Кільце многочленів. Подільність у кільці многочленів

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

1 листопада 2022 року

Означення 1

Нехай P — деяке поле

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$,

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.),

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P,

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n —

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P.

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1)

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають старшим коефіцієнтом цього многочлена.

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають старшим коефіцієнтом цього многочлена.

Зауваження 1

Многочленами нульового степеня над полем P

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають старшим коефіцієнтом цього многочлена.

Зауваження 1

Многочленами нульового степеня над полем P є ненульові елементи поля P

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають старшим коефіцієнтом цього многочлена.

Зауваження 1

Многочленами нульового степеня над полем P є ненульові елементи поля P і тільки вони.

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають старшим коефіцієнтом цього многочлена.

Зауваження 1

Многочленами нульового степеня над полем P є ненульові елементи поля P і тільки вони.

За домовленістю нульовий елемент поля P теж вважається многочленом,

Означення 1

Нехай P — деяке поле (наприклад, $P = \mathbb{Q}$ або $P = \mathbb{R}$, або $P = \mathbb{C}$ і т. д., і т. п.), n — деяке невід'ємне ціле число і a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, a_n — деякі, вибрані довільним чином, елементи поля P, причому, a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P.

Елемент a_i називають коефіцієнтом многочлена (1) при i-му степеню невідомої x (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають старшим коефіцієнтом цього многочлена.

Зауваження 1

Многочленами нульового степеня над полем P є ненульові елементи поля P і тільки вони.

За домовленістю нульовий елемент поля P теж вважається многочленом, степінь якого не є визначеним.

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

є многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел степеня 2.

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

є многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел степеня 2.

Алгебраїчний вираз

$$\tfrac{1}{2}x^4 + 1x^3 + \left(-\tfrac{7}{3}\right)x^2 + 0x + (-4)$$

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

є многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел степеня 2.

Алгебраїчний вираз

$$\tfrac{1}{2}x^4 + 1x^3 + \left(-\tfrac{7}{3}\right)x^2 + 0x + (-4)$$

є многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел степеня 4.

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

є многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел степеня 2.

Алгебраїчний вираз

$$\tfrac{1}{2}x^4 + 1x^3 + \left(-\tfrac{7}{3}\right)x^2 + 0x + (-4)$$

є многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел степеня 4.

За домовленістю останній многочлен пишуть у вигляді

$$\tfrac{1}{2}x^4 + x^3 - \tfrac{7}{3}x^2 - 4.$$

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

є многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел степеня 2.

Алгебраїчний вираз

$$\frac{1}{2}x^4 + 1x^3 + \left(-\frac{7}{3}\right)x^2 + 0x + (-4)$$

є многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел степеня 4.

За домовленістю останній многочлен пишуть у вигляді

$$\frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{7}{3}x^2 - 4.$$

Зауваження 2

Домовленість стосується многочленів над числовими полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,

Приклад многочленів

Алгебраїчний вираз

$$3x^2 + 5x + 7$$

є многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел степеня 2.

Алгебраїчний вираз

$$\tfrac{1}{2}x^4 + 1x^3 + \left(-\tfrac{7}{3}\right)x^2 + 0x + (-4)$$

є многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел степеня 4.

За домовленістю останній многочлен пишуть у вигляді

$$\tfrac{1}{2}x^4 + x^3 - \tfrac{7}{3}x^2 - 4.$$

Зауваження 2

Домовленість стосується многочленів над числовими полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, які мають від'ємні коефіцієнти або коефіцієнти, що дорівнюють 1 або 0.

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7,$$

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2,$$

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням.

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином,

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Іноді, многочлени будемо позначати, як правило, маленькими латинськими літерами або літерами разом із невідомою (змінною) у дужках:

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Іноді, многочлени будемо позначати, як правило, маленькими латинськими літерами або літерами разом із невідомою (змінною) у дужках: наприклад, многочлен

$$7x^5 - 3x^2 + x - 1$$

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Іноді, многочлени будемо позначати, як правило, маленькими латинськими літерами або літерами разом із невідомою (змінною) у дужках: наприклад, многочлен

$$7x^5 - 3x^2 + x - 1$$

позначимо через $f(x)$,

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Іноді, многочлени будемо позначати, як правило, маленькими латинськими літерами або літерами разом із невідомою (змінною) у дужках: наприклад, многочлен

$$7x^5 - 3x^2 + x - 1$$

позначимо через $f(x)$, а многочлен

$$4x^3 + 3x^2 - x + 2$$

— через $g(x)$.

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Іноді, многочлени будемо позначати, як правило, маленькими латинськими літерами або літерами разом із невідомою (змінною) у дужках: наприклад, многочлен

$$7x^5 - 3x^2 + x - 1$$

позначимо через $f(x)$, а многочлен

$$4x^3 + 3x^2 - x + 2$$

— через $g(x)$. Писатимемо $f(x) = 7x^5 - 3x^2 + x - 1$,

Зауваження 3

Алгебраїчні ж вирази

$$5x + 3x^2 + 7, \qquad 7 + 5x + 3x^2, \qquad 3x^2 + 3x + 2x + 7$$

не є многочленами згідно з вище вказаним означенням. Хоча існують підручники в яких подається означення многочлена іншим чином, згідно з яким вказані вирази є многочленами.

