Системи лінійних однорідних рівнянь

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

29 жовтня 2022 року

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$;

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $s, n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, s;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $s, n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, система рівнянь (1) є сумісною,

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $s,\ n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, система рівнянь (1) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, система рівнянь (1) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \ldots, 0)$. Це також узгоджується з теоремою Кронекера-Капеллі:

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, система рівнянь (1) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \ldots, 0)$. Це також узгоджується з теоремою Кронекера-Капеллі: ранг матриці і ранг розширеної матриці цієї системи лінійних рівнянь рівні,

Означення 1

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, система рівнянь (1) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \ldots, 0)$. Це також узгоджується з теоремою Кронекера-Капеллі: ранг матриці і ранг розширеної матриці цієї системи лінійних рівнянь рівні, оскільки приєднання до матриці системи стовпця вільних членів, що складається з нулів, не зможе збільшити її рангу.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n,

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.
Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n,

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.
Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і,

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.
Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.
Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) з n невідомими має ранг r.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) з n невідомими має ранг r. Якщо $r = n$,

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) *з* n *невідомими має ранг* r. *Якщо* $r = n$, *тоді система рівнянь* (1) *є визначеною,*

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) *з* n *невідомими має ранг* r. *Якщо* $r = n$, *тоді система рівнянь* (1) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь.*

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) *з* n *невідомими має ранг* r. *Якщо* $r = n$, *тоді система рівнянь* (1) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку* $r < n$

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) з n невідомими має ранг r. Якщо $r = n$, тоді система рівнянь (1) є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку $r < n$ система рівнянь (1) є невизначеною.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) *з* n *невідомими має ранг* r. *Якщо* $r = n$, *тоді система рівнянь* (1) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку* $r < n$ *система рівнянь* (1) *є невизначеною.*

Наслідок 1

Система n *лінійних однорідних рівнянь з* n *невідомими*

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) *з* n *невідомими має ранг* r. *Якщо* $r = n$, *тоді система рівнянь* (1) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку* $r < n$ *система рівнянь* (1) *є невизначеною.*

Наслідок 1

Система n *лінійних однорідних рівнянь з* n *невідомими має ненульовий розв'язок*

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) з n невідомими має ранг r. Якщо $r = n$, тоді система рівнянь (1) є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку $r < n$ система рівнянь (1) є невизначеною.

Наслідок 1

Система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді,

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності системи лінійних рівнянь, вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для знаходження всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний на попередній лекції алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих.

Теорема 1

Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) *з* n *невідомими має ранг* r. *Якщо* $r = n$, *тоді система рівнянь* (1) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку* $r < n$ *система рівнянь* (1) *є невизначеною.*

Наслідок 1

Система n *лінійних однорідних рівнянь з* n *невідомими має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці цієї системи рівнянь дорівнює нулю.*

Теорема 2

Нехай n-вимірні вектори

Теорема 2

Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$

Теорема 2

Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ і $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$

Теорема 2

Нехай n*-вимірні вектори* $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ *і* $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ *є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь* (1)*.*

Теорема 2

Нехай n*-вимірні вектори* $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *і* $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ *є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь* (1)*. Тоді їхня сума*

$$b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n),$$

Теорема 2

Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ і $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь (1). Тоді їхня сума

$$b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n),$$

а також добуток

$$\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$$

Теорема 2

Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ і $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь (1). Тоді їхня сума

$$b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n),$$

а також добуток

$$\delta b = (\delta\beta_1, \dots, \delta\beta_n)$$

довільного дійсного числа δ на вектор b

Теорема 2

Нехай n*-вимірні вектори* $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *і* $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ *є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь* (1)*. Тоді їхня сума*

$$b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n),$$

а також добуток

$$\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$$

довільного дійсного числа δ *на вектор* b *є розв'язками системи рівнянь* (1)*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0,$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n) =$$
$$= (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \dots, s\}$ значення виразу

$$\begin{gathered} a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \dots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n) = \\ = (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) + (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n) = \\ = 0 + 0 = 0 \end{gathered}$$

.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \ldots, s\}$ значення виразу

$$\begin{gathered} a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n) = \\ = (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) = \\ = 0 + 0 = 0 \end{gathered} .$$

Отже, n-вимірний вектор $b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n)$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \ldots, s\}$ значення виразу

$$\begin{gathered} a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n) = \\ = (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) = \\ = 0 + 0 = 0 \end{gathered}.$$

Отже, n-вимірний вектор $b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (1).

