Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2004

КІБЕРНЕТИКА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.14

Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський

Нейронні елементи над кільцем $\mathbb{Z}_{p^m}$

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Грициком)

Neuron elements over the ring $\mathbb{Z}_{p^m}$ and their use for the study and synthesis of discrete functions are introduced and studied.

Нейромережі успішно використовуються для розв'язування широкого класу практичних задач. Класичні нейропарадигми розглядаються в [1–3]. Нейронні елементи над скінченними полями вивчаються в [4]. В роботі вводиться поняття нейронного елемента над кільцем класів лишків, досліджується використання таких елементів для зображення дискретних функцій.

Нехай p — просте число ($p > 2$), m — натуральне, $\mathbb{Z}_{p^m} = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ — кільце класів лишків за модулем p^m, $c = \varphi(p^m)$, де φ — функція Ейлера, $G = U(\mathbb{Z}_{p^m})$ — група оборотних елементів кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$. Відомо [5], що $G = \langle \varepsilon \mid \varepsilon^c = 1 \rangle$. Тоді для кожного $a \in G a = \varepsilon^{\operatorname{ind} a}$, де $\operatorname{ind} a \in \{0, 1, \ldots, c-1\}$. Нехай n — натуральне, $k_0, k_1, \ldots, k_n$ — такі натуральні числа, що $k_i > 1$, $k_i \mid (p-1)$ ($p-1$ націло ділиться на k_i), $\sigma_i = \varepsilon^{\frac{c}{k_i}}$, $k = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i$, $H_i = \langle \sigma_i \mid \sigma_i^{k_i} = 1 \rangle$, $i = 0, \ldots, n$, $H = H_1 \times \ldots \times H_n$ — прямий добуток циклічних груп H_i. Визначимо відображення $\operatorname{Gsign}\colon G \to H_0$ так:

$$\operatorname{Gsign} x = \left[\frac{k_0 \cdot \operatorname{ind} x}{c}\right],$$

де $[a]$ — ціла частина раціонального числа a.

Означення. Дискретна функція $f\colon H \to H_0$ реалізується на нейронному елементі над кільцем $\mathbb{Z}_{p^m}$ (f — $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункція), якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$, ($w_i \in \mathbb{Z}_{p^m}$), що для довільного $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in H$

$$f(\mathbf{x}) = \operatorname{Gsign}(w_0 + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n).$$

Вектор $\mathbf{w}$ називається вектором структури нейронного елемента. Надалі для скорочення запису зважену суму $w_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i$ будемо позначати через $\mathrm{w}(\mathbf{x})$.

Лема 1. *Функція $f(\mathbf{x})$ є $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцією з вектором структури* $\mathbf{w}$ *тоді і тільки, коли знайдеться така функція $\psi\colon H \to G$, що для всіх $\mathbf{x} \in H$*

$$f(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}), \qquad 0 \leqslant \operatorname{ind} \psi(\mathbf{x}) < \frac{c}{k_0}.$$

Доведення випливає з означення $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцій.

Нехай $L(H, \mathbb{Z}_{p^m}) = \{f \mid f\colon H \to \mathbb{Z}_{p^m}\}$. Очевидно, що $L(H, \mathbb{Z}_{p^m})$ можна розглядати як $\mathbb{Z}_{p^m}$-модуль. Визначимо функції $\chi_j\colon H \to G$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ так:

$$\chi_j(\mathbf{x}) = x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n},$$

де $0 \leqslant j_i < k_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = j_1 + k_1 j_2 + k_1 k_2 j_3 + \ldots + k_1 k_2 \ldots, k_{n-1} j_n$.

Легко бачити, що функції χ_j задають гомоморфне відображення групи H в групу оборотних елементів кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$. За аналогією з [6] функції χ_j будемо називати характерами групи H над кільцем $\mathbb{Z}_{p^m}$. Визначимо відображення $(,)\colon L(H, \mathbb{Z}_{p^m}) \times G^k \to \mathbb{Z}_{p^m}$ таким чином:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i y_i^{-1}.$$

Лема 2. *Для системи функцій $\{\chi_j\}$ справджуються співвідношення:*

$$\sum_{\mathbf{x} \in H} \chi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} k, & \text{якщо } j = 0, \\ 0, & \text{якщо } 0 < j < k, \end{cases} \tag{1}$$

$$(\chi_i, \chi_j) = \begin{cases} k, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Доведемо (1) для випадку $j > 0$.

$$\sum_{\mathbf{x} \in H} \chi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} \sigma_1^{i_1 j_1} \ldots \sigma_n^{i_n j_n} = \prod_{i=1}^{n} \bigl(1 + \sigma_i^{j_i} + \ldots + \sigma_i^{j_i(k_i-1)}\bigr).$$

Нехай $j_l \geqslant 1$. Тоді $(\sigma_l^{j_l} - 1) \sum_{\mathbf{x} \in H} \chi(\mathbf{x}) = 0$. Досить показати, що $\sigma_l^{j_l} - 1$ — оборотний елемент кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$. Останнє твердження випливає з малої теореми Ферма та таких співвідношень: $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + p^m \mathbb{Z}$, $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{Z}$, $\bar{\varepsilon}^{\frac{c}{k_l} j_l} \equiv \bar{\varepsilon}^{\frac{p-1}{k_l} j_l} \not\equiv 1 \pmod p$. Рівність (2) випливає з (1) та з співвідношення $(\chi_i, \chi_j) = \chi_l$, де $l = l_1 + l_2 k_1 + \ldots + l_n k_1 \ldots k_{n-1}$, $l_q \equiv i_q - j_q \pmod{k_q}$, $(l_q \in \{0, \ldots, k_q - 1\}$, $q = 1, \ldots, n)$.

