Характеристичний многочлен матриці і лінійного оператора. Власні вектори і власні значення лінійного оператора

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

20 березня 2023 року

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P,

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P.

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

називається характеристичною матрицею матриці A.

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

називається характеристичною матрицею матриці A.

Зауваження 1

Характеристична матриця матриці A позначається через

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

називається характеристичною матрицею матриці A.

Зауваження 1

Характеристична матриця матриці A позначається через $A - \lambda E$,

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

називається характеристичною матрицею матриці A.

Зауваження 1

Характеристична матриця матриці A позначається через $A - \lambda E$, де E — одинична матриця порядку n.

Означення 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем P, λ — невідоме (невідоме значення) над полем P. Матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

називається характеристичною матрицею матриці A.

Зауваження 1

Характеристична матриця матриці A позначається через $A - \lambda E$, де E — одинична матриця порядку n. Характеристична матриця є матрицею над кільцем $P[\lambda]$ многочленів від невідомого λ над полем P.

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається **характеристичним многочленом матриці A**.

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається **характеристичним многочленом матриці A**.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається **характеристичним многочленом матриці A**.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається **характеристичним многочленом матриці A**.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k,

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A),

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається **характеристичним многочленом матриці A**.

Зауваження 2

Характеристичний многоченом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A), де $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A), де $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Відмітимо, що

$$\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn},$$

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A), де $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Відмітимо, що

$$\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}, \qquad \gamma_n = |A|.$$

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многоченом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A), де $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Відмітимо, що

$$\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}, \qquad \gamma_n = |A|.$$

Означення 3

Сума всіх діагональних елементів матриці A

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A), де $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Відмітимо, що

$$\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}, \qquad \gamma_n = |A|.$$

Означення 3

Сума всіх діагональних елементів матриці A називається слідом матриці A

Означення 2

Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається характеристичним многочленом матриці A.

Зауваження 2

Характеристичний многочленом матриці A — це многочлен степеня n від невідомого λ над полем P:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A), де $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Відмітимо, що

$$\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}, \qquad \gamma_n = |A|.$$

Означення 3

Сума всіх діагональних елементів матриці A називається слідом матриці A і позначається через $\operatorname{tr} A$.

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) -$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) +$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 +$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 -$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 -$$

$$-7\cdot(-2-\lambda)\cdot 5 -$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 -$$

$$-7\cdot(-2-\lambda)\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot(-\lambda) -$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 -$$

$$-7\cdot(-2-\lambda)\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot(-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 1\cdot 2$$

Приклади характеристичних многочленів

Характеристичним многочленом матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

є многочлен $\lambda^2 - 3\lambda + 22$, бо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-5)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 22.$$

У свою чергу характеристичним многочленом матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

є многочлен $-\lambda^3 + 41\lambda + 108$, бо

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 7 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) + 7\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 -$$

$$-7\cdot(-2-\lambda)\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot(-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 1\cdot 2 = -\lambda^3 + 41\lambda + 108.$$

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n,

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем,

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається **подібною** квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається **подібною** квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A,

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P,

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P. Припустимо, що матриця B подібна матриці A.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P. Припустимо, що матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця S порядку n над полем P,

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P. Припустимо, що матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P. Припустимо, що матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці A, B, E, S можна також вважати матрицями над кільцем $P[\lambda]$.

Означення 4

Квадратна матриця B порядку n над полем P називається подібною квадратній матриці A порядку n, якщо існує оборотна над матриця S над цим же полем, така що $B = S^{-1}AS$.

Подібність матриці B до матриці A позначатимемо символом $A \simeq B$.

Теорема 1

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Якщо матриця B подібна матриці A, то характеристичний многочлен матриці B дорівнює характеристичному многочлену матриці A.

Доведення.

Нехай A і B — квадратні матриці порядку n над полем P, E — одинична матриця над полем P. Припустимо, що матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці A, B, E, S можна також вважати матрицями над кільцем $P[\lambda]$. У свою чергу, на множині всіх матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ аналогічно, як у випадку з матрицями над полем P, можна визначити операції додавання та множення матриць, а також операцію множення многочленів на матрицю.

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць.

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| =$$

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E|$$

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S|$$

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S|$$

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B-\lambda E| = |S^{-1}AS-\lambda E| = |S^{-1}(A-\lambda E)S| = |S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S| =$$

$$= |S|^{-1}\cdot|S|\cdot|A-\lambda E|$$

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| =$$

$$= |S|^{-1} \cdot |S| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P,

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| =$$

$$= |S|^{-1} \cdot |S| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B-\lambda E| = |S^{-1}AS-\lambda E| = |S^{-1}(A-\lambda E)S| = |S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S| =$$

$$= |S|^{-1}\cdot|S|\cdot|A-\lambda E| = |A-\lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| =$$

$$= |S|^{-1} \cdot |S| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L.