Іноді, многочлени будемо позначати, як правило, маленькими латинськими літерами або літерами разом із невідомою (змінною) у дужках: наприклад, многочлен

$$7x^5 - 3x^2 + x - 1$$

позначимо через $f(x)$, а многочлен

$$4x^3 + 3x^2 - x + 2$$

— через $g(x)$. Писатимемо $f(x) = 7x^5 - 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 4x^3 + + 3x^2 - x + 2$.

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними,

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів позначають символом $=$,

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів позначають символом $=$, тобто пишуть

$$f(x) = g(x),$$

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів позначають символом $=$, тобто пишуть

$$f(x) = g(x),$$

якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є рівними,

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів позначають символом $=$, тобто пишуть

$$f(x) = g(x),$$

якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є рівними, або це теж саме, що многочлен $f(x)$ є рівним многочлену $g(x)$.

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів позначають символом $=$, тобто пишуть

$$f(x) = g(x),$$

якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є рівними, або це теж саме, що многочлен $f(x)$ є рівним многочлену $g(x)$.

Множину всіх многочленів над полем P від невідомої x

Означення 2

Многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються рівними, якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Рівність многочленів позначають символом $=$, тобто пишуть

$$f(x) = g(x),$$

якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є рівними, або це теж саме, що многочлен $f(x)$ є рівним многочлену $g(x)$.

Множину всіх многочленів над полем P від невідомої x будемо позначати через $P[x]$.

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m,

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$,

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, де в свою чергу $a_{n+1}, \ldots, a_s$ всі рівні нулю, якщо $n < s$

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, де в свою чергу a_{n+1}, $\ldots$, a_s всі рівні нулю, якщо $n < s$ або ж b_{m+1}, $\ldots$, b_s всі рівні нулю, якщо $m < s$.

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, де в свою чергу a_{n+1}, $\ldots$, a_s всі рівні нулю, якщо $n < s$ або ж b_{m+1}, $\ldots$, b_s всі рівні нулю, якщо $m < s$.

Суму многочленів $f(x)$ і $g(x)$ із $P[x]$

Означення 3

Сумою многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, де в свою чергу a_{n+1}, $\ldots$, a_s всі рівні нулю, якщо $n < s$ або ж b_{m+1}, $\ldots$, b_s всі рівні нулю, якщо $m < s$.

Суму многочленів $f(x)$ і $g(x)$ із $P[x]$ позначають через $f(x) + g(x)$.

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) =$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 9,$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 9,$$
$$h(x) + f(x) =$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 9,$$
$$h(x) + f(x) = 8x,$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 9,$$
$$h(x) + f(x) = 8x,$$
$$g(x) + g(x) =$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 9,$$
$$h(x) + f(x) = 8x,$$
$$g(x) + g(x) = 4x - 10,$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$f(x) + g(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 9,$$
$$h(x) + f(x) = 8x,$$
$$g(x) + g(x) = 4x - 10,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4.$$

Приклад суми многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$
$$g(x) = 2x - 5,$$
$$h(x) = -4x^3 + x^2 + x + 4$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.Тоді за означенням суми многочленів

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 4x^3 - x^2 + 9x - 9, \\ h(x) + f(x) &= 8x, \\ g(x) + g(x) &= 4x - 10, \\ h(x) &= -4x^3 + x^2 + x + 4. \end{aligned}$$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

$(k = 0, 1, \ldots, n+m)$,

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

$(k = 0, 1, \ldots, n+m)$, вважаючи, що $a_i = 0$ при $i > n$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

$(k = 0, 1, \ldots, n+m)$, вважаючи, що $a_i = 0$ при $i > n$ або $b_j = 0$ при $j > m$.

Добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ із $P[x]$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

$(k = 0, 1, \ldots, n+m)$, вважаючи, що $a_i = 0$ при $i > n$ або $b_j = 0$ при $j > m$.

Добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ із $P[x]$ позначають через $f(x) \cdot g(x)$

Означення 4

Добутком многочленів

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

із $P[x]$ називається многочлен

$$d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

$(k = 0, 1, \ldots, n+m)$, вважаючи, що $a_i = 0$ при $i > n$ або $b_j = 0$ при $j > m$.

Добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ із $P[x]$ позначають через $f(x) \cdot g(x)$ або $f(x)g(x)$.

