Евклідів простір. Унітарний простір

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

17 квітня 2023 року

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком,

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L,

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Скалярним добутком, заданим (визначеним) на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{R},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного дійсного числа α;
4. $\sigma(x, x) > 0$ для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які дійсні n-вимірні вектори.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$,

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n =$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \sigma(y, x),$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) =$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1) y_1 + (x_2 + x'_2) y_2 + \cdots + (x_n + x'_n) y_n =$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) + (x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \cdots + x'_n y_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1) y_1 + (x_2 + x'_2) y_2 + \cdots + (x_n + x'_n) y_n =$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) + (x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \cdots + x'_n y_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1) y_1 + (\alpha x_2) y_2 + \cdots + (\alpha x_n) y_n =$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1) y_1 + (x_2 + x'_2) y_2 + \dots + (x_n + x'_n) y_n =$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) + (x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \dots + x'_n y_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1) y_1 + (\alpha x_2) y_2 + \dots + (\alpha x_n) y_n =$$

$$= \alpha(x_1 y_1) + \alpha(x_2 y_2) + \dots + \alpha(x_n y_n)$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1) y_1 + (x_2 + x'_2) y_2 + \dots + (x_n + x'_n) y_n =$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) + (x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \dots + x'_n y_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1) y_1 + (\alpha x_2) y_2 + \dots + (\alpha x_n) y_n =$$

$$= \alpha(x_1 y_1) + \alpha(x_2 y_2) + \dots + \alpha(x_n y_n) = \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n =$$

$$= \alpha(x_1y_1) + \alpha(x_2y_2) + \cdots + \alpha(x_ny_n) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \alpha\sigma(x, y),$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n =$$

$$= \alpha(x_1y_1) + \alpha(x_2y_2) + \cdots + \alpha(x_ny_n) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x_1')y_1 + (x_2 + x_2')y_2 + \cdots + (x_n + x_n')y_n =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x_1'y_1 + x_2'y_2 + \cdots + x_n'y_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n =$$

$$= \alpha(x_1y_1) + \alpha(x_2y_2) + \cdots + \alpha(x_ny_n) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1) y_1 + (x_2 + x'_2) y_2 + \dots + (x_n + x'_n) y_n =$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) + (x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \dots + x'_n y_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1) y_1 + (\alpha x_2) y_2 + \dots + (\alpha x_n) y_n =$$

$$= \alpha(x_1 y_1) + \alpha(x_2 y_2) + \dots + \alpha(x_n y_n) = \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0.$$

Відомо, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{R}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{R}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{R}^n$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \sigma(y, x),$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)y_1 + (x_2 + x'_2)y_2 + \cdots + (x_n + x'_n)y_n =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n =$$

$$= \alpha(x_1y_1) + \alpha(x_2y_2) + \cdots + \alpha(x_ny_n) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Відомо, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Завдання для самостійної роботи.

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0,1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0,1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0,1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y.

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y. Скалярний добуток векторів x і y зазвичай позначаються через:

$$x \cdot y,$$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y. Скалярний добуток векторів x і y зазвичай позначаються через:

$$x \cdot y, \qquad (x, y),$$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y. Скалярний добуток векторів x і y зазвичай позначаються через:

$$x \cdot y, \qquad (x, y), \qquad \langle x, y\rangle,$$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0,1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x,y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y. Скалярний добуток векторів x і y зазвичай позначаються через:

$$x \cdot y, \qquad (x,y), \qquad \langle x,y\rangle, \qquad \langle x|y\rangle$$

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x, y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y. Скалярний добуток векторів x і y зазвичай позначаються через:

$$x \cdot y, \qquad (x, y), \qquad \langle x, y\rangle, \qquad \langle x|y\rangle$$

Домовимося використовувати передостаннє позначення,

Завдання для самостійної роботи.

Показати, що відображення $\varsigma : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$ таке, що

$$\varsigma(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt,$$

де f, $g \in C_{[0,1]}$, є скалярним добутком, заданим на лінійному просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних функцій на проміжку $[0,1]$.

Зауваження 1

Скалярний добуток σ, заданий на лінійному просторі L над полем дійсних чисел, будемо трактувати, як дію, що кожній впорядкованій парі векторів x, y із L ставить у відповідність дійсне число $\sigma(x,y)$, яке називається скалярним добутком векторів x і y. Скалярний добуток векторів x і y зазвичай позначаються через:

$$x \cdot y, \qquad (x,y), \qquad \langle x,y \rangle, \qquad \langle x|y \rangle$$

Домовимося використовувати передостаннє позначення, тобто

$$\langle x,y \rangle = \sigma(x,y).$$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел.

