Ортогональні матриці. Ортогональні оператори евклідового простору

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

24 квітня 2023 року

Означення 1

Квадратна матриця A

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається **ортогональною матрицею**,

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$,

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається **ортогональною матрицею**, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається **ортогональною матрицею**, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається **ортогональною матрицею**, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається ортогональною матрицею, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

Означення 1

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел називається **ортогональною матрицею**, якщо $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Приклади ортогональних матриць.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$,

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Тоді скалярний добуток i-го та j-го рядків матриці A

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Тоді скалярний добуток i-го та j-го рядків матриці A дорівнює

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn}$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Тоді скалярний добуток i-го та j-го рядків матриці A дорівнює

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk},$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n \times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Тоді скалярний добуток i-го та j-го рядків матриці A дорівнює

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk},$$

а скалярний добуток i-го та j-го стовпців —

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \dots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Тоді скалярний добуток i-го та j-го рядків матриці A дорівнює

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk},$$

а скалярний добуток i-го та j-го стовпців —

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \dots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj}.$$

Зауваження 1

Будемо вважати рядки і стовпці матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, векторами n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Тоді скалярний добуток i-го та j-го рядків матриці A дорівнює

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk},$$

а скалярний добуток i-го та j-го стовпців —

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \dots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj}.$$

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю,

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Доведення.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Доведення.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n}.$$

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Доведення.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n}.$$

Якщо A — ортогональна матриця,

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Доведення.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n}.$$

Якщо A — ортогональна матриця, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Доведення.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n}.$$

Якщо A — ортогональна матриця, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Доведення.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n\times n}.$$

Якщо A — ортогональна матриця, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} =$$

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ & \end{cases}$$

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases}$$

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера).

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{array} \right. = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена.

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму.

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{array} \right. = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$,

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. $\square$

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ \text{якщо } i \neq j, \\ 1,\ \text{якщо } i = j \end{array} \right. = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Якщо A є ортогональною матрицею порядку n,

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Якщо A є ортогональною матрицею порядку n, то

$$A \cdot A^T = E. \tag{1}$$

Доведення.

Тому для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Якщо A є ортогональною матрицею порядку n, то

$$A \cdot A^T = E. \tag{1}$$

Оскільки добуток матриць A і A^T є невиродженою матрицею,

Доведення.

Тому для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases} = \delta_{ij},$$

(символ δ_{ij} називають символом Кронекера). Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно необхідності, тільки у зворотному напряму. Теорема доведена. □

Теорема 2

Квадратна матриця A порядку n над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли $A^T \cdot A = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Якщо A є ортогональною матрицею порядку n, то

$$A \cdot A^T = E. \tag{1}$$

Оскільки добуток матриць A і A^T є невиродженою матрицею, то матриця A є невиродженою, а отже, — оборотною.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^{T}\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^{T} = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A,

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^{T}\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^{T} = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^{T} \cdot A = E$. Необхідність доведена.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A\cdot A^T\right)=A^{-1}.$$

Звідси $A^T=A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T\cdot A=E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A\cdot A^{T}\right)=A^{-1}.$$

Звідси $A^{T}=A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^{T}\cdot A=E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена матриця до матриці A дорівнює транспонованій до A матриці,

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^{T}\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^{T} = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^{T} \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена матриця до матриці A дорівнює транспонованій до A матриці, тобто $A^{-1} = A^{T}$.

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена матриця до матриці A дорівнює транспонованій до A матриці, тобто $A^{-1} = A^T$.

Теорема 4

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A\cdot A^{T}\right)=A^{-1}.$$

Звідси $A^{T}=A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^{T}\cdot A=E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена матриця до матриці A дорівнює транспонованій до A матриці, тобто $A^{-1}=A^{T}$.

Теорема 4

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких стовпців A

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^{T}\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^{T} = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^{T} \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена матриця до матриці A дорівнює транспонованій до A матриці, тобто $A^{-1} = A^{T}$.

Теорема 4

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких стовпців A з різними номерами дорівнює нулю,

Доведення.

Помножимо рівність (1) зліва на обернену матрицю A^{-1}. Одержимо рівність

$$A^{-1}\left(A \cdot A^T\right) = A^{-1}.$$

Звідси $A^T = A^{-1}$. Помноживши цю рівність справа на A, одержимо, що $A^T \cdot A = E$. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Із доведення попередньої ознаки ортогональності матриці слідує наступна її ознака.