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B-\lambda E| = |S^{-1}AS-\lambda E| = |S^{-1}(A-\lambda E)S| = |S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S| =$$

$$= |S|^{-1}\cdot|S|\cdot|A-\lambda E| = |A-\lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A-\lambda E|$

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| =$$

$$= |S|^{-1} \cdot |S| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| =$$

$$= |S|^{-1} \cdot |S| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A називається характеристичним многочленом оператора φ.

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| =$$

$$= |S|^{-1} \cdot |S| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A називається характеристичним многочленом оператора φ.

Зауваження 3

Характеристичний многочлен оператора φ

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B-\lambda E| = |S^{-1}AS-\lambda E| = |S^{-1}(A-\lambda E)S| = |S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S| =$$

$$= |S|^{-1}\cdot|S|\cdot|A-\lambda E| = |A-\lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A-\lambda E|$ матриці A називається характеристичним многочленом оператора φ.

Зауваження 3

Характеристичний многочлен оператора φ не залежить від вибору матриці A лінійного оператора φ

Доведення.

Для квадратних матриць порядку n над кільцем $P[\lambda]$ така само як для матриць над полем P справджується теорема про детермінант добутку матриць. Тому

$$|B-\lambda E| = |S^{-1}AS-\lambda E| = |S^{-1}(A-\lambda E)S| = |S^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|S| =$$

$$= |S|^{-1}\cdot|S|\cdot|A-\lambda E| = |A-\lambda E|.$$

Теорема доведена. □

Означення 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, φ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі лінійного простору L. Характеристичний многочлен $|A-\lambda E|$ матриці A називається характеристичним многочленом оператора φ.

Зауваження 3

Характеристичний многочлен оператора φ не залежить від вибору матриці A лінійного оператора φ (інакше кажучи від вибору базису лінійного простору L для знаходження цієї матриці).

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P.

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n,

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A.

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A.

Із теорем про дії над лінійними відображеннями слідує,

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A.

Із теорем про дії над лінійними відображеннями слідує, що у випадку якщо φ — лінійний оператор деякого лінійного простору L над полем P,

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A.

Із теорем про дії над лінійними відображеннями слідує, що у випадку якщо φ — лінійний оператор деякого лінійного простору L над полем P, то значення $f(\varphi)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0\varphi^t + \alpha_1\varphi^{t-1} + \cdots + \alpha_t \mathrm{id}_L,$$

де id_L — одиничний оператор лінійного простору L,

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A.

Із теорем про дії над лінійними відображеннями слідує, що у випадку якщо φ — лінійний оператор деякого лінійного простору L над полем P, то значення $f(\varphi)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0\varphi^t + \alpha_1\varphi^{t-1} + \cdots + \alpha_t \mathrm{id}_L,$$

де id_L — одиничний оператор лінійного простору L, є лінійним оператором простору L.

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається **значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A**.

Із теорем про дії над лінійними відображеннями слідує, що у випадку якщо φ — лінійний оператор деякого лінійного простору L над полем P, то значення $f(\varphi)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0\varphi^t + \alpha_1\varphi^{t-1} + \cdots + \alpha_t \mathrm{id}_L,$$

де id_L — одиничний оператор лінійного простору L, є лінійним оператором простору L.

Означення 7

Лінійний оператор $f(\varphi)$

Нехай A — деяка квадратна матриця порядку n над полем P і

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^t + \alpha_1\lambda^{t-1} + \cdots + \alpha_t \qquad (\alpha_i \in P)$$

— многочлен над полем P. Тоді значення $f(A)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \cdots + \alpha_t E,$$

де E — матриця порядку n, є квадратною матрицею порядку n над полем P.

Означення 6

Матриця $f(A)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від матриці A.

Із теорем про дії над лінійними відображеннями слідує, що у випадку якщо φ — лінійний оператор деякого лінійного простору L над полем P, то значення $f(\varphi)$ алгебраїчного виразу

$$\alpha_0\varphi^t + \alpha_1\varphi^{t-1} + \cdots + \alpha_t \mathrm{id}_L,$$

де id_L — одиничний оператор лінійного простору L, є лінійним оператором простору L.

Означення 7

Лінійний оператор $f(\varphi)$ називається значенням многочлена $f(\lambda)$ від оператора φ.

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) =$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 (Гамільтон-Келі, матричний варіант)

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 (Гамільтон-Келі, матричний варіант)

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $f(\lambda)$ — її характеристичний многочлен.

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 (Гамільтон-Келі, матричний варіант)

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $f(\lambda)$ — її характеристичний многочлен. Тоді $f(A)$ є нульовою матрицею.

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 (Гамільтон-Келі, матричний варіант)

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $f(\lambda)$ — її характеристичний многочлен. Тоді $f(A)$ є нульовою матрицею.

