Лінійний простір.
Лінійна залежність векторів

Лектор — доц. Шапочка Ігор

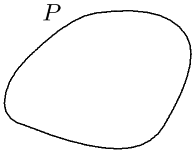
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

13 лютого 2023 року

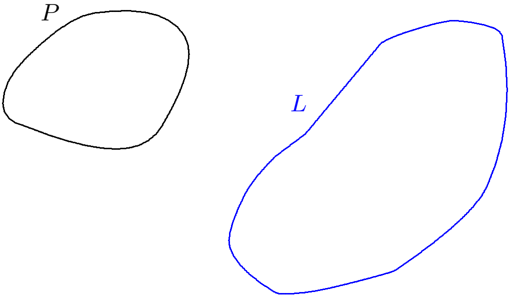
Нехай P — деяке поле,

Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.

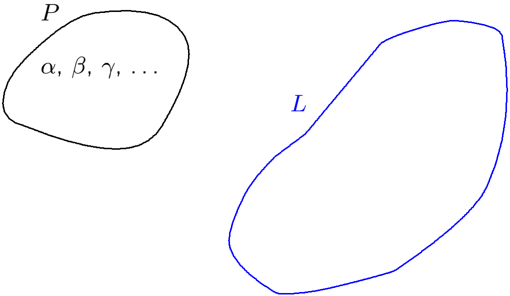
Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.



Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.

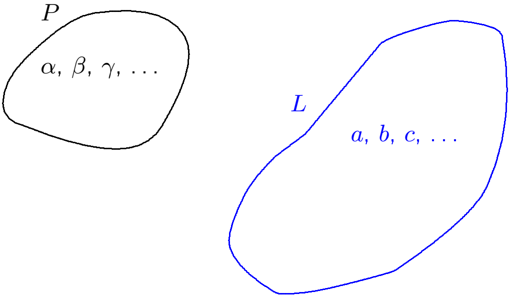


Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.



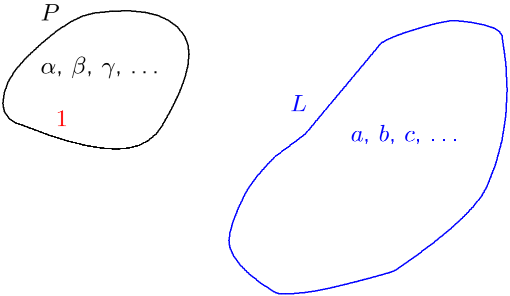
Елементи поля P ми зазвичай будемо позначати малими грецькими літерами,

Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.



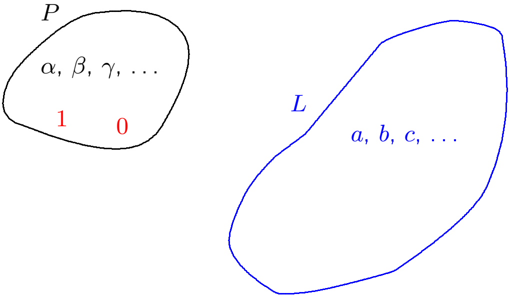
Елементи поля P ми зазвичай будемо позначати малими грецькими літерами, а елементи із L — в основному латинськими літерами.

Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.



Елементи поля P ми зазвичай будемо позначати малими грецькими літерами, а елементи із L — в основному латинськими літерами. Крім того, нехай 1 — одиниця поля P,

Нехай P — деяке поле, а L — непорожня множина елементів довільної природи.



Елементи поля P ми зазвичай будемо позначати малими грецькими літерами, а елементи із L — в основному латинськими літерами. Крім того, нехай 1 — одиниця поля P, а 0 — нуль поля P.

