення.

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A. За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$. Якщо ж $i \leq k$, то детермінант Δ_i має два однакові рядки, а саме i-й та $(k+1)$-й. Це в свою чергу також означає, що $\Delta_i = 0$. Таким чином детермінант Δ_i дорівнює нулю для довільного $i \in \{1, \dots, s\}$.

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа,

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком.

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку,

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$,

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M.

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M. Очевидно, числа A_j $(1 \leq j \leq k)$

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M. Очевидно, числа A_j $(1 \leq j \leq k)$ та M

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M. Очевидно, числа A_j $(1 \leq j \leq k)$ та M не залежать від вибору числа i.

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \le j \le k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M. Очевидно, числа A_j $(1 \le j \le k)$ та M не залежать від вибору числа i. Тоді за теоремою Лапласа

Доведення.

Обчислимо, тепер, детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \leq j \leq k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M. Очевидно, числа A_j $(1 \leq j \leq k)$ та M не залежать від вибору числа i. Тоді за теоремою Лапласа

$$\Delta_i = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ik}A_k + a_{il}M = 0.$$

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M}v_1 - \frac{A_2}{M}v_2 - \cdots - \frac{A_k}{M}v_k,$$

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M}v_1 - \frac{A_2}{M}v_2 - \cdots - \frac{A_k}{M}v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M} a_{i1} - \frac{A_2}{M} a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M} a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M} v_1 - \frac{A_2}{M} v_2 - \cdots - \frac{A_k}{M} v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M} a_{i1} - \frac{A_2}{M} a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M} a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M} v_1 - \frac{A_2}{M} v_2 - \cdots - \frac{A_k}{M} v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці відповідно з коефіцієнтами

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \quad \ldots, \quad -\frac{A_k}{M}.$$

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \dots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M}v_1 - \frac{A_2}{M}v_2 - \dots - \frac{A_k}{M}v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці відповідно з коефіцієнтами

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \quad \dots, \quad -\frac{A_k}{M}.$$

Таким чином перші k стовпців матриці A

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M} a_{i1} - \frac{A_2}{M} a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M} a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M} v_1 - \frac{A_2}{M} v_2 - \cdots - \frac{A_k}{M} v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці відповідно з коефіцієнтами

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \quad \ldots, \quad -\frac{A_k}{M}.$$

Таким чином перші k стовпців матриці A є базисом системи векторів-стовпців матриці A,

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \dots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M}v_1 - \frac{A_2}{M}v_2 - \dots - \frac{A_k}{M}v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці відповідно з коефіцієнтами

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \quad \dots, \quad -\frac{A_k}{M}.$$

Таким чином перші k стовпців матриці A є базисом системи векторів-стовпців матриці A, тому ранг матриці A дорівнює k.

Доведення.

Оскільки $M \neq 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \cdots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.
Це означає, що

$$v_l = -\frac{A_1}{M}v_1 - \frac{A_2}{M}v_2 - \cdots - \frac{A_k}{M}v_k,$$

тобто l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці відповідно з коефіцієнтами

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \quad \dots, \quad -\frac{A_k}{M}.$$

Таким чином перші k стовпців матриці A є базисом системи векторів-стовпців матриці A, тому ранг матриці A дорівнює k. Теорему доведено. □

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A,

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A, причому всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку мінору M

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A, причому всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку мінору M дорівнюють нулю.

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A, причому всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку мінору M дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці A

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A, причому всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку мінору M дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці A дорівнює k.

Теорема 3

Детермінант n-го порядку

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді,

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів,

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів, то один із стовпців є лінійною комбінацією інших;

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів, то один із стовпців є лінійною комбінацією інших;
- якщо один із стовпців детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших,

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів, то один із стовпців є лінійною комбінацією інших;
- якщо один із стовпців детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших, то цей детермінант дорівнює нулю.

