Будова лінійного простору з оператором

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

27 березня 2023 року

Всюди протягом всієї лекції

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$,

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ,

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$,

Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.

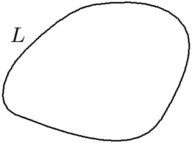
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



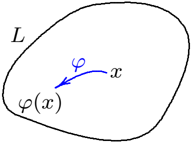
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



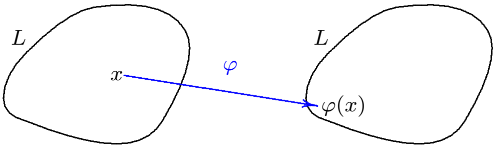
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



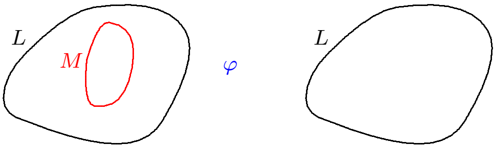
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



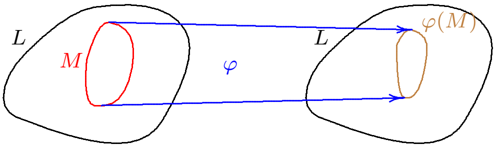
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



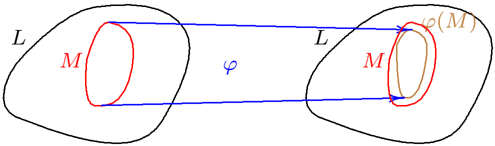
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



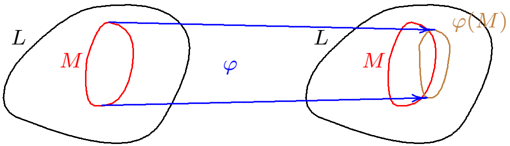
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



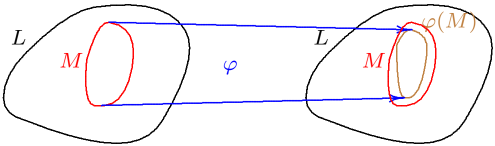
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



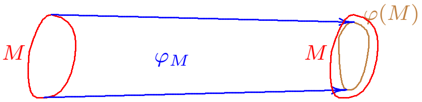
Всюди протягом всієї лекції через L буде позначатись ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 1

Образом підмножини M лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається множина $\{\varphi(m) \mid m \in M\}$, яку позначатимемо через $\varphi(M)$.

Означення 2

Підпростір M лінійного простору L над полем P називається інваріантним відносно оператора φ, якщо $\varphi(M) \subseteq M$, тобто образ підпростору M є підмножиною M.



Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору,

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M

Твердження 1

Якщо підпростір M *лінійного простору* L *над полем* P *є інваріантним відносно лінійного оператора* φ *цього простору, то відповідність* φ_M *із* M *в* M *така, що* $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ *для довільного* $x \in M$

Твердження 1

Якщо підпростір M *лінійного простору* L *над полем* P *є інваріантним відносно лінійного оператора* φ *цього простору, то відповідність* φ_M *із* M *в* M *така, що* $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ *для довільного* $x \in M$ *є лінійним оператором лінійного простору* M *над полем* P.

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P,

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1,

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P,

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L.

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — інваріантний відносно φ підпростір простору L,

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — інваріантний відносно φ підпростір простору L, то відповідність $\widehat{\varphi}$ із факторпростору L/M у факторпростір L/M

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — інваріантний відносно φ підпростір простору L, то відповідність $\widehat{\varphi}$ із факторпростору L/M у факторпростір L/M така, що кожному суміжному класу $x + M$ з представником $x \in L$

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — інваріантний відносно φ підпростір простору L, то відповідність $\widehat{\varphi}$ із факторпростору L/M у факторпростір L/M така, що кожному суміжному класу $x + M$ з представником $x \in L$ ставить у відповідність суміжний клас $\varphi(x) + M$,

Твердження 1

Якщо підпростір M лінійного простору L над полем P є інваріантним відносно лінійного оператора φ цього простору, то відповідність φ_M із M в M така, що $\varphi_M(x) = \varphi(x)$ для довільного $x \in M$ є лінійним оператором лінійного простору M над полем P.

Означення 3

Лінійний оператор φ_M лінійного простору M над полем P, про який йде мова у твердженні 1, називається обмеженням лінійного оператора φ лінійного простору L на підпростір M.