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справджуються рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0, \quad a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \ldots, s\}$ значення виразу

$$\begin{gathered} a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n) = \\ = (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) = \\ = 0 + 0 = 0 \end{gathered}.$$

Отже, n-вимірний вектор $b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (1).

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n)$$

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n)$$

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0$$

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0 = 0,$$

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0 = 0,$$

одержимо, що n-вимірний вектор $\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$ є також розв'язком системи рівнянь (1). □

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0 = 0,$$

одержимо, що n-вимірний вектор $\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$ є також розв'язком системи рівнянь (1). □

Наслідок 2

Довільна лінійна комбінація розв'язків

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0 = 0,$$

одержимо, що n-вимірний вектор $\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$ є також розв'язком системи рівнянь (1). □

Наслідок 2

Довільна лінійна комбінація розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

Доведення.

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0 = 0,$$

одержимо, що n-вимірний вектор $\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$ є також розв'язком системи рівнянь (1). □

Наслідок 2

Довільна лінійна комбінація розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь також є розв'язком цієї системи рівнянь.

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків.

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.
Нехай для деякого натурального числа k

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'-язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь.

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, ..., δ_k, δ_{k+1}:

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, ..., δ_k, δ_{k+1}:

$$b = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k + \delta_{k+1} b_{k+1}.$$

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, ..., δ_k, δ_{k+1}:

$$b = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k + \delta_{k+1} b_{k+1}.$$

За припущенням індукції лінійна комбінація $\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k$ є розв'язком системи рівнянь (1).

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.
Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, ..., δ_k, δ_{k+1}:

$$b = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k + \delta_{k+1} b_{k+1}.$$

За припущенням індукції лінійна комбінація $\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k$ є розв'язком системи рівнянь (1). Оскільки за попередньою теоремою добуток $\delta_{k+1} b_{k+1}$ є розв'язком цієї системи рівнянь,

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, ..., δ_k, δ_{k+1}:

$$b = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k + \delta_{k+1} b_{k+1}.$$

За припущенням індукції лінійна комбінація $\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k$ є розв'язком системи рівнянь (1). Оскільки за попередньою теоремою добуток $\delta_{k+1} b_{k+1}$ є розв'язком цієї системи рівнянь, то вектор b як сума розв'язків

$$b = {\color{blue}(\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k)} + {\color{red}\delta_{k+1} b_{k+1}}$$

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, ..., δ_k, δ_{k+1}:

$$b = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k + \delta_{k+1} b_{k+1}.$$

За припущенням індукції лінійна комбінація $\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k$ є розв'язком системи рівнянь (1). Оскільки за попередньою теоремою добуток $\delta_{k+1} b_{k+1}$ є розв'язком цієї системи рівнянь, то вектор b як сума розв'язків

$$b = (\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k) + \delta_{k+1} b_{k+1}$$

є також розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (1).

Доведення.

Доведемо наслідок методом математичної індукції за кількістю розв'язків. База індукції очевидна.

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k+1$ розв'язків b_1, b_2, …, b_k, b_{k+1} системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами δ_1, δ_2, …, δ_k, δ_{k+1}:

$$b = \delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k + \delta_{k+1} b_{k+1}.$$

За припущенням індукції лінійна комбінація $\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k$ є розв'язком системи рівнянь (1). Оскільки за попередньою теоремою добуток $\delta_{k+1} b_{k+1}$ є розв'язком цієї системи рівнянь, то вектор b як сума розв'язків

$$b = (\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \cdots + \delta_k b_k) + \delta_{k+1} b_{k+1}$$

є також розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (1). Наслідок доведений. $\square$

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1)

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається **простором розв'язків** цієї системи рівнянь.