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком,

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L,

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Скалярним добутком, заданим на лінійному просторі L, називається відображення

$$\sigma : L \times L \to \mathbb{C},$$

яке задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку):

1. $\sigma(x, y) = \overline{\sigma(y, x)}$ для довільних векторів x, $y \in L$;
2. $\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y)$ для довільних векторів x_1, x_2, $y \in L$;
3. $\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ і довільного комплексного числа α;
4. $\sigma(x, x)$ є додатним дійсним числом для довільного ненульового вектора $x \in L$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Розглянемо відображення $\sigma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таке, що

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які комплексні n-вимірні вектори.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$,

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} =$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}}$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n}$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) =$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x'=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x,y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}=\overline{y_1\overline{x_1}+y_2\overline{x_2}+\cdots+y_n\overline{x_n}}=\overline{\sigma(y,x)},$$

$$\sigma(x+x',y)=(x_1+x'_1)\overline{y_1}+(x_2+x'_2)\overline{y_2}+\cdots+(x_n+x'_n)\overline{y_n}=$$

$$=(x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n})+(x'_1\overline{y_1}+x'_2\overline{y_2}+\cdots+x'_n\overline{y_n})=\sigma(x,y)+\sigma(x',y),$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \cdots + \alpha(x_n\overline{y_n})$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \cdots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n})$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x,y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y,x)},$$

$$\sigma(x+x',y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x,y) + \sigma(x',y),$$

$$\sigma(\alpha x,y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \cdots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x,y),$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \dots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \dots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \dots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \dots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \dots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\overline{x_n}$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \cdots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \cdots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \cdots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}_+,$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \dots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x'_1)\overline{y_1} + (x_2 + x'_2)\overline{y_2} + \dots + (x_n + x'_n)\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}) + (x'_1\overline{y_1} + x'_2\overline{y_2} + \dots + x'_n\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \dots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \dots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}_+,$$

де $\mathbb{R}_+$ — множина всіх додатних дійсних чисел.

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + \cdots + y_n\overline{x_n}} = \overline{\sigma(y, x)},$$

$$\sigma(x + x', y) = (x_1 + x_1')\overline{y_1} + (x_2 + x_2')\overline{y_2} + \cdots + (x_n + x_n')\overline{y_n} =$$

$$= (x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) + (x_1'\overline{y_1} + x_2'\overline{y_2} + \cdots + x_n'\overline{y_n}) = \sigma(x, y) + \sigma(x', y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} + \cdots + (\alpha x_n)\overline{y_n} =$$

$$= \alpha(x_1\overline{y_1}) + \alpha(x_2\overline{y_2}) + \cdots + \alpha(x_n\overline{y_n}) = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}_+,$$

де $\mathbb{R}_+$ — множина всіх додатних дійсних чисел. Оскільки добре відомо, що

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 0$$

Приклад скалярного добутку, заданого на $\mathbb{C}^n$.

Відображення σ є скалярним добутком, заданим на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, для довільних векторів $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x'=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ із $\mathbb{C}^n$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\sigma(x,y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}=\overline{y_1\overline{x_1}+y_2\overline{x_2}+\cdots+y_n\overline{x_n}}=\overline{\sigma(y,x)},$$

$$\sigma(x+x',y)=(x_1+x'_1)\overline{y_1}+(x_2+x'_2)\overline{y_2}+\cdots+(x_n+x'_n)\overline{y_n}=$$

$$=(x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n})+(x'_1\overline{y_1}+x'_2\overline{y_2}+\cdots+x'_n\overline{y_n})=\sigma(x,y)+\sigma(x',y),$$

$$\sigma(\alpha x,y)=(\alpha x_1)\overline{y_1}+(\alpha x_2)\overline{y_2}+\cdots+(\alpha x_n)\overline{y_n}=$$

$$=\alpha(x_1\overline{y_1})+\alpha(x_2\overline{y_2})+\cdots+\alpha(x_n\overline{y_n})=\alpha(x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n})=\alpha\sigma(x,y),$$

$$\sigma(x,x)=x_1\overline{x_1}+x_2\overline{x_2}+\cdots+x_n\overline{x_n}=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2\in\mathbb{R}_+,$$

де $\mathbb{R}_+$ — множина всіх додатних дійсних чисел. Оскільки добре відомо, що

$$|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2=0$$

тоді і тільки тоді, коли $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається **евклідовим простором**,

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається евклідовим простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається евклідовим простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається **евклідовим простором**, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається евклідовим простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається **евклідовим простором**, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається **евклідовим простором**, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається **евклідовим простором**, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається евклідовим простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які дійсні n-вимірні вектори.