Теорема 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — інваріантний відносно φ підпростір простору L, то відповідність $\widehat{\varphi}$ із факторпростору L/M у факторпростір L/M така, що кожному суміжному класу $x + M$ з представником $x \in L$ ставить у відповідність суміжний клас $\varphi(x) + M$, є лінійним оператором факторпростору L/M.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big) =$$

$$= \varphi(\alpha x + \beta y) + M$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big) =$$

$$= \varphi(\alpha x + \beta y) + M = \big(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)\big) + M$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big) =$$

$$= \varphi(\alpha x + \beta y) + M = \big(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)\big) + M =$$

$$\alpha\big(\varphi(x) + M\big) + \beta\big(\varphi(y) + M\big)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big) =$$

$$= \varphi(\alpha x + \beta y) + M = \big(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)\big) + M =$$

$$\alpha\big(\varphi(x) + M\big) + \beta\big(\varphi(y) + M\big) = \alpha\widehat{\varphi}(x + M) + \beta\widehat{\varphi}(y + M).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і M — інваріантний відносно φ підпростір простору L. Якщо x' — інший представник суміжного класу $x+M$, де $x \in L$, тобто якщо $x' + M = x + M$, то $x' - x \in M$, а отже $\varphi(x' - x) \in M$. Тому

$$\widehat{\varphi}(x' + M) = \varphi(x') + M = \varphi\big(x + (x' - x)\big) + M =$$

$$= \big(\varphi(x) + \varphi(x' - x)\big) + M = \varphi(x) + M = \widehat{\varphi}(x + M).$$

Це означає, що відповідність $\widehat{\varphi}$ є відображенням із L/M в L/M, тобто оператором факторпростору L/M. Лінійність оператора $\widehat{\varphi}$ слідує із правдивості наступних рівностей для довільних α, $\beta \in P$ та $x + M$, $y + M \in L/M$:

$$\widehat{\varphi}\big(\alpha(x + M) + \beta(y + M)\big) = \widehat{\varphi}\big((\alpha x + \beta y) + M\big) =$$

$$= \varphi(\alpha x + \beta y) + M = \big(\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)\big) + M =$$

$$\alpha\big(\varphi(x) + M\big) + \beta\big(\varphi(y) + M\big) = \alpha\widehat{\varphi}(x + M) + \beta\widehat{\varphi}(y + M).$$

Теорему доведено. □

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M.

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору.

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$
\begin{gathered}
\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k, \\
\dots\dots\dots \\
\varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;
\end{gathered}
$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

$$\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{l1}(v_l + M),$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{l1}(v_l + M),\\ \cdots\cdots\cdots\\ \widehat{\varphi}(v_l + M) = \beta_{1l}(v_1 + M) + \beta_{2l}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{ll}(v_l + M).\end{gathered}$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі $u_1, u_2, \ldots, u_k$ лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M, v_2 + M, \ldots, v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{l1}(v_l + M),\\ \cdots\cdots\cdots\\ \widehat{\varphi}(v_l + M) = \beta_{1l}(v_1 + M) + \beta_{2l}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{ll}(v_l + M).\end{gathered}$$

Звідси

$$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{l1}(v_l + M),\\ \dots\dots\dots\\ \widehat{\varphi}(v_l + M) = \beta_{1l}(v_1 + M) + \beta_{2l}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{ll}(v_l + M).\end{gathered}$$

Звідси

$$\begin{gathered}\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \dots + \alpha_{k1}u_k,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \dots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \dots + \beta_{l1}(v_l + M),\\ \dots\dots\dots\\ \widehat{\varphi}(v_l + M) = \beta_{1l}(v_1 + M) + \beta_{2l}(v_2 + M) + \dots + \beta_{ll}(v_l + M).\end{gathered}$$

Звідси

$$\begin{gathered}\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \dots + \alpha_{k1}u_k,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \dots + \alpha_{kk}u_k;\\ \varphi(v_1) + M = (\beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \dots + \beta_{l1}v_l) + M,\end{gathered}$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;$$

$$\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{l1}(v_l + M),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\widehat{\varphi}(v_l + M) = \beta_{1l}(v_1 + M) + \beta_{2l}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{ll}(v_l + M).$$

Звідси

$$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;$$
$$\varphi(v_1) + M = (\beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \cdots + \beta_{l1}v_l) + M,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(v_l) + M = (\beta_{1l}v_1 + \beta_{2l}v_2 + \cdots + \beta_{ll}v_l) + M.$$

Припустимо, що у лінійному просторі L з оператором φ існує нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір M. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора φ_M у деякому базисі u_1, u_2, ..., u_k лінійного простору M над полем P, а $B = \|\beta_{ij}\|$ — матриця лінійного оператора $\widehat{\varphi}$ факторпростору L/M у деякому $v_1 + M$, $v_2 + M$, ..., $v_l + M$ цього простору. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi_M(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi_M(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\varphi}(v_1 + M) = \beta_{11}(v_1 + M) + \beta_{21}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{l1}(v_l + M),\\ \dots\dots\dots\\ \widehat{\varphi}(v_l + M) = \beta_{1l}(v_1 + M) + \beta_{2l}(v_2 + M) + \cdots + \beta_{ll}(v_l + M).\end{gathered}$$

Звідси

$$\begin{gathered}\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{k1}u_k,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi(u_k) = \alpha_{1k}u_1 + \alpha_{2k}u_2 + \cdots + \alpha_{kk}u_k;\\ \varphi(v_1) + M = (\beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \cdots + \beta_{l1}v_l) + M,\\ \dots\dots\dots\\ \varphi(v_l) + M = (\beta_{1l}v_1 + \beta_{2l}v_2 + \cdots + \beta_{ll}v_l) + M.\end{gathered}$$

Із останніх l рівностей слідує, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) \in M.$$

Із останніх l рівностей слідує, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) \in M.$$

Це означає, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) = \gamma_{1j}u_1 + \gamma_{2j}u_2 + \cdots + \gamma_{kj}u_k$$

Із останніх l рівностей слідує, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) \in M.$$

Це означає, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) = \gamma_{1j}u_1 + \gamma_{2j}u_2 + \cdots + \gamma_{kj}u_k$$

для деяких $\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \ldots, \gamma_{kj} \in P$.