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1),

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \dots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \dots, a_q$

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається **простором розв'язків** цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають **фундаментальною системою розв'язків** цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$ є лінійно незалежною,

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \dots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \dots, a_q$ є лінійно незалежною, а по-друге, кожен розв'язок із простору розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$ є лінійно незалежною, а по-друге, кожен розв'язок із простору розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь можна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$ є лінійно незалежною, а по-друге, кожен розв'язок із простору розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь можна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$ є лінійно незалежною, а по-друге, кожен розв'язок із простору розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь можна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків є еквівалентними системами векторів.

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$ є лінійно незалежною, а по-друге, кожен розв'язок із простору розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь можна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків є еквівалентними системами векторів. А, отже, складаються із одного й того ж числа розв'язків.

Означення 2

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається простором розв'язків цієї системи рівнянь.

Означення 3

Систему розв'язків $a_1, a_2, \ldots, a_q$ деякої системи лінійних однорідних рівнянь називають фундаментальною системою розв'язків цієї системи рівнянь (1), якщо по-перше система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$ є лінійно незалежною, а по-друге, кожен розв'язок із простору розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь можна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків є еквівалентними системами векторів. А, отже, складаються із одного й того ж числа розв'язків.

Приклад

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$.

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$. Тому простором розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$. Тому простором розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь є множина

$$S = \{(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$. Тому простором розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь є множина

$$S = \{(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Система векторів

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0), \quad (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$. Тому простором розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь є множина

$$S = \{(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Система векторів

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0), \quad (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$

є фундаментальною системою розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь.

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$. Тому простором розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь є множина

$$S = \{(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Система векторів

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0), \quad (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$

є фундаментальною системою розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь. Бо

$$(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) = \alpha \cdot (1,\ 0,\ 1,\ 0) + \beta \cdot (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$

для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

Приклад

Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta)$. Тому простором розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь є множина

$$S = \{(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Система векторів

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0), \quad (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$

є фундаментальною системою розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь. Бо

$$(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta) = \alpha \cdot (1,\ 0,\ 1,\ 0) + \beta \cdot (0,\ 1,\ 0,\ 1)$$

для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, звідки одразу слідує виконання обох умов означення фундаментальної системи розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.

Теорема 3

Якщо ранг r

Теорема 3

Якщо ранг r *матриці системи лінійних однорідних рівнянь* (1)

Теорема 3

Якщо ранг r *матриці системи лінійних однорідних рівнянь* (1) *менше ніж число невідомих* n*,*

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1)

Теорема 3

Якщо ранг r *матриці системи лінійних однорідних рівнянь* (1) *менше ніж число невідомих* n, *тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь* (1) *складається із* $n-r$ *розв'язків.*

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1)

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь.

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь. Тоді розглядувана система рівнянь є невизначеною

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь. Тоді розглядувана система рівнянь є невизначеною і всі її розв'язки можна знайти, користуючись алгоритмом, описаним на попередній лекції.

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь. Тоді розглядувана система рівнянь є невизначеною і всі її розв'язки можна знайти, користуючись алгоритмом, описаним на попередній лекції. Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо що мінор r-го порядку,

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь. Тоді розглядувана система рівнянь є невизначеною і всі її розв'язки можна знайти, користуючись алгоритмом, описаним на попередній лекції. Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо що мінор r-го порядку, що знаходиться у лівому верхньому кутку матриці A,

Теорема 3

Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь (1) менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) складається із $n-r$ розв'язків.

Доведення.

Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь. Тоді розглядувана система рівнянь є невизначеною і всі її розв'язки можна знайти, користуючись алгоритмом, описаним на попередній лекції. Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо що мінор r-го порядку, що знаходиться у лівому верхньому кутку матриці A, відмінний від нуля.

Доведення.

Тоді невідомі $x_1,\ x_2,\ \ldots x_r$

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\ldots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n,

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\ldots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\dots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \dots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \dots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \dots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

для деяких дійсних чисел d_{ij},

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\dots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \dots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \dots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \dots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \dots, r\}$; $j \in \{1, \dots, n-r\}$.

