Дії над лінійними відображеннями та операторами. Зв'язок дій над лінійними відображеннями з діями над їх матрицями

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

13 березня 2023 р.

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P.

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L'

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$.

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Означення 2

Добутком елемента α поля P

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Означення 2

Добутком елемента α поля P на лінійне відображення φ

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Означення 2

Добутком елемента α поля P на лінійне відображення φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Означення 2

Добутком елемента α поля P на лінійне відображення φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\alpha\varphi : L \to L'$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Означення 2

Добутком елемента α поля P на лінійне відображення φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\alpha\varphi : L \to L'$ таке, що

$$[\alpha\varphi](x) = \alpha\varphi(x),$$

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Домовимося множину всіх лінійних відображень із лінійного простору L у лінійний простір L' позначається через $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Введемо на цій множині дії додавання відображень і множення елемента поля P на відображення.

Означення 1

Сумою лінійних відображень φ і ψ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\varphi + \psi : L \to L'$ таке, що

$$[\varphi + \psi](x) = \varphi(x) + \psi(x), \qquad x \in L.$$

Означення 2

Добутком елемента α поля P на лінійне відображення φ із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ називається відображення $\alpha\varphi : L \to L'$ таке, що

$$[\alpha\varphi](x) = \alpha\varphi(x), \qquad x \in L.$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x, y)\big) = x,$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y,$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) =$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big)$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y,$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) =$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big)$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x, y)\big) = x, \qquad \psi\big((x, y)\big) = -y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x, y)\big) = \varphi\big((x, y)\big) + \psi\big((x, y)\big) = x - y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x, y)\big) = 3\varphi\big((x, y)\big) = 3x,$$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big) = 3x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P.

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big) = 3x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Сума будь-яких лінійних відображень із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big) = 3x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Сума будь-яких лінійних відображень із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$.

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big) = 3x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Сума будь-яких лінійних відображень із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Добуток будь-якого елемента поля P

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi+\psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big) = 3x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Сума будь-яких лінійних відображень із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Добуток будь-якого елемента поля P на лінійне відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$

Приклади дій над лінійними відображеннями.

Нехай φ, ψ — лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такі, що

$$\varphi\big((x,y)\big) = x, \qquad \psi\big((x,y)\big) = -y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоді за означенням суми лінійних відображень

$$[\varphi + \psi]\big((x,y)\big) = \varphi\big((x,y)\big) + \psi\big((x,y)\big) = x - y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Аналогічно за означенням добутку елемента поля на лінійне відображення

$$[3\varphi]\big((x,y)\big) = 3\varphi\big((x,y)\big) = 3x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Сума будь-яких лінійних відображень із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Добуток будь-якого елемента поля P на лінійне відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$.

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$.

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) =$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b)=\varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b)=$$

$$=\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b)=\varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b)=$$

$$=\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big)=$$

$$=\alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big)=\alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L,

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a + \beta b) =$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b) = \varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big) = \alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b) = \gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a + \beta b) = \gamma \cdot \varphi(\alpha a + \beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a + \beta b) = \gamma \cdot \varphi(\alpha a + \beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a) + \gamma\beta\varphi(b)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a + \beta b) = \gamma \cdot \varphi(\alpha a + \beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a) + \gamma\beta\varphi(b) = \alpha\big(\gamma\varphi(a)\big) + \beta\big(\gamma\varphi(b)\big)$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b) = \varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big) = \alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b) = \gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a)+\gamma\beta\varphi(b) = \alpha\big(\gamma\varphi(a)\big)+\beta\big(\gamma\varphi(b)\big) = \alpha[\gamma\varphi](a)+\beta[\gamma\varphi](b).$$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b) = \varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big) = \alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b) = \gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a)+\gamma\beta\varphi(b) = \alpha\big(\gamma\varphi(a)\big)+\beta\big(\gamma\varphi(b)\big) = \alpha[\gamma\varphi](a)+\beta[\gamma\varphi](b).$$