Із останніх l рівностей слідує, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) \in M.$$

Це означає, що для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) = \gamma_{1j}u_1 + \gamma_{2j}u_2 + \cdots + \gamma_{kj}u_k$$

для деяких γ_{1j}, γ_{2j}, $\ldots$, $\gamma_{kj} \in P$. Звідси

$$\begin{gathered}
\varphi(v_1) = \gamma_{11}u_1 + \gamma_{21}u_2 + \cdots + \gamma_{k1}u_k + \beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \cdots + \beta_{l1}v_l \\
\cdots\cdots\cdots \\
\varphi(v_l) = \gamma_{1l}u_1 + \gamma_{2l}u_2 + \cdots + \gamma_{kl}u_k + \beta_{1l}v_1 + \beta_{2l}v_2 + \cdots + \beta_{ll}v_l.
\end{gathered}$$

Із останніх l рівностей слідує, що для кожного $j \in \{1, 2, \dots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) \in M.$$

Це означає, що для кожного $j \in \{1, 2, \dots, l\}$

$$\varphi(v_j) - (\beta_{1j}v_1 + \beta_{2j}v_2 + \cdots + \beta_{lj}v_l) = \gamma_{1j}u_1 + \gamma_{2j}u_2 + \cdots + \gamma_{kj}u_k$$

для деяких γ_{1j}, γ_{2j}, ..., $\gamma_{kj} \in P$. Звідси

$$\begin{gathered}\varphi(v_1) = \gamma_{11}u_1 + \gamma_{21}u_2 + \cdots + \gamma_{k1}u_k + \beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \cdots + \beta_{l1}v_l \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(v_l) = \gamma_{1l}u_1 + \gamma_{2l}u_2 + \cdots + \gamma_{kl}u_k + \beta_{1l}v_1 + \beta_{2l}v_2 + \cdots + \beta_{ll}v_l.\end{gathered}$$

Із доведення теореми про розмірність трьох просторів слідує, що система векторів

$$u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_k,\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_l$$

є базисом лінійного простору L над полем P.

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_l цього простору

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_l цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{ll} \end{pmatrix}$$

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_l цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \ldots & \beta_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 2

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P,

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \ldots & \beta_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 2

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L.

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_l$ цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 2

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір лінійного простору L,

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \ldots & \beta_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 2

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір лінійного простору L, то характеристичний многочлен лінійного оператора φ_M лінійного простору M

Із вище сказаного слідує, що матриця лінійного оператора φ лінійного простору L у базисі $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$ цього простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{kl} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \ldots & \beta_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Теорема 2

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, а φ — лінійний оператор простору L. Якщо M — нетривіальний інваріантний відносно φ підпростір лінійного простору L, то характеристичний многочлен лінійного оператора φ_M лінійного простору M є дільником характеристичного многочлена лінійного оператора φ лінійного простору L.

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ.

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a)$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \ldots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \ldots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in P\}.$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$

$$j_1,\ \dots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \dots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L.

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \ldots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L. Оскільки для будь-якого

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a)$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \dots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L. Оскільки для будь-якого

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \in C(a)$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \ldots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L. Оскільки для будь-якого

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \in C(a)$$

справджується рівність

$$\varphi(x) = \gamma_1\varphi\big(\varphi^{j_1}(a)\big) + \gamma_2\varphi\big(\varphi^{j_2}(a)\big) + \cdots + \gamma_k\varphi\big(\varphi^{j_k}(a)\big)$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$

$$j_1,\ \ldots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L. Оскільки для будь-якого

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \in C(a)$$

справджується рівність

$$\varphi(x) = \gamma_1\varphi\big(\varphi^{j_1}(a)\big) + \gamma_2\varphi\big(\varphi^{j_2}(a)\big) + \cdots + \gamma_k\varphi\big(\varphi^{j_k}(a)\big) =$$

$$= \gamma_1\varphi^{j_1+1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2+1}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k+1}(a)$$

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \ldots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L. Оскільки для будь-якого

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \in C(a)$$

справджується рівність

$$\varphi(x) = \gamma_1\varphi\big(\varphi^{j_1}(a)\big) + \gamma_2\varphi\big(\varphi^{j_2}(a)\big) + \cdots + \gamma_k\varphi\big(\varphi^{j_k}(a)\big) =$$
$$= \gamma_1\varphi^{j_1+1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2+1}(a) + \cdots + \gamma_k\varphi^{j_k+1}(a)$$

то $\varphi(x) \in C(a)$,

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Позначимо через $C(a)$ множину всіх лінійних комбінацій всеможливих скінченних підсистем нескінченної системи векторів

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots$$

Тобто

$$C(a) = \{\gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \mid k \in \mathbb{N};$$
$$j_1,\ \dots,\ j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \in P\}.$$