Теорема 3 (Гамільтон-Келі, операторний варіант)

Нехай φ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем P

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 (Гамільтон-Келі, матричний варіант)

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $f(\lambda)$ — її характеристичний многочлен. Тоді $f(A)$ є нульовою матрицею.

Теорема 3 (Гамільтон-Келі, операторний варіант)

Нехай φ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем P і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен оператора φ.

Приклад обчислення значення многочлена від матриці.

Раніше нами знайдено характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 22$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$f(A) = A^2 - 3A + 22E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & -15 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 (Гамільтон-Келі, матричний варіант)

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $f(\lambda)$ — її характеристичний многочлен. Тоді $f(A)$ є нульовою матрицею.

Теорема 3 (Гамільтон-Келі, операторний варіант)

Нехай φ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем P і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен оператора φ. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ,

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P,

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається **власним вектором** лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ,

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L,

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається **власним вектором** лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається **власним значенням** лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що **власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$** цього оператора,

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається **власним вектором** лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається **власним значенням** лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що **власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$** цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$ є власним векторами

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається **власним вектором** лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається **власним значенням** лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1,0)$ і $(5,1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

бо

$$\varphi\big((1,0)\big) =$$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

бо

$$\varphi\big((1, 0)\big) = (3, 0)$$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

бо

$$\varphi\big((1, 0)\big) = (3, 0) = 3 \cdot (1, 0),$$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1,0)$ і $(5,1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1,x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

бо

$$\varphi\big((1,0)\big) = (3,0) = 3 \cdot (1,0), \quad \varphi\big((5,1)\big) =$$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

бо

$$\varphi\big((1, 0)\big) = (3, 0) = 3 \cdot (1, 0), \quad \varphi\big((5, 1)\big) = (10, 2)$$

Означення 8

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a лінійного простору L називається власним вектором лінійного оператора φ, якщо існує такий елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля P називається власним значенням лінійного оператора φ, якщо існує такий ненульовий вектор a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Будемо говорити, що власний вектор $a \in L$ лінійного оператора φ належить власному значенню $\alpha \in P$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$.

Зауваження 4

Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення лінійного оператора φ може бути і нульовим елементом поля P.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$ є власним векторами лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ такого, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (3x_1 - 5x_2, 2x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

бо

$$\varphi\big((1, 0)\big) = (3, 0) = 3 \cdot (1, 0), \quad \varphi\big((5, 1)\big) = (10, 2) = 2 \cdot (5, 1).$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ,

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1, 0)$ і $(5, 1)$.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2,

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$\varphi\big((4,0)\big) =$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0)$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0),$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) =$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4)$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ,

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) =$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1, 2\cdot 1)$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1, 2\cdot 1) = (7,2)$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1, 2\cdot 1) = (7,2) \neq \alpha\cdot(4,1) = (4\alpha,\alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$,

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію f

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x)$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x) = e^{\gamma x}$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.
Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x) = e^{\gamma x} \in C^{\infty}_{[0,1]}$.

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1, 2\cdot 1) = (7,2) \neq \alpha\cdot(4,1) = (4\alpha,\alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x) = e^{\gamma x} \in C^{\infty}_{[0,1]}$. Тоді

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big)=(12,0)=3\cdot(4,0),\quad \varphi\big((-10,-2)\big)=(-20,-4)=2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big)=(3\cdot 4-5\cdot 1, 2\cdot 1)=(7,2)\neq \alpha\cdot(4,1)=(4\alpha,\alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f=f(x)=e^{\gamma x}\in C^{\infty}_{[0,1]}$. Тоді

$$[\mathfrak{D}(f)](x)=\frac{df(x)}{dx}=(e^{\gamma x})'$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3 \cdot (4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2 \cdot (-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3 \cdot 4 - 5 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (7,2) \neq \alpha \cdot (4,1) = (4\alpha, \alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x) = e^{\gamma x} \in C^{\infty}_{[0,1]}$. Тоді

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx} = (e^{\gamma x})' = \gamma e^{\gamma x}$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1, 2\cdot 1) = (7,2) \neq \alpha\cdot(4,1) = (4\alpha,\alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x) = e^{\gamma x} \in C^{\infty}_{[0,1]}$. Тоді

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx} = (e^{\gamma x})' = \gamma e^{\gamma x} = \gamma f(x), \quad x\in[0,1].$$

Приклад власних векторів і власних значень лінійного оператора.

