$J(P)$ в цілому і інтерпретації конкретного фрагмента предметної області $J(\{e_i\})$ такої, що має місце $J(P) \rightarrow J(\{e_i\})$. Оскільки структура G і конкретні ланцюги W_i відображають методики тестування, то можуть мати місце дві ситуації. В першій ситуації траєкторія тестування w_i фрагмента $\{e_j\}$ не пов'язується з іншими траєкторіями тестування, що взаємозв'язані і складають множину

$$W = \{w_1,.., w_n\}.$$

В цьому випадку фрагмент $\{e_j\}$ виділяється в окрему предметну область і умови твердження виконуються. В другій ситуації, оскільки $J(P) \rightarrow J(\{e_j\})$, то може будуватися функціональний зв'язок між $\{e_i\}$ і $P\backslash\{e_i\}$, який при необхідності, що обумовлюється методикою тестування, може включатися в траєкторії тестування і в структуру системи питальника. В другій ситуації може існувати методика, що пов'язує $\{e_i\}$ з $P\backslash\{e_i\}$, але відсутні функціональні зв'язки, що обумовлюються $J(P) \rightarrow J(\{e_j\})$. Тому, методика декларує таке v_j, що має місце $W(P)v_j\{e_j\}$. Цей зв'язок не приводить до виникнення протиріч в структурі $G = F(E,V,R)$ оскільки інтерпретація $J(v_j)$ може також бути виведена з $J(P)$. Покажемо, що цей зв'язок не порушує класів еквівалентностей R на G. Оскільки v_j декларується, як непротиречивий по відношенню до $J(P)$ зв'язок, то v_j може бути між двома r_i і r_j, що допустимо з точки зору збереження рівнів узагальнення уявлень про P. Якщо v_j виявився в одному r_i з R, то v_j непротиречиво по визначенню. Таким чином приведене твердження доведено.

Приведене твердження дозволяє будувати перетворення траєкторій тестування одного рівня знань в траєкторії тестування іншого рівня знань, не спричиняє при цьому виникненню протиріч в структурі $G = F(E, V, R)$ і системі тестування в цілому, оскільки система питальника має цілий ряд підсистем підтримки.

1. Вебер Дж. Технология Java. Санкт-Петербург, Cbhv, 2000.

2. Богачков Ю.Н. Задача построения модели внедрения системы лицензионных тестовых экзаменов./ Зб.наукових праць "Моделювання та інформаційні технології", вип.4, Київ, 1999, с.61-67.

УДК 681.3:517.11

Про будову ядра нейрофункцій

Федір Гече*, Анатолій Батюк,**

*Ужгородський державний університет, вул. Підгірна, 46,
**НУ "Львівська політехніка", м.Львів, вул. С.Бандери, 12

В роботі розглядається питання про зображення підмножини A множини всіх n-вимірних бульових векторів матрицями толерантності. Встановлена умова, при якій множина A допускає зображення матрицями толерантності і на її основі отримана необхідна умова реалізовності бульових функцій на одному нейронному елементі.

The work deals with the problem of depiction of sub-sets A of the set of all n-measured Boolean vectors by tolerancy matrices. The condition has been set under which the set A assumes depiction by tolerancy matrices and on its ground the necessary condition of realizability of Boolean function on one neuron element has been obtained.

Нехай $Z_2 = \{0,1\}$, Z_2^n - n-а декартова степінь множини Z_2, $A = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_q\}$ довільна підмножина множини і $A' = Z_2^n \backslash A$ - різниця множин Z_2^n і A. Із елементів множини A побудуємо матрицю $M(A)$ наступним чином: першим рядком матриці $M(A)$ буде бульовий вектор $\mathbf{a}_1 = \{\alpha_{11}, ..., \alpha_{1n}\}$ із A, другим рядком матриці $M(A)$ буде вектор $\mathbf{a}_2 = \{\alpha_{21}, ..., \alpha_{2n}\}$ і т.д. Через S_q позначимо симетричну групу і $A_\xi = \{\mathbf{a}_{\xi(1)}, ..., \mathbf{a}_{\xi(q)}\}$, де $\xi(i)$ дія підстановки $\xi \in S_q$ на i.