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається **евклідовим простором**, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які дійсні n-вимірні вектори. Цей евклідів простір називається

Означення 3

Лінійний простір L над полем дійсних чисел називається евклідовим простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад евклідового простору.

Дійсний n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є евклідовим простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які дійсні n-вимірні вектори. Цей евклідів простір називається n-вимірним евклідовим простором.

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається **унітарним простором**,

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які комплексні n-вимірні вектори.

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які комплексні n-вимірні вектори. Цей унітарний простір називається

Означення 4

Лінійний простір L над полем комплексних чисел називається унітарним простором, якщо в L задано скалярний добуток.

Приклад унітарного простору.

Комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$ є унітарним простором відносно скалярного добутку

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — будь-які комплексні n-вимірні вектори. Цей унітарний простір називається n-вимірним унітарним простором.

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$.

Твердження 1

Нехай L *— евклідів простір з нульовим вектором* $\bar{0}$*. Тоді для довільних векторів* $x, y, y' \in L$

Твердження 1

Нехай L — *евклідів простір з нульовим вектором* $\bar{0}$. *Тоді для довільних векторів* $x, y, y' \in L$ *та довільного дійсного числа* α

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

Твердження 1

Нехай L *— евклідів простір з нульовим вектором* $\bar{0}$. *Тоді для довільних векторів* x, y, $y' \in L$ *та довільного дійсного числа* α *справджуються рівності:*

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L,

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число.

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle =$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle =$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, y' $\in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y+y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0\cdot\bar{0}, x\rangle = 0\cdot\langle \bar{0}, x\rangle = 0,$$

$$\langle x, y+y'\rangle = \langle y+y', x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle y', x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$

Твердження 1

Нехай L *— евклідів простір з нульовим вектором* $\bar{0}$*. Тоді для довільних векторів* x*,* y*,* $y' \in L$ *та довільного дійсного числа* α *справджуються рівності:*

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle =$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Твердження 1

Нехай L — евклідів простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного дійсного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — евклідів простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Твердження доведено. □

Твердження 2

Нехай L *— унітарний простір з нульовим вектором* $\bar{0}$.

Твердження 2

Нехай L *— унітарний простір з нульовим вектором* $\bar{0}$. *Тоді для довільних векторів* x, y, $y' \in L$

Твердження 2

Нехай L *— унітарний простір з нульовим вектором* $\bar{0}$*. Тоді для довільних векторів* x, y, $y' \in L$ *та довільного комплексного числа* α

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L,

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число.

Твердження 2

Нехай L *— унітарний простір з нульовим вектором* $\bar{0}$*. Тоді для довільних векторів* x, y, $y' \in L$ *та довільного комплексного числа* α *справджуються рівності:*

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle =$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x\rangle$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle =$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \overline{\langle y + y', x \rangle}$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \overline{\langle y + y', x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle}$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x\rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y'\rangle = \overline{\langle y + y', x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle y', x\rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle y', x\rangle}$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x\rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y'\rangle = \overline{\langle y + y', x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle y', x\rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle y', x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x\rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y'\rangle = \overline{\langle y + y', x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle y', x\rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle y', x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$

$$\langle x, \alpha y\rangle =$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \overline{\langle y + y', x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle y', x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle}$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \overline{\langle y + y', x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle y', x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$
$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle}$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = 0, \qquad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x\rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y'\rangle = \overline{\langle y + y', x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle y', x\rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle y', x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$
$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle}$$

Твердження 2

Нехай L — унітарний простір з нульовим вектором $\bar{0}$. Тоді для довільних векторів x, y, $y' \in L$ та довільного комплексного числа α справджуються рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = 0, \qquad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle, \qquad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Доведення.