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$,

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 5

За означенням

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 5

За означенням для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 5

За означенням для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$

$$f(x) + 0 = f(x),$$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 5

За означенням для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$

$$f(x) + 0 = f(x), \quad 0 + f(x) = f(x),$$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 5

За означенням для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$

$$f(x) + 0 = f(x), \quad 0 + f(x) = f(x), \quad f(x) \cdot 0 = 0,$$

Зауваження 4

Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$, тобто

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Зауваження 5

За означенням для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$

$$f(x) + 0 = f(x), \quad 0 + f(x) = f(x), \quad f(x) \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot f(x) = 0.$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4,$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) =$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

k	Коефіцієнт біля x^k

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

k	Коефіцієнт біля x^k
4	$4_{x^3} \cdot 2_x = 8$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

k	Коефіцієнт біля x^k
4	$4_{x^3} \cdot 2_x = 8$
3	$4_{x^3} \cdot (-5)_{x^0} + (-1)_{x^2} \cdot 2_x = -22$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

k	Коефіцієнт біля x^k
4	$4_{x^3} \cdot 2_x = 8$
3	$4_{x^3} \cdot (-5)_{x^0} + (-1)_{x^2} \cdot 2_x = -22$
2	$-1_{x^2} \cdot (-5)_{x^0} + 7_x \cdot 2_x = 19$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

k	Коефіцієнт біля x^k
4	$4_{x^3} \cdot 2_x = 8$
3	$4_{x^3} \cdot (-5)_{x^0} + (-1)_{x^2} \cdot 2_x = -22$
2	$-1_{x^2} \cdot (-5)_{x^0} + 7_x \cdot 2_x = 19$
1	$7_x \cdot (-5)_{x^0} + (-4)_{x^0} \cdot 2_x = -43$

Приклад добутку многочленів

Нехай

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 7x - 4, \qquad g(x) = 2x - 5$$

— многочлени над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Тоді за означенням добутку многочленів

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^4 - 22x^3 + 19x^2 - 43x + 20.$$

k	Коефіцієнт біля x^k
4	$4_{x^3} \cdot 2_x = 8$
3	$4_{x^3} \cdot (-5)_{x^0} + (-1)_{x^2} \cdot 2_x = -22$
2	$-1_{x^2} \cdot (-5)_{x^0} + 7_x \cdot 2_x = 19$
1	$7_x \cdot (-5)_{x^0} + (-4)_{x^0} \cdot 2_x = -43$
0	$(-4)_{x^0} \cdot (-5)_{x^0} = 20$

Зауваження.

Вище наведені означення суми

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею.

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Добуток довільних ненульових многочленів кільця $P[x]$

Зауваження.

Вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P.

Теорема 1

Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Добуток довільних ненульових многочленів кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом.

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів,

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P,

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P.

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен,

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

із $P[x]$

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

із $P[x]$ є многочлен

$$-f(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

із $P[x]$ є многочлен

$$-f(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

також із $P[x]$.

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

із $P[x]$ є многочлен

$$-f(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

також із $P[x]$. Отже, множина $P[x]$

Доведення.

Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справдження цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

із $P[x]$ є многочлен

$$-f(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

також із $P[x]$. Отже, множина $P[x]$ є абелевою групою відносно операції додавання многочленів.

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів,

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання,

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям.

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m,

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x) \cdot f(x) = d'_{n+m} x^{n+m} + d'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x) \cdot f(x) = d'_{n+m} x^{n+m} + d'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

За означенням добутку многочленів

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x) \cdot f(x) = d'_{n+m} x^{n+m} + d'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

За означенням добутку многочленів для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x) \cdot f(x) = d'_{n+m} x^{n+m} + d'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

За означенням добутку многочленів для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x) \cdot f(x) = d'_{n+m} x^{n+m} + d'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

За означенням добутку многочленів для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j+i=k} b_j a_i$$

Доведення.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів, аналогічно як і операція додавання, задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— будь-які многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x) \cdot g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x) \cdot f(x) = d'_{n+m} x^{n+m} + d'_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

За означенням добутку многочленів для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j+i=k} b_j a_i = d'_k.$$

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.
Домовимося надалі замість $f(x) \cdot g(x)$ писати $f(x)g(x)$.

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.
Домовимося надалі замість $f(x) \cdot g(x)$ писати $f(x)g(x)$.
Нехай, окрім розглянутих вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$, дано ще один довільний многочлен над полем P

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \qquad (c_t \neq 0).$$

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.
Домовимося надалі замість $f(x) \cdot g(x)$ писати $f(x)g(x)$.
Нехай, окрім розглянутих вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$, дано ще один довільний многочлен над полем P

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \qquad (c_t \neq 0).$$

Тоді для довільного $r \in \{0, 1, \ldots, n+m+t\}$ коефіцієнтом при x^r у добутку $[f(x)g(x)]h(x)$ є число

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.
Домовимося надалі замість $f(x) \cdot g(x)$ писати $f(x)g(x)$.
Нехай, окрім розглянутих вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$, дано ще один довільний многочлен над полем P

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \qquad (c_t \neq 0).$$

Тоді для довільного $r \in \{0, 1, \ldots, n+m+t\}$ коефіцієнтом при x^r у добутку $[f(x)g(x)]h(x)$ є число

$$\sum_{k+l=r} d_k c_l$$

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.
Домовимося надалі замість $f(x) \cdot g(x)$ писати $f(x)g(x)$.
Нехай, окрім розглянутих вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$, дано ще один довільний многочлен над полем P

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \qquad (c_t \neq 0).$$

Тоді для довільного $r \in \{0, 1, \ldots, n+m+t\}$ коефіцієнтом при x^r у добутку $[f(x)g(x)]h(x)$ є число

$$\sum_{k+l=r} d_k c_l = \sum_{k+l=r} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) c_l$$

Доведення.