За ознакою лінійного відображення звідси слідує,

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів $a, b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b) = \varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big) = \alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b) = \gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a)+\gamma\beta\varphi(b) = \alpha\big(\gamma\varphi(a)\big)+\beta\big(\gamma\varphi(b)\big) = \alpha[\gamma\varphi](a)+\beta[\gamma\varphi](b).$$

За ознакою лінійного відображення звідси слідує, що як сума $\varphi+\psi$,

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi + \psi](\alpha a + \beta b) = \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) + \big(\alpha\psi(a) + \beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a) + \psi(a)\big) + \beta\big(\varphi(b) + \psi(b)\big) = \alpha[\varphi + \psi](a) + \beta[\varphi + \psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a + \beta b) = \gamma \cdot \varphi(\alpha a + \beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a) + \gamma\beta\varphi(b) = \alpha\big(\gamma\varphi(a)\big) + \beta\big(\gamma\varphi(b)\big) = \alpha[\gamma\varphi](a) + \beta[\gamma\varphi](b).$$

За ознакою лінійного відображення звідси слідує, що як сума $\varphi + \psi$, так і добуток $\gamma\varphi$

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b)=\varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b)=$$

$$=\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big)=$$

$$=\alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big)=\alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b)=\gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b)=\gamma\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)=$$

$$=\gamma\alpha\varphi(a)+\gamma\beta\varphi(b)=\alpha\big(\gamma\varphi(a)\big)+\beta\big(\gamma\varphi(b)\big)=\alpha[\gamma\varphi](a)+\beta[\gamma\varphi](b).$$

За ознакою лінійного відображення звідси слідує, що як сума $\varphi+\psi$, так і добуток $\gamma\varphi$ є лінійними відображеннями.

Доведення.

Нехай φ і ψ є лінійним відображенням із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\varphi+\psi](\alpha a+\beta b) = \varphi(\alpha a+\beta b)+\psi(\alpha a+\beta b) =$$

$$= \big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big)+\big(\alpha\psi(a)+\beta\psi(b)\big) =$$

$$= \alpha\big(\varphi(a)+\psi(a)\big)+\beta\big(\varphi(b)+\psi(b)\big) = \alpha[\varphi+\psi](a)+\beta[\varphi+\psi](b).$$

Так само, якщо γ елемент поля L, то для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\gamma\varphi](\alpha a+\beta b) = \gamma\cdot\varphi(\alpha a+\beta b) = \gamma\big(\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)\big) =$$

$$= \gamma\alpha\varphi(a)+\gamma\beta\varphi(b) = \alpha\big(\gamma\varphi(a)\big)+\beta\big(\gamma\varphi(b)\big) = \alpha[\gamma\varphi](a)+\beta[\gamma\varphi](b).$$

За ознакою лінійного відображення звідси слідує, що як сума $\varphi+\psi$, так і добуток $\gamma\varphi$ є лінійними відображеннями. Теорема доведена. $\square$

Теорема 2

Нехай L *і* L' *є лінійними просторами над одним і тим же полем* P.

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$

Теорема 2

Нехай L *і* L' *є лінійними просторами над одним і тим же полем* P. *Множина* $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ *всіх лінійних відображень із лінійного простору* L *в лінійний простір* L'

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору.

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$.

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L',

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) =$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) =$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x)$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x) = \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x)$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x) = \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) =$$

$$= \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big) =$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x) = \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) =$$

$$= \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big) = \varphi(x) + [\psi(x) + \chi](x) =$$

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x) = \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) =$$

$$= \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big) = \varphi(x) + [\psi(x) + \chi](x) = [\varphi + (\psi + \chi)](x)$$

для довільного $x \in L$.

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) = \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x) = \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) + \chi(x) =$$

$$= \varphi(x) + \big(\psi(x) + \chi(x)\big) = \varphi(x) + [\psi(x) + \chi](x) = [\varphi + (\psi + \chi)](x)$$

для довільного $x \in L$. За означенням рівності відображень

Теорема 2

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Множина $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ всіх лінійних відображень із лінійного простору L в лінійний простір L' є лінійним простором над полем P відносно дій додавання лінійних відображень і множення елементів поля P на лінійні відображення.