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів, то один із стовпців є лінійною комбінацією інших;
- якщо один із стовпців детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших, то цей детермінант дорівнює нулю.

Доведемо необхідність.

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів, то один із стовпців є лінійною комбінацією інших;
- якщо один із стовпців детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших, то цей детермінант дорівнює нулю.

Доведемо необхідність. Розглянемо деякий детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Теорема 3

Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.

Доведення.

Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта:

- якщо стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно залежну систему векторів, то один із стовпців є лінійною комбінацією інших;
- якщо один із стовпців детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших, то цей детермінант дорівнює нулю.

Доведемо необхідність. Розглянемо деякий детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що дорівнює нулю.

Доведення.

Припустимо протилежне,

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему.

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці A дорівнює n.

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці A дорівнює n. За теоремою про ранг матриціце означає,

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці A дорівнює n. За теоремою про ранг матриціце означає, що єдиний мінор n-го порядку матриці A

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці A дорівнює n. За теоремою про ранг матриціце означає, що єдиний мінор n-го порядку матриці A не дорівнює нулю.

Доведення.

Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці A дорівнює n. За теоремою про ранг матрицiце означає, що єдиний мінор n-го порядку матриці A не дорівнює нулю. Це суперечить умові, оскільки єдиним мінором n-го порядку матриці A є детермінант Δ. $\square$

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A *дорівнює рангу системи її векторів-стовпців,*

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами.

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k.

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k.

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T,

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A,

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A, що знаходиться у рядках з номерами $j_1, \dots, j_r$ та стовпцях з номерами $i_1, \dots, i_r$ і навпаки.

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A, що знаходиться у рядках з номерами $j_1, \dots, j_r$ та стовпцях з номерами $i_1, \dots, i_r$ і навпаки. Оскільки за властивістю детермінанта ці мінори рівні,

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A, що знаходиться у рядках з номерами $j_1, \dots, j_r$ та стовпцях з номерами $i_1, \dots, i_r$ і навпаки. Оскільки за властивістю детермінанта ці мінори рівні, то найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A^T співпадає з найвищим порядком

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A, що знаходиться у рядках з номерами $j_1, \dots, j_r$ та стовпцях з номерами $i_1, \dots, i_r$ і навпаки. Оскільки за властивістю детермінанта ці мінори рівні, то найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A^T співпадає з найвищим порядком відмінних від нуля мінорів матриці A.

Теорема 4

Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.

Доведення.

Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A, що знаходиться у рядках з номерами $j_1, \dots, j_r$ та стовпцях з номерами $i_1, \dots, i_r$ і навпаки. Оскільки за властивістю детермінанта ці мінори рівні, то найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A^T співпадає з найвищим порядком відмінних від нуля мінорів матриці A. А отже, $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A$. $\square$

Будемо говорити,

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A,

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці),

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A,

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке дійсне число,

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (III),

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (III), якщо всі рядки (стовпці) матриці B,

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (III), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A,

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями.

Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на деяке дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (II).

Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою елементарного перетворення типу (III), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є добутком деякого ненульового дійсного числа на i-ий рядок (стовпець) матриці A.

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A,

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні,

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Означення 2

Матриця B називається **еквівалентною** матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s \times n}$,

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця,

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s \times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s \times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A.

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s \times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s \times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — рядки матриці A,

Означення 2

Матриця B називається еквівалентною матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.
Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — рядки матриці A, а $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — рядки матриці B.

Означення 2

Матриця B називається **еквівалентною** матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — рядки матриці A, а $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — рядки матриці B. За теоремою 4 ранг матриці A дорівнює рангу системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$,

Означення 2

Матриця B називається **еквівалентною** матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — рядки матриці A, а $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — рядки матриці B. За теоремою 4 ранг матриці A дорівнює рангу системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, а ранг матриці B дорівнює рангу системі векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$.