Нехай L — унітарний простір і x, y, y' — будь-які вектори з L, а α — будь-яке дійсне число. Із аксіом скалярного добутку слідують наступні рівності:

$$\langle \bar{0}, x \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, x \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, x \rangle = 0,$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \overline{\langle y + y', x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle} =$$
$$= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle y', x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$
$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha}\, \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Твердження доведено. $\square$

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів евклідового простору* L

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — *деяка система векторів евклідового простору* L *і*

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_s a_s,$$

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів евклідового простору* L *і*

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_s a_s,$$

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ *— деяка система векторів евклідового простору* L *і*

$$x = x_1a_1 + \dots + x_sa_s, \qquad y = y_1a_1 + \dots + y_sa_s,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_s \in \mathbb{R}$.

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів евклідового простору* L *і*

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_s a_s,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_s \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} x_i y_j \langle a_i, a_j \rangle =$$

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— деяка система векторів евклідового простору* L *і*

$$x = x_1a_1 + \cdots + x_sa_s, \qquad y = y_1a_1 + \cdots + y_sa_s,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_s \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} x_iy_j\langle a_i, a_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{s} x_iy_j\langle a_i, a_j\rangle. \qquad (1)$$

Твердження 3

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — *деяка система векторів евклідового простору* L *і*

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_s a_s,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_s \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} x_i y_j \langle a_i, a_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{s} x_i y_j \langle a_i, a_j \rangle. \tag{1}$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести методом математичної індукції попереднє твердження.

Означення 5

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів евклідового простору L.

Означення 5

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \dots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \dots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \dots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

Означення 5

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \ldots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \ldots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \ldots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Означення 5

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \ldots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \ldots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \ldots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s

Означення 5

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \ldots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \ldots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \ldots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L,

Означення 5

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \dots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \dots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \dots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, ..., a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L, то рівність (1) встановлює скалярний добуток векторів в координатній формі.

Означення 5

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \ldots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \ldots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \ldots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L, то рівність (1) встановлює скалярний добуток векторів в координатній формі.

Означення 6

Базис a_1, a_2, $\ldots$, a_s скінченновимірного евклідового простору L

Означення 5

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \ldots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \ldots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \ldots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L, то рівність (1) встановлює скалярний добуток векторів в координатній формі.

Означення 6

Базис a_1, a_2, $\ldots$, a_s скінченновимірного евклідового простору L називається ортонормованим,

Означення 5

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \dots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \dots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \dots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, ..., a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L, то рівність (1) встановлює скалярний добуток векторів в координатній формі.

Означення 6

Базис a_1, a_2, ..., a_s скінченновимірного евклідового простору L називається ортонормованим, якщо матриця Ґрама системи векторів a_1, ..., a_s

Означення 5

Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деяка система векторів евклідового простору L. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle & \dots & \langle a_1, a_s\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle & \dots & \langle a_2, a_s\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_s, a_1\rangle & \langle a_s, a_2\rangle & \dots & \langle a_s, a_s\rangle \end{pmatrix}$$

називається матрицею Ґрама системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s.

Якщо система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є базисом скінченновимірного евклідового простору L, то рівність (1) встановлює скалярний добуток векторів в координатній формі.

Означення 6

Базис a_1, a_2, $\dots$, a_s скінченновимірного евклідового простору L називається ортонормованим, якщо матриця Ґрама системи векторів a_1, $\dots$, a_s є одиничною матрицею.

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n

Теорема 1

Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *ортонормований базис скінченновимірного евклідового простору* L,

Теорема 1

Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L*, то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L

Теорема 1

Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі L, то скалярний добуток векторів x та y із L у координатній формі має вигляд

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$,

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, $\dots$, a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового простору* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними,

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$.

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, …, a_n — ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі L, то скалярний добуток векторів x та y із L у координатній формі має вигляд

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ — координатні рядки відповідно векторів x та y у базисі a_1, a_2, …, a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L,

Теорема 1

Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового простору* L*, то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів.

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового простору* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b \rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів. Якщо вектори a і b евклідового простору L є ортогональними,

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів. Якщо вектори a і b евклідового простору L є ортогональними, то інколи кажуть, що вектор a — ортогональний вектору b.