Теорема 3

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли матриця A є оборотною і обернена матриця до матриці A дорівнює транспонованій до A матриці, тобто $A^{-1} = A^T$.

Теорема 4

Квадратна матриця A над полем дійсних чисел є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких стовпців A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний добуток будь-якого стовпця матриці A дорівнює одиниці.

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n;

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів a_1, a_2, $\dots$, a_n

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L,

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом,

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Матриця T є ортогональною матрицею

Теорема 5

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n*; системи векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *є деякими базисами евклідового простору* L*, причому перший з них є ортонормованим базисом, а* T *— матриця переходу від базису* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *до базису* $b_1, b_2, \ldots, b_n$*. Матриця* T *є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді,*

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Матриця T є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ евклідового простору L є ортонормованим.

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Матриця T є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ евклідового простору L є ортонормованим.

Доведення.

Нехай виконуються умови і

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_n є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n. Матриця T є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли базис b_1, b_2, ..., b_n евклідового простору L є ортонормованим.

Доведення.

Нехай виконуються умови і

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею.

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_n є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n. Матриця T є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли базис b_1, b_2, ..., b_n евклідового простору L є ортонормованим.

Доведення.

Нехай виконуються умови і

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею. Тому для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ справджується рівність

Теорема 5

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n; системи векторів a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_n є деякими базисами евклідового простору L, причому перший з них є ортонормованим базисом, а T — матриця переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n. Матриця T є ортогональною матрицею тоді і тільки тоді, коли базис b_1, b_2, ..., b_n евклідового простору L є ортонормованим.

Доведення.

Нехай виконуються умови і

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею. Тому для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ справджується рівність

$$\tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \dots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}.$$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L,

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим,

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle =$$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj}$$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L.

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена.

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку.

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, . . . , a_n до базису b_1, b_2, . . . , b_n простору L, то для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, . . . , a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j\rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, . . . , b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

- *Якщо A — ортогональна матриця,*

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

- *Якщо A — ортогональна матриця, то $|A| = \pm 1$.*

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i} a_1 + \tau_{2i} a_2 + \cdots + \tau_{ni} a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

- *Якщо A — ортогональна матриця, то $|A| = \pm 1$.*
- *Якщо A — ортогональна матриця,*

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n до базису b_1, b_2, $\ldots$, b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, $\ldots$, b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. $\square$

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

- *Якщо A — ортогональна матриця, то $|A| = \pm 1$.*
- *Якщо A — ортогональна матриця, то A^{-1} — також ортогональна матриця.*

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

- *Якщо A — ортогональна матриця, то $|A| = \pm 1$.*
- *Якщо A — ортогональна матриця, то A^{-1} — також ортогональна матриця.*
- *Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку,*

Доведення.

Через те, що T є матрицею переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n простору L, то для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$b_i = \tau_{1i}a_1 + \tau_{2i}a_2 + \cdots + \tau_{ni}a_n.$$

Нарешті, оскільки базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L є ортонормованим, то

$$\langle b_i, b_j \rangle = \tau_{1i}\tau_{1j} + \tau_{2i}\tau_{2j} + \cdots + \tau_{ni}\tau_{nj} = \delta_{ij}$$

для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що базис b_1, b_2, ..., b_n є ортонормованим базисом евклідового простору L. Необхідність доведена. Достатність доводиться аналогічно, тільки у зворотному порядку. Теорема доведена. □

Теорема 6 (властивості ортогональних матриць)

- *Якщо A — ортогональна матриця, то $|A| = \pm 1$.*
- *Якщо A — ортогональна матриця, то A^{-1} — також ортогональна матриця.*
- *Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то добуток AB є ортогональною матрицею.*

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n,

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$,

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| =$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E|$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

а з іншого

$$|A \cdot A^T| =$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

а з іншого

$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T|$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

а з іншого

$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$

Тому $|A|^2 = 1$.

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

а з іншого

$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$

Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця,

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$.

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} =$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

а з іншого

$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$

Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.

- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому

$$(A^{-1})^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = (A^{-1})^T.$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку

  $$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$

  а з іншого

  $$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$

  Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому

  $$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$

  За ознакою ортогональної матриці

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.
- Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то
$$(AB)^{-1} =$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.
- Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.
- Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.
- Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T.$$

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.
- Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T.$$
Тому AB є ортогональною матрицею.

Доведення.