Дійсні числа 3 і 2 є власними значеннями лінійного оператора φ, яким належать відповідно вектори $(1,0)$ і $(5,1)$. Але власному значенню 2, так само як власному значенню 3 належать інші власні вектори:

$$\varphi\big((4,0)\big) = (12,0) = 3\cdot(4,0), \quad \varphi\big((-10,-2)\big) = (-20,-4) = 2\cdot(-10,-2).$$

Вектори $(4,1)$ не є власним вектором лінійного оператора φ, бо

$$\varphi\big((4,1)\big) = (3\cdot 4 - 5\cdot 1, 2\cdot 1) = (7,2) \neq \alpha\cdot(4,1) = (4\alpha,\alpha)$$

для будь-якого дійсного числа α.

Натомість, якщо розглянути лінійний оператор диференціювання $\mathfrak{D}$ лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, то будь-яке дійсне число γ є власним значенням цього лінійного оператора. Дійсно розглянемо функцію $f = f(x) = e^{\gamma x} \in C^{\infty}_{[0,1]}$. Тоді

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx} = (e^{\gamma x})' = \gamma e^{\gamma x} = \gamma f(x), \quad x\in[0,1].$$

Тобто

$$\mathfrak{D}(f) = \gamma f.$$

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ *лінійного простору* L *над полем* P

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ *лінійного простору* L *над полем* P *належить тільки одному власному значенню цього оператора.*

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P,

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$,

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$. Рівність $\alpha = \beta$

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$. Рівність $\alpha = \beta$ суперечить припущенню,

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$. Рівність $\alpha = \beta$ суперечить припущенню, що β — відмінне від α власне значення лінійного оператора φ,

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$. Рівність $\alpha = \beta$ суперечить припущенню, що β — відмінне від α власне значення лінійного оператора φ, якому належить власний вектор a.

Теорема 4

Власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Доведення.

Нехай a — власний вектор лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P. За означенням власного вектора a є ненульовим вектором і існує елемент α поля P, що $\varphi(a) = \alpha a$. Припустимо, що вектор a належить власному значенню β відмінному від α. Тоді $\varphi(a) = \beta a$. Тому $\alpha a = \beta a$. Звідси $(\alpha - \beta)a = \bar{0}$. Як наслідок $\alpha - \beta = 0$, бо $a \neq \bar{0}$. Рівність $\alpha = \beta$ суперечить припущенню, що β — відмінне від α власне значення лінійного оператора φ, якому належить власний вектор a. Ця суперечність доводить теорему. □

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*,*

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α *— множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ*,*

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α *— множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ*, які належать власному значенню* α*,*

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α *— множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ*, які належать власному значенню* α*, разом з нульовим вектором простору* L*.*

Теорема 5

Нехай φ — *лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P, *елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α — *множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ, *які належать власному значенню* α, *разом з нульовим вектором простору* L. *Множина* L_α *є підпростором лінійного простору* L,

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α *— множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ*, які належать власному значенню* α*, разом з нульовим вектором простору* L*. Множина* L_α *є підпростором лінійного простору* L*, причому*

$$\varphi(L_\alpha)$$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\}$$

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α *— множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ*, які належать власному значенню* α*, разом з нульовим вектором простору* L*. Множина* L_α *є підпростором лінійного простору* L*, причому*

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$,

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$,

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) =$$

Теорема 5

Нехай φ *— лінійний оператор лінійного простору* L *над полем* P*, елемент* α *поля* P *є власним значенням лінійного оператора* φ *і* L_α *— множина всіх власних векторів лінійного оператора* φ*, які належать власному значенню* α*, разом з нульовим вектором простору* L*. Множина* L_α *є підпростором лінійного простору* L*, причому*

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори b, $c \in L_\alpha$. Оскільки b, $c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c)$$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c)$$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори b, $c \in L_\alpha$. Оскільки b, $c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори b, $c \in L_\alpha$. Оскільки b, $c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$,

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$. Але $\varphi(u) = \alpha u$,

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$. Але $\varphi(u) = \alpha u$, отже, $v = \alpha u$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.

Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$. Але $\varphi(u) = \alpha u$, отже, $v = \alpha u$. За доведеним L_α є підпростором лінійного простору L.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори b, $c \in L_\alpha$. Оскільки b, $c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$. Але $\varphi(u) = \alpha u$, отже, $v = \alpha u$. За доведеним L_α є підпростором лінійного простору L. Це означає, що $v = \alpha u \in L_\alpha$

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.

Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$. Але $\varphi(u) = \alpha u$, отже, $v = \alpha u$. За доведеним L_α є підпростором лінійного простору L. Це означає, що $v = \alpha u \in L_\alpha$ і як наслідок $\varphi(L_\alpha) \subset L_\alpha$.