Означення 1

Непорожня множина L

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L),

Означення 1

Непорожня множина L називається **лінійним простором над полем P**, якщо:

- задано **дію додавання елементів з L** (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a+b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
  2. $a+b = b+a$ для будь-яких елементів a і b із L,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
    1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
    2. $a + b = b + a$ для будь-яких елементів a і b із L,
    3. існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a+b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
  2. $a+b = b+a$ для будь-яких елементів a і b із L,
  3. існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a+\bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L,
  4. для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a+b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
  2. $a+b = b+a$ для будь-яких елементів a і b із L,
  3. існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a+\bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L,
  4. для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$,
  5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для будь-яких елементів α, $\beta \in P$ і $a \in L$,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a + b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
  2. $a + b = b + a$ для будь-яких елементів a і b із L,
  3. існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L,
  4. для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$,
  5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для будь-яких елементів α, $\beta \in P$ і $a \in L$,
  6. $1a = a$, для будь-якого елемента a із L,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a+b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
  2. $a+b = b+a$ для будь-яких елементів a і b із L,
  3. існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a+\bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L,
  4. для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$,
  5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для будь-яких елементів α, $\beta \in P$ і $a \in L$,
  6. $1a = a$, для будь-якого елемента a із L,
  7. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ для будь-яких елементів $\alpha \in P$ і a, $b \in L$,

Означення 1

Непорожня множина L називається лінійним простором над полем P, якщо:

- задано дію додавання елементів з L (або ще кажуть бінарну алгебраїчну операцію додавання на множині L), яка кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається сумою елементів a і b і позначається через $a+b$;
- задано дію множення елементів поля P на елементи множини L, яка ставить у відповідність кожному елементу $\alpha \in P$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається добутком α на a і позначається через αa;
- вказані вище дії задовольняють наступним умовам (їх ще називають аксіомами лінійного простору):
  1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ для будь-яких елементів a, b і c із L,
  2. $a+b = b+a$ для будь-яких елементів a і b із L,
  3. існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a+\bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L,
  4. для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a+a' = \bar{0}$,
  5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для будь-яких елементів α, $\beta \in P$ і $a \in L$,
  6. $1a = a$, для будь-якого елемента a із L,
  7. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ для будь-яких елементів $\alpha \in P$ і a, $b \in L$,
  8. $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ для будь-яких елементів α, $\beta \in P$ і $a \in L$.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести,

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L,

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L, *що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L. *Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$,

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що* $a + a' = \bar{0}$.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L, *що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L. *Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$, *що* $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L, *що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L. *Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$, *що* $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів).

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L, *що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L. *Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$, *що* $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ в L, що задовольняє умові $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L. Також, що для кожного $a \in L$ існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ в L, що задовольняє умові $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L. Також, що для кожного $a \in L$ існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ в L, що задовольняє умові $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L. Також, що для кожного $a \in L$ існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що* $a + a' = \bar{0}$*.*

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$,

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ в L, що задовольняє умові $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L. Також, що для кожного $a \in L$ існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L, *що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L. *Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$, *що* $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ в L, що задовольняє умові $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L. Також, що для кожного $a \in L$ існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що* $a + a' = \bar{0}$*.*

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

1. **Нульовий простір над полем P**

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a+\bar{0}=a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що* $a+a'=\bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати **векторами** (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати **нульовим вектором** простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a+a'=\bar{0}$, будемо називати **протилежним вектором до вектора** a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

1. **Нульовий простір над полем** P — це множина $L=\{a\}$, що складається із одного вектора a,

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ в L, що задовольняє умові $a + \bar{0} = a$ для будь-якого елемента a із L. Також, що для кожного $a \in L$ існує тільки один елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

1. **Нульовий простір над полем P** — це множина $L = \{a\}$, що складається із одного вектора a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a + a = a,$$

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a+\bar{0}=a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що* $a+a'=\bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a+a'=\bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

1. **Нульовий простір над полем P** — це множина $L=\{a\}$, що складається із одного вектора a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a+a=a, \qquad \alpha a=a \quad (\alpha \in P).$$

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L, *що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L. *Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$, *що* $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

1. **Нульовий простір над полем** P — це множина $L = \{a\}$, що складається із одного вектора a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a + a = a, \qquad \alpha a = a \quad (\alpha \in P).$$

Очевидно, елемент a є нульовим вектором,

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи аксіоми лінійного простору довести, що існує тільки один елемент $\bar{0}$ *в* L*, що задовольняє умові* $a + \bar{0} = a$ *для будь-якого елемента* a *із* L*. Також, що для кожного* $a \in L$ *існує тільки один елемент* $a' \in L$*, що* $a + a' = \bar{0}$.