Означення 2

Матриця B називається **еквівалентною** матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — рядки матриці A, а $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — рядки матриці B. За теоремою 4 ранг матриці A дорівнює рангу системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, а ранг матриці B дорівнює рангу системі векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому для доведення теореми необхідно довести,

Означення 2

Матриця B називається **еквівалентною** матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A.

Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5

Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.

Доведення.

Нехай A — деяка матриця із $\mathbb{R}_{s\times n}$, а B — матриця, одержана шляхом одного елементарного перетворення над рядками чи стовпцями матриці A. Розглянемо випадок елементарного перетворення над рядками матриці A. Доведення ж випадку елементарного перетворення над стовпцями матриці A є аналогічним.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — рядки матриці A, а $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — рядки матриці B. За теоремою 4 ранг матриці A дорівнює рангу системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, а ранг матриці B дорівнює рангу системі векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому для доведення теореми необхідно довести, ранги систем векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — рівні.

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними.

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I),

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки.

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j,$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i,$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді
$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \{i, j\}.$$
Очевидно, системи векторів a_1, a_2, …, a_s

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

Очевидно, системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s та b_1, b_2, $\ldots$, b_s

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді
$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$
Очевидно, системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.
- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II),

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

  Очевидно, системи векторів a_1, a_2, ..., a_s та b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ.

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

Очевидно, системи векторів a_1, a_2, ..., a_s та b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ. Тоді

$$b_i = a_i + \gamma a_j,$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді
$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \{i, j\}.$$
Очевидно, системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s та b_1, b_2, $\dots$, b_s є еквівалентними.
- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ. Тоді
$$b_i = a_i + \gamma a_j, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots s\} \setminus \{i\}.$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді
$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$
Очевидно, системи векторів a_1, a_2, ..., a_s та b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентними.
- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ. Тоді
$$b_i = a_i + \gamma a_j, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$
Це означає, що система векторів b_1, b_2, ..., b_s лінійно виражається через систему векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

  Очевидно, системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s та b_1, b_2, $\ldots$, b_s є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ. Тоді

$$b_i = a_i + \gamma a_j, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$

  Це означає, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_s лінійно виражається через систему векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s. Але

$$a_i =$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

Очевидно, системи векторів a_1, a_2, ..., a_s та b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ. Тоді

$$b_i = a_i + \gamma a_j, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$

Це означає, що система векторів b_1, b_2, ..., b_s лінійно виражається через систему векторів a_1, a_2, ..., a_s. Але

$$a_i = (a_i + \gamma a_j) - \gamma a_j$$

Доведення.

Для цього досить довести, що ці системи векторів є еквівалентними. Розглянемо окремо кожен випадок елементарного перетворення над рядками матриці A.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (I), а саме помінявши місцями i-й та j-ий рядки. Тоді

$$b_i = a_j, \quad b_j = a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \{i, j\}.$$

  Очевидно, системи векторів a_1, a_2, ..., a_s та b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (II), а саме додавши до i-го рядка j-ий рядок матриці A, помножений на дійсне число γ. Тоді

$$b_i = a_i + \gamma a_j, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots s\} \setminus \{i\}.$$

  Це означає, що система векторів b_1, b_2, ..., b_s лінійно виражається через систему векторів a_1, a_2, ..., a_s. Але

$$a_i = (a_i + \gamma a_j) - \gamma a_j = b_i - \gamma b_j,$$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$.

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III),

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ.

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

$$b_i = \gamma a_i,$$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

$$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді
$$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots s\} \setminus \{i\}.$$
Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

  $$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$

  Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Але

  $$a_i =$$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

  $$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots s\} \setminus \{i\}.$$

  Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$. Але

  $$a_i = \frac{1}{\gamma}(\gamma a_i)$$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

  $$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$

  Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Але

  $$a_i = \frac{1}{\gamma}(\gamma a_i) = \frac{1}{\gamma} b_i, .$$

  А тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді
$$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$
Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Але
$$a_i = \frac{1}{\gamma}(\gamma a_i) = \frac{1}{\gamma} b_i, .$$
А тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

$$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots s\} \setminus \{i\}.$$

Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$. Але

$$a_i = \frac{1}{\gamma}(\gamma a_i) = \frac{1}{\gamma} b_i, .$$

А тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ є еквівалентними.

