Системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

25 жовтня 2022 року

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$.

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$,

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи,

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю.

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \qquad (1)$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{array}\right. \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{array} \right. \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Лема 1

Ранг матриці $\bar{A}$

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Лема 1

Ранг матриці $\bar{A}$ або дорівнює рангу матриці A,

Нехай $s, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо систему s лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Лема 1

Ранг матриці $\bar{A}$ або дорівнює рангу матриці A, або на одиницю більше останнього.

Доведення.

Нехай ранг матриці A

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A.

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$,

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M.

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю,

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k$

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$.

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$,

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k+1$

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$.

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$. Це через те, що M' не є мінором матриці A,

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$. Це через те, що M' не є мінором матриці A, а тому може бути побудований лише за допомогою елементів останнього стовпця матриці $\bar{A}$. $\square$

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$. Це через те, що M' не є мінором матриці A, а тому може бути побудований лише за допомогою елементів останнього стовпця матриці $\bar{A}$. $\square$

Теорема 1 (Кронекер, Капеллі)

Система лінійних рівнянь (1) *сумісна*

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$. Це через те, що M' не є мінором матриці A, а тому може бути побудований лише за допомогою елементів останнього стовпця матриці $\bar{A}$. $\square$

Теорема 1 (Кронекер, Капеллі)

Система лінійних рівнянь (1) *сумісна тоді і тільки тоді,*

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank} \bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$. Це через те, що M' не є мінором матриці A, а тому може бути побудований лише за допомогою елементів останнього стовпця матриці $\bar{A}$. □

Теорема 1 (Кронекер, Капеллі)

Система лінійних рівнянь (1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь*

Доведення.

Нехай ранг матриці A дорівнює k і M — деякий відмінний від нуля мінор k-го порядку матриці A. Очевидно будь-який мінор матриці A є мінором матриці $\bar{A}$, зокрема і мінор M. Якщо всі обвідні мінори мінору M у матриці $\bar{A}$ дорівнюють нулю, то $\operatorname{rank}\bar{A} = k = \operatorname{rank} A$. Якщо ж знайдеться ненульовий обвідний мінор M' мінору M у матриці $\bar{A}$, то він має порядок $k + 1 = \operatorname{rank} A + 1$. Це через те, що M' не є мінором матриці A, а тому може бути побудований лише за допомогою елементів останнього стовпця матриці $\bar{A}$. □

Теорема 1 (Кронекер, Капеллі)

Система лінійних рівнянь (1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює рангу її розширеної матриці* $\bar{A}$.

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми.

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок.

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array}\right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array}\right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array}\right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix},$$

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array}\right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array}\right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Тоді із системи рівностей (2) слідує,

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array} \right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Тоді із системи рівностей (2) слідує, що

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n = w, \tag{3}$$

Доведення.

Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) є сумісною і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \dots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{array}\right. \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Тоді із системи рівностей (2) слідує, що

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n = w, \tag{3}$$

тобто вектор w лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n.

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$.

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w$$

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w$$
$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w$$

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \dots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \dots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w
\end{aligned}
$$

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\ v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w \end{aligned}$$

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w
\end{aligned}
$$

Далі, враховуючи рівність (3), так само система векторів-стовпців v_1, $\ldots$, v_n, w розширеної матриці $\bar{A}$

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w
\end{aligned}
$$

Далі, враховуючи рівність (3), так само система векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$ лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n$ матриці A.

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\ v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w \end{aligned}$$

Далі, враховуючи рівність (3), так само система векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$ лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n$ матриці A.
Отже, системи векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ еквівалентні,

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \dots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \dots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w
\end{aligned}$$

Далі, враховуючи рівність (3), так само система векторів-стовпців v_1, $\dots$, v_n, w розширеної матриці $\bar{A}$ лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, \dots, v_n$ матриці A.
Отже, системи векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ еквівалентні, і таким чином, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$.

Доведення.

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Дійсно,

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\ v_2 &= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 0 \cdot w \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_n &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n + 0 \cdot w \end{aligned}$$

Далі, враховуючи рівність (3), так само система векторів-стовпців v_1, $\ldots$, v_n, w розширеної матриці $\bar{A}$ лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n$ матриці A.
Отже, системи векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ еквівалентні, і таким чином, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$. Необхідність доведена.