Теорема 5

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем P, елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ і L_α — множина всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L. Множина L_α є підпростором лінійного простору L, причому

$$\varphi(L_\alpha) = \{\varphi(u) \mid u \in L_\alpha\} \subset L_\alpha.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо будь-які елементи $\beta, \gamma \in P$ та будь-які вектори $b, c \in L_\alpha$. Оскільки $b, c \in L_\alpha$, то $\varphi(b) = \alpha b$, $\varphi(c) = \alpha c$. Нагадаємо, що $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$. Тому

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c) = \beta(\alpha b) + \gamma(\alpha c) = \alpha(\beta b + \gamma c).$$

Отже, $\beta b + \gamma c \in L_\alpha$. За ознакою підпростору множина L_α є підпростором лінійного простору L.
Насамкінець, для довільного вектора $v \in \varphi(L_\alpha)$ знайдеться вектор $u \in L_\alpha$, що $v = \varphi(u)$. Але $\varphi(u) = \alpha u$, отже, $v = \alpha u$. За доведеним L_α є підпростором лінійного простору L. Це означає, що $v = \alpha u \in L_\alpha$ і як наслідок $\varphi(L_\alpha) \subset L_\alpha$. Теорема доведена. □

Теорема 6

Система власних векторів

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P,

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$,

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним,

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів,

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L.
Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів a_1, a_2, ..., a_k лінійного оператора φ,

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$,

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, є лінійно залежною.

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1,$$

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1, \quad \varphi(a_2) = \alpha_2 a_2,$$

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів a_1, a_2, ..., a_k лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням α_1, α_2, ..., α_k, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1, \quad \varphi(a_2) = \alpha_2 a_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_k) = \alpha_k a_k$$

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів a_1, a_2, $\dots$, a_k лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням α_1, α_2, $\dots$, α_k, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1, \quad \varphi(a_2) = \alpha_2 a_2, \quad \dots, \quad \varphi(a_k) = \alpha_k a_k$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1, \quad \varphi(a_2) = \alpha_2 a_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_k) = \alpha_k a_k$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$;

Теорема 6

Система власних векторів лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Доведення поведемо методом математичної індукції за числом n векторів системи. Якщо $n = 1$, то твердження теореми є очевидним, бо система власних векторів складається з одного ненульового вектора.
Нехай твердження теореми справджується для будь-якої системи, що складається з менш як k векторів, тобто у випадку $n < k$. Розглянемо випадок $n = k$. Припустимо, що деяка система із k власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, є лінійно залежною. Тоді по-перше

$$\varphi(a_1) = \alpha_1 a_1, \quad \varphi(a_2) = \alpha_2 a_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_k) = \alpha_k a_k$$

де $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ поля P,

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю,

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L,

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) =$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0})$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ,

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) =$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k)$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k) = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \dots + \beta_k \varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \dots + \beta_k \alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \dots + \beta_k \alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$

З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$

$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$

Тому

$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$.

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$

З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \dots + \beta_k\varphi(a_k) =$$

$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \dots + \beta_k\alpha_k a_k.$$

Тому

$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \dots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k.

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$

Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$

З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо

$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$

$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$

Тому

$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність

$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \cdots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \dots + \beta_k\varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \dots + \beta_k\alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \dots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$
Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність
$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \dots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$
Оскільки $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k) \neq 0$,

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що $a_1, a_2, \ldots, a_k$ є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$
Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність
$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \cdots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$
Оскільки $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k) \neq 0$, то із цієї рівності слідує, що система власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням,

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$
Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність
$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \cdots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$
Оскільки $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k) \neq 0$, то із цієї рівності слідує, що система власних векторів a_1, a_2, ..., a_{k-1} лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням, є лінійно залежною.

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що $a_1, a_2, \ldots, a_k$ є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_k \varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k \alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1 \alpha_1 a_1 + \beta_2 \alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k \alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$
Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність
$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \cdots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$
Оскільки $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k) \neq 0$, то із цієї рівності слідує, що система власних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням, є лінійно залежною. Це суперечить індуктивному припущенню.

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$
Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність
$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \cdots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$
Оскільки $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k) \neq 0$, то із цієї рівності слідує, що система власних векторів a_1, a_2, ..., a_{k-1} лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням, є лінійно залежною. Це суперечить індуктивному припущенню. Таким чином, система векторів a_1, a_2, ..., a_k є лінійно незалежною.

Доведення.

А по-друге знайдуться елементи β_1, β_2, ..., β_k поля P, не всі рівні нулю, що
$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = \bar{0}. \tag{1}$$
Через те, що φ є лінійним оператором простору L, з одного боку
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}.$$
З іншого, враховуючи, що a_1, a_2, ..., a_k є власними векторами лінійного оператора φ, маємо
$$\varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_k\varphi(a_k) =$$
$$= \beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k.$$
Тому
$$\beta_1\alpha_1 a_1 + \beta_2\alpha_2 a_2 + \cdots + \beta_k\alpha_k a_k = \bar{0}. \tag{2}$$
Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\beta_1 \neq 0$. Віднімемо відповідно від лівої і правої частин рівності (2) відповідно ліву і праву частини рівності (1), помножену на α_k. Одержимо рівність
$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k)a_1 + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_k)a_2 + \cdots + \beta_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)a_{k-1} = \bar{0}.$$
Оскільки $\beta_1(\alpha_1 - \alpha_k) \neq 0$, то із цієї рівності слідує, що система власних векторів a_1, a_2, ..., a_{k-1} лінійного оператора φ, що належать попарно різним власним значенням, є лінійно залежною. Це суперечить індуктивному припущенню. Таким чином, система векторів a_1, a_2, ..., a_k є лінійно незалежною. Теорема доведена. □