Таким чином

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

тобто операція множення многочленів є комутативною.
Домовимося надалі замість $f(x) \cdot g(x)$ писати $f(x)g(x)$.
Нехай, окрім розглянутих вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$, дано ще один довільний многочлен над полем P

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \qquad (c_t \neq 0).$$

Тоді для довільного $r \in \{0, 1, \ldots, n+m+t\}$ коефіцієнтом при x^r у добутку $[f(x)g(x)]h(x)$ є число

$$\sum_{k+l=r} d_k c_l = \sum_{k+l=r} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) c_l = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l.$$

Доведення.

А в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$

Доведення.

А в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$— рівне йому число

$$\sum_{i+k=r} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right)$$

Доведення.

А в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$— рівне йому число

$$\sum_{i+k=r} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l.$$

Доведення.

А в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$— рівне йому число

$$\sum_{i+k=r} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l.$$

Це означає, що $[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$ для довільних многочленів $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in P[x]$,

Доведення.

А в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$— рівне йому число

$$\sum_{i+k=r} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l.$$

Це означає, що $[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$ для довільних многочленів $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in P[x]$, тобто, що операція множення многочленів задовольняє асоціативній властивості.

Доведення.

А в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$— рівне йому число

$$\sum_{i+k=r} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l.$$

Це означає, що $[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$ для довільних многочленів $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in P[x]$, тобто, що операція множення многочленів задовольняє асоціативній властивості.

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)$$

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)$$

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею.

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P (у числових полях нею є 1).

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P (у числових полях нею є 1).
Добуток довільних ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом,

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P (у числових полях нею є 1).
Добуток довільних ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом, оскільки старший коефіцієнт добутку $f(x)g(x)$ дорівнює добутку старших коефіцієнтів a_n і b_m відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$,

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P (у числових полях нею є 1).
Добуток довільних ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом, оскільки старший коефіцієнт добутку $f(x)g(x)$ дорівнює добутку старших коефіцієнтів a_n і b_m відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$, що не дорівнюють нулю.

Доведення.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad (f(x),g(x),h(x)\in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j)=\sum_{i+j=k}(a_ib_j+a_ic_j)=\sum_{i+j=k} a_ib_j+\sum_{i+j=k} a_ic_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P (у числових полях нею є 1).
Добуток довільних ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом, оскільки старший коефіцієнт добутку $f(x)g(x)$ дорівнює добутку старших коефіцієнтів a_n і b_m відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$, що не дорівнюють нулю. Теорему доведено. □

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.
Навпаки,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$, а з іншого — нулю,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$, а з іншого — нулю, тобто $n + m = 0$.

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$, а з іншого — нулю, тобто $n + m = 0$. Оскільки n і m — невід'ємні цілі числа,

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$, а з іншого — нулю, тобто $n + m = 0$. Оскільки n і m — невід'ємні цілі числа, то остання рівність можлива лише у випадку, коли $n = m = 0$.

Теорема 2

Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.

Доведення.

Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$, а з іншого — нулю, тобто $n + m = 0$. Оскільки n і m — невід'ємні цілі числа, то остання рівність можлива лише у випадку, коли $n = m = 0$. Що й потрібно було довести. □

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}$$

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}.$$

Многочлени x,

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}.$$

Многочлени x, $2x^2 + 3$

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}.$$

Многочлени x, $2x^2 + 3$ є необоротними елементами в $\mathbb{R}[x]$,

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}.$$

Многочлени x, $2x^2 + 3$ є необоротними елементами в $\mathbb{R}[x]$, бо за доведеним вище не існують такі многочлени $u(x)$ та $v(x)$ із $\mathbb{R}[x]$, що

$$x \cdot u(x) = 1,$$

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}.$$

Многочлени x, $2x^2 + 3$ є необоротними елементами в $\mathbb{R}[x]$, бо за доведеним вище не існують такі многочлени $u(x)$ та $v(x)$ із $\mathbb{R}[x]$, що

$$x \cdot u(x) = 1, \quad (2x^2 + 3) \cdot v(x) = 1.$$

Приклад оборотних і необоротних елементів із $\mathbb{R}[x]$

7, $\sqrt{2}$, π є оборотними многочленами в $\mathbb{R}[x]$ і

$$7^{-1} = \frac{1}{7}, \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}.$$

Многочлени x, $2x^2 + 3$ є необоротними елементами в $\mathbb{R}[x]$, бо за доведеним вище не існують такі многочлени $u(x)$ та $v(x)$ із $\mathbb{R}[x]$, що

$$x \cdot u(x) = 1, \quad (2x^2 + 3) \cdot v(x) = 1.$$

Тому писати x^{-1} і $(2x^2 + 3)^{-1}$ у даній ситуації не правильно.