Нехай Ω_n - множина всіх n-вимірних дійсних векторів $\mathbf{w} = \{w_1, ..., w_n\}$ таких, що для різних $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in Z_2^n$, числа $(\mathbf{x}_1, \mathbf{w})$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{w})$ - різні.

Нехай $c_1 > c_2 > ... > c_{2^n}$ розташовані в порядку спадання зважені суми $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ при фіксованому $\mathbf{w} \in \Omega_n$ для всіх $\mathbf{x} \in Z_2^n$ і $\mathbf{c}_w = (c_1, c_2, ..., c_{2^n})$.

В [1] показано, якщо $\mathbf{w} \in \Omega_n$ і R_w матриця над Z_2 розмірності $2^n \times n$, яка задовольняє умову $R_w \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_w^T$ (T - символ транспонування матриць, $\cdot$ - матричне множення), то R_w має наступне зображення $R_w = \begin{pmatrix} L_w \\ L_w^* \end{pmatrix}$, де $L_w = (\alpha_{ij})$ $(i = 1, 2, ..., 2^{n-1}; j = 1, 2, ..., n)$; матриця толерантності і $L_w^* = (\alpha_{sj})$, де $s = 2^{n-1} - i + 1$, $\alpha_{sj} = \bar{\alpha}_{ij}$ (риска над α_{ij} означає операцію інвертування).

Нехай $E_n = \{L_w | \mathbf{w} \in \Omega_n\}$. Матрицю N побудовану із перших r рядків матриці толерантності $L \in E_n$ називають передматрицею толерантності і пишуть $N \lhd L$ або $N = L(r)$.

Кажуть, що множина $A \subseteq Z_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності із E_n, якщо існує такий елемент $\xi \in S_q (q = |A|)$ і матриця толерантності $L \in E_n$, що має місце одна з умов:

1) $M(A_\xi) \lhd L$, якщо $q \le 2^{n-1}$;

2) $M(A'_\xi) \lhd L$, якщо $q > 2^{n-1}$.

Визначимо опуклу оболонку множини так:

$$convA = \left\{ \mathbf{x} \in [0,1]^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1, \lambda_1 \ge 0, ..., \lambda_q \ge 0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_q \in A \right\}.$$

Теорема 1. Множина $A \subseteq Z_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності із E_n тоді і тільки тоді, коли $convA \cap convA' = \varnothing$.

<u>Доведення</u>. Необхідність доведемо від супротивного. Припустимо, що $convA \cap convA' \neq \varnothing$ і A допускає зображення матрицями толерантності із E_n. Розглянемо випадок, коли $q \le 2^{n-1}$. Тоді існує такий $\xi \in S_q$ і $L = L_w \in E_n$, що $M(A_\xi) \lhd L_w$. Із останнього співвідношення випливає, що для всіх $\mathbf{a} \in A$ і для всіх $\mathbf{b} \in A'$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}) > (\mathbf{b}, \mathbf{w}). \qquad (1)$$

Нехай $\mathbf{d} \in convA \cap convA'$. Тоді

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{a}_i, \ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1; \lambda_1, ..., \lambda_q \ge 0, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_q \in A, \qquad (2)$$

і

$$\mathbf{d} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \mathbf{b}_j, \sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 1; \gamma_1, ..., \gamma_s \ge 0, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_s \in A'. \qquad (3)$$

Нехай $\omega_{min} = \min\{(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) | \ i = 1, 2, ..., q\}$ і $\omega'_{max} = \max\{(\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) | j = 1, 2, ..., s\}$. На основі (1)-(3) маємо $(\mathbf{d}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) \ge \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \right) \omega_{min} >$

$$> \omega'_{max} = \left(\sum_{j=1}^{s} \gamma_j \right) \omega'_{max} \ge \sum_{j=1}^{s} \gamma_j (\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) = (\mathbf{d}, \mathbf{w}).$$

Одержана нерівність $(\mathbf{d}, \mathbf{w}) > (\mathbf{d}, \mathbf{w})$ показує, що наше припущення $convA \cap convA' \neq \varnothing$ при $M(A_\xi) \lhd L_w$ є невірним. Отже, при $q \le 2^{n-1}$ необхідність доведена.