Доведення.

Доведення полягає в перевірці всіх восьми аксіом лінійного простору. Нехай φ, ψ, χ — будь-які лінійні відображення із $\mathrm{Hom}_P(L, L')$. Оскільки L' є лінійним простором над полем P і для довільного $x \in L$ образи цього вектора $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ є векторами із L', то

$$(\varphi(x) + \psi(x)) + \chi(x) = \varphi(x) + (\psi(x) + \chi(x)).$$

Тому

$$[(\varphi + \psi) + \chi](x) = [\varphi + \psi](x) + \chi(x) = (\varphi(x) + \psi(x)) + \chi(x) =$$

$$= \varphi(x) + (\psi(x) + \chi(x)) = \varphi(x) + [\psi(x) + \chi](x) = [\varphi + (\psi + \chi)](x)$$

для довільного $x \in L$. За означенням рівності відображень звідси слідує, що

$$(\varphi + \psi) + \chi = \varphi + (\psi + \chi).$$

Аналогічно доводяться наступні аксіоми лінійного простору.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю,

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенні лінійного простору).

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L',

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$,

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) =$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x)$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}'$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$,

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) =$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x)$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x)$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}'$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.
Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$,

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.
Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.
Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.
Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) =$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.

Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x)$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.

Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(x)$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.

Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(x) =$$

$$= [\alpha\varphi](x) + [\beta\varphi](x)$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).
Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.
Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.
Нарешті для довільних елементів α, $\beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(x) =$$

$$= [\alpha\varphi](x) + [\beta\varphi](x) = [\alpha\varphi + \beta\varphi](x).$$

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.

Нарешті для довільних елементів $\alpha, \beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(x) =$$

$$= [\alpha\varphi](x) + [\beta\varphi](x) = [\alpha\varphi + \beta\varphi](x).$$

Тому $(\alpha + \beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$.

Доведення.

Виділимо тільки 3-тю, 4-ту та, скажімо, 8-му аксіоми лінійного простору (у раніше даному нами означенню лінійного простору).

Нульовим елементом в $\mathrm{Hom}_P(L, L')$ є нульове відображення o. За означенням це відображення кожному вектору лінійного простору L ставить у відповідність нульовий вектор $\bar{0}'$ лінійного простору L', тобто $o(x) = \bar{0}'$, для довільного $x \in L$. Тоді для будь-якого лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і для довільного $x \in L$

$$[\varphi + o](x) = \varphi(x) + o(x) = \varphi(x) + \bar{0}' = \varphi(x).$$

Тому $\varphi + o = \varphi$.

Протилежним відображенням до $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ є відображення $-\varphi$ таке, що $[-\varphi](x) = -\varphi(x)$, де $x \in L$. Дійсно

$$[\varphi + [-\varphi]](x) = \varphi(x) + [-\varphi](x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{0}' = o(x).$$

Тому $\varphi + [-\varphi] = o$.

Нарешті для довільних елементів $\alpha, \beta \in P$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ та $x \in L$

$$[(\alpha + \beta)\varphi](x) = (\alpha + \beta) \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(x) =$$

$$= [\alpha\varphi](x) + [\beta\varphi](x) = [\alpha\varphi + \beta\varphi](x).$$

Тому $(\alpha + \beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$. Теорема доведена. $\square$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P;

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$,

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів.

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)),$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$,

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів,

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми.

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) =$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big)$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big)$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big)$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) = \\ = \alpha\psi\big(\varphi(a)\big) + \beta\psi\big(\varphi(b)\big)$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) = \\ = \alpha\psi\big(\varphi(a)\big) + \beta\psi\big(\varphi(b)\big)$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) =$$
$$= \alpha\psi\big(\varphi(a)\big) + \beta\psi\big(\varphi(b)\big) = \alpha[\psi\varphi](a) + \beta[\psi\varphi](b).$$

Означення 3

Нехай L, L' і L'' є лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів просторів. Добутком лінійних відображень ψ і φ називається відображення $\psi\varphi : L \to L''$ таке, що

$$[\psi\varphi](x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in L.$$

Теорема 3

Якщо $\varphi : L \to L'$, $\psi : L' \to L''$ — лінійні відображення лінійних просторів, то добуток $\psi\varphi : L \to L''$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L''.