Елементи лінійного простору L будемо називати векторами (незалежно від природи цих елементів). Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати нульовим вектором простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$ такий, що $a + a' = \bar{0}$, будемо називати протилежним вектором до вектора a і позначати його через $-a$.

Приклади лінійних просторів

1. **Нульовий простір над полем P** — це множина $L = \{a\}$, що складається із одного вектора a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a + a = a, \qquad \alpha a = a \quad (\alpha \in P).$$

Очевидно, елемент a є нульовим вектором, тобто за домовленістю $a = \bar{0}$.

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P.

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P.

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P,

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P,

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою,

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д.,

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора.

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними,

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів.

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P.

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$,

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

  Очевидно, $a + b \in P^n$.

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом
$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$
Очевидно, $a + b \in P^n$.
- Якщо $\gamma \in P$

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом
$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$
Очевидно, $a + b \in P^n$.
- Якщо $\gamma \in P$ і $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$,

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

  Очевидно, $a + b \in P^n$.
- Якщо $\gamma \in P$ і $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$, то добуток γa

Приклади лінійних просторів

2. **Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$** є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

  Очевидно, $a + b \in P^n$.

- Якщо $\gamma \in P$ і $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$, то добуток γaвизначимо за правилом

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n).$$

Приклади лінійних просторів

2. Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є прикладом лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Векторний простір P^n над полем P. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля P називається n-вимірним вектором над полем P. n-вимірний вектор над полем P, утворений елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ поля P, будемо позначати через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем P називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через P^n — множину всіх n-вимірних векторів над полем P. Введемо в множині P^n дії:

- Якщо $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ і $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in P^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

  $$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

  Очевидно, $a + b \in P^n$.

- Якщо $\gamma \in P$ і $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$, то добуток γaвизначимо за правилом

  $$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n).$$

  Очевидно, $\gamma a \in P^n$.

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P.

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.
Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено,

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що нульовим вектором простору P^n

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що нульовим вектором простору P^n є n-вимірний вектор $(0, \ldots, 0)$,

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що нульовим вектором простору P^n є n-вимірний вектор $(0, \dots, 0)$, а протилежним вектором $-a$ до n-вимірного вектора $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P^n$

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.

Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що нульовим вектором простору P^n є n-вимірний вектор $(0, \ldots, 0)$, а протилежним вектором $-a$ до n-вимірного вектора $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ є n-вимірний вектор $(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$.

Приклади лінійних просторів

Використовуючи властивості дій додавання множення елементів поля P можна показати, що вказані дії над елементами із P^n задовольняють аксіомам лінійного простору.
Лінійний простір P^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається n-вимірним векторним простором над полем P. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що нульовим вектором простору P^n є n-вимірний вектор $(0, \ldots, 0)$, а протилежним вектором $-a$ до n-вимірного вектора $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ є n-вимірний вектор $(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$.

4. Кільце многочленів $P[x]$ від невідомої x над полем P є прикладом лінійного простору.

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійсних чисел.

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел,

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$.

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$,

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$.

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними,

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

- Якщо $f, g \in C_{[\alpha,\beta]}$, то суму $f + g$ визначимо за правилом

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

- Якщо $f, g \in C_{[\alpha,\beta]}$, то суму $f + g$ визначимо за правилом

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

- Якщо $\gamma \in \mathbb{R}$ і $f \in C_{[\alpha,\beta]}$, то добуток γf визначимо за правилом

$$(\gamma f)(x) = \gamma f(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Приклади лінійних просторів

5. Лінійний простір $C_{[\alpha,\beta]}$ над полем дійних чисел. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

- Якщо $f, g \in C_{[\alpha,\beta]}$, то суму $f + g$ визначимо за правилом

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

- Якщо $\gamma \in \mathbb{R}$ і $f \in C_{[\alpha,\beta]}$, то добуток γf визначимо за правилом

$$(\gamma f)(x) = \gamma f(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Із відомих теорем математичного аналізу слідує, що $f + g$ і γf — неперервні функції на $[\alpha, \beta]$, тобто $f + g \in C_{[\alpha,\beta]}$ і $\gamma f \in C_{[\alpha,\beta]}$.