Теорема 3 (про ділення з остачею)

Нехай $g(x)$ *— деякий ненульовий многочлен над полем* P.

Теорема 3 (про ділення з остачею)

Нехай $g(x)$ *— деякий ненульовий многочлен над полем* P*. Тоді для будь-якого многочлена* $f(x) \in P[x]$

Теорема 3 (про ділення з остачею)

Нехай $g(x)$ *— деякий ненульовий многочлен над полем* P*. Тоді для будь-якого многочлена* $f(x) \in P[x]$ *існує єдина пара многочленів* $q(x)$, $r(x) \in P[x]$ *таких,*

Теорема 3 (про ділення з остачею)

Нехай $g(x)$ *— деякий ненульовий многочлен над полем* P*. Тоді для будь-якого многочлена* $f(x) \in P[x]$ *існує єдина пара многочленів* $q(x)$, $r(x) \in P[x]$ *таких, що*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

Теорема 3 (про ділення з остачею)

Нехай $g(x)$ *— деякий ненульовий многочлен над полем* P*. Тоді для будь-якого многочлена* $f(x) \in P[x]$ *існує єдина пара многочленів* $q(x)$, $r(x) \in P[x]$ *таких, що*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{2}$$

причому степінь многочлена $r(x)$ *менша за степінь многочлена* $g(x)$ *або* $r(x) = 0$.

Теорема 3 (про ділення з остачею)

Нехай $g(x)$ — деякий ненульовий многочлен над полем P. Тоді для будь-якого многочлена $f(x) \in P[x]$ існує єдина пара многочленів $q(x)$, $r(x) \in P[x]$ таких, що

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{2}$$

причому степінь многочлена $r(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$ або $r(x) = 0$.

Многочлени $q(x)$ і $r(x)$ у рівності (2) називаються відповідно часткою і остачею при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m і нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m і нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m і нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Якщо $n < m$,

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m і нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Якщо $n < m$, то покладемо $q(x) = 0$, а $r(x) = f(x)$.

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m і нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Якщо $n < m$, то покладемо $q(x) = 0$, а $r(x) = f(x)$. Тоді, очевидно,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — деякі ненульові многочлени над полем P відповідно степенів n і m і нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Якщо $n < m$, то покладемо $q(x) = 0$, а $r(x) = f(x)$. Тоді, очевидно,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

і оскільки степінь многочлена $r(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$, то перше твердження теореми у цьому випадку доведено.

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$,

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$,

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$.

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x)$$

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків:

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$,

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n.

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь через n_1,

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь через n_1, а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — через $a_{n_1}^{(1)}$.

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь через n_1, а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — через $a_{n_1}^{(1)}$. Тобто $f_1(x) = a_{n_1}^{(1)}x^{n_1} + \cdots$.

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь через n_1, а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — через $a_{n_1}^{(1)}$. Тобто $f_1(x) = a_{n_1}^{(1)}x^{n_1} + \cdots$.
Якщо $n_1 \geq m$,

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь через n_1, а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — через $a_{n_1}^{(1)}$. Тобто $f_1(x) = a_{n_1}^{(1)}x^{n_1} + \cdots$.

Якщо $n_1 \geq m$, то повторюючи для $f_1(x)$ ті самі кроки, що й для $f(x)$,

Доведення.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot g(x) =$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) -$$

$$-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0).$$

Очевидно, можливий лише один із випадків: або $f_1(x) = 0$, або або $f_1(x) \neq 0$ і степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь через n_1, а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — через $a_{n_1}^{(1)}$. Тобто $f_1(x) = a_{n_1}^{(1)}x^{n_1} + \cdots$.

Якщо $n_1 \geq m$, то повторюючи для $f_1(x)$ ті самі кроки, що й для $f(x)$, дістанемо многочлен

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}x^{n_1-m} \cdot g(x),$$

де або $f_2(x) = 0$, або $f_2(x)$ є ненульовим многочленом степеня, меншого від n_1.

Доведення.

Позначимо через n_2 степінь, а через $a_{n_2}^{(2)}$ — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$. Якщо $n_2 \geq m$, то, повторивши наведені вище міркування, дістанемо многочлен

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2-m} \cdot g(x)$$

Доведення.

Позначимо через n_2 степінь, а через $a_{n_2}^{(2)}$ — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$. Якщо $n_2 \geq m$, то, повторивши наведені вище міркування, дістанемо многочлен

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2-m} \cdot g(x)$$

і т. д.

Доведення.