Доведення.

Доведемо достатність.

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1)

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$$

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів.

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \dots, \quad v_{i_r}$$

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n.

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Тоді система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_r}

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Тоді система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_r} є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$.

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \dots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, $\dots$, v_n. Тоді система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\dots$, v_{i_r} є також базисом системи векторів v_1, $\dots$, v_n, w. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б,

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тоді система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_r} є також базисом системи векторів v_1, ..., v_n, w. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи,

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Тоді система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_r} є також базисом системи векторів v_1, $\ldots$, v_n, w. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w,

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді система векторів v_{i_1}, $v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді система векторів v_{i_1}, $v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно через систему векторів не $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$.

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді система векторів v_{i_1}, $v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно через систему векторів не $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$. Це означало б, що система векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}, w$ була б базисом системи векторів-стовпців розширеної матриці $\bar{A}$.

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді система векторів v_{i_1}, $v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно через систему векторів не $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$. Це означало б, що система векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}, w$ була б базисом системи векторів-стовпців розширеної матриці $\bar{A}$. Останнє неможливо,

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді система векторів v_{i_1}, $v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно через систему векторів не $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$. Це означало б, що система векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}, w$ була б базисом системи векторів-стовпців розширеної матриці $\bar{A}$. Останнє неможливо, тому що базис системи векторів-стовпців матриці $\bar{A}$

Доведення.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай

$$v_{i_1}, \quad v_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_{i_r}$$

— базис системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Тоді система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_r} є також базисом системи векторів v_1, $\ldots$, v_n, w. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно через систему векторів не v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_r}. Це означало б, що система векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\ldots$, v_{i_r}, w була б базисом системи векторів-стовпців розширеної матриці $\bar{A}$. Останнє неможливо, тому що базис системи векторів-стовпців матриці $\bar{A}$ за припущенням складається з r векторів.

Доведення.

Далі, оскільки вектор w

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1},\ v_{i_2},\ \ldots,\ v_{i_r}$,

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \dots, v_n$, то вектор w лінійно виражається через вектори $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то вектор w лінійно виражається через вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то вектор w лінійно виражається через вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то вектор w лінійно виражається через вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Із рівності (4) одержуємо,

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_r}, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n, то вектор w лінійно виражається через вектори v_1, v_2, ..., v_n. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

для деяких дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n. Із рівності (4) одержуємо, що вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів v_{i_1}, v_{i_2}, . . . , v_{i_r}, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, . . . , v_n, то вектор w лінійно виражається через вектори v_1, v_2, . . . , v_n. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

для деяких дійсних чисел γ_1, γ_2, . . . , γ_n. Із рівності (4) одержуємо, що вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (1),

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів v_{i_1}, v_{i_2}, $\dots$, v_{i_r}, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, $\dots$, v_n, то вектор w лінійно виражається через вектори v_1, v_2, $\dots$, v_n. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

для деяких дійсних чисел γ_1, γ_2, $\dots$, γ_n. Із рівності (4) одержуємо, що вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (1), а тому ця система рівнянь є сумісною.

Доведення.

Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_r}, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n, то вектор w лінійно виражається через вектори v_1, v_2, ..., v_n. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{4}$$

для деяких дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_n. Із рівності (4) одержуємо, що вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (1), а тому ця система рівнянь є сумісною. Теорему доведено. □

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1)

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною*

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді,*

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь*

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Доведення.

Розглянемо деяку сумісну систему лінійних рівнянь вигляду

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Доведення.

Розглянемо деяку сумісну систему лінійних рівнянь вигляду

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right. \tag{5}$$

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Доведення.

Розглянемо деяку сумісну систему лінійних рівнянь вигляду

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right. \tag{5}$$

Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі ранг матриці A цієї системи рівнянь дорівнює рангу розширеної матриці $\bar{A}$ цієї системи

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Доведення.

