Лінійні відображення лінійних просторів. Основна теорема про гомоморфізми

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

27 лютого 2023 р.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L'

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L',

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2),

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) =$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = f(a) + f(b),$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = f(a) + f(b),$$

$$f(\gamma a) =$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = f(a) + f(b),$$

$$f(\gamma a) = f\big((\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_3)\big)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = f(a) + f(b),$$

$$f(\gamma a) = f\big((\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_3)\big) = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Приклади лінійних відображень.

Відповідність $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, яка кожному вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ ставить у відповідність вектор (α_1, α_2), тобто

$$f\big((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

є лінійним відображенням із векторного простору $\mathbb{R}^3$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$f(a+b) = f\big((\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)\big) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = f(a) + f(b),$$

$$f(\gamma a) = f\big((\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \gamma\alpha_3)\big) = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2) = \gamma f(a).$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y),$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$.

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$,

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) =$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2))$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) =$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u+v) =$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u+v) = h\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u + v) = h\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1,-y_1) + (x_2,-y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u+v) = h\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (y_1+y_2, x_1+x_2) =$$

$$= (y_1,x_1) + (y_2,x_2)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u + v) = h\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2) =$$

$$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = h(u) + h(v),$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u+v) = h\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (y_1+y_2, x_1+x_2) =$$

$$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = h(u) + h(v),$$

$$h(\gamma u) =$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u+v) = h\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (y_1+y_2, x_1+x_2) =$$

$$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = h(u) + h(v),$$

$$h(\gamma u) = h\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u + v) = h\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2) =$$

$$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = h(u) + h(v),$$

$$h(\gamma u) = h\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma y_1, \gamma x_1)$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x,y)\big) = (x,-y), \qquad h\big((x,y)\big) = (y,x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u+v) = g\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (x_1+x_2, -(y_1+y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u+v) = h\big((x_1+x_2, y_1+y_2)\big) = (y_1+y_2, x_1+x_2) =$$

$$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = h(u) + h(v),$$

$$h(\gamma u) = h\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma y_1, \gamma x_1) = \gamma h(u).$$

Приклади лінійних відображень.

Відповідності $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ та $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такі, що

$$g\big((x, y)\big) = (x, -y), \qquad h\big((x, y)\big) = (y, x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

є лінійними відображеннями із векторного простору $\mathbb{R}^2$ у векторний простір $\mathbb{R}^2$. Дійсно для будь-яких векторів $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ та будь-якого дійсного числа γ справджуються рівності:

$$g(u + v) = g\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = g(u) + g(v),$$

$$g(\gamma u) = g\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma x_1, -\gamma y_1) = \gamma g(u);$$

$$h(u + v) = h\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2) =$$

$$= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) = h(u) + h(v),$$

$$h(\gamma u) = h\big((\gamma x_1, \gamma y_1)\big) = (\gamma y_1, \gamma x_1) = \gamma h(u).$$

Зауваження 1

Прикладом лінійного відображення є будь-який ізоморфізм лінійних просторів.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P*. Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним*

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли*

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P*. Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a*,* $b \in L$ *і будь-яких елементів* α*,* β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P*. Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним,

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b)$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P*. Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\alpha a) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P. *Відображення* $\varphi : L \to L'$ *є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів* a, $b \in L$ *і будь-яких елементів* α, β *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\alpha a) = \varphi(\alpha a + 0\bar{0}) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\alpha a) = \varphi(\alpha a + 0\bar{0}) = \alpha\varphi(a) + 0\varphi(\bar{0}) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\alpha a) = \varphi(\alpha a + 0\bar{0}) = \alpha\varphi(a) + 0\varphi(\bar{0}) = \alpha\varphi(a).$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Доведення.

Якщо відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P є лінійним, то для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(\beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Навпаки, якщо ж для для будь-яких векторів a, $b \in L$ і будь-яких елементів α, β поля P справджується рівність

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b),$$

то

$$\varphi(a + b) = \varphi(1a + 1b) = 1\varphi(a) + 1\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\alpha a) = \varphi(\alpha a + 0\bar{0}) = \alpha\varphi(a) + 0\varphi(\bar{0}) = \alpha\varphi(a).$$

□

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L.

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L,

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $a_1, a_2, \dots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L*. Для будь-яких елементів* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*.*

Нагадаємо найпростіші властивості лінійних відображень (див. лекцію про ізоморфізми).

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді

$$\varphi(\bar{0}) = \bar{0}', \qquad \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

для довільного вектора $x \in L$.

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P.

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L',

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.
Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.
Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L,

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.
Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається образом відображення φ.

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.

Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається образом відображення φ.

Теорема 4 (основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень)

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.

Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається образом відображення φ.

Теорема 4 (основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень)

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем.

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.

Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається образом відображення φ.

Теорема 4 (основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень)

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем. Тоді

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ — *підпростір в L;*

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.

Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається образом відображення φ.

Теорема 4 (основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень)

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем. Тоді

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ — *підпростір в* L;
2. $\operatorname{Im}\varphi$ — *підпростір в* L';

Означення 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\right\},$$

тобто множина всіх тих векторів із L образи яких рівні нульовому вектору в L', називається ядром відображення φ.
Множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх векторів із L', які є образами векторів із L, називається образом відображення φ.

Теорема 4 (основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень)

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем. Тоді

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ — *підпростір в L;*
2. $\operatorname{Im}\varphi$ — *підпростір в L';*
3. $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker} \varphi$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker} \varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker} \varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. Тому за ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. Тому за ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.
Для доведення ізоморфізму $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. Тому за ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.
Для доведення ізоморфізму $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ побудуємо ізоморфізм із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ у лінійний простір $\operatorname{Im}\varphi$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. Тому за ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.

Для доведення ізоморфізму $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ побудуємо ізоморфізм із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ у лінійний простір $\operatorname{Im}\varphi$. Розглянемо відповідність ψ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.

Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. Тому за ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.

Для доведення ізоморфізму $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ побудуємо ізоморфізм із фа-кторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ у лінійний простір $\operatorname{Im}\varphi$. Розглянемо відповідність ψ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ таку, що

$$\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a),$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки φ є лінійним відображенням, то для довільних векторів a, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\bar{0}' + \beta\bar{0}' = \bar{0}'.$$

Це означає, що $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Ker}\varphi$. За ознакою підпростору ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного відображення φ є підпростором лінійного простору L.
Аналогічно, враховуючи лінійність відображення φ доводимо, що його образ $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'. Для цього розглянемо будь-які вектори a', $b' \in \operatorname{Im}\varphi$. Тоді існують вектори a, $b \in L$, що $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тому для довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$\alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a + \beta b),$$

тобто лінійна комбінація образів будь-який векторів лінійного простору L є знову ж таки образом деякого вектора із L. Тому за ознакою підпростору $\operatorname{Im}\varphi$ є підпростором в L'.
Для доведення ізоморфізму $L/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$ побудуємо ізоморфізм із фа-кторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ у лінійний простір $\operatorname{Im}\varphi$. Розглянемо відповідність ψ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ таку, що

$$\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a), \qquad a + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$,то $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) =$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b)$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$,то $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}'$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$

$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$,то $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a - b) = \varphi(b + (a - b))$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$
$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$,то $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a - b) = \varphi(b + (a - b)) = \varphi(a) = \psi(a + \operatorname{Ker}\varphi).$$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\mathrm{Ker}\,\varphi$ в $\mathrm{Im}\,\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \mathrm{Ker}\,\varphi$ із факторпростору $L/\mathrm{Ker}\,\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\mathrm{Im}\,\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\mathrm{Ker}\,\varphi$. Дійсно, якщо $a + \mathrm{Ker}\,\varphi = b + \mathrm{Ker}\,\varphi$,то $a - b \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, а тому

$$\psi(b + \mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a - b) = \varphi(b + (a - b)) = \varphi(a) = \psi(a + \mathrm{Ker}\,\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a' \in \mathrm{Im}\,\varphi$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$

$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b)+\bar{0}' =$$

$$= \varphi(b)+\varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$

$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$

$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$
$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a \in L$, що $\varphi(a) = a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a) = a'$. Тобто для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$

$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a \in L$, що $\varphi(a) = a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a) = a'$. Тобто для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b)+\bar{0}' =$$

$$= \varphi(b)+\varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a)=\varphi(b)$.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$
$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a)=\varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a)-\varphi(b)=\bar{0}'$.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b)+\bar{0}' =$$

$$= \varphi(b)+\varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a)=\varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a)-\varphi(b)=\bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b)+\bar{0}' =$$

$$= \varphi(b)+\varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a)=\varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a)-\varphi(b)=\bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням, то останню рівність можна переписати у вигляді $\varphi(a-b)=\bar{0}'$.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a + \operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$,то $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a - b) = \varphi(b + (a - b)) = \varphi(a) = \psi(a + \operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a \in L$, що $\varphi(a) = a'$, а тому $\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a) = a'$. Тобто для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a + \operatorname{Ker}\varphi) = \psi(b + \operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням, то останню рівність можна переписати у вигляді $\varphi(a - b) = \bar{0}'$. Це означає, що $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(b)=\varphi(b)+\bar{0}'=$$

$$=\varphi(b)+\varphi(a-b)=\varphi(b+(a-b))=\varphi(a)=\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a\in L$, що $\varphi(a)=a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(a)=a'$. Тобто для кожного вектора $a'\in\operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi)=\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a)=\varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a)-\varphi(b)=\bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням, то останню рівність можна переписати у вигляді $\varphi(a-b)=\bar{0}'$. Це означає, що $a-b\in\operatorname{Ker}\varphi$ і як наслідок $a+\operatorname{Ker}\varphi=b+\operatorname{Ker}\varphi$.

