ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ І СИСТЕМИ
Т.4, № 1-2 (2001) С.44-46

INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS
VOL.4, № 1-2 (2001) P.44-46

КРИТЕРІЙ РЕАЛІЗОВНОСТІ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІЙ ОДНИМ БАГАТОЗНАЧНИМ НЕЙРОННИМ ЕЛЕМЕНТОМ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Ф.Е. Гече[1], А.Є. Батюк[2]

[1]Ужгородський державний університет, Ужгород

[2]Національний університет "Львівська політехніка", Львів

(Надійшла 2 листопада 2000 року)

Наведені критерії реалізовності дискретних функцій одним багатозначним нейронним елементом. Розроблено метод його синтезу над полем комплексних чисел.

Розробка методів синтезу багатозначного нейронного елемента для реалізації дискретних функцій є актуальною і практично важливою задачею, тому ці елементи можуть бути широко використані при побудові пристроїв автоматичного керування, розпізнавання зображень і сигналів та при прогнозуванні випадкових процесів. В статті узагальнюються результати робіт [1,2].

Нехай $Z_{k_i} = \{0,1,\dots,k_i-1\}$, $(i = 1,2,\dots,n)$ і $Z_m = \{0,1,\dots,m-1\}$ скінчені множини, де $k_i \ge 2$, $m \ge 2$, і $D_n = Z_{k_1} \times Z_{k_2} \times \dots \times Z_{k_n}$ декартовий добуток множин $Z_{k_1},\dots,Z_{k_n}$. Дискретною функцією визначеною на D_n із значеннями в Z_m будемо називати однозначне відображення $f: D_n \to Z_m$. Позначимо через k найменше спільне кратне чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ та m. Поле комплексних чисел при довільному k містить всі корені k-ого степеня з 1, тобто $\sqrt[k]{1} \in C$.

Нехай ε первісний корінь k-го ступеня з 1. Розглянемо циклічні групи

$$H_{k_1} = \left\langle \sigma_1 \middle| \sigma_1 = \varepsilon^{\frac{k}{k_1}} \right\rangle,\ H_{k_1} = \left\langle \sigma_1 | \sigma_1 = \varepsilon^{\frac{k}{k_1}} \right\rangle, \dots,$$

$$H_{k_n} = \left\langle \sigma_n | \sigma_n = \varepsilon^{\frac{k}{k_n}} \right\rangle,\ H_m = \left\langle \sigma_m | \sigma_m = \varepsilon^{\frac{k}{m}} \right\rangle,$$

які відповідно мають порядки $k_1, k_2, \dots, k_n$ і m. Позначимо через G_n прямий добуток циклічних груп $H_{k_1},\dots,H_{k_n}$. Дискретна функція задана на G_n із значеннями в H_m, реалізує однозначне відображення $f: G_n \to H_m$. Довільний елемент $g \in G_n$ може бути записаний так: $g = \sigma_1^{j_1(g)} \cdot \sigma_2^{j_2(g)} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{j_n(g)}$, де $j_i(g) \in \{0,1,2,\dots,k_i-1\}$, $i = 1,2,\dots,n$. Тоді значення характера $\chi_{(s_1,\dots,s_n)}$ групи G_n на елементі $g \in G_n$ визначаються таким чином:

$$\chi_{(s_1,\dots,s_n)}(g) = \sigma_1^{s_1 j_1(g)} \cdot \sigma_2^{s_2 j_2(g)} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{s_n j_n(g)} = \varepsilon^{k \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i j_i(g)}{k_i}}.$$

Елементи множини D_n розташуємо у звичному порядку: $(0,\dots,0,0)$, $(0,\dots,0,1)$, ..., $(0,\dots,0,k_n-1)$, $(0,\dots,1,0)$, ..., $(0,\dots,k_{n-1}-1,k_n-1)$, ..., $(1,0,\dots,0)$, ..., $(k_1-1,\dots,k_n-1)$ і кожному набору $(s_1,\dots,s_n) \in D_n$ поставимо у відповідність його порядковий номер s і для характерів $\chi_{(s_1,\dots,s_n)}$ групи G_n введемо позначення $\chi_{(s_1,\dots,s_n)}(g) = \chi_s(g)$. Для характерів групи G_n над полем C співвідношення ортогональності для характерів запишеться як:

$$\sum_{g \in G_n} \chi_s(g) \overline{\chi}_q(g) = |G_n| \delta_{sq}, \qquad (1)$$

де $\overline{\chi}_q(g)$ — комплексно спряжене значення $\chi_q(g)$, $|G_n|$ – порядок групи G_n, $\delta_{sq} = 1$, якщо $s=q$, і $\delta_{sq} = 0$, якщо $s \ne q$.

Визначимо на полі C, за виключенням точки 0, функцію $C sign\, z$

$$\forall z \in C \setminus \{0\}\ C sign\, z = \sigma^j, \text{ якщо}$$

$$\frac{2\pi j}{m} \le arg\, z < \frac{2\pi(j+1)}{m},$$

де $j \in \{0,1,\dots,m-1\}$ і $\sigma = \varepsilon^{k/m}$.