Доведення.

як наслідок одержуємо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

- Нехай матриця B одержана із A за допомогою елементарного перетворення типу (III), а саме множенням i-го рядка матриці A на ненульове дійсне число γ. Тоді

  $$b_i = \gamma a_i, \quad b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots s\} \setminus \{i\}.$$

  Це означає, що система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Але

  $$a_i = \frac{1}{\gamma}(\gamma a_i) = \frac{1}{\gamma} b_i, .$$

  А тому знову ж таки системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ є еквівалентними.

Теорема доведена.

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A.

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо,

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \ldots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця,

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці,

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень.

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} A_1$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2 = \dots = \operatorname{rank} A_n$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2 = \dots = \operatorname{rank} A_n = \operatorname{rank} B.$$

Наслідок 2

Ранги еквівалентних матриць рівні.

Доведення.

Нехай матриця B — еквівалентна матриці A. Це означає, що матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого скінченного числа елементарних перетворень над рядками чи стовпцями матриці A і, можливо, одержаних з неї матриць:

$$A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \quad \dots \quad \sim A_n = B,$$

де A_i — матриця, одержана із матриці A_{i-1} шляхом деякого елементарного перетворення над рядками, чи стовпцями цієї матриці, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — число виконаних елементарних перетворень. За попередньою теоремою

$$\operatorname{rank} A_i = \operatorname{rank} A_{i-1}$$

для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тому

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2 = \dots = \operatorname{rank} A_n = \operatorname{rank} B.$$

Наслідок доведено.

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A *рангу* r

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$-матриця A рангу r еквівалентна матриці східчастого вигляду,

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A *рангу* r *еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно* r *ненульових рядків,*

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A *рангу* r *еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно* r *ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$-матриця A рангу r еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно r ненульових рядків, тобто матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_r \leq t$,

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A *рангу* r *еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно* r *ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \le j_1 < j_2 \dots < j_r \le t$, b_{kj_k} *— ненульове число* $(k = 1, 2, \dots, r)$.

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A *рангу* r *еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно* r *ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{1j_1} & \ldots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \ldots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \ldots & b_{1t} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{2j_2} & \ldots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \ldots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{rj_r} & \ldots & b_{rt} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_r \leq t$, b_{kj_k} *— ненульове число* $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Доведення

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$-матриця A рангу r еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно r ненульових рядків, тобто матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_r \leq t$, b_{kj_k} *— ненульове число* $(k = 1, 2, \dots, r)$.

Доведення

Самостійна робота.

Наслідок 3

Будь-яка $s \times t$*-матриця* A *рангу* r *еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно* r *ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_r \leq t$, b_{kj_k} *— ненульове число* $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Доведення

Самостійна робота.

Доведення наслідку аналогічне доведенню теореми Ґаусса про еквівалентність системі лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Наслідок 4

Довільна $s \times t$*-матриця рангу* r

Наслідок 4

Довільна $s \times t$*-матриця рангу* r *еквівалентна матриці діагональної форми,*

Наслідок 4

Довільна $s \times t$*-матриця рангу* r *еквівалентна матриці діагональної форми, на головній діагоналі якої знаходяться* r *одиниць,*

Наслідок 4

Довільна $s \times t$-матриця рангу r еквівалентна матриці діагональної форми, на головній діагоналі якої знаходяться r одиниць, тобто матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Наслідок 4

Довільна $s \times t$-матриця рангу r еквівалентна матриці діагональної форми, на головній діагоналі якої знаходяться r одиниць, тобто матриці вигляду

$$\mathrm{diag}[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0]_{s\times t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Наслідок 4

Довільна $s \times t$-матриця рангу r еквівалентна матриці діагональної форми, на головній діагоналі якої знаходяться r одиниць, тобто матриці вигляду

$$\operatorname{diag}[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0]_{s\times t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення

Наслідок 4

Довільна $s \times t$-матриця рангу r еквівалентна матриці діагональної форми, на головній діагоналі якої знаходяться r одиниць, тобто матриці вигляду

$$\operatorname{diag}[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots, 0]_{s\times t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення

Самостійна робота.