Розглянемо деяку сумісну систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{5}$$

Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі ранг матриці A цієї системи рівнянь дорівнює рангу розширеної матриці $\bar{A}$ цієї системи і нехай він дорівнює числу r.

Теорема 2

Сумісна система лінійних рівнянь (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці* A *цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Доведення.

Розглянемо деяку сумісну систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{5}$$

Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі ранг матриці A цієї системи рівнянь дорівнює рангу розширеної матриці $\bar{A}$ цієї системи і нехай він дорівнює числу r. Тоді базис системи векторів-рядків розширеної матриці $\bar{A}$ складається з деяких r рядків цієї матриці.

Доведення.

Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо,

Доведення.

Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що перші r рядків матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \cdots & a_{r+1\,n} & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

Доведення.

Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що перші r рядків матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \cdots & a_{r+1\,n} & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

утворюють базис системи її векторів-рядків.

Доведення.

Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що перші r рядків матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \cdots & a_{r+1\,n} & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

утворюють базис системи її векторів-рядків. Тоді всі інші рядки матриці $\bar{A}$ є лінійною комбінацією її перших r рядків.

Доведення.

Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що перші r рядків матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \cdots & a_{r+1\,n} & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

утворюють базис системи її векторів-рядків. Тоді всі інші рядки матриці $\bar{A}$ є лінійною комбінацією її перших r рядків. Це означає, що всі рівняння системи лінійних рівнянь (5), починаючи з $(r+1)$-го і до s-го, є сумою перших r рівнянь, помножених на деякі коефіцієнти.

Доведення.

Тому система лінійних рівнянь (5) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{6}$$

Доведення.

Тому система лінійних рівнянь (5) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо $r = n$,

Доведення.

Тому система лінійних рівнянь (5) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо $r = n$, то система лінійних рівнянь (6) є системою рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих

Доведення.

Тому система лінійних рівнянь (5) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо $r = n$, то система лінійних рівнянь (6) є системою рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих і детермінант якої не дорівнює нулю.

Доведення.

Тому система лінійних рівнянь (5) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{array}\right. \tag{6}$$

Якщо $r = n$, то система лінійних рівнянь (6) є системою рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих і детермінант якої не дорівнює нулю. Тому за теоремою Крамера система лінійних рівнянь (6), а отже і система лінійних рівнянь (5), є визначеною.

Доведення.

Тому система лінійних рівнянь (5) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо $r = n$, то система лінійних рівнянь (6) є системою рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих і детермінант якої не дорівнює нулю. Тому за теоремою Крамера система лінійних рівнянь (6), а отже і система лінійних рівнянь (5), є визначеною. Цим самим доведено достатність теореми.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною,

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A,

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A,

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Перенесемо у праву частину рівнянь (6) всі члени з невідомими $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Перенесемо у праву частину рівнянь (6) всі члени з невідомими $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Надалі ці невідомі будемо називати вільними невідомими.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Перенесемо у праву частину рівнянь (6) всі члени з невідомими $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Надалі ці невідомі будемо називати вільними невідомими. Надамо вільним невідомим $x_{r+1}, \ldots, x_n$ довільно вибраних значень $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ із множини дійсних чисел.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (5), а отже і система лінійних рівнянь (6), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Перенесемо у праву частину рівнянь (6) всі члени з невідомими $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Надалі ці невідомі будемо називати вільними невідомими. Надамо вільним невідомим $x_{r+1}, \ldots, x_n$ довільно вибраних значень $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ із множини дійсних чисел. Тоді система лінійних рівнянь (6) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n. \end{cases} \qquad (7)$$

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \dots, x_r$.

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A.

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$.

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \cdots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{cases}$$

то,

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \cdots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{cases}$$

то, очевидно, вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (6),

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \cdots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{cases}$$

то, очевидно, вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (6), а отже і системи рівнянь (1).

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \cdots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{cases}$$

то, очевидно, вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (6), а отже і системи рівнянь (1).
Надаючи вільним невідомим $x_{r+1}, \ldots, x_n$ довільні значення $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ з множини дійсних чисел, ми одержимо нескінченну множину розв'язків системи рівнянь (1).