Позначимо через n_2 степінь, а через $a_{n_2}^{(2)}$ — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$. Якщо $n_2 \geq m$, то, повторивши наведені вище міркування, дістанемо многочлен

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2-m} \cdot g(x)$$

і т. д.
Оскільки степені многочленів $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... спадають,

Доведення.

Позначимо через n_2 степінь, а через $a_{n_2}^{(2)}$ — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$. Якщо $n_2 \geq m$, то, повторивши наведені вище міркування, дістанемо многочлен

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2-m} \cdot g(x)$$

і т. д.
Оскільки степені многочленів $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... спадають,

$$n > n_1 > n_2 > \ldots,$$

Доведення.

Позначимо через n_2 степінь, а через $a_{n_2}^{(2)}$ — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$. Якщо $n_2 \geq m$, то, повторивши наведені вище міркування, дістанемо многочлен

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{n_2}^{(2)}}{b_m} x^{n_2 - m} \cdot g(x)$$

і т. д.
Оскільки степені многочленів $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... спадають,

$$n > n_1 > n_2 > \ldots,$$

то після скінченного числа кроків одержимо многочлен

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1} - m} \cdot g(x),$$

який або дорівнює нулю, або має степінь n_k менший від m.

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$
$$= f(x) + f_1(x) + \cdots + f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x) -$$

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$

$$= f(x) + f_1(x) + \cdots + f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1-m} g(x) - \cdots - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x).$$

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$

$$= f(x) + f_1(x) + \cdots + f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x) -$$

$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1-m} g(x) - \cdots - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x).$$

Звідси

$$f_k(x) = f(x) -$$

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$
$$= f(x) + f_1(x) + \cdots + f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x) -$$
$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) - \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} g(x) - \cdots - \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x).$$

Звідси

$$f_k(x) = f(x) -$$
$$- \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \right) g(x).$$

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$
$$= f(x) + f_1(x) + \cdots + f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x) -$$
$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) - \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} g(x) - \cdots - \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x).$$

Звідси

$$f_k(x) = f(x) -$$
$$- \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \right) g(x).$$

Далі, поклавши

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m},$$

Доведення.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k-1}(x) + f_k(x) =$$
$$= f(x) + f_1(x) + \cdots + f_{k-2}(x) + f_{k-1}(x) -$$
$$- \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) - \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} g(x) - \cdots - \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x).$$

Звідси

$$f_k(x) = f(x) -$$
$$- \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \right) g(x).$$

Далі, поклавши

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m}, \quad r(x) = f_k(x),$$

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю,

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$,

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$,

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми.

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми. Припустимо протилежне,

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми. Припустимо протилежне, нехай $q_1(x)$ і $r_1(x)$

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми. Припустимо протилежне, нехай $q_1(x)$ і $r_1(x)$ — деяка інша пара многочленів,

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми. Припустимо протилежне, нехай $q_1(x)$ і $r_1(x)$ — деяка інша пара многочленів, для яких справджується рівність

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \tag{3}$$

причому $r_1(x)$ є або нульовим многочленом,

Доведення.

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

У випадку, коли $f(x) = 0$, то очевидною є рівність

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + 0,$$

так само як є очевидним доведення першого твердження теореми.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми. Припустимо протилежне, нехай $q_1(x)$ і $r_1(x)$ — деяка інша пара многочленів, для яких справджується рівність

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \tag{3}$$

причому $r_1(x)$ є або нульовим многочленом, або многочленом степеня, меншого ніж степінь $g(x)$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$,

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б,

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$,

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$,

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне. Отже, $r_1(x) - r(x) = 0$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне. Отже, $r_1(x) - r(x) = 0$. Тоді $g(x)[q(x) - q_1(x)] = 0$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне. Отже, $r_1(x) - r(x) = 0$. Тоді $g(x)[q(x) - q_1(x)] = 0$. Оскільки $g(x) \neq$, то за теоремою 1 справджується рівність $q(x) - q_1(x) = 0$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне. Отже, $r_1(x) - r(x) = 0$. Тоді $g(x)[q(x) - q_1(x)] = 0$. Оскільки $g(x) \neq$, то за теоремою 1 справджується рівність $q(x) - q_1(x) = 0$. Тому $r_1(x) = r(x)$, $q_1(x) = q(x)$.

Доведення.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) і (3), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{4}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (4) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (4) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне. Отже, $r_1(x) - r(x) = 0$. Тоді $g(x)[q(x) - q_1(x)] = 0$. Оскільки $g(x) \neq$, то за теоремою 1 справджується рівність $q(x) - q_1(x) = 0$. Тому $r_1(x) = r(x)$, $q_1(x) = q(x)$. Одержана суперечність доводить теорему. □

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - \quad x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline & \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - \quad x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline & \frac{1}{3}x \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \\ \cline{1-1} -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1} -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1} -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\ -\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1} -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\ -\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\ \cline{1-1} -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} & \end{array}$$

Приклад ділення многочлена на многочлен

Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді $g(x)q(x) + r(x)$, використаємо метод приведений у доведенні попередньої теореми, але з використання наступної діаграми:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1} -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\ -\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\ \cline{1-1} -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} & \end{array}$$

Отже, часткою і остачею при діленні заданих в умові многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ будуть відповідно многочлени $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$ та $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$:

$$f(x) = g(x) \cdot \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{7}{9}\right) + \left(-\tfrac{26}{9}x - \tfrac{2}{9}\right).$$

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x,

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю.