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\ldots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \ldots, r\}$; $j \in \{1, \ldots, n-r\}$.
Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\ldots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \ldots, r\}$; $j \in \{1, \ldots, n-r\}$. Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ порядку $n-r$:

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\dots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots$, x_n, тобто

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}x_n \end{array}\right. \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \dots, r\}$; $j \in \{1, \dots, n-r\}$.
Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ порядку $n-r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{1\,r+1} & \gamma_{1\,r+2} & \cdots & \gamma_{1\,n} \\ \gamma_{2\,r+1} & \gamma_{2\,r+2} & \cdots & \gamma_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-r\,r+1} & \gamma_{n-r\,r+2} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{vmatrix},$$

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\dots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \dots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \dots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \dots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \dots, r\}$; $j \in \{1, \dots, n-r\}$. Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ порядку $n-r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{1\,r+1} & \gamma_{1\,r+2} & \cdots & \gamma_{1\,n} \\ \gamma_{2\,r+1} & \gamma_{2\,r+2} & \cdots & \gamma_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-r\,r+1} & \gamma_{n-r\,r+2} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{vmatrix},$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$,

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\dots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \dots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \dots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \dots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \dots, r\}$; $j \in \{1, \dots, n-r\}$.
Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ порядку $n-r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{1\,r+1} & \gamma_{1\,r+2} & \cdots & \gamma_{1\,n} \\ \gamma_{2\,r+1} & \gamma_{2\,r+2} & \cdots & \gamma_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-r\,r+1} & \gamma_{n-r\,r+2} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{vmatrix},$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$, де $i \in \{1, \dots, n-r\}$;

Доведення.

Тоді невідомі x_1, x_2, $\ldots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n, тобто

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}x_n \end{cases} \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij}, де $i \in \{1, \ldots, r\}$; $j \in \{1, \ldots, n-r\}$.
Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ порядку $n-r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{1\,r+1} & \gamma_{1\,r+2} & \cdots & \gamma_{1\,n} \\ \gamma_{2\,r+1} & \gamma_{2\,r+2} & \cdots & \gamma_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-r\,r+1} & \gamma_{n-r\,r+2} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{vmatrix},$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$, де $i \in \{1, \ldots, n-r\}$; $j \in \{r+1, \ldots, n\}$.

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка,

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n - r\}$,

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$,

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \dots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots x_n$, ми за формулами (2)

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n - r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r,

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n - r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ вектор

$$v_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{ir}, \gamma_{i\,r+1}, \ldots, \gamma_{in})$$

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ вектор

$$v_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{ir}, \gamma_{i\,r+1}, \ldots, \gamma_{in})$$

є розв'язком заданої системи лінійних однорідних рівнянь.

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ вектор

$$v_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{ir}, \gamma_{i\,r+1}, \ldots, \gamma_{in})$$

є розв'язком заданої системи лінійних однорідних рівнянь. Покажемо, що система n-вимірних векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r}

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \dots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\dots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\dots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \dots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \dots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \dots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \dots, n-r\}$ вектор

$$v_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ir}, \gamma_{i\,r+1}, \dots, \gamma_{in})$$

є розв'язком заданої системи лінійних однорідних рівнянь. Покажемо, що система n-вимірних векторів v_1, v_2, $\dots$, v_{n-r} є фундаментальною системою розв'язків

Доведення.

Беручи елементи i-го рядка, де $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$, детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r, які позначимо відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}:

$$\begin{cases} \gamma_{i1} = d_{11}\gamma_{i\,r+1} + d_{12}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \gamma_{i2} = d_{21}\gamma_{i\,r+1} + d_{22}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}\gamma_{i\,n}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{ir} = d_{r1}\gamma_{i\,r+1} + d_{r2}\gamma_{i\,r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}\gamma_{i\,n}. \end{cases}$$

Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ вектор

$$v_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{ir}, \gamma_{i\,r+1}, \ldots, \gamma_{in})$$

є розв'язком заданої системи лінійних однорідних рівнянь. Покажемо, що система n-вимірних векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є фундаментальною системою розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1).