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L.

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами,

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A **замкнена відносно дій** над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L,

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L, тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.

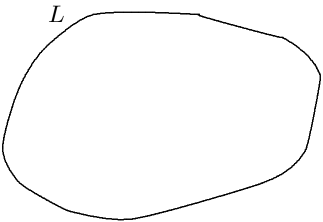
Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L, тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.



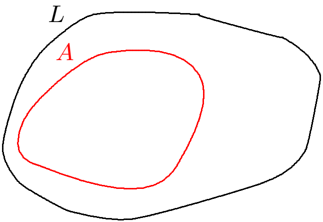
Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A **замкнена відносно дій** над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L, тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.



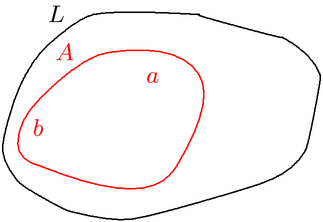
Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A **замкнена відносно дій** над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L, тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.



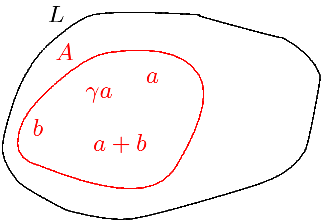
Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина в L. Будемо говорити, що підмножина A замкнена відносно дій над векторами, якщо виконуються умови:

1. сума будь-яких векторів із A є також вектором із A;
2. добуток будь-якого елемента із P на будь-який вектор із A є також вектором із A.

Завдання для самостійної роботи

Показати, що непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які визначені в просторі L, тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій над векторами.



Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L.

Лема 1

Нехай L *— лінійний простір над полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*. Тоді для будь-якого вектора* a *із L*

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$,

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P.

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0+0)a$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b.

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$.

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$. Далі, оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$,

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$. Далі, оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$, то

$$b = b + \bar{0}$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$. Далі, оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$, то

$$b = b + \bar{0} = b + (b + (-b))$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$. Далі, оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$, то

$$b = b + \bar{0} = b + (b + (-b)) = (b + b) + (-b)$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$. Далі, оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$, то

$$b = b + \bar{0} = b + (b + (-b)) = (b + b) + (-b) = b + (-b)$$

Лема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L. Тоді для будь-якого вектора a із L та будь-якого елемента α поля P справджуються рівності:

- $0a = \bar{0}$;
- $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- $(-1)a = -a$.

Якщо ж для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$, то або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай a — деякий вектор лінійного простору L над полем P. Тоді із аксіом лінійного простору слідує, що

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

Позначимо вектор $0a$ через b. Тоді $b = b + b$. Далі, оскільки для вектора b існує протилежний вектор $-b$, то

$$b = b + \bar{0} = b + (b + (-b)) = (b + b) + (-b) = b + (-b) = \bar{0}.$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору,

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0})$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться,

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$.

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$,

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена.

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$,

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α.

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α. За доведеним раніше та за аксіомами лінійного простору

$$a = 1a$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α. За доведеним раніше та за аксіомами лінійного простору

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α. За доведеним раніше та за аксіомами лінійного простору

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a)$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α. За доведеним раніше та за аксіомами лінійного простору

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}\bar{0}$$

Доведення.