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю,

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то кажуть що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$,

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то кажуть що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають дільником многочлена $f(x)$.

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то кажуть що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають дільником многочлена $f(x)$.

Із теореми про ділення з остачею одразу випливає наступна теорема.

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то кажуть що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають дільником многочлена $f(x)$.

Із теореми про ділення з остачею одразу випливає наступна теорема.

Теорема 4

Многочлен $g(x)$ над полем P є дільником многочлена $f(x)$ із $P[x]$

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то кажуть що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають дільником многочлена $f(x)$.

Із теореми про ділення з остачею одразу випливає наступна теорема.

Теорема 4

Многочлен $g(x)$ над полем P є дільником многочлена $f(x)$ із $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $h(x) \in P[x]$ такий,

Означення 5

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени над полем P від невідомої x, причому $g(x)$ не дорівнює нулю. Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то кажуть що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають дільником многочлена $f(x)$.

Із теореми про ділення з остачею одразу випливає наступна теорема.

Теорема 4

Многочлен $g(x)$ над полем P є дільником многочлена $f(x)$ із $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $h(x) \in P[x]$ такий, що

$$f(x) = g(x)h(x).$$

Теорема 5

Нехай P *— будь-яке поле.*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$,*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$,*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$,*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*
3) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$,*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*
3) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді добуток $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$ для довільного многочлена $h(x)$;*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*
3) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді добуток $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$ для довільного многочлена $h(x)$;*
4) *якщо кожний із многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ ділиться на $g(x)$,*

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*
3) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді добуток $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$ для довільного многочлена $h(x)$;*
4) *якщо кожний із многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді на $g(x)$ ділиться многочлен*

$$f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x)+\cdots+f_k(x)h_k(x),$$

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*
3) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді добуток $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$ для довільного многочлена $h(x)$;*
4) *якщо кожний із многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді на $g(x)$ ділиться многочлен*

$$f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x)+\cdots+f_k(x)h_k(x),$$

де $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\ldots$, $h_k(x)$ — довільні многочлени із $P[x]$;

Теорема 5

Нехай P — будь-яке поле. Справджуються наступні твердження для многочленів над полем P:

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$;*
2) *якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x)+g(x)$ діляться на $h(x)$;*
3) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді добуток $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$ для довільного многочлена $h(x)$;*
4) *якщо кожний із многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді на $g(x)$ ділиться многочлен*

$$f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x)+\cdots+f_k(x)h_k(x),$$

де $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\ldots$, $h_k(x)$ — довільні многочлени із $P[x]$;

5) *довільний многочлен $f(x)$ ділиться на будь-який многочлен нульового степеня;*

Теорема 5

6) якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$,

Теорема 5

6) якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $cg(x)$,

Теорема 5

6) якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $cg(x)$, для будь-якого ненульового елемента c поля P;

Теорема 5

6) якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $cg(x)$, для будь-якого ненульового елемента c поля P;
7) многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тоді і тільки діляться один на одного,

Теорема 5

6) якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $cg(x)$, для будь-якого ненульового елемента c поля P;
7) многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тоді і тільки діляться один на одного, коли $g(x) = cf(x)$ для деякого ненульового елемента c поля P;

Теорема 5

6) якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $cg(x)$, для будь-якого ненульового елемента c поля P;
7) многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тоді і тільки діляться один на одного, коли $g(x) = cf(x)$ для деякого ненульового елемента c поля P;
8) довільний дільник одного з двох многочленів $f(x)$ та $cf(x)$ ($c \in P$, $c \neq 0$) є дільником і для іншого многочлена.

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$,

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$.

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x),$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$.

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x)$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)]$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\,u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\,u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\,u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x),$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\,u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$.

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) + g(x) =$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) + g(x) = h(x)u(x) + h(x)v(x)$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) + g(x) = h(x)u(x) + h(x)v(x) = h(x)[u(x) + v(x)]$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) + g(x) = h(x)u(x) + h(x)v(x) = h(x)[u(x) + v(x)] = h(x)w(x).$$

Доведення.