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r}

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r} є лінійно незалежною.

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n - r) \times n$-матриця

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array} \right),$$

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array}\right),$$

складена з цих векторів як із рядків,

Доведення.

По-перше, система векторів $v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}$ є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array} \right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r)\times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\;r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array}\right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$.

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\dots$, v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r)\times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|}
\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\
\gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\;r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n}
\end{array}\right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array} \right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.

Залишилось довести, що довільний розв'язок $w = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ системи лінійних однорідних рівнянь (1) є лінійною комбінацією системи векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r}.

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array} \right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.

Залишилось довести, що довільний розв'язок $w = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ системи лінійних однорідних рівнянь (1) є лінійною комбінацією системи векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r}.

Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ позначимо через v_i' i-й рядок детермінанта Δ, розглядуваний як $(n-r)$-вимірний вектор,

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array} \right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.
Залишилось довести, що довільний розв'язок $w = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ системи лінійних однорідних рівнянь (1) є лінійною комбінацією системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r}.
Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ позначимо через v_i' i-й рядок детермінанта Δ, розглядуваний як $(n-r)$-вимірний вектор, а через w' — вектор $(\delta_{r+1}, \ldots, \delta_n)$.

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r)\times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array}\right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.
Залишилось довести, що довільний розв'язок $w=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ системи лінійних однорідних рівнянь (1) є лінійною комбінацією системи векторів v_1, v_2, ..., v_{n-r}.
Для довільного $i\in\{1,2,\ldots,n-r\}$ позначимо через v_i' i-й рядок детермінанта Δ, розглядуваний як $(n-r)$-вимірний вектор, а через w' — вектор $(\delta_{r+1},\ldots,\delta_n)$.
Система векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}' є лінійно незалежною,

Доведення.

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\ \gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n} \end{array} \right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.

Залишилось довести, що довільний розв'язок $w = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ системи лінійних однорідних рівнянь (1) є лінійною комбінацією системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r}.

Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ позначимо через v_i' i-й рядок детермінанта Δ, розглядуваний як $(n-r)$-вимірний вектор, а через w' — вектор $(\delta_{r+1}, \ldots, \delta_n)$.

Система векторів v_1', v_2', $\ldots$, v_{n-r}' є лінійно незалежною, оскільки $\Delta \neq 0$.

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v_1', v_2', $\ldots$, v_{n-r}', w' є лінійно залежною,

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v_1', v_2', $\dots$, v_{n-r}', w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність.

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v_1', v_2', $\ldots$, v_{n-r}', w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v_1', v_2', $\ldots$, v_{n-r}',

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-r}, w'$ є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-r}$, тобто існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$,

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, ..., v'_{n-r}, w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, ..., v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \tag{3}$$

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}', w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}', тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}'. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, ..., v'_{n-r}, w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, ..., v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \qquad (3)$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь,

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, $\dots$, v'_{n-r}, w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, $\dots$, v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, $\dots$, λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь.

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, ..., v'_{n-r}, w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, ..., v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю.

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}', w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}', тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}'. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю. Перші ж r компонент цього вектора також дорівнюють нулю, оскільки їх значення можна обчислити із рівностей (2),

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r}, w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \qquad (3)$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю. Перші ж r компонент цього вектора також дорівнюють нулю, оскільки їх значення можна обчислити із рівностей (2), беручи в якості значень вільних невідомих нулі.

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-r}, w'$ є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n-r}$, тобто існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю. Перші ж r компонент цього вектора також дорівнюють нулю, оскільки їх значення можна обчислити із рівностей (2), беручи в якості значень вільних невідомих нулі. Таким чином, $u = 0$,

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r}, w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \qquad (3)$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю. Перші ж r компонент цього вектора також дорівнюють нулю, оскільки їх значення можна обчислити із рівностей (2), беручи в якості значень вільних невідомих нулі. Таким чином, $u = 0$, тобто

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}.$$

Доведення.

Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}', w' є лінійно залежною, бо число векторів цієї системи більше ніж їх розмірність. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v_1', v_2', ..., v_{n-r}', тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}'. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю. Перші ж r компонент цього вектора також дорівнюють нулю, оскільки їх значення можна обчислити із рівностей (2), беручи в якості значень вільних невідомих нулі. Таким чином, $u = 0$, тобто

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}.$$

Теорему доведено. $\square$

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{4}$$

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{array}\right. \tag{4}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{4}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \qquad (4)$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

одержана із системи (4)

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{4}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{5}$$

одержана із системи (4) заміною всіх вільних членів нулями,

Означення 4

Нехай дано деяку систему лінійних неоднорідних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{4}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{5}$$

одержана із системи (4) заміною всіх вільних членів нулями, називається зведеною однорідною системою рівнянь для системи рівнянь (4).

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4)

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5)

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4),

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5).

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i,$$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i + 0$$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i + 0 = b_i.$$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i + 0 = b_i.$$

Отже, вектор $c+d$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i + 0 = b_i.$$

Отже, вектор $c+d = (\gamma_1+\delta_1, \gamma_2+\delta_2, \ldots, \gamma_n+\delta_n)$

Теорема 4

Сума будь-якого розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком системи лінійних неоднорідних рівнянь* (4).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий розв'язок системи лінійних рівнянь (4), а $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — деякий розв'язок зведеної системи лінійних однорідних рівнянь (5). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = 0.$$

Для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i + 0 = b_i.$$

Отже, вектор $c+d = (\gamma_1+\delta_1, \gamma_2+\delta_2, \ldots, \gamma_n+\delta_n)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4). □

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4)

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4).

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i,$$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n)$$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i - b_i$$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i - b_i = 0.$$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i - b_i = 0.$$

Таким чином,

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$\begin{gathered} a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) = \\ = (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) = \\ = b_i - b_i = 0. \end{gathered}$$

Таким чином, вектор $c - d$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i - b_i = 0.$$

Таким чином, вектор $c - d = (\gamma_1 - \delta_1, \gamma_2 - \delta_2, \dots, \gamma_n - \delta_n)$

Теорема 5

Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення.

Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i, \quad a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n = b_i.$$

Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i - b_i = 0.$$

Таким чином, вектор $c - d = (\gamma_1 - \delta_1, \gamma_2 - \delta_2, \ldots, \gamma_n - \delta_n)$ є розв'язком зведеної однорідної системи лінійних рівнянь (5). □

Наслідок 3

Нехай c *— деякий (частинний) розв'язок*

Наслідок 3

Нехай c — деякий $($частинний$)$ розв'язок системи лінійних рівнянь (4),

Наслідок 3

Нехай c *— деякий* $($*частинний*$)$ *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4)*,* S *— простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5)*.*

Наслідок 3

Нехай c — *деякий* (*частинний*) *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4), S — *простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5). *Тоді множина* $\{c + d \mid d \in S\}$

Наслідок 3

Нехай c — *деякий* (*частинний*) *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4), S — *простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5). *Тоді множина* $\{c+d \mid d \in S\}$ *є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь* (4).

Наслідок 3

Нехай c *— деякий* $($*частинний*$)$ *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4), S *— простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5). *Тоді множина* $\{c+d \mid d \in S\}$ *є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь* (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S,

Наслідок 3

Нехай c *— деякий* $($*частинний*$)$ *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4)*,* S *— простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5)*. Тоді множина* $\{c+d \mid d \in S\}$ *є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь* (4)*.*

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4),

Наслідок 3

Нехай c — *деякий* (*частинний*) *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4), S — *простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5). *Тоді множина* $\{c+d \mid d \in S\}$ *є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь* (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4),

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e-c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5,

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).
Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e-c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5, тобто $e-c \in S$.

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).
Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e-c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5, тобто $e-c \in S$. Тому вектор $e = c + (e-c)$

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e-c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5, тобто $e-c \in S$. Тому вектор $e = c + (e-c)$належить множині $\{c+d \mid d \in S\}$.

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e-c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5, тобто $e-c \in S$. Тому вектор $e = c+(e-c)$належить множині $\{c+d \mid d \in S\}$. Отже, множина розв'язків системи рівнянь (4) є підмножиною множини $\{c+d \mid d \in S\}$.