Теорема 6

Ранг добутку матриць A *і* B

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B,

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A,$$

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B.$$

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— деякі відповідно

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— деякі відповідно $s \times n$-

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— деякі відповідно $s \times n$- та $n \times t$-матриці з дійсними елементами.

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— деякі відповідно $s \times n$- та $n \times t$-матриці з дійсними елементами. Позначимо через $C = \|c_{ij}\|_{s\times t}$ добуток AB.

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— деякі відповідно $s \times n$- та $n \times t$-матриці з дійсними елементами. Позначимо через $C = \|c_{ij}\|_{s\times t}$ добуток AB. Тоді

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \tag{3}$$

Теорема 6

Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— деякі відповідно $s \times n$- та $n \times t$-матриці з дійсними елементами. Позначимо через $C = \|c_{ij}\|_{s \times t}$ добуток AB. Тоді

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{3}$$

для будь-яких $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ та $j \in \{1, 2, \dots, t\}$.

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix},$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots,$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix},$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix},$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots,$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad w_t = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{st} \end{pmatrix}.$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_t = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{st} \end{pmatrix}.$$

З формул (3) для c_{ij}

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_t = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{st} \end{pmatrix}.$$

З формул (3) для c_{ij} випливає, що

$$w_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \dots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{s1}b_{1j} + a_{s2}b_{2j} + \dots + a_{sn}b_{nj} \end{pmatrix}$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_t = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{st} \end{pmatrix}.$$

З формул (3) для c_{ij} випливає, що

$$w_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \dots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{s1}b_{1j} + a_{s2}b_{2j} + \dots + a_{sn}b_{nj} \end{pmatrix} = b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \dots + b_{nj}v_n$$

Доведення

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad w_t = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{st} \end{pmatrix}.$$

З формул (3) для c_{ij} випливає, що

$$w_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{s1}b_{1j} + a_{s2}b_{2j} + \cdots + a_{sn}b_{nj} \end{pmatrix} = b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \cdots + b_{nj}v_n$$

для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t

Доведення

Таким чином, система векторів $w_1, w_2, \ldots, w_t$ лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C

Доведення

Таким чином, система векторів $w_1, w_2, \ldots, w_t$ лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A.

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, $\ldots$, w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C,

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B,

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, $\ldots$, w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно.

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B

Доведення

Таким чином, система векторів $w_1, w_2, \ldots, w_t$ лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C.

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності.

Доведення

Таким чином, система векторів $w_1, w_2, \ldots, w_t$ лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB =$$

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} (AB)^T$$

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} (AB)^T = \operatorname{rank} B^T A^T$$

Доведення

Таким чином, система векторів $w_1, w_2, \ldots, w_t$ лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} (AB)^T = \operatorname{rank} B^T A^T \leq \operatorname{rank} B^T$$

Доведення

Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність rank $AB \leq$ rank B доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} (AB)^T = \operatorname{rank} B^T A^T \leq \operatorname{rank} B^T = \operatorname{rank} B.$$

Доведення

Таким чином, система векторів $w_1, w_2, \ldots, w_t$ лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} (AB)^T = \operatorname{rank} B^T A^T \leq \operatorname{rank} B^T = \operatorname{rank} B.$$

Теорему доведено.