Теорема 7

Нехай L — *ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем* P

Теорема 7

Нехай L *— ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем* P *і* φ *— лінійний оператор цього простору.*

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді,

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b) = \alpha b. \tag{3}$$

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b) = \alpha b. \tag{3}$$

Розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b) = \alpha b. \tag{3}$$

Розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Розкладемо вектор b за цим базисом

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in P$.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b) = \alpha b. \tag{3}$$

Розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Розкладемо вектор b за цим базисом

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in P$. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b) = \alpha b. \tag{3}$$

Розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Розкладемо вектор b за цим базисом

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in P$. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема 7

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен лінійного оператора φ. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що деякий елемент α поля P є власним значенням лінійного оператора φ. Покажемо, що $f(\alpha) = 0$. За означенням власного значення існує ненульовий вектор b лінійного простору L такий, що

$$\varphi(b) = \alpha b. \tag{3}$$

Розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Розкладемо вектор b за цим базисом

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in P$. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді з рівності (3) та матричної формули для координат образу слідує, що

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\gamma_{11}\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n = \alpha\beta_1,$$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\gamma_{11}\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n = \alpha\beta_1,$$
$$\gamma_{21}\beta_1 + \gamma_{22}\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n = \alpha\beta_2,$$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\begin{gathered} \gamma_{11}\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n = \alpha\beta_1, \\ \gamma_{21}\beta_1 + \gamma_{22}\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n = \alpha\beta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}\beta_1 + \gamma_{n2}\beta_2 + \dots + \gamma_{nn}\beta_n = \alpha\beta_n. \end{gathered}$$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \gamma_{11}\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n &= \alpha\beta_1, \\ \gamma_{21}\beta_1 + \gamma_{22}\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n &= \alpha\beta_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}\beta_1 + \gamma_{n2}\beta_2 + \dots + \gamma_{nn}\beta_n &= \alpha\beta_n. \end{aligned}$$

і, як насідок,

$$(\gamma_{11} - \alpha)\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n = 0,$$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\begin{gathered} \gamma_{11}\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n = \alpha\beta_1, \\ \gamma_{21}\beta_1 + \gamma_{22}\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n = \alpha\beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}\beta_1 + \gamma_{n2}\beta_2 + \dots + \gamma_{nn}\beta_n = \alpha\beta_n. \end{gathered}$$

і, як насідок,

$$\begin{gathered} (\gamma_{11} - \alpha)\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n = 0, \\ \gamma_{21}\beta_1 + (\gamma_{22} - \alpha)\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n = 0, \end{gathered}$$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \gamma_{11}\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n &= \alpha\beta_1, \\ \gamma_{21}\beta_1 + \gamma_{22}\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n &= \alpha\beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}\beta_1 + \gamma_{n2}\beta_2 + \dots + \gamma_{nn}\beta_n &= \alpha\beta_n. \end{aligned}$$

і, як насідок,

$$\begin{aligned} (\gamma_{11} - \alpha)\beta_1 + \gamma_{12}\beta_2 + \dots + \gamma_{1n}\beta_n &= 0, \\ \gamma_{21}\beta_1 + (\gamma_{22} - \alpha)\beta_2 + \dots + \gamma_{2n}\beta_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}\beta_1 + \gamma_{n2}\beta_2 + \dots + (\gamma_{nn} - \alpha)\beta_n &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{cases} (\gamma_{11} - \alpha)x_1 + \gamma_{12}x_2 + \cdots + \gamma_{1n}x_n = 0, \\ \gamma_{21}x_1 + (\gamma_{22} - \alpha)x_2 + \cdots + \gamma_{2n}x_n = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \cdots + (\gamma_{nn} - \alpha)x_n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{cases} (\gamma_{11} - \alpha)x_1 + \gamma_{12}x_2 + \cdots + \gamma_{1n}x_n = 0, \\ \gamma_{21}x_1 + (\gamma_{22} - \alpha)x_2 + \cdots + \gamma_{2n}x_n = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \cdots + (\gamma_{nn} - \alpha)x_n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є ненульовим вектором,

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{cases} (\gamma_{11} - \alpha)x_1 + \gamma_{12}x_2 + \dots + \gamma_{1n}x_n = 0, \\ \gamma_{21}x_1 + (\gamma_{22} - \alpha)x_2 + \dots + \gamma_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \dots + (\gamma_{nn} - \alpha)x_n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b.