Теорема 1. *Система функцій $\{\chi_j\}$ є базисом $\mathbb{Z}_{p^m}$-модуля $L(H, \mathbb{Z}_{p^m})$.*

Доведення. Покажемо спочатку, що функції χ_j утворюють лінійно незалежну над $\mathbb{Z}_{p^m}$ систему. Розглянемо рівність $\alpha_0 \chi_0 + \ldots + \alpha_{k-1} \chi_{k-1} = \mathbf{0}$. Домножимо її на χ_i^{-1} і просумуємо за всіма $\mathbf{x} \in H$. З урахуванням (2) отримаємо, що $k\alpha_i = 0$. Оскільки k і p взаємно прості, то $\alpha_i = 0$. Доведемо тепер, що χ_j породжують $L(H, \mathbb{Z}_{p^m})$. Нехай $f\colon H \to G$. Будемо вважати, що $f = (f_0, \ldots, f_{k-1})^T$, де $f_j = f(\sigma_1^{j_1}, \ldots, \sigma_n^{j_n})$, $j = j_1 + k_1 j_2 + \ldots + k_1 \ldots k_{n-1} j_n$, $j_i \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$, $i = 1, \ldots, n$. Розглянемо квадратну матрицю U порядку k: $U = \|u_{ij}\|$, де $u_{ij} = \chi_j(\mathbf{x}_i)$. З леми 2 випливає, що $U^{-1} = (1/k) U^*$, де $1/k$ — елемент кільця $\mathbb{Z}_{p^m}$, обернений до $k + p^m\mathbb{Z}$, $U^* = \|u^*_{ij}\|_{i,j=\overline{0,k-1}}$, $u^*_{ij} = u^{-1}_{ji}$. Нехай вектор $s_f = (s_0, \ldots, s_{k-1})^T$ визначається так: $s_f = k^{-1}U^*f$. Тоді $f = s_0\chi_0 + \ldots + s_{k-1}\chi_{k-1}$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Дискретна функція $f\colon H \to H_0$ є $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцією з вектором структури $\mathbf{w}$ тоді і тільки тоді, коли існує така функція $\psi\colon H \to G$, що $0 \leqslant \operatorname{ind}\psi(\mathbf{x}) < c/k_0$ і для всіх χ_j, $j = 0, \ldots, k-1$, крім $j = 0, 1, k_1, \ldots, k_1k_2 \ldots k_{n-1}$*

$$(\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi_j(\mathbf{x})) = 0. \tag{3}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що умова (3) є необхідною. Нехай функція f реалізується над $\mathbb{Z}_{p^m}$ на нейронному елементі з вектором структури $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$. Тоді, за лемою 1, існує така функція $\psi(\mathbf{x})$, що $0 \leqslant \operatorname{ind}\psi(\mathbf{x}) < c/k_0$ і $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x})$. Отже, $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = w_0\chi_0 + w_1\chi_1 + w_2\chi_{k_1} + \ldots + w_n\chi_{k_1\ldots k_{n-1}}$. Функцію $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ розкладемо за базисом $\{\chi_j\}$: $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} s_j\chi_j(\mathbf{x})$. З двох останніх рівностей і однозначності розкладу за базисом $\{\chi_j\}$ випливає справедливість співвідношення (3). Необхідність доведена. Покажемо, що умова (3) є достатньою. З справедливості співвідношення (3) випливає, що у розкладі функції $\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ за базисом $\{\chi_j\}$ коефіцієнти s_j дорівнюють нулю при $j \notin \{0, 1, k_1, \ldots, k_1k_2 \ldots k_{n-1}\}$. Тому для функції $f(\mathbf{x})$ виконується достатня умова леми 1. Отже $f(\mathbf{x})$ є $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцією з вектором структури $\mathbf{w}$. Теорема доведена.

Якщо дискретна функція $f(\mathbf{x})$ задовольняє умови теореми 2, то координати вектора структури нейронного елемента, який реалізує $f(\mathbf{x})$, знаходяться за формулами:

$$w_0 = k^{-1}\big(\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi_0(\mathbf{x})\big), \qquad w_j = k^{-1}\big(\psi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi_{2^{j-1}}(\mathbf{x})\big), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Проілюструємо синтез нейронного елемента над кільцем $\mathbb{Z}_{p^m}$ такому прикладі. Нехай $n = 2$, $k_1 = k_2 = 2$, $p = 5$, $m = 1$, $c = 4$, $\varepsilon = 2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 4$, $f(1,1) = f(4,4) = 4$, $f(1,4) = f(4,1) = 1$. Тоді на основі теореми 2 маємо, що бульова (в алфавіті $\{1,4\}$) функція $f(x_1, x_2)$ є $\mathbb{Z}_5$-нейрофункцією з вектором структури $\mathbf{w} = (1, 4, 4)$. Звідси випливає цікавий факт, що непорогові (в класичному розумінні) бульові функції $x \Leftrightarrow y$ та $x \oplus y$ є $\mathbb{Z}_5$-нейрофункціями.

Відзначимо також, що на множині $\mathbb{Z}_{p^m}$-нейрофункцій можна ввести інваріантні операції [1].

1. *Дертоузос М.* Пороговая логика. – Москва: Мир, 1967. – 341 с.
2. *Уоссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – Москва: Мир, 1992. – 240 с.
3. *Комарцова Л. Г., Максимов А. В.* Нейрокомпьютеры. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 318 с.
4. *Лабунец В. Г., Ситников О. П.* Гармонический анализ булевых функций и функций k-значной логики над конечными полями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1975. – № 1. – С. 141–148.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – Москва: Наука, 1972. – 118 с.
6. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – Москва: Наука, 1979. – 623 с.

Ужгородський національний університет

Надійшло до редакції 23.10.2003