Теорема 7

Нехай A *— довільна* $s \times t$*-матриця з дійсними елементами;*

Теорема 7

Нехай A *— довільна* $s \times t$*-матриця з дійсними елементами;* B, C *— довільні оборотні дійсні матриці*

Теорема 7

Нехай A — *довільна* $s \times t$*-матриця з дійсними елементами;* B, C — *довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків* s *і* t.

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A,$$

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$.

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$.

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$. За теоремою 6

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A,$$

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$. За теоремою 6

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B^{-1}D \leq \operatorname{rank} D$$

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$. За теоремою 6

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B^{-1}D \leq \operatorname{rank} D$$

і тому $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} D$.

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$. За теоремою 6

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B^{-1}D \leq \operatorname{rank} D$$

і тому $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} D$. Рівність $\operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A$

Теорема 7

Нехай A — довільна $s \times t$-матриця з дійсними елементами; B, C — довільні оборотні дійсні матриці відповідно порядків s і t. Тоді

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення

Нехай справджуються умови теореми і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$. За теоремою 6

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B^{-1}D \leq \operatorname{rank} D$$

і тому $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} D$. Рівність $\operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A$ для оборотної матриці C доводиться аналогічно.

Приклади розв'язування задач

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці,

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю.

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля,

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінору δ_2,

Приклади розв'язування задач

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінору δ_2, також не дорівнює нулю (переконайтесь, що $\delta_3 = 1$).

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінору δ_2, також не дорівнює нулю (переконайтесь, що $\delta_3 = 1$).

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінору δ_2, також не дорівнює нулю (переконайтесь, що $\delta_3 = 1$).

Але обидва мінору четвертого порядку,

Але обидва мінору четвертого порядку, що є обвідними мінорами для мінору δ_3, Але обидва мінору четвертого порядку, що є обвідними мінорами для мінору δ_3, дорівнюють нулю:

$$\delta_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_4'' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Але обидва мінору четвертого порядку, що є обвідними мінорами для мінору δ_3, дорівнюють нулю:

$$\delta_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_4'' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює трьом.

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A:

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4;

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2;

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1.

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Приклади розв'язування задач

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right.$$

Приклади розв'язування задач

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ & & & & & \end{array} \right.$$

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього рядка перший, помножений на -4; до четвертого — перший, помножений на 2; до п'ятого — перший, помножений на -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2.

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

А потім поміняємо місцями перший та четвертий стовпці. Одержимо матрицю

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

А потім поміняємо місцями перший та четвертий стовпці. Одержимо матрицю

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -6 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Наступними кроками, поступово,

Приклади розв'язування задач

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1;

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2;

Приклади розв'язування задач

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2; так само — до п'ятого другий, помножений на -2;

Приклади розв'язування задач

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2; так само — до п'ятого другий, помножений на -2; і — до шостого другий, помножений на -2.

Приклади розв'язування задач

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2; так само — до п'ятого другий, помножений на -2; і — до шостого другий, помножений на -2. Ми прийдемо до такої матриці

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклади розв'язування задач

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2; так само — до п'ятого другий, помножений на -2; і — до шостого другий, помножений на -2. Ми прийдемо до такої матриці

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи виконувати аналогічні елементарні перетворення над рядками та стовпцями матриці A_4, ми одержимо, що

$$A_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2; так само — до п'ятого другий, помножений на -2; і — до шостого другий, помножений на -2. Ми прийдемо до такої матриці

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи виконувати аналогічні елементарні перетворення над рядками та стовпцями матриці A_4, ми одержимо, що

$$A_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклади розв'язування задач

Наступними кроками, поступово, додамо до третього стовпця другий, помножений на -1; — до четвертого другий, помножений на -2; так само — до п'ятого другий, помножений на -2; і — до шостого другий, помножений на -2. Ми прийдемо до такої матриці

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи виконувати аналогічні елементарні перетворення над рядками та стовпцями матриці A_4, ми одержимо, що

$$A_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює 3.