Твердження 2

Множина $C(a)$ є інваріантним відносно φ підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Очевидно, $C(a)$ є підпростором лінійного простору L. Оскільки для будь-якого

$$x = \gamma_1\varphi^{j_1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k}(a) \in C(a)$$

справджується рівність

$$\varphi(x) = \gamma_1\varphi\big(\varphi^{j_1}(a)\big) + \gamma_2\varphi\big(\varphi^{j_2}(a)\big) + \dots + \gamma_k\varphi\big(\varphi^{j_k}(a)\big) =$$
$$= \gamma_1\varphi^{j_1+1}(a) + \gamma_2\varphi^{j_2+1}(a) + \dots + \gamma_k\varphi^{j_k+1}(a)$$

то $\varphi(x) \in C(a)$, що і потрібно було довести. $\square$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається **циклічним простором, породженим вектором a**.

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається **циклічним простором, породженим вектором a**.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P.

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Тоді

$$b = \left[f(\varphi)\right](a),$$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Тоді

$$b = [f(\varphi)](a),$$

де

$$f(\varphi) = \beta_0 \mathrm{id}_L + \beta_1 \varphi + \cdots + \beta_t \varphi^t.$$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Тоді

$$b = \left[f(\varphi)\right](a),$$

де

$$f(\varphi) = \beta_0 \mathrm{id}_L + \beta_1 \varphi + \cdots + \beta_t \varphi^t.$$

Означення 5

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ.

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається циклічним простором, породженим вектором a.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Тоді

$$b = [f(\varphi)](a),$$

де

$$f(\varphi) = \beta_0 \mathrm{id}_L + \beta_1 \varphi + \cdots + \beta_t \varphi^t.$$

Означення 5

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається **циклічним простором, породженим вектором a**.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а β_0, β_1, ..., β_t — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Тоді

$$b = \big[f(\varphi)\big](a),$$

де

$$f(\varphi) = \beta_0 \mathrm{id}_L + \beta_1 \varphi + \cdots + \beta_t \varphi^t.$$

Означення 5

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $\big[f(\varphi)\big](a) = \bar{0}$

Означення 4

Інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір $C(a)$ лінійного простору L називається **циклічним простором, породженим вектором a**.

Кожен вектор $b \in C(a)$ має вигляд

$$b = \beta_0 a + \beta_1 \varphi(a) + \cdots + \beta_t \varphi^t(a),$$

де $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_t$ — деякі елементи поля P. Позначимо через $f(\lambda)$ наступний многочлен від невідомого λ над полем P

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_t \lambda^t.$$

Тоді

$$b = [f(\varphi)](a),$$

де

$$f(\varphi) = \beta_0 \mathrm{id}_L + \beta_1 \varphi + \cdots + \beta_t \varphi^t.$$

Означення 5

Нехай a — вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $[f(\varphi)](a) = \bar{0}$ називається **анулятором вектора a**.

Оскільки L скінченновимірний простір, то існує ненульовий анулятор для кожного вектора $a \in L$.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$,

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, . . . , $\varphi^n(a)$

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, $\ldots$, $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, $\ldots$, $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, $\ldots$, γ_n поля P, не всі рівні нулю

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1 \varphi(a) + \gamma_2 \varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n \varphi^n(a) = \bar{0},$$

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1 \varphi(a) + \gamma_2 \varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n \varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1 \varphi + \gamma_2 \varphi^2 + \cdots + \gamma_n \varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\big[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\big](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, …, $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, …, γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$ є анулятором вектора a.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1 \varphi(a) + \gamma_2 \varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n \varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1 \varphi + \gamma_2 \varphi^2 + \cdots + \gamma_n \varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \cdots + \gamma_n \lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3

Сума анулятоpів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ є знову таки ж анулятоpами вектора a.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3

Сума ануляторів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ є знову таки ж анууляторами вектора a.

Означення 6

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3

Сума анулярторів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ є знову таки ж анулярторами вектора a.

Означення 6

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1,

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3

Сума ануляторів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ є знову таки ж ануляторами вектора a.

Означення 6

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором вектора a називається його мінімальним анулятором.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, ..., $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, ..., γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1\varphi(a) + \gamma_2\varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n\varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \cdots + \gamma_n\varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \cdots + \gamma_n\lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3

Сума анулятoрів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ є знову таки ж анулятoрами вектора a.

Означення 6

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором вектора a називається його мінімальним анулятором.

Теорема 4

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ.

Дійсно, якщо $\dim_P L = n$, то система векторів a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a)$, $\ldots$, $\varphi^n(a)$ є лінійно залежною, через те що складається з $n+1$ векторів. Тому існують елементи γ_0, γ_1, $\ldots$, γ_n поля P, не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_0 a + \gamma_1 \varphi(a) + \gamma_2 \varphi^2(a) + \cdots + \gamma_n \varphi^n(a) = \bar{0},$$

а, отже,

$$\left[\gamma_0 \mathrm{id}_L + \gamma_1 \varphi + \gamma_2 \varphi^2 + \cdots + \gamma_n \varphi^n\right](a) = \bar{0}.$$

Звідси слідує, що ненульовий многочлен $\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \cdots + \gamma_n \lambda^n$ є анулятором вектора a.