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі L, то скалярний добуток векторів x та y із L у координатній формі має вигляд

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

де $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ — координатні рядки відповідно векторів x та y у базисі a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів. Якщо вектори a і b евклідового простору L є ортогональними, то інколи кажуть, що вектор a — ортогональний вектору b. Із першої аксіоми скалярного добутку слідує,

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n *— ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі* L, *то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів. Якщо вектори a і b евклідового простору L є ортогональними, то інколи кажуть, що вектор a — ортогональний вектору b. Із першої аксіоми скалярного добутку слідує, що якщо вектор a — ортогональний вектору b,

Теорема 1

Якщо a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис скінченновимірного евклідового просторі L, то скалярний добуток векторів x та y із L у координатній формі має вигляд

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

де $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ — координатні рядки відповідно векторів x та y у базисі a_1, a_2, ..., a_n.

Означення 7

Вектори a і b евклідового простору L називаються ортогональними, якщо $\langle a, b\rangle = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається ортогональною системою.

Зауваження 2

Підкреслимо, що ортогональності векторів евклідового простору L є бінарним відношенням на L, тобто ортогональність векторів a і b стосується пари цих векторів. Якщо вектори a і b евклідового простору L є ортогональними, то інколи кажуть, що вектор a — ортогональний вектору b. Із першої аксіоми скалярного добутку слідує, що якщо вектор a — ортогональний вектору b, то вектор b — ортогональний вектору a.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_s$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, …, a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \dots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s \rangle =$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то $\langle a_1, a_1 \rangle = 0$,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то $\langle a_1, a_1 \rangle = 0$, що можливо лише, якщо $a_1 = \bar{0}$.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то $\langle a_1, a_1 \rangle = 0$, що можливо лише, якщо $a_1 = \bar{0}$. Це суперечить умові теореми,

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, $\dots$, γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \dots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то $\langle a_1, a_1 \rangle = 0$, що можливо лише, якщо $a_1 = \bar{0}$. Це суперечить умові теореми, через те, що a_1, a_2, $\dots$, a_s — система ненульових векторів.

Теорема 2

Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L є лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — ортогональна система ненульових векторів евклідового простору L. Покажемо від протилежного, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що існують дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, не всі рівні нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\gamma_1 \neq 0$. Тоді з одного боку із рівності (1) слідує, що

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle =$$

$$= \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \gamma_2 \langle a_1, a_2 \rangle + \cdots + \gamma_s \langle a_1, a_s \rangle = \gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle,$$

а іншого боку

$$\langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s \rangle = \langle a_1, \bar{0} \rangle = 0.$$

Тому $\gamma_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$. Оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то $\langle a_1, a_1 \rangle = 0$, що можливо лише, якщо $a_1 = \bar{0}$. Це суперечить умові теореми, через те, що a_1, a_2, ..., a_s — система ненульових векторів. Одержана суперечність доводить теорему. □

Наслідок 1

Ортогональна система із n

Наслідок 1

Ортогональна система із n ненульових векторів скінченновимірного евклідового простору L

Наслідок 1

Ортогональна система із n ненульових векторів скінченновимірного евклідового простору L розмірності n

Наслідок 1

Ортогональна система із n ненульових векторів скінченновимірного евклідового простору L розмірності n є базисом L.

Наслідок 1

Ортогональна система із n ненульових векторів скінченновимірного евклідового простору L розмірності n є базисом L.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$,

Процес ортогоналізації.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$, за наступним алгоритмом.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$,

Процес ортогоналізації.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.

Процес ортогоналізації.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$,

Процес ортогоналізації.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число

Процес ортогоналізації.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка буде еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$,

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle =$$

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle$$

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$,

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \dots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. Таким чином

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. Таким чином

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

Вектор b_2 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2,

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. Таким чином

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

Вектор b_2 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, причому коефіцієнт при a_2 дорівнює 1.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка буде еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

  $$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

  Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. Таким чином

  $$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

  Вектор b_2 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, причому коефіцієнт при a_2 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2 є лінійно незалежною системою векторів,

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. Таким чином

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

Вектор b_2 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, причому коефіцієнт при a_2 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2 є лінійно незалежною системою векторів, то $b_2 \neq \bar{0}$.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, яка буде еквівалентною системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, за наступним алгоритмом.