Кажуть, що дискретна функція $f: G_n \to Z_m$ реалізується одним багатозначним нейронним елементом над полем C, якщо існує такий $(n+1)$-вимірний вектор $w = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ $(\omega_i \in C)$, що $\forall x \in G_n$ $f(x) = C sign\, w(x)$.

Вектор $w = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ називається вектором структури багатозначного нейронного елемента.

Теорема 1. *Дискретна функція $f: G_n \to Z_m$ реалізується одним багатозначним нейронним елементом з вектором структури $w = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ над полем C в тому і тільки в тому випадку, коли існує така функція $r(x)$, визначена на G_n із значенням в $C \setminus \{0\}$, що*

$$r(x) f(x) = w(x),$$

$$0 \le arg\, r(x) < \frac{2\pi}{m}.$$

Теорема доводиться аналогічно теоремі 2.1 [1].

Розглянемо вектори $\boldsymbol{a}=(1{,}0)$ і $\boldsymbol{b}=\left(\cos\frac{2\pi}{m},\sin\frac{2\pi}{m}\right)$, які при $m>2$, очевидно, неколінеарні. Це означає, що функцію $r(\boldsymbol{x})$ можна записати у вигляді

$$r(\boldsymbol{x})=a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon,$$

де $a(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{x})$ приймають значення з поля дійсних чисел R.

В роботі [1] показано, що функція $r(\boldsymbol{x})$ ($r:G\to C\setminus\{0\}$), яка задовільняє умову

$$0\le \arg r(\boldsymbol{x})<\frac{2\pi}{m}\ (m>2),$$

допускає зображення $r(\boldsymbol{x})=a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon$, тоді і тільки тоді, коли існують такі функції $a(\boldsymbol{x})$ ($a:G_n\to R$), $b(\boldsymbol{x})$ ($b:G_n\to R$), що $a(\boldsymbol{x})>0$ і $b(\boldsymbol{x})\ge 0$.

На основі цього, теорему 1 можна переписати так:

***Теорема 2**. Дискретна функція $f:G_n\to Z_m$ ($m>2$) реалізується одним багатозначним нейронним елементом з вектором структури $\boldsymbol{w}=(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n)$ над полем C тоді і тільки тоді, коли існують такі дві функції $a(\boldsymbol{x})$ і $b(\boldsymbol{x})$, які визначені на G_n і приймають дійсні значення, що*

$$\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x})=w(\boldsymbol{x}),$$
$$a(\boldsymbol{x})>0,\ b(\boldsymbol{x})\ge 0.$$

Зауважимо, що теорема 2 невірна при $m=2$, тому що в цьому випадку вектори $\boldsymbol{a}=(1{,}0)$ і $\boldsymbol{b}=(\cos\pi,\sin\pi)=(-1{,}0)$ колінеарні. У випадку $m=2$ справджується теорема 2.4 [1].

Визначимо в множині $V_C^n=\{f\,|\,f:G_n\to C\}$ скалярний добуток двох векторів $\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_q)$ і $\boldsymbol{g}=(g_1,\dots,g_q)$ ($q=|G_n|$ — порядок групи) таким чином:

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=f_1\bar{g}_1+\dots+f_n\bar{g}_n,$$

де $\bar{g}_i$ — комплексно спряжене значення g_i, $i=1,2,\dots,q$. Тоді V_C^n утворює унітарний простір і група характерів $\chi(G_n)$ задає ортогональний базис цього простору.

***Теорема 3.** Дискретна функція $f:G_n\to Z_m$ при $m>2$ реалізується одним багатозначним нейронним елементом з вектором структури $\boldsymbol{w}=(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n)$ над полем C тоді і тільки тоді, коли існують такі дві функції $a(\boldsymbol{x})>0$ ($a:G_n\to R$), $b(\boldsymbol{x})\ge 0$ ($b:G_n\to R$), що,*

$$\Bigl(\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x}),\ \chi_s(\boldsymbol{x})\Bigr)=0,$$

для всіх $\chi_s\in\chi(G_n)$, крім тих s, які відповідають наборам $(0,0,\dots,0,0)$, $(0,0,\dots,0,1)$, $(0,0,\dots,1,0)$, …, $(0,1,\dots,0,0)$, $(1,0,\dots,0,0)$.