Теорема 3

Сума анУляторів вектора a і добуток анулятора вектора a на будь-який многочлен із $P[\lambda]$ є знову таки ж анУляторами вектора a.

Означення 6

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором вектора a називається його мінімальним анулятором.

Теорема 4

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ. Мінімальний анулятор вектора a ділить будь-який анулятор цього вектора.

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ *є найменшим спільним кратним*

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L.

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$).

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо ануляторами всього простору L.

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо анулятораи всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1,

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових анулятoрів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо анулятoрами всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором всього простору L

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо анулятороми всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором всього простору L назвемо мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо ануляторами всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором всього простору L назвемо мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 6

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо ануляторами всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором всього простору L назвемо мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 6

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L ділить любий многочлен, що є анулятором простору L.

Теорема 7

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових анулятoрів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо анулятoрами всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором всього простору L назвемо мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 6

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L ділить любий многочлен, що є анулятором простору L.

Теорема 7

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L є найменшим спільним кратним мінімальних анулятoрів векторів,

Теорема 5

Нехай многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$ є найменшим спільним кратним деяких ненульових ануляторів усіх векторів деякого базису простору L. Тоді $f(\varphi)$ є нульовим оператором простору L.

Із попередньої теореми випливає існування ненульових многочленів $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ таких, що $\big[f(\varphi)\big](L) = \{\bar{0}\}$ (тобто $\big[f(\varphi)\big](a)$ є нульовим вектором для всіх $a \in L$). Такі многочлени назвемо анулятором всього простору L.

Означення 7

Многочлен найменшого степеня із старшим коефіцієнтом 1, який є анулятором всього простору L назвемо мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 6

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L ділить любий многочлен, що є анулятором простору L.

Теорема 7

Мінімальний многочлен оператора φ скінченновимірного лінійного простору L є найменшим спільним кратним мінімальних ануляторів векторів, які складають базис простору L.

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a *— ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору* L *з оператором* φ,

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a — ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a *— ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору* L *з оператором* φ, $C(a)$ *— циклічний простір, породжений вектором* a *і*

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a *— ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору* L *з оператором* φ, $C(a)$ *— циклічний простір, породжений вектором* a *і*

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$*,*

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a *— ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору* L *з оператором* φ, $C(a)$ *— циклічний простір, породжений вектором* a *і*

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$, *— мінімальний анулятор вектора* a.

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a *— ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору* L *з оператором* φ, $C(a)$ *— циклічний простір, породжений вектором* a *і*

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$, *— мінімальний анулятор вектора* a. *Тоді:*

1. *вектори* a, $\varphi(a)$, $\ldots$, $\varphi^{s-1}(a)$ *утворюють базис простору* $C(a)$;

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a *— ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору* L *з оператором* φ, $C(a)$ *— циклічний простір, породжений вектором* a *і*

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$, *— мінімальний анулятор вектора* a. *Тоді:*

1. *вектори* $a, \varphi(a), \ldots, \varphi^{s-1}(a)$ *утворюють базис простору* $C(a)$*;*
2. *матриця оператора* $\varphi_{C(a)}$ *в цьому базисі*

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a — ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$, — мінімальний анулятор вектора a. Тоді:

1. *вектори a, $\varphi(a)$, $\ldots$, $\varphi^{s-1}(a)$ утворюють базис простору $C(a)$;*
2. *матриця оператора $\varphi_{C(a)}$ в цьому базисі має вигляд*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix};$$

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a — ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1} \in P$, — мінімальний анулятор вектора a. Тоді:

1. *вектори a, $\varphi(a)$, $\dots$, $\varphi^{s-1}(a)$ утворюють базис простору $C(a)$;*
2. *матриця оператора $\varphi_{C(a)}$ в цьому базисі має вигляд*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix};$$

3. *характеристичний многочлен оператора $\varphi_{C(a)}$*

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a — ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$, — мінімальний анулятор вектора a. Тоді:

1. *вектори a, $\varphi(a)$, $\ldots$, $\varphi^{s-1}(a)$ утворюють базис простору $C(a)$;*
2. *матриця оператора $\varphi_{C(a)}$ в цьому базисі має вигляд*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix};$$

3. *характеристичний многочлен оператора $\varphi_{C(a)}$ з точністю до знака співпадає з мінімальним многочленом оператора $\varphi_{C(a)}$*

Теорема 8 (будова циклічного простору)

Нехай a — ненульовий вектор скінченновимірного лінійного простору L з оператором φ, $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

де $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1} \in P$, — мінімальний анулятор вектора a. Тоді:

1. *вектори $a, \varphi(a), \ldots, \varphi^{s-1}(a)$ утворюють базис простору $C(a)$;*
2. *матриця оператора $\varphi_{C(a)}$ в цьому базисі має вигляд*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix};$$

3. *характеристичний многочлен оператора $\varphi_{C(a)}$ з точністю до знака співпадає з мінімальним многочленом оператора $\varphi_{C(a)}$ і співпадає з многочленом $f(\lambda)$.*

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ *скінченновимірного лінійного простору простору* L *над полем* P

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ *скінченновимірного лінійного простору простору* L *над полем* P *є анулятором цього простору.*

Означення 8

Лінійний простір L над полем P

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним),

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують)

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ *скінченновимірного лінійного простору простору* L *над полем* P *є анулятором цього простору.*

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N,

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою,

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає,

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді,

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$,

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$),

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$), $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$), $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора φ

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$), $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір в $C(a)$.