У випадку, коли $q > 2^{n-1}$, для A' існує такий елемент $\sigma \in S_q$ і матриця толерантності $L_v \in E_n$, що $M(A'_\sigma) \lhd L_v$. Тоді, аналогічно як у попередньому випадку, можна показати, що $(\mathbf{d}, \mathbf{v}) > (\mathbf{d}, \mathbf{v})$, якщо $\mathbf{d} \in convA \cap convA'$. Одержане протиріччя показує неможливість нашого припущення і в цьому випадку. Отже, необхідність доведена.

Зараз покажемо, що коли $convA \cap convA' = \varnothing$, то A допускає зображення матрицями толерантності із E_n.

За допомогою опуклих оболонок $convA$ і $convA'$ побудуємо множину $D = \{\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \ | \mathbf{a} \in convA, \mathbf{b} \in convA'\}$, яка, очевидно, опукла і не містить нульовий вектор 0, так як $convA \cap convA' = \varnothing$. Опуклі оболонки $convA$ і $convA'$ компактні [2], отже, множина D також компактна, і тому - замкнена. Тоді на основі теореми про відокремлення [3], можна стверджувати, що для D в n-вимірному евклідовому просторі існує така гіперплощина $\pi = \{\mathbf{x} \in R^n \mid (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_0\}$, $(p \neq 0)$, $p_0 \in R$ яка задовольняє умовам

$$p_0 = (\mathbf{p}, 0) = 0, \qquad (4)$$

і для всіх

$$(\mathbf{p},\mathbf{d}) < p_0 = 0. \qquad (5)$$

Враховуючи, що $\mathbf{d} = \mathbf{a}$-$\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \in convA$, $\mathbf{b} \in convA'$) із останньої нерівності випливає

$$(\mathbf{p},\mathbf{a}) < (\mathbf{p},\mathbf{b}). \qquad (6)$$

Нерівність має місце для любих $\mathbf{a} \in convA$ і для любих $\mathbf{b} \in convA'$. Отже, нерівність (6) має місце і для всіх $\mathbf{a} \in A$ і для всіх $\mathbf{b} \in A'$. Якщо $|A| \leq 2^{n-1}$, то вектор $\mathbf{v} = -\mathbf{p}$ задовольняє наступній умові:

$$\text{для всіх } \mathbf{a} \in A \;\; \text{і } \mathbf{b} \in A' \text{ для всіх } (\mathbf{v},\mathbf{a}) > (\mathbf{v},\mathbf{b}). \qquad (7)$$

Тоді, як показано в [4], існує такий вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n$, який також задовольняє (7). Це означає, що із елементів множини A можна побудувати таку матрицю $M(A_\xi)$, що $M(A_\xi) \lhd L_w$. Якщо $|A| > 2^{n-1}$, то $\mathbf{v} = \mathbf{p}$ і аналогічно тому, як вище для A, можна показати, що із елементів A' можна побудувати матрицю $M(A'_\xi)$ таку, що $M(A'_\xi) \lhd L_{w_1}$. Отже, теорема доведена.

Визначимо відстань $\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$ між елементами $\mathbf{a} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ і $\mathbf{b} = \{\beta_1, ..., \beta_n\} \in Z_2^n$ наступним чином

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Очевидно, $\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$ є число координат, в яких відрізняються вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Нехай $A \subset Z_2^n$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ довільні елементи із $A(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$ і $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ множина таких орт векторів $\mathbf{e}_{i_1}$, ..., $\mathbf{e}_{i_s} \in Z_2^n$, що $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{e}_{i_1} + ... + \mathbf{e}_{i_s}$, де $\oplus$ - покоординатна сума векторів за модулем 2, $i_r \neq i_k$, якщо $r \neq k$. Позначимо через $H(\mathbf{a},\mathbf{b})$ підгрупу групи Z_2^n (Z_2^n - утворює групу відносно операції $\oplus$), яка породжується елементами із $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$, тобто $H(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_s} \mid \mathbf{e}_{i_j} \in O(\mathbf{a},\mathbf{b}) \rangle$.