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих x_1, ..., x_r. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \cdots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{cases}$$

то, очевидно, вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (6), а отже і системи рівнянь (1).
Надаючи вільним невідомим x_{r+1}, ..., x_n довільні значення γ_{r+1}, ..., γ_n з множини дійсних чисел, ми одержимо нескінченну множину розв'язків системи рівнянь (1). Це означатиме, що ця система лінійних рівнянь є невизначеною, що суперечить умові теореми.

Доведення.

Система лінійних рівнянь (7) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \ldots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (7) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \cdots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{cases}$$

то, очевидно, вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (6), а отже і системи рівнянь (1).

Надаючи вільним невідомим $x_{r+1}, \ldots, x_n$ довільні значення $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ з множини дійсних чисел, ми одержимо нескінченну множину розв'язків системи рівнянь (1). Це означатиме, що ця система лінійних рівнянь є невизначеною, що суперечить умові теореми. Таким чином, $r = n$ і теорему доведено. $\square$

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь.

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1)

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r.

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки.

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки. В цих рівняннях залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що детермінант із коефіцієнтів при них відмінний від нуля,

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки. В цих рівняннях залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що детермінант із коефіцієнтів при них відмінний від нуля, а інші невідомі оголошуємо вільними і переносимо в праві частини рівнянь.

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки. В цих рівняннях залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що детермінант із коефіцієнтів при них відмінний від нуля, а інші невідомі оголошуємо вільними і переносимо в праві частини рівнянь. Надаючи вільним невідомим довільні числові значення і обчислюючи значення інших невідомих за правилом Крамера, ми одержимо всі розв'язки системи (1).

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 7, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ \ \ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -6 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

заданої в умові системи рівнянь

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -6 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

заданої в умові системи рівнянь і знаходимо її ранг.

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 7, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ \ \ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -6 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

заданої в умові системи рівнянь і знаходимо її ранг. Мінор M другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A (він обведений рамкою) відмінний від нуля.

Приклади розв'язування задач

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

Приклади розв'язування задач

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$.

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь.

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь. Для цього досить обчислити лише так звані характеристичні мінори матриці $\bar{A}$, тобто обвідні мінори мінору M третього порядку, які не містяться в матриці A.

Приклади розв'язування задач

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь. Для цього досить обчислити лише так звані характеристичні мінори матриці $\bar{A}$, тобто обвідні мінори мінору M третього порядку, які не містяться в матриці A. У нашому випадку такий лише один —

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Приклади розв'язування задач

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь. Для цього досить обчислити лише так звані характеристичні мінори матриці $\bar{A}$, тобто обвідні мінори мінору M третього порядку, які не містяться в матриці A. У нашому випадку такий лише один —

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} \bar{A} = 3$.

Приклади розв'язування задач

Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь. Для цього досить обчислити лише так звані характеристичні мінори матриці $\bar{A}$, тобто обвідні мінори мінору M третього порядку, які не містяться в матриці A. У нашому випадку такий лише один —

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} \bar{A} = 3$. А тому за теоремою Кронекера-Капеллі задана в умові система лінійних рівнянь є несумісною.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна,

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

— відмінний від нуля.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

— відмінний від нуля. Тому розв'язуємо систему лінійних рівнянь,

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

— відмінний від нуля. Тому розв'язуємо систему лінійних рівнянь, яка складається із перших двох рівнянь заданої в умові системи рівнянь, від невідомих x_1, x_2

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A даної системи рівнянь і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

— відмінний від нуля. Тому розв'язуємо систему лінійних рівнянь, яка складається із перших двох рівнянь заданої в умові системи рівнянь, від невідомих x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}$$

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix}$$

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix}$$

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M}$$

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{3}{4}x_4 - x_5,$$

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M}$$

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої в умові системи лінійних рівнянь має вигляд

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{4}x_3 + \tfrac{7}{4}x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої в умові системи лінійних рівнянь має вигляд $\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta\right)$,

Приклади розв'язування задач

Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

Тому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої в умові системи лінійних рівнянь має вигляд $(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta)$, де α, β, δ — довільні дійсні числа.