Доведення.

Нехай справджується умови теореми. Тоді для довільних векторів a, $b \in L$ та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності

$$[\psi\varphi](\alpha a + \beta b) = \psi\big(\varphi(\alpha a + \beta b)\big) = \psi\big(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)\big) =$$
$$= \alpha\psi\big(\varphi(a)\big) + \beta\psi\big(\varphi(b)\big) = \alpha[\psi\varphi](a) + \beta[\psi\varphi](b).$$

Теорема доведена. □

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;*

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;*

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \dots, b_m$

Теорема 4

Нехай L і L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис лінійного простору L полем P; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — базис лінійного простору L' полем P.

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \dots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*,*

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, то для довільних* $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, то для довільних* $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *і* $\alpha \in P$ *справджуються рівності*

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \dots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, то для довільних* $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *і* $\alpha \in P$ *справджуються рівності*

$$\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi),$$

Теорема 4

Нехай L і L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — базис лінійного простору L полем P; $b_1, b_2, \dots, b_m$ — базис лінійного простору L' полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', то для довільних $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і $\alpha \in P$ справджуються рівності

$$\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi), \qquad \mathcal{M}(\alpha\varphi) = \alpha\mathcal{M}(\varphi).$$

Теорема 4

Нехай L і L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — базис лінійного простору L полем P; $b_1, b_2, \dots, b_m$ — базис лінійного простору L' полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', то для довільних $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і $\alpha \in P$ справджуються рівності

$$\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi), \qquad \mathcal{M}(\alpha\varphi) = \alpha\mathcal{M}(\varphi).$$

Тобто матриця суми лінійних відображень φ і ψ у деяких базисах лінійних просторів L і L' дорівнює сумі матриць лінійних відображень φ і ψ у вибраних базисах.

Теорема 4

Нехай L і L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис лінійного простору L полем P; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — базис лінійного простору L' полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', то для довільних $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ і $\alpha \in P$ справджуються рівності

$$\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi), \qquad \mathcal{M}(\alpha\varphi) = \alpha\mathcal{M}(\varphi).$$

Тобто матриця суми лінійних відображень φ і ψ у деяких базисах лінійних просторів L і L' дорівнює сумі матриць лінійних відображень φ і ψ у вибраних базисах. Матриця добутку елемента α поля P на лінійне відображення φ у деяких базисах лінійних просторів L і L' дорівнює добутку елемента α на матрицю лінійного відображення φ у вибраних базисах.

Теорема 4

Нехай L *і* L' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— базис лінійного простору* L *полем* P*;* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *— базис лінійного простору* L' *полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, то для довільних* $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *і* $\alpha \in P$ *справджуються рівності*

$$\mathcal{M}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}(\varphi) + \mathcal{M}(\psi), \qquad \mathcal{M}(\alpha\varphi) = \alpha\mathcal{M}(\varphi).$$

Тобто матриця суми лінійних відображень φ *і* ψ *у деяких базисах лінійних просторів* L *і* L' *дорівнює сумі матриць лінійних відображень* φ *і* ψ *у вибраних базисах. Матриця добутку елемента* α *поля* P *на лінійне відображення* φ *у деяких базисах лінійних просторів* L *і* L' *дорівнює добутку елемента* α *на матрицю лінійного відображення* φ *у вибраних базисах.*

Завдання для самостійної роботи.

Довести цю теорему.

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P;

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* a_1, a_2, $\ldots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P*;*

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P;

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P.

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, $\dots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, $\dots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, $\dots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P*;* b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P*;* c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, …, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, …, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, …, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L',

Теорема 5

Нехай L, L' і L'' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L над полем P; b_1, b_2, ..., b_m — базис лінійного простору L' над полем P; c_1, c_2, ..., c_s — базис лінійного простору L'' над полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', для кожного лінійного відображення $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, …, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, …, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, …, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'',

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P*;* b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P*;* c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L''*, а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, $\ldots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, $\ldots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, $\ldots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' — *скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n — *базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m — *базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s — *базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'',

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, $\ldots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, $\ldots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, $\ldots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, $\ldots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, $\ldots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, $\ldots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$,

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' — *скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n — *базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m — *базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s — *базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$.