Покоординатну кон'юнкцію бульових векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ позначимо через $\mathbf{a}\&\mathbf{b}$, а суміжний клас групи Z_2^n за підгрупою $H(\mathbf{a},\mathbf{b})$, що визначається елементом $\mathbf{a}\&\mathbf{b}$ через $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b})$.

Теорема 2. Якщо множина $A \subset Z_2^n$ ($H \geq 2$) допускає зображення матрицями толерантності із E_n, тоді для будь-яких двох елементів $\mathbf{a},\mathbf{b}$ із A для яких $|H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap A'| \geq 2$ ($A' = Z_2^n \backslash A$) і для будь-яких двох елементів $\mathbf{q},\mathbf{h}$ із $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap A'$ справджується нерівність $\rho(\mathbf{q},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

<u>Доведення</u>. Нехай $\mathbf{a} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ і $\mathbf{b} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ довільні елементи із $A(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$, $\mathbf{g} = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ і $\mathbf{h} = \{\delta_1, ..., \delta_n\}$ будь-які елементи із $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap A'$ і $\rho = \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Не обмежуючи загальності міркувань, покладемо, що перші ρ координат векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ різні, а інші - рівні, тобто $\alpha_i \neq \beta_i$, для $i = 1,2, ..., \rho$ і $\alpha_i = \beta_i$, для $i = \rho+1, ..., n$.

Згідно теореми 1, із того, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, випливає:

$$convA \cap convA' = \varnothing.$$

Отже,

$$\lambda_1\mathbf{a} + (1-\lambda_1)\mathbf{b} \neq \lambda_2\mathbf{g} + (1-\lambda_2)\mathbf{h}, \qquad (8)$$

для всіх $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$.

Враховуючи, що точки $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$), $\mathbf{g},\mathbf{h}$ ($\mathbf{g} \neq \mathbf{h}$) є кутовими точками відповідних множин $convA$ і $convA'$, і $A \cap A' = \varnothing$ нерівність (8) можна замінити нерівністю

$$\lambda_1(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \mathbf{b} \neq \lambda_2(\mathbf{g}-\mathbf{h}) + \mathbf{h}, \qquad (9)$$

при умові, що

$$0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_2 < 1. \qquad (10)$$

Із (9) випливає, що існує таке число $r \in \{1, 2, ..., \rho\}$ для якого має місце нерівність

$$\lambda_1(\alpha_r - \beta_r) + \beta_r \neq \lambda_2(\gamma_r - \delta_r) + \delta_r. \qquad (11)$$

Покажемо, що із (10), (11) і $\alpha_r \neq \delta_r$ маємо $\gamma_r = \delta_r$, тобто $\rho(\mathbf{q},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Розглянемо наступні можливі випадки.

1. Нехай $\alpha_r = 1$. Тоді $\beta_r = 0$ і з (11) маємо

$$\lambda_1 \neq \lambda_2(\gamma_r - \delta_r) + \delta_r.$$

Звідси

$$\gamma_r - \delta_r \neq \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1 - \delta_r). \qquad (12)$$

Ліва частина нерівності (12) приймає значення із множини $\{-1,0,1\}$, так як $\gamma_r, \delta_r \in Z_2^n$.