- Якщо A — ортогональна матриця порядку n, то $A \cdot A^T = E$, де E — одинична матриця порядку n. З одного боку
$$|A \cdot A^T| = |E| = 1,$$
а з іншого
$$|A \cdot A^T| = |A| \cdot |A^T| = |A|^2.$$
Тому $|A|^2 = 1$. Звідси $|A| = \pm 1$.
- Знову ж таки, якщо A — ортогональна матриця, то $A^T = A^{-1}$. Тому
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A = \left(A^T\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T.$$
За ознакою ортогональної матриці матриця A^{-1} є ортогональною матрицею.
- Якщо A і B — ортогональні матриці одного порядку, то
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T.$$
Тому AB є ортогональною матрицею. Теорема доведена.

□

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір.

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором,

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L,

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

для довільного x із L.

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

для довільного x із L.

Зауваження 2

Оскільки $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

для довільного x із L.

Зауваження 2

Оскільки $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ для вектора $x \in L$,

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \langle x, x\rangle$$

для довільного x із L.

Зауваження 2

Оскільки $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ для вектора $x \in L$, то ортогональний оператор евклідового простору L можна було б визначити,

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

для довільного x із L.

Зауваження 2

Оскільки $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ для вектора $x \in L$, то ортогональний оператор евклідового простору L можна було б визначити, як такий лінійний оператор φ,

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

для довільного x із L.

Зауваження 2

Оскільки $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ для вектора $x \in L$, то ортогональний оператор евклідового простору L можна було б визначити, як такий лінійний оператор φ, що зберігає норми векторів,

Наслідок 1

Множина $O(n)$ всіх ортогональних матриць порядку n є групою відносно операції множення матриць.

Означення 2

Група $O(n)$ називається ортогональною групою степеня n.

Означення 3

Нехай L — евклідовий простір. Лінійний оператор φ евклідового простору L називається ортогональним оператором, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат будь-якого вектора евклідового простору L, тобто

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

для довільного x із L.

Зауваження 2

Оскільки $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ для вектора $x \in L$, то ортогональний оператор евклідового простору L можна було б визначити, як такий лінійний оператор φ, що зберігає норми векторів, тобто

$$\|\varphi(x)\| = \|x\|$$

для довільного x із L.

Теорема 7

Лінійний оператор φ *евклідового простору* L

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді,

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів,

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору.

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle = \langle x+y, x+y \rangle =$$

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$$

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \qquad (2)$$

З іншого боку оскільки φ є лінійним оператором, то

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

З іншого боку оскільки φ є лінійним оператором, то

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle\varphi(x)+\varphi(y),\varphi(x)+\varphi(y)\rangle$$

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

З іншого боку оскільки φ є лінійним оператором, то

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle &= \langle\varphi(x)+\varphi(y),\varphi(x)+\varphi(y)\rangle = \\ &= \langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle\varphi(y),\varphi(y)\rangle = \end{aligned}$$

Теорема 7

Лінійний оператор φ *евклідового простору* L *є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор* φ *зберігає скалярний добуток векторів, тобто* $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ *для довільних векторів* x, y *із* L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle. \tag{2}$$

З іншого боку оскільки φ є лінійним оператором, то

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle\varphi(x)+\varphi(y),\varphi(x)+\varphi(y)\rangle = \\ = \langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle\varphi(y),\varphi(y)\rangle = \\ = \langle x,x\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle y,y\rangle. \tag{3}$$

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle. \tag{2}$$

З іншого боку оскільки φ є лінійним оператором, то

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle\varphi(x)+\varphi(y),\varphi(x)+\varphi(y)\rangle = \\ = \langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle\varphi(y),\varphi(y)\rangle = \\ = \langle x,x\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle y,y\rangle. \tag{3}$$

Із рівності лівих частин рівностей (2) і (3) слідує рівність правих їх частин

Теорема 7

Лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток векторів, тобто $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ евклідового простору L є ортогональним оператором цього простору. Тоді для для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle. \tag{2}$$

З іншого боку оскільки φ є лінійним оператором, то

$$\langle\varphi(x+y),\varphi(x+y)\rangle = \langle\varphi(x)+\varphi(y),\varphi(x)+\varphi(y)\rangle = \\ = \langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle\varphi(y),\varphi(y)\rangle = \\ = \langle x,x\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle y,y\rangle. \tag{3}$$

Із рівності лівих частин рівностей (2) і (3) слідує рівність правих їх частин

$$\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle + \langle y,y\rangle.$$

Доведення.

Звідси

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \tag{4}$$

для довільних векторів x, y із L.

Доведення.

Звідси

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \tag{4}$$

для довільних векторів x, y із L. Необхідність доведена.

Доведення.