Виходячи із аксіом лінійного простору, для довільного елемента α поля P справджуються рівності

$$\alpha\bar{0} = \alpha(\bar{0} + \bar{0}) = \alpha\bar{0} + \alpha\bar{0}.$$

Тому аналогічно доводиться, що для будь-якого елемента α поля P справджується рівність

$$\alpha\bar{0} = \bar{0}.$$

Нарешті, нехай для деякого вектора a із L та деякого елемента α поля P справджується рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha = 0$, то лема доведена. Якщо ж $\alpha \neq 0$, то у полі P існує обернений елемент α^{-1} для елемента α. За доведеним раніше та за аксіомами лінійного простору

$$a = 1a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}\bar{0} = \bar{0}.$$

Лема доведена. □

Зауваження 1

Різницю двох векторів,

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів,

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д.

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай a_1, a_2, ..., a_s

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P;

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — деякі елементи поля P.

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; α_1, α_2, ..., α_s — деякі елементи поля P. Вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$$

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — деякі елементи поля P. Вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$$

лінійного простору L

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — деякі елементи поля P. Вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$$

лінійного простору L називається лінійною комбінацією

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; α_1, α_2, ..., α_s — деякі елементи поля P. Вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$$

лінійного простору L називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., a_s

Зауваження 1

Різницю двох векторів, суму 3-х векторів, суму 4-х векторів і т. д. визначимо за правилами:

- $a - b = a + (-b)$;
- $a + b + c = (a + b) + c$;
- $a + b + c + d = (a + b + c) + d$

і т. д.

Надалі, нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 3

Будь-яку впорядковану множину векторів лінійного простору L будемо називати системою векторів.

Означення 4

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — деякі елементи поля P. Вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$$

лінійного простору L називається лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ відповідно з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, …, a_s лінійного простору L

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P,

Означення 5

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, $\ldots$, α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, $\ldots$, α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, $\ldots$, α_s поля P,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0,

Означення 5

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$ лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s$ поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$ лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s$ поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s$

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L є лінійно незалежною,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

Означення 5

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$ лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s$ поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$ лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s$ поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$ лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s \in P$,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, ..., α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де α_1, α_2, ..., $\alpha_s \in P$, справджується тільки в тому випадку,

Означення 5

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L називається лінійно залежною, якщо існують такі елементи α_1, α_2, $\ldots$, α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, що справджується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де, нагадаємо, $\bar{0}$ — нульовий вектор в L.

Означення 6

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L називається лінійно незалежною, якщо для будь-яких елементів α_1, α_2, $\ldots$, α_s поля P, хоча б один із яких не дорівнює 0, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим вектором лінійного простору L.

Твердження 1

Система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_s \in P$, справджується тільки в тому випадку, коли

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0.$$

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді,

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ із L є лінійно залежною.

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P,

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю,

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Звідси

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (1)$$

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Звідси

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (1)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$,

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Звідси

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (1)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то ліву і праву частини рівності (1) можна помножити на $-\gamma_j^{-1}$.

Теорема 1 (ознака лінійної залежності)

Дана система векторів лінійного простору L над полем P є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із векторів цієї системи можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи векторів.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s із L є лінійно залежною. Тоді існує система елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P, хоча б один з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Звідси

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \tag{1}$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то ліву і праву частини рівності (1) можна помножити на $-\gamma_j^{-1}$. У результаті одержимо рівність

$$a_j = \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_1\right) a_1 + \cdots + \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_{j-1}\right) a_{j-1} + \\ + \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_{j+1}\right) a_{j+1} + \cdots + \left(-\gamma_j^{-1}\gamma_s\right) a_s.$$

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1, \ \ldots, \ a_{j-1}, \ a_{j+1}, \ \ldots, \ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність.

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ є лінійною комбінацією інших її векторів.

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.

Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких елементів $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{j-1},\ \gamma_{j+1},\ \ldots,\ \gamma_s$ поля P.