- Покладемо $b_1 = a_1$. $b_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система векторів не містить нульового вектора.
- Далі, покладемо $b_2 = a_2 + \gamma_{21} b_1$, де γ_{21} — деяке дійсне число таке, що $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1 \rangle = \langle b_1, a_2 \rangle + \gamma_{21} \langle b_1, b_1 \rangle = 0.$$

Оскільки $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$, бо $b_1 \neq 0$, то таке число існує і воно дорівнює $-\frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. Таким чином

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

Вектор b_2 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, причому коефіцієнт при a_2 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2 є лінійно незалежною системою векторів, то $b_2 \neq \bar{0}$.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$,

Процес ортогоналізації.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$,

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$,

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle =$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle$$

Процес ортогоналізації.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle$$

Процес ортогоналізації.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3\rangle = 0$, $\langle b_2, b_3\rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_1, b_2\rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle =$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3\rangle = 0$, $\langle b_2, b_3\rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_1, b_2\rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_2, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_2, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_2, b_2\rangle$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$
$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3\rangle = 0$, $\langle b_2, b_3\rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_1, b_2\rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_2, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_2, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_2, b_2\rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3\rangle + \gamma_{32}\langle b_2, b_2\rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1\rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2\rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle},$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}, \qquad \gamma_{32} = -\frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}.$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3\rangle = 0$, $\langle b_2, b_3\rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_1, b_2\rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_1, b_1\rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31}b_1 + \gamma_{32}b_2\rangle = \langle b_2, a_3\rangle + \gamma_{31}\langle b_2, b_1\rangle + \gamma_{32}\langle b_2, b_2\rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3\rangle + \gamma_{32}\langle b_2, b_2\rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1\rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2\rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}, \qquad \gamma_{32} = -\frac{\langle b_2, a_3\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle}.$$

Таким чином

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}b_1 - \frac{\langle b_2, a_3\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle}b_2.$$

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}, \qquad \gamma_{32} = -\frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}.$$

Таким чином

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2.$$

Вектор b_3 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3,

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}, \qquad \gamma_{32} = -\frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}.$$

Таким чином

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2.$$

Вектор b_3 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3, причому коефіцієнт при a_3 дорівнює 1.

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$

$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$

$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}, \qquad \gamma_{32} = -\frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}.$$

Таким чином

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2.$$

Вектор b_3 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3, причому коефіцієнт при a_3 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2, a_3 є лінійно незалежною системою векторів,

- Тепер покладемо $b_3 = a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2$, де γ_{31}, γ_{32} — деякі дійсні числа такі, що $\langle b_1, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2, b_3 \rangle = 0$, тобто

$$\langle b_1, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_1, b_2 \rangle =$$
$$= \langle b_1, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_1, b_1 \rangle = 0,$$
$$\langle b_2, a_3 + \gamma_{31} b_1 + \gamma_{32} b_2 \rangle = \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{31} \langle b_2, b_1 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle =$$
$$= \langle b_2, a_3 \rangle + \gamma_{32} \langle b_2, b_2 \rangle = 0.$$

Раніше зазначалося, що $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Аналогічно $\langle b_2, b_2 \rangle \neq 0$ бо $b_2 \neq 0$. Тому

$$\gamma_{31} = -\frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}, \qquad \gamma_{32} = -\frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}.$$

Таким чином

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2.$$

Вектор b_3 є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3, причому коефіцієнт при a_3 дорівнює 1. Оскільки a_1, a_2, a_3 є лінійно незалежною системою векторів, то $b_3 \neq \bar{0}$.

Процес ортогоналізації.

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s.

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s,

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \dots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, $\dots$, b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \dots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом,

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \dots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s \rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1} \rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

Із можливості побудови ортогональної системи векторів,

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \dots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

Із можливості побудови ортогональної системи векторів, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів, одразу слідує істинність наступної теореми.

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

Із можливості побудови ортогональної системи векторів, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів, одразу слідує істинність наступної теореми.

Теорема 3

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір.

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

Із можливості побудови ортогональної системи векторів, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів, одразу слідує істинність наступної теореми.

Теорема 3

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує базис,

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \cdots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s\rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1}\rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

Із можливості побудови ортогональної системи векторів, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів, одразу слідує істинність наступної теореми.