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$), $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір в $C(a)$. Тоді вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$), $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір в $C(a)$. Тоді вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим вектором,

Теорема 9 (Гамільтон-Келі)

Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору простору L над полем P є анулятором цього простору.

Означення 8

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається розкладним (нерозкладним), якщо у лінійному просторі L існують (не існують) такі ненульові інваріантні відносно φ підпростори M і N, що простір L є їхньою прямою сумою, тобто $L = M \oplus N$.

Із ознаки прямої суми випливає, що лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є нерозкладним тоді і тільки тоді, коли будь-які два ненульові інваріантні відносно φ підпростори мають ненульовий переріз.

Лема 1

Нехай a — ненульовий вектор лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ такий, що його мінімальний анулятор $g(\lambda)$ є s-им степенем, де $s \in \mathbb{N}$, незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$ (тобто $g(\lambda) = f(\lambda)^s$), $C(a)$ — циклічний простір, породжений вектором a і M — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір в $C(a)$. Тоді вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим вектором, що міститься в M.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий,

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом,

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\big[f(\varphi)^{s-1}\big](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \big[h(\varphi)\big](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$,

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\big[f(\varphi)^{s-1}\big](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \big[h(\varphi)\big](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$,

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\big[f(\varphi)^{s-1}\big](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \big[h(\varphi)\big](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P,

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\big[f(\varphi)^{s-1}\big](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \big[h(\varphi)\big](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\big[v(\varphi)\big](b) = \big[v(\varphi)\big]\big(\big[h(\varphi)\big](a)\big) = \big[v(\varphi)h(\varphi)\big](a) =$$

$$= \big[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\big](a)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

$$= \left[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\right](a) = \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[f(\varphi)^s\right](a)\right)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\big[f(\varphi)^{s-1}\big](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \big[h(\varphi)\big](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\big[v(\varphi)\big](b) = \big[v(\varphi)\big]\big(\big[h(\varphi)\big](a)\big) = \big[v(\varphi)h(\varphi)\big](a) =$$

$$= \big[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\big](a) = \big[f(\varphi)^k\big](a) - \big[u(\varphi)\big]\big(\big[f(\varphi)^s\big](a)\big) =$$

$$= \big[f(\varphi)^k\big](a) - \big[u(\varphi)\big](\bar{0})$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

$$= \left[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\right](a) = \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[f(\varphi)^s\right](a)\right) =$$

$$= \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right](\bar{0}) = \left[f(\varphi)^k\right](a).$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

$$= \left[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\right](a) = \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[f(\varphi)^s\right](a)\right) =$$

$$= \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right](\bar{0}) = \left[f(\varphi)^k\right](a).$$

Через це справджуються рівності

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

$$= \left[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\right](a) = \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[f(\varphi)^s\right](a)\right) =$$

$$= \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right](\bar{0}) = \left[f(\varphi)^k\right](a).$$

Через це справджуються рівності

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k} f(\varphi)^k\right](a)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

$$= \left[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\right](a) = \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[f(\varphi)^s\right](a)\right) =$$

$$= \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right](\bar{0}) = \left[f(\varphi)^k\right](a).$$

Через це справджуються рівності

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k} f(\varphi)^k\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}\right]\left(\left[f(\varphi)^k\right](a)\right)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\left[f(\varphi)^{s-1}\right](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \left[h(\varphi)\right](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\left[v(\varphi)\right](b) = \left[v(\varphi)\right]\left(\left[h(\varphi)\right](a)\right) = \left[v(\varphi)h(\varphi)\right](a) =$$

$$= \left[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\right](a) = \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right]\left(\left[f(\varphi)^s\right](a)\right) =$$

$$= \left[f(\varphi)^k\right](a) - \left[u(\varphi)\right](\bar{0}) = \left[f(\varphi)^k\right](a).$$

Через це справджуються рівності

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k} f(\varphi)^k\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}\right]\left(\left[f(\varphi)^k\right](a)\right) =$$

$$\left[f(\varphi)^{s-1-k}\right]\left(\left[v(\varphi)\right](b)\right)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови леми. Те що, вектор $\big[f(\varphi)^{s-1}\big](a)$ є ненульовим одразу слідує із означення мінімального анулятора вектора. Далі, нехай b — деякий ненульовий вектор із M. Але M — підпростір циклічного простору $C(a)$. Тому $b \in C(a)$ і існує многочлен $h(\lambda) \in P[\lambda]$ такий, що $b = \big[h(\varphi)\big](a)$. Оскільки $f(\lambda)$ є незвідним над полем P многочленом, то найбільший спільний дільник многочленів $f(\lambda)^s$ і $h(\lambda)$ дорівнює $f(\lambda)^k$, де $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. $k \neq s$, бо $b \neq \bar{0}$. Із теореми про найбільший спільний дільник слідує, що існують многочлени $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ над полем P, такі що