Звідси

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \tag{4}$$

для довільних векторів x, y із L. Необхідність доведена.
Доведення ж достатності є очевидним, бо у рівності (4) у якості y можна взяти вектор x.

Доведення.

Звідси
$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \tag{4}$$
для довільних векторів x, y із L. Необхідність доведена.
Доведення ж достатності є очевидним, бо у рівності (4) у якості y можна взяти вектор x. Теорема доведена. □

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число.

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором.

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x) \rangle =$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x) \rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma,\ x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle\rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma)^2 + (x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma)^2 =$$
$$= x_1^2\cos^2\gamma - 2x_1x_2\cos\gamma\sin\gamma + x_2^2\sin^2\gamma +$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x) \rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 =$$
$$= x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1 x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma +$$
$$+ x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1 x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 =$$

$$= x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma +$$

$$+ x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 =$$

$$= x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma +$$

$$+ x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x\rangle.$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1,x_2)\big) = (x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma,\ x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma),$$

де $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\begin{gathered}\langle\rho_\gamma(x),\rho_\gamma(x)\rangle = (x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma)^2 + (x_1\sin\gamma + x_2\cos\gamma)^2 = \\ = x_1^2\cos^2\gamma - 2x_1x_2\cos\gamma\sin\gamma + x_2^2\sin^2\gamma + \\ + x_1^2\sin^2\gamma + 2x_1x_2\sin\gamma\cos\gamma + x_2^2\cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x,x\rangle.\end{gathered}$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\begin{gathered}\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 = \\ = x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma + \\ + x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x\rangle.\end{gathered}$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\begin{gathered} \langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x) \rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 = \\ = x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma + \\ + x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x \rangle. \end{gathered}$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є матриця

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 =$$
$$= x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma +$$
$$+ x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x\rangle.$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є матриця

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

яка є, як нескладно перевірити, ортогональною матрицею.

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 =$$
$$= x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma +$$
$$+ x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x\rangle.$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є матриця

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

яка є, як нескладно перевірити, ортогональною матрицею. Ортогональний оператор ρ_γ

Приклади ортогональних операторів.

Нехай γ — деяке дійсне число. Лінійний оператор ρ_γ двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\rho_\gamma\big((x_1, x_2)\big) = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma,\ x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma),$$

де $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, є ортогональним оператором. Дійсно, для довільного вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справджується рівність

$$\begin{gathered}\langle \rho_\gamma(x), \rho_\gamma(x)\rangle = (x_1 \cos\gamma - x_2 \sin\gamma)^2 + (x_1 \sin\gamma + x_2 \cos\gamma)^2 = \\ = x_1^2 \cos^2\gamma - 2x_1x_2 \cos\gamma \sin\gamma + x_2^2 \sin^2\gamma + \\ + x_1^2 \sin^2\gamma + 2x_1x_2 \sin\gamma \cos\gamma + x_2^2 \cos^2\gamma = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x\rangle.\end{gathered}$$

Матрицею ортогонального оператора ρ_γ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є матриця

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

яка є, як нескладно перевірити, ортогональною матрицею. Ортогональний оператор ρ_γ називається оператором повороту на кут γ.

Завдання для самостійної роботи.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.

У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^\perp$, ортогональної вектору a.

У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$,

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^\perp$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L,

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L, то матриця лінійного оператора φ у будь-якому ортонормованому базисі цього простору

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\tfrac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^\perp$, ортогональної вектору a.

У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L, то матриця лінійного оператора φ у будь-якому ортонормованому базисі цього простору є ортогональною матрицею.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^\perp$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L, то матриця лінійного оператора φ у будь-якому ортонормованому базисі цього простору є ортогональною матрицею. Навпаки, якщо матриця лінійного оператора φ евклідового простору L

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^\perp$, ортогональної вектору a.
У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L, то матриця лінійного оператора φ у будь-якому ортонормованому базисі цього простору є ортогональною матрицею. Навпаки, якщо матриця лінійного оператора φ евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі простору L є ортогональною,

Завдання для самостійної роботи.

Нехай L — ненульовий евклідовий простір і a — ненульовий вектор евклідового простору L. Довести ортогональність оператора π_a евклідового простору L такого, що

$$\pi_a(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

де $x \in L$. Ортогональний оператор π_a називається оператором відбиття відносно гіперплощини $\{a\}^{\perp}$, ортогональної вектору a.