Наслідок 3

Нехай c — деякий (частинний) розв'язок системи лінійних рівнянь (4), S — простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь (5). Тоді множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є множиною розв'язків системи лінійних рівнянь (4).

Доведення.

Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c+d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c+d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e-c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5, тобто $e-c \in S$. Тому вектор $e = c+(e-c)$належить множині $\{c+d \mid d \in S\}$. Отже, множина розв'язків системи рівнянь (4) є підмножиною множини $\{c+d \mid d \in S\}$. Звідси слідує, що ці множини рівні. $\square$

Приклади розв'язування задач

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

системи лінійних рівнянь (6).

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

системи лінійних рівнянь (6). Мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - x_3 - \ \ x_4 - 2x_5 = 0, \\ \qquad\ \ x_2 \qquad\ - \ \ x_4 - \ \ x_5 = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 - x_3 + \ \ x_4 \qquad\ \ = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

системи лінійних рівнянь (6). Мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

розташований в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю.

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A.

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям.

Приклади розв'язування задач

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю.

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклади розв'язування задач

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$.

Приклади розв'язування задач

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A,

Приклади розв'язування задач

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі рівнянь (6) перші два рівняння,

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі рівнянь (6) перші два рівняння, а в їх лівих частинах — лише перші дві невідомі.

Приклади розв'язування задач

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі рівнянь (6) перші два рівняння, а в їх лівих частинах — лише перші дві невідомі. Інші три невідомі x_3, x_4, x_5 оголошуємо вільними:

Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі рівнянь (6) перші два рівняння, а в їх лівих частинах — лише перші дві невідомі. Інші три невідомі x_3, x_4, x_5 оголошуємо вільними:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ \qquad\;\; x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \tag{7}$$

Приклади розв'язування задач

Складаємо таблицю для значень невідомих $x_1, \ldots, x_5$, відокремивши в ній вільні та головні невідомі, і надаємо вільним невідомим вказані в таблиці значення.

Приклади розв'язування задач

Складаємо таблицю для значень невідомих $x_1, \ldots, x_5$, відокремивши в ній вільні та головні невідомі, і надаємо вільним невідомим вказані в таблиці значення.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	0	0
		0	1	0
		0	0	1

Таблиця 1.

Приклади розв'язування задач

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему лінійних рівнянь (7) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:

Приклади розв'язування задач

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему лінійних рівнянь (7) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:
1) для першого набору $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;

Приклади розв'язування задач

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему лінійних рівнянь (7) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:

1) для першого набору $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;

2) для другого набору $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 = 0$;

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему лінійних рівнянь (7) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:
1) для першого набору $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;
2) для другого набору $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 = 0$;
3) для третього набору $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$.

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему лінійних рівнянь (7) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:
1) для першого набору $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;
2) для другого набору $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 = 0$;
3) для третього набору $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$.
Таким чином, заповнивши вільні місця в таблиці 1, одержимо нову таблицю.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Таблиця 2.

Таблиця 2 задає три розв'язки

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 0, 0, 1)$$

системи лінійних однорідних рівнянь (6).

Таблиця 2 задає три розв'язки

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 0, 0, 1)$$

системи лінійних однорідних рівнянь (6). Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої в умові системи лінійних однорідних рівнянь.

Таблиця 2 задає три розв'язки

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 0, 0, 1)$$

системи лінійних однорідних рівнянь (6). Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої в умові системи лінійних однорідних рівнянь. Останнє випливає із теореми 3 і того, що система тривимірних векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ є лінійно незалежною.

Приклади розв'язування задач

Таблиця 2 задає три розв'язки

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 0, 0, 1)$$

системи лінійних однорідних рівнянь (6). Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої в умові системи лінійних однорідних рівнянь. Останнє випливає із теореми 3 і того, що система тривимірних векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ є лінійно незалежною. Загальним розв'язком системи рівнянь (6) є довільна лінійна комбінація розв'язків фундаментальної системи

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

де δ_1, δ_2, δ_3 — довільні дійсні числа.