$$f(\lambda)^s u(\lambda) + h(\lambda)v(\lambda) = f(\lambda)^k.$$

Тоді

$$v(\lambda)h(\lambda) = f(\lambda)^k - u(\lambda)f(\lambda)^s.$$

Тому

$$\big[v(\varphi)\big](b) = \big[v(\varphi)\big]\big(\big[h(\varphi)\big](a)\big) = \big[v(\varphi)h(\varphi)\big](a) =$$

$$= \big[f^k(\varphi) - u(\varphi)f(\varphi)^s\big](a) = \big[f(\varphi)^k\big](a) - \big[u(\varphi)\big]\big(\big[f(\varphi)^s\big](a)\big) =$$

$$= \big[f(\varphi)^k\big](a) - \big[u(\varphi)\big](\bar{0}) = \big[f(\varphi)^k\big](a).$$

Через це справджуються рівності

$$\big[f^{s-1}(\varphi)\big](a) = \big[f(\varphi)^{s-1-k} f(\varphi)^k\big](a) = \big[f(\varphi)^{s-1-k}\big]\big(\big[f(\varphi)^k\big](a)\big) =$$

$$\big[f(\varphi)^{s-1-k}\big]\big(\big[v(\varphi)\big](b)\big) = \big[f(\varphi)^{s-1-k} v(\varphi)\big](b).$$

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) =$$

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k} v(\varphi)\right](b)$$

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то
$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то
$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$

Лема доведена. □

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$[f^{s-1}(\varphi)](a) = [f(\varphi)^{s-1-k} v(\varphi)](b) \in M.$$

Лема доведена. □

Означення 9

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$

Лема доведена. $\square$

Означення 9

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається примарним простором,

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$

Лема доведена. □

Означення 9

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається **примарним простором**, якщо мінімальний многочлен оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена.

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то

$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$

Лема доведена. $\square$

Означення 9

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається примарним простором, якщо мінімальний многочлен оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена.

Зауваження 1

Із леми 1 слідує, що примарний циклічний простір є нерозкладним простором.

Доведення.

Оскільки M — інваріантний відносно лінійного оператора φ підпростір і $b \in M$, то
$$\left[f^{s-1}(\varphi)\right](a) = \left[f(\varphi)^{s-1-k}v(\varphi)\right](b) \in M.$$
Лема доведена. □

Означення 9

Лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ називається **примарним простором**, якщо мінімальний многочлен оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена.

Зауваження 1

Із леми 1 слідує, що **примарний циклічний простір є нерозкладним простором**.

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ *лінійного оператора* φ *лінійного простору* L *над полем* P *є добутком*

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ *лінійного оператора* φ *лінійного простору* L *над полем* P *є добутком двох многочленів* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *над полем* P, *кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом* 1

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ *лінійного оператора* φ *лінійного простору* L *над полем* P *є добутком двох многочленів* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *над полем* P*, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом* 1 *(тобто* $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$*), і*

$$L_1 = [m_2(\varphi)](L) = \{[m_2(\varphi)](a) \mid a \in L\},$$

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є добутком двох многочленів $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ над полем P, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом 1 (тобто $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$), і

$$L_1 = \big[m_2(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_2(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\},$$

$$L_2 = \big[m_1(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_1(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}.$$

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є добутком двох многочленів $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ над полем P, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом 1 (тобто $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$), і

$$L_1 = \big[m_2(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_2(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\},$$

$$L_2 = \big[m_1(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_1(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}.$$

Тоді

1. *L_i — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір простору L $(i = 1, 2)$;*

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ *лінійного оператора* φ *лінійного простору* L *над полем* P *є добутком двох многочленів* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *над полем* P*, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом* 1 *(тобто* $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$*), і*

$$L_1 = \left[m_2(\varphi)\right](L) = \left\{\left[m_2(\varphi)\right](a) \mid a \in L\right\},$$

$$L_2 = \left[m_1(\varphi)\right](L) = \left\{\left[m_1(\varphi)\right](a) \mid a \in L\right\}.$$

Тоді

1. L_i *— ненульовий інваріантний відносно оператора* φ *підпростір простору* L $(i = 1, 2)$*;*
2. *мінімальний многочлен оператора* φ_{L_i} *дорівнює* $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$*;*

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є добутком двох многочленів $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ над полем P, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом 1 (тобто $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$), і

$$L_1 = \big[m_2(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_2(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\},$$

$$L_2 = \big[m_1(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_1(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}.$$

Тоді

1. *L_i — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір простору L $(i = 1, 2)$;*
2. *мінімальний многочлен оператора φ_{L_i} дорівнює $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$;*
3. *якщо многочлени $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ — взаємно прості, то лінійний простір L є прямою сумою підпросторів L_1 і L_2.*

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ *лінійного оператора* φ *лінійного простору* L *над полем* P *є добутком двох многочленів* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *над полем* P*, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом* 1 *(тобто* $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$*), і*

$$L_1 = \big[m_2(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_2(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\},$$

$$L_2 = \big[m_1(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_1(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}.$$