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, $\ldots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, $\ldots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, $\ldots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$,

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, ..., a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, ..., b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, ..., c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L', *для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L'', *а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'', *то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}$,

Теорема 5

Нехай L, L' і L'' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L над полем P; b_1, b_2, ..., b_m — базис лінійного простору L' над полем P; c_1, c_2, ..., c_s — базис лінійного простору L'' над полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', для кожного лінійного відображення $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ позначити через $\mathcal{M}'(\psi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L' і L'', а для кожного лінійного відображення $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ позначити через $\mathcal{M}''(\sigma)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L'', то для довільних $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ справджується рівність

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}$, $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \|\gamma_{ij}\|_{s\times n}$

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P*;* a_1, a_2, $\dots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P*;* b_1, b_2, $\dots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P*;* c_1, c_2, $\dots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P*. Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L''*, а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L''*, то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}$, $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \|\gamma_{ij}\|_{s\times n}$ — матриці відповідно лінійних відображень φ,

Теорема 5

Нехай L, L' *і* L'' *— скінченновимірні лінійні простори над полем* P; a_1, a_2, $\ldots$, a_n *— базис лінійного простору* L *над полем* P; b_1, b_2, $\ldots$, b_m *— базис лінійного простору* L' *над полем* P; c_1, c_2, $\ldots$, c_s *— базис лінійного простору* L'' *над полем* P. *Якщо для кожного лінійного відображення* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ *позначити через* $\mathcal{M}(\varphi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L'*, для кожного лінійного відображення* $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}'(\psi)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L' *і* L''*, а для кожного лінійного відображення* $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ *позначити через* $\mathcal{M}''(\sigma)$ *матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів* L *і* L''*, то для довільних* $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ *справджується рівність*

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}$, $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \|\gamma_{ij}\|_{s\times n}$ — матриці відповідно лінійних відображень φ, ψ,

Теорема 5

Нехай L, L' і L'' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L над полем P; b_1, b_2, ..., b_m — базис лінійного простору L' над полем P; c_1, c_2, ..., c_s — базис лінійного простору L'' над полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', для кожного лінійного відображення $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ позначити через $\mathcal{M}'(\psi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L' і L'', а для кожного лінійного відображення $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ позначити через $\mathcal{M}''(\sigma)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L'', то для довільних $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ справджується рівність

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}$, $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \|\gamma_{ij}\|_{s\times n}$ — матриці відповідно лінійних відображень φ, ψ, $\psi\varphi$

Теорема 5

Нехай L, L' і L'' — скінченновимірні лінійні простори над полем P; a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L над полем P; b_1, b_2, ..., b_m — базис лінійного простору L' над полем P; c_1, c_2, ..., c_s — базис лінійного простору L'' над полем P. Якщо для кожного лінійного відображення $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$ позначити через $\mathcal{M}(\varphi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L', для кожного лінійного відображення $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ позначити через $\mathcal{M}'(\psi)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L' і L'', а для кожного лінійного відображення $\sigma \in \mathrm{Hom}_P(L, L'')$ позначити через $\mathcal{M}''(\sigma)$ матрицю цього відображення у вибраних базисах лінійних просторів L і L'', то для довільних $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$ справджується рівність

$$\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathrm{Hom}_P(L, L')$, $\psi \in \mathrm{Hom}_P(L', L'')$. Далі, нехай $\mathcal{M}(\varphi) = \|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\mathcal{M}'(\psi) = \|\beta_{ij}\|_{s\times m}$, $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \|\gamma_{ij}\|_{s\times n}$ — матриці відповідно лінійних відображень φ, ψ, $\psi\varphi$ у вибраних базисах лінійних просторів L, L' і L''.