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\left\{\begin{array}{c} (\gamma_{11}-\alpha)x_1+\gamma_{12}x_2+\cdots+\gamma_{1n}x_n=0,\\ \gamma_{21}x_1+(\gamma_{22}-\alpha)x_2+\cdots+\gamma_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\\ \gamma_{n1}x_1+\gamma_{n2}x_2+\cdots+(\gamma_{nn}-\alpha)x_n=0. \end{array}\right. \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує,

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{cases} (\gamma_{11} - \alpha)x_1 + \gamma_{12}x_2 + \dots + \gamma_{1n}x_n = 0, \\ \gamma_{21}x_1 + (\gamma_{22} - \alpha)x_2 + \dots + \gamma_{2n}x_n = 0, \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \dots + (\gamma_{nn} - \alpha)x_n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує, що детермінант матриці системи лінійних однорідних рівнянь (6) дорівнює нулю,

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, …, x_n

$$\begin{cases} (\gamma_{11}-\alpha)x_1+\gamma_{12}x_2+\cdots+\gamma_{1n}x_n=0, \\ \gamma_{21}x_1+(\gamma_{22}-\alpha)x_2+\cdots+\gamma_{2n}x_n=0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}x_1+\gamma_{n2}x_2+\cdots+(\gamma_{nn}-\alpha)x_n=0. \end{cases} \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує, що детермінант матриці системи лінійних однорідних рівнянь (6) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}-\alpha & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-\alpha & \ldots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn}-\alpha \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\left\{\begin{array}{c} (\gamma_{11}-\alpha)x_1+\gamma_{12}x_2+\cdots+\gamma_{1n}x_n=0,\\ \gamma_{21}x_1+(\gamma_{22}-\alpha)x_2+\cdots+\gamma_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{n1}x_1+\gamma_{n2}x_2+\cdots+(\gamma_{nn}-\alpha)x_n=0. \end{array}\right. \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує, що детермінант матриці системи лінійних однорідних рівнянь (6) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}-\alpha & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-\alpha & \ldots & \gamma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn}-\alpha \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Таким чином,

$$f(\alpha) =$$

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, …, x_n

$$\left\{\begin{array}{c} (\gamma_{11}-\alpha)x_1+\gamma_{12}x_2+\cdots+\gamma_{1n}x_n=0, \\ \gamma_{21}x_1+(\gamma_{22}-\alpha)x_2+\cdots+\gamma_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}x_1+\gamma_{n2}x_2+\cdots+(\gamma_{nn}-\alpha)x_n=0. \end{array}\right. \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує, що детермінант матриці системи лінійних однорідних рівнянь (6) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}-\alpha & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-\alpha & \ldots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn}-\alpha \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Таким чином,

$$f(\alpha) = |\Phi - \alpha E|$$

Доведення.

Тому n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{cases} (\gamma_{11}-\alpha)x_1+\gamma_{12}x_2+\cdots+\gamma_{1n}x_n=0, \\ \gamma_{21}x_1+(\gamma_{22}-\alpha)x_2+\cdots+\gamma_{2n}x_n=0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}x_1+\gamma_{n2}x_2+\cdots+(\gamma_{nn}-\alpha)x_n=0. \end{cases} \tag{6}$$

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ є ненульовим вектором, через те, що він є координатним рядком ненульового вектора b. За наслідком із теореми Крамера звідси слідує, що детермінант матриці системи лінійних однорідних рівнянь (6) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}-\alpha & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-\alpha & \ldots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn}-\alpha \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Таким чином,

$$f(\alpha) = |\Phi - \alpha E| = 0,$$

де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Тепер доведемо достатність.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L над полем P.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$,

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6)

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, $\dots$, a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Тому що справджуються рівності (5),

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Тому що справджуються рівності (5), правильною є рівність (4)

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Тому що справджуються рівності (5), правильною є рівність (4) і, як наслідок, одержуємо рівність (3). Це означає, що α є власним значенням лінійного оператора φ.

Доведення.