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a \in L$, що $\varphi(a) = a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a) = a'$. Тобто для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням, то останню рівність можна переписати у вигляді $\varphi(a-b) = \bar{0}'$. Це означає, що $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$ і як наслідок $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$. Із сказаного слідує, що ψ — ін'єктивне,

Доведення.

Відповідність ψ є відображенням із $L/\operatorname{Ker}\varphi$ в $\operatorname{Im}\varphi$ через те, що кожному суміжному класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$ із факторпростору $L/\operatorname{Ker}\varphi$ ставить у відповідність цілком визначений єдиний вектор із $\operatorname{Im}\varphi$, що є образом представника цього суміжного класу при відображення φ, який при цьому не залежить від вибору представника суміжного класу $a+\operatorname{Ker}\varphi$. Дійсно, якщо $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$,то $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$, а тому

$$\psi(b+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(b) = \varphi(b) + \bar{0}' =$$

$$= \varphi(b) + \varphi(a-b) = \varphi(b+(a-b)) = \varphi(a) = \psi(a+\operatorname{Ker}\varphi).$$

Відображення ψ є сюр'єктивним, бо для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ знайдеться вектор $a \in L$, що $\varphi(a) = a'$, а тому $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(a) = a'$. Тобто для кожного вектора $a' \in \operatorname{Im}\varphi$ існує прообраз у факторпросторі $L/\operatorname{Ker}\varphi$ при відображенні ψ.

Якщо $\psi(a+\operatorname{Ker}\varphi) = \psi(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ для деяких суміжних класів $a+\operatorname{Ker}\varphi$, $b+\operatorname{Ker}\varphi$ із $L/\operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$. Звідси слідує, що $\varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}'$. Оскільки φ є лінійним відображенням, то останню рівність можна переписати у вигляді $\varphi(a-b) = \bar{0}'$. Це означає, що $a-b \in \operatorname{Ker}\varphi$ і як наслідок $a+\operatorname{Ker}\varphi = b+\operatorname{Ker}\varphi$. Із сказаного слідує, що ψ — ін'єктивне, а отже бієктивне відображення.

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ.

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker} \varphi$, $b + \operatorname{Ker} \varphi \in L/\operatorname{Ker} \varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\Big(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\Big) =$$

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) =$$

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi(\alpha a + \beta b)$$

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi(\alpha a + \beta b) =$$
$$= \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)$$

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi(\alpha a + \beta b) =$$
$$= \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\psi\left(a + \operatorname{Ker}\varphi\right) + \beta\psi\left(b + \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi(\alpha a + \beta b) =$$
$$= \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\psi\left(a + \operatorname{Ker}\varphi\right) + \beta\psi\left(b + \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Теорема доведена. □

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi(\alpha a + \beta b) =$$
$$= \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\psi\left(a + \operatorname{Ker}\varphi\right) + \beta\psi\left(b + \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Теорема доведена. □

Із теореми про розмірність трьох просторів і вище доведеної теореми випливає наступний наслідок.

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\left(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\right) = \psi\left((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi(\alpha a + \beta b) =$$
$$= \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\psi\left(a + \operatorname{Ker}\varphi\right) + \beta\psi\left(b + \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Теорема доведена. $\square$

Із теореми про розмірність трьох просторів і вище доведеної теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням скінченновимірного лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем.

Доведення.

Нарешті доведемо лінійність ψ. Із лінійності відображення φ слідує правильність наступних рівностей для будь-яких суміжних класів $a + \operatorname{Ker}\varphi$, $b + \operatorname{Ker}\varphi \in L/\operatorname{Ker}\varphi$ і будь-яких елементів α, $\beta \in P$:

$$\psi\Big(\alpha(a + \operatorname{Ker}\varphi) + \beta(b + \operatorname{Ker}\varphi)\Big) = \psi\Big((\alpha a + \beta b) + \operatorname{Ker}\varphi\Big) = \varphi(\alpha a + \beta b) =$$
$$= \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\psi\left(a + \operatorname{Ker}\varphi\right) + \beta\psi\left(b + \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Теорема доведена. □

Із теореми про розмірність трьох просторів і вище доведеної теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням скінченновимірного лінійного простору L над полем P в лінійний простір L' над цим же полем. Тоді

$$\dim_P L = \dim_P \operatorname{Ker}\varphi + \dim_P \operatorname{Im}\varphi.$$