Теорема 3

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує базис, який є ортогональною системою векторів

- Продовжуючи цей процес на s-му кроці одержимо, що

$$b_s = a_s - \frac{\langle b_1, a_s \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_s \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 - \dots - \frac{\langle b_{s-1}, a_s \rangle}{\langle b_{s-1}, b_{s-1} \rangle} b_{s-1}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що побудована вище система векторів b_1, b_2, ..., b_s є еквівалентною системі векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Означення 8

Побудова ортогональної системи векторів b_1, b_2, ..., b_s, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів a_1, a_2, ..., a_s за вище приведеним алгоритмом, називається процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта.

Із можливості побудови ортогональної системи векторів, яка є еквівалентною деякій лінійно незалежній системі векторів, одразу слідує істинність наступної теореми.

Теорема 3

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує базис, який є ортогональною системою векторів (ортогональний базис) .

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L.

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається **нормою** або

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається **нормою** або **довжиною** вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$.

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L.

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle\bar{0},y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x,x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x.$$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x.$$

Вектори x і z — ортогональні.

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x.$$

Вектори x і z — ортогональні. Дійсно

$$\langle x, z\rangle =$$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x.$$

Вектори x і z — ортогональні. Дійсно

$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle$$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x.$$

Вектори x і z — ортогональні. Дійсно

$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \langle x, x\rangle$$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x.$$

Вектори x і z — ортогональні. Дійсно

$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle = \langle x, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} \langle x, x\rangle = 0.$$

Означення 9

Нехай x — вектор евклідового простір L. Число $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ називається нормою або довжиною вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується нерівність $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Доведення.

Очевидно для будь-якого вектора y евклідового простору L справджується рівність $|\langle \bar{0}, y\rangle| = \|\bar{0}\| \cdot \|y\|$. Тому для подальшого доведення теореми можна вважати, що x, y — будь-які ненульові вектори із L. Тоді $\langle x, x\rangle \neq 0$ і ми можемо розглянути вектор

$$z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x.$$

Вектори x і z — ортогональні. Дійсно

$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, x\rangle = 0.$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z \rangle \geq 0$,

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Доведення.

З одного боку $\langle z,z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z,z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x, z\rangle = \langle y,z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x,z\rangle = \langle y,z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x\rangle = \langle y,y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y,x\rangle = \langle y,y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} \geq 0.$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \geq 0.$$

Оскільки $\langle x, x\rangle \geq 0$,

Доведення.

З одного боку $\langle z,z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z,z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x, z\rangle = \langle y,z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x,z\rangle = \langle y,z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x\rangle = \langle y,y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y,x\rangle = \langle y,y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} \geq 0.$$

Оскільки $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle y,y\rangle \geq 0$,

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \geq 0.$$

Оскільки $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle y, y\rangle \geq 0$, то звідси одержуємо, що

$$\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2 \geq 0$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \geq 0.$$

Оскільки $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle y, y\rangle \geq 0$, то звідси одержуємо, що

$$\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2 \geq 0$$

і, як наслідок,

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \geq \sqrt{\langle x, y\rangle^2},$$

Доведення.

З одного боку $\langle z, z\rangle \geq 0$, а з іншого

$$\langle z, z\rangle = \langle y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x, z\rangle = \langle y, z\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle =$$

$$= \langle y, y - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y, x\rangle = \langle y, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}.$$

Тому

$$\frac{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \geq 0.$$

Оскільки $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle y, y\rangle \geq 0$, то звідси одержуємо, що

$$\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2 \geq 0$$

і, як наслідок,

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \geq \sqrt{\langle x, y\rangle^2},$$

тобто

$$\|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y\rangle|,$$

що й потрібно було довести. $\square$

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *справджується нерівність*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *справджується нерівність*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f *і* g *на сегменті* $[0,1]$

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ справджується нерівність

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f і g на сегменті $[0,1]$ справджується нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *справджується нерівність*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f *і* g *на сегменті* $[0,1]$ *справджується нерівність*

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми)

Для будь-якого дійсного числа α

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *справджується нерівність*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f *і* g *на сегменті* $[0,1]$ *справджується нерівність*

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми)

Для будь-якого дійсного числа α *та будь-яких векторів* x, y *евклідового простору* L *справджуються наступні рівність та дві нерівності*

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n *справджується нерівність*

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f *і* g *на сегменті* $[0, 1]$ *справджується нерівність*

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми)

Для будь-якого дійсного числа α *та будь-яких векторів* x, y *евклідового простору* L *справджуються наступні рівність та дві нерівності (так звані нерівності трикутника):*