Тоді

1. L_i *— ненульовий інваріантний відносно оператора* φ *підпростір простору* L $(i = 1, 2)$*;*
2. *мінімальний многочлен оператора* φ_{L_i} *дорівнює* $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$*;*
3. *якщо многочлени* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *— взаємно прості, то лінійний простір* L *є прямою сумою підпросторів* L_1 *і* L_2*.*

Теорема 10 (про примарний розклад)

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ *лінійного оператора* φ *лінійного простору* L *над полем* P *є добутком двох многочленів* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *над полем* P*, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом* 1 *(тобто* $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$*), і*

$$L_1 = \big[m_2(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_2(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}\,,$$

$$L_2 = \big[m_1(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_1(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}\,.$$

Тоді

1. L_i *— ненульовий інваріантний відносно оператора* φ *підпростір простору* L $(i = 1, 2)$*;*
2. *мінімальний многочлен оператора* φ_{L_i} *дорівнює* $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$*;*
3. *якщо многочлени* $m_1(\lambda)$ *і* $m_2(\lambda)$ *— взаємно прості, то лінійний простір* L *є прямою сумою підпросторів* L_1 *і* L_2*.*

Теорема 10 (про примарний розклад)

Скінченновимірний лінійний простір L *над полем* P *з лінійним оператором* φ *є або примарним простором,*

Лема 2

Нехай мінімальний многочлен $m(\lambda)$ лінійного оператора φ лінійного простору L над полем P є добутком двох многочленів $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ над полем P, кожен з яких є многочленом ненульового степеня із старшим коефіцієнтом 1 (тобто $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$), і

$$L_1 = \big[m_2(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_2(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\},$$

$$L_2 = \big[m_1(\varphi)\big](L) = \big\{\big[m_1(\varphi)\big](a) \mid a \in L\big\}.$$

Тоді

1. *L_i — ненульовий інваріантний відносно оператора φ підпростір простору L $(i = 1, 2)$;*
2. *мінімальний многочлен оператора φ_{L_i} дорівнює $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$;*
3. *якщо многочлени $m_1(\lambda)$ і $m_2(\lambda)$ — взаємно прості, то лінійний простір L є прямою сумою підпросторів L_1 і L_2.*

Теорема 10 (про примарний розклад)

Скінченновимірний лінійний простір L над полем P з лінійним оператором φ є або примарним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних інваріантних відносно оператора φ підпросторів в L.

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s.

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L.

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює $f(\lambda)^s$, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює є з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Означення 10

Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається **вектором найбільшої висоти**,

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Означення 10

Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається **вектором найбільшої висоти**, якщо мінімальний анулятор вектора a

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Означення 10

Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається **вектором найбільшої висоти**, якщо мінімальний анулятор вектора a співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Означення 10

Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається **вектором найбільшої висоти**, якщо мінімальний анулятор вектора a співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 11 (про розклад примарного простору)

Будь-який скінченновимірний примарний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором

Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Означення 10

Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається **вектором найбільшої висоти**, якщо мінімальний анулятор вектора a співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 11 (про розклад примарного простору)

Будь-який скінченновимірний примарний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, Нехай L — примарний лінійний простір над полем P з лінійним оператором φ і мінімальний многочлен $m(\lambda)$ оператора φ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f^s(\lambda)$, для деякого натурального s. Нехай a — деякий ненульовий вектор із L. Тоді мінімальний анулятор $m(\lambda)$ вектора a є деяким степенем многочлена $f(\lambda)$, тобто $m(\lambda) = f(\lambda)^k$, для деякого і $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Існує вектор $a \in L$, такий що його мінімальні анулятор дорівнює з $f(\lambda)^s$, тобто співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Означення 10

Вектор a примарного лінійного простору L над полем P з лінійним оператором φ називається **вектором найбільшої висоти**, якщо мінімальний анулятор вектора a співпадає з мінімальним многочленом оператора φ.

Теорема 11 (про розклад примарного простору)

Будь-який скінченновимірний примарний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором,

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k,$$

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$ і між множиною $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ прямих доданків одного розкладу

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$ і між множиною $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ прямих доданків одного розкладу і множиною $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ прямих доданків другого розкладу

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$ і між множиною $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ прямих доданків одного розкладу і множиною $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ прямих доданків другого розкладу існує взаємно однозначна відповідність

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$ і між множиною $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ прямих доданків одного розкладу і множиною $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ прямих доданків другого розкладу існує взаємно однозначна відповідність (бієктивне відображення),

Теорема 12 (основна теорема про лінійні простори з оператором)

Будь-який скінченновимірний лінійний простір над деяким полем з лінійним оператором є або примарним циклічним простором, або прямою сумою скінченного числа примарних циклічних підпросторів.

Теорема 13 (про однозначний розклад)

Нехай лінійний простір L над деяким полем з лінійним оператором φ двома способами розкладено у прямі суми примарних циклічних підпросторів:

$$L = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k, \qquad L = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_r.$$

Тоді $k = r$ і між множиною $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ прямих доданків одного розкладу і множиною $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ прямих доданків другого розкладу існує взаємно однозначна відповідність (бієктивне відображення), при якій характеристичні многочлени обмеження оператора φ на відповідних доданках співпадають.