Тепер доведемо достатність. Нехай елемент α поля P є коренем характеристичного многочлена $f(\lambda)$ лінійного оператора φ. Так само розглянемо деякий базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L над полем P. Нехай $\Phi = \|\gamma_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Тоді $f(\lambda) = |\Phi - \lambda E|$, а отже $|\Phi - \alpha E| = f(\alpha) = 0$. Тому система лінійних однорідних рівнянь (6) з матрицею $\Phi - \alpha E$ має ненульовий розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Тому що справджуються рівності (5), правильною є рівність (4) і, як наслідок, одержуємо рівність (3). Це означає, що α є власним значенням лінійного оператора φ. Теорема доведена. $\square$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що
$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$,

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\varphi(e_1) = (0, -1)$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\varphi(e_1) \;=\; (0, -1) = 0e_1 - 1e_2,$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) \end{aligned}$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у канонічному базисі.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у канонічному базисі. Тому характеристичний многочлен лінійного оператора φ дорівнює

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у канонічному базисі. Тому характеристичний многочлен лінійного оператора φ дорівнює

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Цей многочлен немає коренів у полі $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у канонічному базисі. Тому характеристичний многочлен лінійного оператора φ дорівнює

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Цей многочлен немає коренів у полі $\mathbb{R}$ дійсних чисел. За ознакою власного значення лінійний оператор φ немає власних значень,

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай φ — лінійний оператор дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо деякий базис $\mathbb{R}^2$, наприклад канонічний $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Розкладемо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (0, -1) = 0e_1 - 1e_2, \\ \varphi(e_2) &= (1, \quad 0) = 1e_1 + 0e_2. \end{aligned}$$

Отже, матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у канонічному базисі. Тому характеристичний многочлен лінійного оператора φ дорівнює

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Цей многочлен немає коренів у полі $\mathbb{R}$ дійсних чисел. За ознакою власного значення лінійний оператор φ немає власних значень, а отже і власних векторів.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів,

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi((x_1, x_2)) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i є вектори вигляду $(-i\gamma, \gamma)$,

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi((x_1, x_2)) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i є вектори вигляду $(-i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i є вектори вигляду $(-i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. А власними векторами, що належать власному значенню $-i$

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i є вектори вигляду $(-i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. А власними векторами, що належать власному значенню $-i$ є вектори вигляду $(i\gamma, \gamma)$,

Приклад знаходження всіх власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Нехай ψ — лінійний оператор комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$ такий, що

$$\psi\big((x_1, x_2)\big) = (x_2, -x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Аналогічно, як у попередньому випадку знаходимо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ простору $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ лінійного оператора ψ має два корені у полі $\mathbb{C}$: i та $-i$. Таким чином, власними значеннями лінійного оператора ψ є числа i та $-i$. Для знаходження власних векторів, що належать відповідно власним значенням i та $-i$ розв'язуємо системи лінійних однорідних рівнянь відповідно з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо, що власними векторами, що належать власному значенню i є вектори вигляду $(-i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. А власними векторами, що належать власному значенню $-i$ є вектори вигляду $(i\gamma, \gamma)$, де $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n,

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L.

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень α_1, α_2, $\ldots$, α_n,

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то існує базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то існує базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P,

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то існує базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P, що складається з власних векторів лінійного оператора φ.

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень α_1, α_2, ..., α_n, то існує базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P, що складається з власних векторів лінійного оператора φ. Якщо ж для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ вектор a_j належить власному значенню α_j,

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень α_1, α_2, ..., α_n, то існує базис a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P, що складається з власних векторів лінійного оператора φ. Якщо ж для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ вектор a_j належить власному значенню α_j, то діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то існує базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P, що складається з власних векторів лінійного оператора φ. Якщо ж для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ вектор a_j належить власному значенню α_j, то діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Навпаки, якщо лінійний оператор у деякому базисі має діагональну матрицю,

Означення 9

Спектром лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P називається множина всіх власних значень цього лінійного оператора.

Зауваження 5

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n, φ — лінійний оператор простору L. Якщо спектр лінійного оператора φ складається з n власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то існує базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L над полем P, що складається з власних векторів лінійного оператора φ. Якщо ж для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ вектор a_j належить власному значенню α_j, то діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Навпаки, якщо лінійний оператор у деякому базисі має діагональну матрицю, то цей базис складається з власних векторів цього лінійного оператора.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P,

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L,

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ — спектр лінійного оператора φ,

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ — спектр лінійного оператора φ, Φ — матриця лінійного оператора φ у деякому базисі лінійного простору L.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ — спектр лінійного оператора φ, Φ — матриця лінійного оператора φ у деякому базисі лінійного простору L. Показати, що у лінійному просторі L над полем P існує базис з власних векторів лінійного оператора φ

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ — спектр лінійного оператора φ, Φ — матриця лінійного оператора φ у деякому базисі лінійного простору L. Показати, що у лінійному просторі L над полем P існує базис з власних векторів лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли

$$sn - \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rank}(\Phi - \alpha_i E) = n,$$

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір розмірності n над полем P, φ — лінійний оператор лінійного простору L, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ — спектр лінійного оператора φ, Φ — матриця лінійного оператора φ у деякому базисі лінійного простору L. Показати, що у лінійному просторі L над полем P існує базис з власних векторів лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли

$$sn - \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rank}(\Phi - \alpha_i E) = n,$$

де E — одинична матриця порядку n.