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n справджується нерівність

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f і g на сегменті $[0, 1]$ справджується нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми)

Для будь-якого дійсного числа α та будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджуються наступні рівність та дві нерівності (так звані нерівності трикутника):

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ справджується нерівність

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f і g на сегменті $[0, 1]$ справджується нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми)

Для будь-якого дійсного числа α та будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджуються наступні рівність та дві нерівності (так звані нерівності трикутника):

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

Наслідок 2

Для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ справджується нерівність

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Наслідок 3

Для будь-яких неперервних функцій f і g на сегменті $[0,1]$ справджується нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми)

Для будь-якого дійсного числа α та будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджуються наступні рівність та дві нерівності (так звані нерівності трикутника):

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
2. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$,
3. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x + y\|$.

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число,

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L.

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L.

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\| =$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\|x\| + \|y\|\right)^2}$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\|x\| + \|y\|\right)^2} = \|x\| + \|y\|.$$

Доведення.

Нехай α — будь-яке дійсне число, x — будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за означенням норми

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Нехай y — теж будь-який вектор евклідового простору L. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тому

$$\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\|x\| + \|y\|\right)^2} = \|x\| + \|y\|.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи.

Довести наступні теореми.

Завдання для самостійної роботи.

Довести наступні теореми.

Теорема 6 (про діагоналі паралелограма)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується рівність

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести наступні теореми.

Теорема 6 (про діагоналі паралелограма)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується рівність

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Теорема 7 (теорема Піфагора)

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — ортогональна система векторів евклідового простору L.

Завдання для самостійної роботи.

Довести наступні теореми.

Теорема 6 (про діагоналі паралелограма)

Для будь-яких векторів x, y евклідового простору L справджується рівність

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Теорема 7 (теорема Піфагора)

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — ортогональна система векторів евклідового простору L. Тоді

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_s\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_s\|^2.$$

Теорема 8

Нехай L *— скінченновимірний евклідів простір.*

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2,\ldots,$ a_n — ортогональний базис простору L.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L,

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots,$ a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots,$ a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1,$ $2, \ldots, n\}$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1,$ $2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1,$ $2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|}a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1,$ $2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\|$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\|$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2,\ldots,$ a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2,\ldots,$ a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\ldots,b_n$ є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L,

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1,$ $2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\ldots$,b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \dots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \dots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\dots$,b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\langle b_i, b_j \rangle =$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left|\frac{1}{\|a_i\|}\right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\ldots$,b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\langle b_i, b_j \rangle = \left\langle \frac{1}{\|a_i\|} a_i, \frac{1}{\|a_j\|} a_j \right\rangle$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left|\frac{1}{\|a_i\|}\right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\ldots$,b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\langle b_i, b_j \rangle = \left\langle \frac{1}{\|a_i\|} a_i, \frac{1}{\|a_j\|} a_j \right\rangle = \frac{1}{\|a_i\| \|a_j\|} \langle a_i, a_j \rangle$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left| \frac{1}{\|a_i\|} \right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\langle b_i, b_j \rangle = \left\langle \frac{1}{\|a_i\|} a_i, \frac{1}{\|a_j\|} a_j \right\rangle = \frac{1}{\|a_i\| \|a_j\|} \langle a_i, a_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j; \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір. Тоді в L існує ортонормований базис.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і a_1, $a_2, \ldots$, a_n — ортогональний базис простору L. Нагадаємо, що раніше нами доведено існування такого базису евклідового простору L, який є ортогональною системою векторів. Оскільки a_1, $a_2, \ldots$, a_n — базис простору L, то для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\|a_i\| \neq 0$ і ми можемо розглянемо вектор $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. У цьому випадку інколи кажуть, що вектор b_i одержали у результаті нормування вектора a_i. Тоді за властивістю норми

$$\|b_i\| = \left|\frac{1}{\|a_i\|}\right| \cdot \|a_i\| = \frac{1}{\|a_i\|} \cdot \|a_i\| = 1.$$

Система векторів b_1, b_2, $\ldots$,b_n є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору L, бо для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\langle b_i, b_j \rangle = \left\langle \frac{1}{\|a_i\|} a_i, \frac{1}{\|a_j\|} a_j \right\rangle = \frac{1}{\|a_i\| \|a_j\|} \langle a_i, a_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j; \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Теорема доведена. $\square$