У випадку, коли $L = \mathbb{R}^2$ знайти матрицю ортогонального оператора π_a, де $a = (\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ є ортогональним оператором евклідового простору L, то матриця лінійного оператора φ у будь-якому ортонормованому базисі цього простору є ортогональною матрицею. Навпаки, якщо матриця лінійного оператора φ евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі простору L є ортогональною, то лінійний оператор φ є ортогональним.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ортонормований базис евклідового простору L,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\dots$, a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, $\dots$, a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, $\ldots$, a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, …, a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, …, a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Отже,

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Отже,

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Отже,

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. За ознакою ортогональної матриці звідси слідує, що A є ортогональною матрицею.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо спочатку, що φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця ортогонального оператора φ у цьому базисі. Тоді

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n$$

для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Оскільки a_1, a_2, ..., a_n — ортонормований базис евклідового простору L, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. З іншого боку через те, що φ є ортогональним оператором, то

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Отже,

$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. За ознакою ортогональної матриці звідси слідує, що A є ортогональною матрицею. Необхідність доведена.

Доведення.

Доведемо достатність.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L,

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, . . . , a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$,

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом a_1, a_2, ..., a_n.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом a_1, a_2, ..., a_n. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle =$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом a_1, a_2, ..., a_n. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi\left(a_i\right), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi\left(a_j\right) \right\rangle$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi\left(a_i\right), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi\left(a_j\right)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j \left\langle\varphi\left(a_i\right), \varphi\left(a_j\right)\right\rangle$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом a_1, a_2, ..., a_n. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij}$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом a_1, a_2, ..., a_n. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j \langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j \langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x\rangle.$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x \rangle.$$

Це означає, що лінійний оператор φ є ортогональним.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий ортонормований базис евклідового простору L, матриця $A = \|\alpha_{ij}\|$ лінійного оператора φ в якому є ортогональною матрицею. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj} = \delta_{ij}$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Розглянемо довільний вектор x евклідового простору L. Нехай

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, — розклад вектора x за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обчислимо скалярний квадрат

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i\beta_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x\rangle.$$

Це означає, що лінійний оператор φ є ортогональним. Теорема доведена. □

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n*,*

Теорема 9

Нехай L — *скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n, *де* $n \in \mathbb{N}$,

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор,

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n*, де* $n \in \mathbb{N}$*, і* φ *— лінійний оператор евклідового простору* L*. Якщо* φ *— ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису* $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L,

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n, *де* $n \in \mathbb{N}$, *і* φ *— лінійний оператор евклідового простору* L. *Якщо* φ *— ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *евклідового простору* L, *тобто система векторів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)$,

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору.

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n, *де* $n \in \mathbb{N}$, *і* φ *— лінійний оператор евклідового простору* L. *Якщо* φ *— ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *евклідового простору* L, *тобто система векторів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, *є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки,*

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n, *де* $n \in \mathbb{N}$, *і* φ *— лінійний оператор евклідового простору* L. *Якщо* φ *— ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *евклідового простору* L, *тобто система векторів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, *є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору* L

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n, *де* $n \in \mathbb{N}$, *і* φ *— лінійний оператор евклідового простору* L. *Якщо* φ *— ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *евклідового простору* L, *тобто система векторів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, *є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору* L *відображає який-небудь ортонормований базис*

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору,

Теорема 9

Нехай L *— скінченновимірний евклідовий простір розмірності* n, *де* $n \in \mathbb{N}$, *і* φ *— лінійний оператор евклідового простору* L. *Якщо* φ *— ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *евклідового простору* L, *тобто система векторів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, *є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору* L *відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору* L *у ортонормований базис цього простору, то оператор* φ *є ортогональним оператором простору* L.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \langle a_i, a_j\rangle$$

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів,

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому лінійно незалежною системою векторів.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому лінійно незалежною системою векторів. Через те, що $\dim_{\mathbb{R}} L = n$,

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle\varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle = \langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому лінійно незалежною системою векторів. Через те, що $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, звідси слідує, що система векторів є базисом простору L,

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому лінійно незалежною системою векторів. Через те, що $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, звідси слідує, що система векторів є базисом простору L, причому ортонормованим.

Теорема 9

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, і φ — лінійний оператор евклідового простору L. Якщо φ — ортогональний оператор, то образ будь-якого ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, тобто система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор простору L відображає який-небудь ортонормований базис евклідового простору L у ортонормований базис цього простору, то оператор φ є ортогональним оператором простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що лінійний оператор φ є ортогональним оператором. Розглянемо будь-який ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Тоді

$$\langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}.$$

для будь-яких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому лінійно незалежною системою векторів. Через те, що $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, звідси слідує, що система векторів є базисом простору L, причому ортонормованим. Необхідність доведена.