***Доведення. Необхідність**.* Нехай дискретна функція $f:G_n\to Z_m$ при $m>2$ реалізується одним багатозначним нейронним елементом з вектором структури $\boldsymbol{w}=(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n)$ над полем C. Тоді згідно з теоремою 2 існують такі функції $a(\boldsymbol{x})>0$ і $b(\boldsymbol{x})\ge 0$, які задовільняють умову

$$\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x})=\omega_0+\omega_1x_1+\dots+\omega_nx_n,\qquad(2)$$

враховуючи, що $\chi_{(0,\dots,0)}=x_0=1$, $\chi_{(1,0,\dots,0,0)}=x_1$, … , $\chi_{(0,0,\dots,0,1)}=x_n$ рівність (2) можна переписати так:

$$\bigl(a(x)+b(x)\varepsilon\bigr)f(x)=\omega_0\chi_{(0,\dots,0)}(x)+$$
$$+\,\omega_1\chi_{(1,0,\dots,0,0)}(x)+\dots+\omega_n\chi_{(0,\dots,0,1)}(x).\qquad(3)$$

Функцію $\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x})\in V_C^n$ розкладаємо за базисом з характерів групи G_n, тобто

$$\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x})=\sum_{s=0}^{t-1}q_s\chi_s(\boldsymbol{x}),\qquad(4)$$

де $q_s=\frac{1}{|G_n|}\sum_{x\in G_n}\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x})\bar{\chi}_s(\boldsymbol{x})$, $t=|G_n|$.

З (3) і (4) випливає, що $q_s=0$, якщо s не відповідає наборам $(0,\dots,0)$, $(1,0,\dots,0)$, …, $(0,\dots,0,1)$. Враховуючи, що $|G_n|\,q_s=\Bigl(\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x}),\chi_s(\boldsymbol{x})\Bigr)$, одержуємо

$$\Bigl(\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x}),\chi_s(\boldsymbol{x})\Bigr)=0,$$

для всіх s, які відповідають наборам з $D_n\setminus(0,\dots,0)$, $(1,\dots,0)$, …, $(0,\dots,1)$. Отже, необхідність доведена.

Достатність очевидна.

Якщо дискретна функція $f:G_n\to Z_m$ задовільняє умовам теореми 3, то координати вектора структури $\boldsymbol{w}=(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n)$ багатозначного нейронного елемента над полем C, який реалізує функцію $f(x_1,\dots,x_n)$ знаходяться за формулою

$$\omega_i=\frac{1}{|G_n|}\Bigl(\bigl(a(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})\varepsilon\bigr)f(\boldsymbol{x}),x_i(\boldsymbol{x})\Bigr),\ i=0,1,2,\dots,n.$$

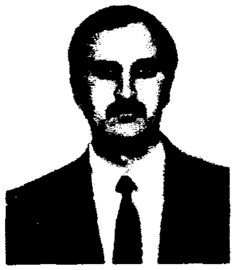
Якщо $m=2$, то для синтезу нейронного елемента над C може бути використана теорема II.2.2[2].

Література

1. Айзенберг Н.Н., Иваськив Ю.Л., Поспелов Д.А. Многозначные пороговые функции. I. Булевы комплексно-пороговые функции и их обобщение // Кибернетика.– 1971.– № 4.– С. 44-51.

2. Айзенберг Н.Н., Иваськив Ю.Л., Поспелов Д.А. Многозначные пороговые функции. II. Синтез многозначных пороговых элементов // Кибернетика.– 1973.– № 1.– С. 53-66.

Гече Федір Елемирович. Народився в 1951 році. Закінчив математичний факультет Ужгородського державного університету в 1973 році. Кандидат фізико-математичних наук з 1982 року. Доцент кафедри кібернетики та прикладної математики Ужгородського державного університету. Коло наукових інтересів: порогова логіка, представлення, передача та розпізнавання дискретних сигналів і зображень, методи оптимізації та математичне моделювання. Автор та співавтор понад 40 статей, у тому числі однієї монографії і посібника з програмування.



Батюк Анатолій Євгенович. Народився в 1960 р. Закінчив Львівський політехнічний інститут в 1984 р. Кандидат технічних наук з 1994 р. Доцент кафедри "Автоматизовані системи управління" Державного університету "Львівська політехніка", старший науковий співробітник Державного науково-дослідного інституту інформаційної структури. Коло наукових інтересів: попередня обробка і розпізнавання зображень в реальному часі; розпаралелювання процесів обробки інформації і управління. Має 37 наукових праць, з них одна монографія, 17 авторських свідоцтв на винаходи.

CRITERIA OF REALIZATION OF DISCRETE FUNCTIONS BY ONE MULTIVALUED NEURON ELEMENT OVER THE FIELD OF COMPLEX NUMBERS

F.E.Geche[1], A.Ye. Batyuk[2]

[1]Uzhhorod State University, Uzhhorod

[2]National University "Lvivska Politechnika", Lviv

Criteria of realization of discrete functions by one multivalued neuron element, and method of its synthesis over the field of complex numbers are given in the paper.

КРИТЕРИЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОДНОМ МНОГОЗНАЧНОМ НЕЙРОННОМ ЭЛЕМЕНТЕ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Ф.Э. Гече[1], А.Е. Батюк[2]

[1]Ужгородский государственный университет, Ужгород

[2]Национальный университет "Львівська політехніка", Львов

Приведены критерии реализуемости дискретных функций на одном многозначном нейронном элементе. Разработан метод его синтеза над полем комплексных чисел.