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i,$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k,$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k,$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) =$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi\big(\varphi(a_j)\big) =$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi\big(\varphi(a_j)\big) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right)$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \dots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi\big(\varphi(a_j)\big) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi\big(\varphi(a_j)\big) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right)$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi(\varphi(a_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{ki}\right) c_k$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi(\varphi(a_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{ki}\right) c_k$$

для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}b_i,\quad j=1,2,\dots,n;\qquad \psi(b_i)=\sum_{k=1}^{s}\beta_{ki}c_k,\quad i=1,2,\dots,m;$$

$$[\psi\varphi](a_j)=\sum_{k=1}^{s}\gamma_{kj}c_k,\quad j=1,2,\dots,n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j)=\psi(\varphi(a_j))=\psi\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}b_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\psi(b_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_{ki}c_k\right)=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{ki}\right)c_k$$

для довільного $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору звідси слідує, що

$$\gamma_{kj}=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ki}\alpha_{ij}$$

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi(\varphi(a_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{ki}\right) c_k$$

для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору звідси слідує, що

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}$$

для довільних $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi(\varphi(a_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{ki}\right) c_k$$

для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору звідси слідує, що

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}$$

для довільних $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. За означенням добутку матриць це означає, що $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi)$.

Доведення.

Тоді

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \psi(b_i) = \sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$[\psi\varphi](a_j) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_{kj} c_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

З іншого боку

$$[\psi\varphi](a_j) = \psi(\varphi(a_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \psi(b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^{s} \beta_{ki} c_k\right) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{ki}\right) c_k$$

для довільного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору звідси слідує, що

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \alpha_{ij}$$

для довільних $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. За означенням добутку матриць це означає, що $\mathcal{M}''(\psi\varphi) = \mathcal{M}'(\psi)\mathcal{M}(\varphi)$. Теорема доведена. □

Означення 4

Непорожня множина A

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P,

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення та операція множення елементів поля P на елементи множини A

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення та операція множення елементів поля P на елементи множини A і виконуються такі умови:

- A є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення;

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення та операція множення елементів поля P на елементи множини A і виконуються такі умови:

- A є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення;
- A є лінійним простором над полем P відносно бінарної алгебраїчної операції додавання і операції множення елементів поля P на елементи множини A;

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення та операція множення елементів поля P на елементи множини A і виконуються такі умови:

- A є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення;
- A є лінійним простором над полем P відносно бінарної алгебраїчної операції додавання і операції множення елементів поля P на елементи множини A;
- дія множення елементів із A і дія множення елементів поля P на елементи із A пов'язані співвідношеннями

Означення 4

Непорожня множина A називається алгеброю над полем P, якщо на ній задані дві бінарні алгебраїчні операції додавання й множення та операція множення елементів поля P на елементи множини A і виконуються такі умови:

- A є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення;
- A є лінійним простором над полем P відносно бінарної алгебраїчної операції додавання і операції множення елементів поля P на елементи множини A;
- дія множення елементів із A і дія множення елементів поля P на елементи із A пов'язані співвідношеннями

$$(\gamma a)b = a(\gamma b) = \gamma(ab)$$

для довільних $\gamma \in P$ a, $b \in A$.

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L,

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi + \psi$,

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi + \psi$, добутки $\alpha\varphi$, де $\alpha \in P$,

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi + \psi$, добутки $\alpha\varphi$, де $\alpha \in P$, $\varphi\psi$

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi + \psi$, добутки $\alpha\varphi$, де $\alpha \in P$, $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ є лінійними операторами простору L.

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi + \psi$, добутки $\alpha\varphi$, де $\alpha \in P$, $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ є лінійними операторами простору L.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що множина $\mathrm{Hom}_P(L, L)$

Зауваження 1

Якщо φ, ψ — лінійні оператори простору L, то сума $\varphi + \psi$, добутки $\alpha\varphi$, де $\alpha \in P$, $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ є лінійними операторами простору L.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що множина $\mathrm{Hom}_P(L, L)$ всіх лінійних операторів лінійного простору L над полем P є алгеброю над полем P.