Права частина нерівності (12) в силу (10) не може дорівнювати 0 при будь-яких значеннях λ_1, λ_2. Значить, нерівність (12) має місце при будь-яких $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ тільки в тому випадку, коли $\gamma_r - \delta_r = 0$. Отже, $\rho(\mathbf{q},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

2. Нехай $\alpha_r = 0$. Тоді $\beta_r = 1$ і з (11) випливає

$$-\lambda + 1 \neq \lambda_2(\gamma_r - \delta_r) + \delta_r,$$

або

$$\left(\gamma_r - \delta_r\right) \neq \frac{1}{\lambda_2}\left(1 - \lambda_1 - \delta_r\right).$$

Як і в першому випадку, остання нерівність має місце для всіх λ_1, $\lambda_2 \in (0,1)$ тільки в тому випадку, коли $\gamma_r - \delta_r = 0$. Отже, $\rho(\mathbf{q},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$, і теорема доведена.

Зауваження. У випадку, коли $|A| = 0$ або $|A| = 1$, множина A, очевидно, допускає зображення матрицями толерантності із E_n, якщо вважати, що порожня матриця (матриця без жодного рядка) є передматрицею довільної матриці із E_n.

В [1] показано, що бульова функція $f(x_1, ..., x_n)$ є нейрофункцією (пороговою), тоді і тільки тоді, коли її ядро $K(f)$ допускає зображення матрицями толерантності із E_n. Якщо покласти, що $K'(f) = Z_2^n \setminus K(f)$, то із вищенаведених теорем безпосередньо випливає.

Теорема 3. Якщо бульова функція $f(x_1, ..., x_n)$ є нейрофункцією з ядром $K(f)(K(f)\geq 2)$, то для всіх елементів $\mathbf{a},\mathbf{b} \in K(f)$ для яких $|H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap K'(f)| \geq 2$, справджується нерівність $\rho(\mathbf{q},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$, де $\mathbf{q},\mathbf{h}$ будь-які елементи із $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap K'(f)$.

Враховуючи співвідношення між матрицями толерантності із E_n і E_n^-, а також теорему 2 [1], яка стверджує, що бульова функція $f(x_1, ..., x_n)$ є нейрофункцією, тоді і тільки тоді, коли хоча б одне із зведених ядер $K(f)_i = \mathbf{g}_i K(f) \in T(f)$ допускає зображення матрицями толерантності із E_n^-, маємо.

Теорема 4. Якщо бульова функція $f(x_1, ..., x_n)$ є нейрофункцією з ядром $K(f)$ $(K(f)\geq 2)$, то множина зведених ядер $T(f)$ містить такий елемент $K(f)_i$, що для всіх елементів $\mathbf{a},\mathbf{b} \in K(f)$ для яких $|H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap K'(f)_i| \geq 2$ $(K'(f)_i = Z_2^n \setminus K(f)_i)$, справджується нерівність $\rho(\mathbf{q},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$, де $\mathbf{q},\mathbf{h} \in H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap K'(f)$.

1. Н.Н. Айзенберг, А.А. Бовди, Э.Й. Герго, Ф.Э.Гече. Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики // Кибернетика. - Киев, 1980. - № 2. - С. 26-30.
2. К. Лейхтвейс. Выпуклые множества. - М.: Наука, 1985. - 335 с.
3. В.Г. Карманов. Математическое программирование. - М.: Наука, 1986. - 285 с.
4. С. Яджима, Т. Ибараки. Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. - 1969. Вып. 6. - С. 72-81.

Нечіткі події і розмиті ймовірності в процедурах опису динамічних ситуацій та прийняття рішень у цільовому просторі стохастичної системи

Микола Медиковський

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, Львів

На основі використання енергетично-інформаційної концепції управління, розглянута методика ідентифікації і синтезу структури об'єкта управління по базовій моделі яка складається з ресурсної і інформаційної підструктури. Моделі об'єкту управління (МОУ) в просторі стану системи описуються стохастичними різницевими диференціальними рівняннями балансу ресурсів, а динамічна ситуація в них зображається рівняннями траєкторії стану в фазовому просторі, через спостерігача проектується в інформаційний цільовий простір і характеризується розмитою структурою в умовах дії збурень.

Вступ

Базуючись на моделі простору цілей які формуються у цілеформуючій системі, граничних умовах, базі знань в заданій предметній області (у вигляді концептуальних і фізико-мате-