1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси

$$f(x) = [h(x)v(x)]\, u(x) = h(x)[v(x)u(x)] = h(x)w(x).$$

Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$.Тоді

$$f(x) = h(x)u(x), \quad g(x) = h(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) + g(x) = h(x)u(x) + h(x)v(x) = h(x)[u(x) + v(x)] = h(x)w(x).$$

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) =$$

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x)$$

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)]$$

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє. Нехай четверте твердження є правильним для довільного натурального числа k меншого за деяке натуральне число n.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє. Нехай четверте твердження є правильним для довільного натурального числа k меншого за деяке натуральне число n. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ є многочленами із $P[x]$, що діляться на многочлен $g(x)$.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє. Нехай четверте твердження є правильним для довільного натурального числа k меншого за деяке натуральне число n. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ є многочленами із $P[x]$, що діляться на многочлен $g(x)$. Розглянемо будь-які многочлени $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... $h_n(x)$ із $P[x]$.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє. Нехай четверте твердження є правильним для довільного натурального числа k меншого за деяке натуральне число n. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ є многочленами із $P[x]$, що діляться на многочлен $g(x)$. Розглянемо будь-які многочлени $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... $h_n(x)$ із $P[x]$. Тоді за припущенням індукції многочлен

$$f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)$$

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє. Нехай четверте твердження є правильним для довільного натурального числа k меншого за деяке натуральне число n. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ є многочленами із $P[x]$, що діляться на многочлен $g(x)$. Розглянемо будь-які многочлени $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... $h_n(x)$ із $P[x]$. Тоді за припущенням індукції многочлен

$$f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)$$

ділиться на $g(x)$.

Доведення.

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справджуються рівності

$$f(x)h(x) = [g(x)u(x)]h(x) = g(x)[u(x)h(x)] = g(x)w(x).$$

Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження поведемо методом математичної індукції. У випадку $k = 1$ це твердження повторює попереднє. Нехай четверте твердження є правильним для довільного натурального числа k меншого за деяке натуральне число n. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ є многочленами із $P[x]$, що діляться на многочлен $g(x)$. Розглянемо будь-які многочлени $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... $h_n(x)$ із $P[x]$. Тоді за припущенням індукції многочлен

$$f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)$$

ділиться на $g(x)$. За доведеним раніше добуток $f_n(x)h_n(x)$ теж ділиться на $g(x)$.

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x)$$

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P.

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P. Тому доведення п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P. Тому доведення п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

де $f(x)$ — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний ненульовий елемент поля P.

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P. Тому доведення п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

де $f(x)$ — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний ненульовий елемент поля P.

6) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$.

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P. Тому доведення п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

де $f(x)$ — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний ненульовий елемент поля P.

6) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$.

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P. Тому доведення п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

де $f(x)$ — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний ненульовий елемент поля P.

6) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Для довільного ненульового елемента c поля P справджується рівність $f(x) = [cg(x)][c^{-1}u(x)]$,

Доведення.

Отже сума многочленів

$$\Big(f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x)\Big) + f_n(x)h_n(x) =$$
$$= f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)h_{n-1}(x) + f_n(x)h_n(x)$$

ділиться на $g(x)$.

5) Нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, отже оборотним, елементом поля P. Тому доведення п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

де $f(x)$ — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний ненульовий елемент поля P.

6) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Для довільного ненульового елемента c поля P справджується рівність $f(x) = [cg(x)][c^{-1}u(x)]$, звідки слідує доведення шостого твердження.

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$,

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$.

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x),$$

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$.

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x)$$

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$,

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1 $v(x)u(x) - 1 = 0$

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1 $v(x)u(x) - 1 = 0$, тобто $v(x)u(x) = 1$.

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1 $v(x)u(x) - 1 = 0$, тобто $v(x)u(x) = 1$. Це означає, що $v(x)$ є оборотним елементом кільця $P[x]$.

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1 $v(x)u(x) - 1 = 0$, тобто $v(x)u(x) = 1$. Це означає, що $v(x)$ є оборотним елементом кільця $P[x]$. Тому $v(x)$ є деяким ненульовим елементом c поля P.

Доведення.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді

$$f(x) = g(x)u(x), \quad g(x) = f(x)v(x)$$

для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси

$$f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0.$$

Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1 $v(x)u(x) - 1 = 0$, тобто $v(x)u(x) = 1$. Це означає, що $v(x)$ є оборотним елементом кільця $P[x]$. Тому $v(x)$ є деяким ненульовим елементом c поля P.

8) Доведення восьмого твердження одразу слідує із першого та сьомого тверджень. □

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$,

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q =$$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3$$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2$$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x$$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$,

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$,

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm + a = p$,

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де $a,\ b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1,\ am + b = 0,\ bm + a = p,\ b = q.$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm + a = p$, $b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm + a = p$, $b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$ є система рівностей:

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm + a = p$, $b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$ є система рівностей: $m = -q$,

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm + a = p$, $b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$ є система рівностей: $m = -q$, $p = 1 - q^2$.

Приклад розв'язування задачі на подільність

За якої умови многочлен x^3+px+q ділиться на многочлен x^2+mx+1, де $p, q, m \in \mathbb{R}$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{5}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$, де a, $b \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$.Тоді з рівності

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)(ax + b)$$

одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm + a)x + b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm + a = p$, $b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$ є система рівностей: $m = -q$, $p = 1 - q^2$. Неважко переконатися, що з цих рівностей слідує подільність вказаних в умові многочленів.