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких елементів $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{j-1},\ \gamma_{j+1},\ \ldots,\ \gamma_s$ поля P. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \dots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \dots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1}a_{j-1} + \gamma_{j+1}a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких елементів γ_1, $\dots$, γ_{j-1}, γ_{j+1}, $\dots$, γ_s поля P. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1}a_{j-1} + (-1)\cdot a_j + \gamma_{j+1}a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі з елементів системи γ_1, $\dots$, γ_{j-1}, -1, γ_{j+1}, $\dots$, γ_s дорівнюють нулю,

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких елементів $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{j-1},\ \gamma_{j+1},\ \ldots,\ \gamma_s$ поля P. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі з елементів системи $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{j-1},\ -1,\ \gamma_{j+1},\ \ldots,\ \gamma_s$ дорівнюють нулю, а тому за означенням система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ є лінійно залежною.

Доведення.

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів

$$a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_s,$$

а тому необхідність теореми доведена.
Доведемо тепер достатність. Нехай деякий вектор, наприклад a_j, із системи векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких елементів γ_1, ..., γ_{j-1}, γ_{j+1}, ..., γ_s поля P. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі з елементів системи γ_1, ..., γ_{j-1}, -1, γ_{j+1}, ..., γ_s дорівнюють нулю, а тому за означенням система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Теорема доведена.

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору* L *є лінійно залежною,*

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то і дана система векторів є також лінійно залежною.*

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то і дана система векторів є також лінійно залежною.*
2. *Якщо дана система векторів лінійного простору L є лінійно незалежною,*

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то і дана система векторів є також лінійно залежною.*
2. *Якщо дана система векторів лінійного простору L є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема цієї системи також є лінійно незалежною.*

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то і дана система векторів є також лінійно залежною.*
2. *Якщо дана система векторів лінійного простору L є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема цієї системи також є лінійно незалежною.*

Завдання для самостійної роботи

Довести теорему 2.

Теорема 2 (про систему векторів і її підсистему)

1. *Якщо деяка підсистема даної системи векторів лінійного простору L є лінійно залежною, то і дана система векторів є також лінійно залежною.*
2. *Якщо дана система векторів лінійного простору L є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема цієї системи також є лінійно незалежною.*

Завдання для самостійної роботи

Довести теорему 2. Вказівка: скористатися доведеннями аналогічної теореми про систему й підсистему дійсних n-вимірних векторів.

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — *деяка система векторів*

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P.

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P. *Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P. *Якщо кожен вектор системи векторів* b_1, b_2, $\ldots$, b_t *лінійного простору* L

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P*. Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P*. Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \dots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \dots, a_s$ *і* $t > s$*,*

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P*. Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *і* $t > s$*, то система векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *є лінійно залежною.*

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P. *Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \dots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \dots, a_s$ *і* $t > s$, *то система векторів* $b_1, b_2, \dots, b_t$ *є лінійно залежною.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P. *Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *і* $t > s$, *то система векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *є лінійно залежною.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$b_1 = \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s,$$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай a_1, a_2, ..., a_s *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P. *Якщо кожен вектор системи векторів* b_1, b_2, ..., b_t *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* a_1, a_2, ..., a_s *і* $t > s$, *то система векторів* b_1, b_2, ..., b_t *є лінійно залежною.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \end{aligned}$$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P. Якщо кожен вектор системи векторів $b_1, b_2, \ldots, b_t$ лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ і $t > s$, то система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_t$ є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s \end{aligned}$$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P. Якщо кожен вектор системи векторів $b_1, b_2, \ldots, b_t$ лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ і $t > s$, то система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_t$ є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \\ & \qquad \cdots\cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s \end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$,

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P. *Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *і* $t > s$, *то система векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *є лінійно залежною.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s \end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \ldots, t\}, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів лінійного простору L над полем P. Якщо кожен вектор системи векторів $b_1, b_2, \ldots, b_t$ лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ і $t > s$, то система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_t$ є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned}
b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s,\\
b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s,\\
&\qquad \cdots\cdots\\
b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s
\end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$,$k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Розглянемо наступні s-вимірні вектори над полем P:

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів лінійного простору L над полем P. Якщо кожен вектор системи векторів b_1, b_2, ..., b_t лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., a_s і $t > s$, то система векторів b_1, b_2, ..., b_t є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s \end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$,$k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Розглянемо наступні s-вимірні вектори над полем P:

$$u_1 = (\gamma_{11}, \ \gamma_{12}, \ \ldots, \ \gamma_{1s}),$$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деяка система векторів лінійного простору L над полем P. Якщо кожен вектор системи векторів b_1, b_2, $\dots$, b_t лінійного простору L є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s і $t > s$, то система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_t є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s \end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \dots, t\}$,$k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Розглянемо наступні s-вимірні вектори над полем P:

$$u_1 = (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \dots,\ \gamma_{1s}), \quad u_2 = (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \dots,\ \gamma_{2s}),\ \dots$$

Теорема 3 (про лінійні комбінації)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів лінійного простору* L *над полем* P*. Якщо кожен вектор системи векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *лінійного простору* L *є лінійною комбінацією системи векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *і* $t > s$*, то система векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_t$ *є лінійно залежною.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \cdots + \gamma_{1s}a_s, \\ b_2 &= \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \cdots + \gamma_{2s}a_s, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ b_t &= \gamma_{t1}a_1 + \gamma_{t2}a_2 + \cdots + \gamma_{ts}a_s \end{aligned}$$

для деяких елементів γ_{ik} поля P, де $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$,$k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Розглянемо наступні s-вимірні вектори над полем P:

$$u_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}), \quad u_2 = (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2s}), \ldots$$
$$\ldots, \quad u_t = (\gamma_{t1}, \gamma_{t2}, \ldots, \gamma_{ts}).$$

Доведення.

Через те, що $t > s$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_t$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_t$ є лінійно залежною.

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n.

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_t$ є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P,

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю,

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.
Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.
Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_t$ є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора,

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_t$ є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.
Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t =$$
$$= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) +$$
$$+ \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts})$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, $\ldots$, u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts}) =\end{gathered}$$

$$= (\lambda_1 \gamma_{11} + \lambda_2 \gamma_{21} + \cdots + \lambda_t \gamma_{t1},$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts}) = \\ = (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_t\gamma_{t1},\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_t\gamma_{ts}) \end{gathered}$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t =$$
$$= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) +$$
$$+ \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts}) =$$
$$= (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_t\gamma_{t1},\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_t\gamma_{ts}) =$$
$$= \Bigg(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k1},$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, ..., u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.
Отже, існують елементи λ_1, λ_2, ..., λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \qquad (2)$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t =$$
$$= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) +$$
$$+ \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts}) =$$
$$= (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_t\gamma_{t1},\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_t\gamma_{ts}) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k1},\ \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k2}, \right.$$

Доведення.

Через те, що $t > s$ система векторів u_1, u_2, $\ldots$, u_t є лінійно залежною. Це слідує із теореми про систему n-вимірних векторів над полем P, в яких число векторів більше за n. Ця теорема, у свою чергу, повністю аналогічна теоремі про систему дійсних n-вимірних векторів, в яких число векторів більше за число компонент.

Отже, існують елементи λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_t поля P, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in P^s. \tag{2}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_t u_t = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_t \cdot (\gamma_{t1},\ \gamma_{t2},\ \ldots,\ \gamma_{ts}) = \\ = (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_t\gamma_{t1},\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_t\gamma_{ts}) = \\ = \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k1},\ \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{k2},\ \ldots,\ \sum_{k=1}^{t} \lambda_k\gamma_{ks} \right). \end{gathered}$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0,$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0,$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} a_l$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} a_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} a_l$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} a_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} a_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} \right) a_l$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} a_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} a_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} \right) a_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot a_l =$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} a_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} a_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} \right) a_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot a_l = \bar{0} \in L.$$

Доведення.

Тому із рівності (2) одержимо

$$\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{ks} = 0.$$

Врахувавши ці рівності обчислимо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_t b_t = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} a_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} a_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \gamma_{kl} \right) a_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot a_l = \bar{0} \in L.$$

Тому система векторів $b_1, b_2, \dots, b_t$ є лінійно залежною. Теорема доведена. □