Доведення.

Доведемо достатність.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\dots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, $\dots$, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, $\ldots$, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle =$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, $\ldots$, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi\left(a_i\right), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi\left(a_j\right)\right\rangle$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, $\ldots$, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, …, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, …, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, …, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, …, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij}$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, $\ldots$, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x \rangle.$$

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, ..., $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x \rangle.$$

Це означає, що лінійний оператор φ є ортогональним.

Доведення.

Доведемо достатність. Нехай для деякого ортонормованого базису a_1, a_2, …, a_n евклідового простору L його образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, …, $\varphi(a_n)$ є також ортонормованим базисом цього простору. Розкладемо довільний вектор x із L за базисом a_1, a_2, …, a_n:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

де β_1, β_2, …, $\beta_n \in \mathbb{R}$.

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(a_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \langle \varphi(a_i), \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \langle x, x \rangle.$$

Це означає, що лінійний оператор φ є ортогональним. Теорема доведена. □

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ,*

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням,*

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle$

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle\varphi(a), \varphi(a)\rangle =$ $= \langle a, a\rangle$, а з іншого $\langle\varphi(a), \varphi(a)\rangle = \langle\alpha a, \alpha a\rangle = \alpha^2\langle a, a\rangle$. Тому

$$\alpha^2\langle a, a\rangle = \langle a, a\rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Аналогічно з одного боку $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Аналогічно з одного боку $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, -c \rangle$

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle =$ $= \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Аналогічно з одного боку $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, -c \rangle =$ $= -\langle b, c \rangle$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.

Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Аналогічно з одного боку $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, -c \rangle = -\langle b, c \rangle$.Тому $\langle b, c \rangle = -\langle b, c \rangle$,

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.

Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Аналогічно з одного боку $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, -c \rangle = -\langle b, c \rangle$.Тому $\langle b, c \rangle = -\langle b, c \rangle$, що можливо лише, коли $\langle b, c \rangle = 0$.

Теорема 10

Нехай L — евклідовий простір і φ — ортогональний оператор евклідового простору L. Тоді:

1. *якщо дійсне число α є власним значенням оператора φ, то $\alpha = \pm 1$;*
2. *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і α — власне значення ортогонального оператора φ, а a — власний вектор, що йому належить. Тоді $\varphi(a) = \alpha a$. Оскільки φ є ортогонольним оператором, то з одного боку $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle \alpha a, \alpha a \rangle = \alpha^2 \langle a, a \rangle$. Тому

$$\alpha^2 \langle a, a \rangle = \langle a, a \rangle.$$

Через те, що a — власний вектор ортогонального оператора φ, то $a \neq \bar{0}$ і тому $\langle a, a \rangle \neq 0$. Отже, $\alpha^2 = 1$ і як наслідок $\alpha = \pm 1$.
Далі нехай b і c — власні вектори ортогонального оператора φ, які належать відповідно власним значенням 1 і -1. Тоді $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = -c$. Аналогічно з одного боку $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$, а з іншого $\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, -c \rangle = -\langle b, c \rangle$.Тому $\langle b, c \rangle = -\langle b, c \rangle$, що можливо лише, коли $\langle b, c \rangle = 0$. Теорема доведена. $\square$

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ *— ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору* L.

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ — ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у евклідовому просторі L існує ортонормований базис,

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ — ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у евклідовому просторі L існує ортонормований базис, в якому матриця A оператора φ має блочно-діагональний вигляд

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ — ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у евклідовому просторі L існує ортонормований базис, в якому матриця A оператора φ має блочно-діагональний вигляд

$$A = \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad \ddots \quad 1}}^{k\ \text{раз}}} \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ *— ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору* L*. Тоді у евклідовому просторі* L *існує ортонормований базис, в якому матриця* A *оператора* φ *має блочно-діагональний вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{k\ \text{раз}} & & \\ & \overbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}^{l\ \text{раз}} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ — ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у евклідовому просторі L існує ортонормований базис, в якому матриця A оператора φ має блочно-діагональний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \cdots \quad 1}^{k\ \textit{раз}} & & & & \\ & \overbrace{-1 \quad \cdots \quad -1}^{l\ \textit{раз}} & & & \\ & & \begin{matrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{matrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{matrix} \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{matrix} \end{pmatrix},$$

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ — *ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору* L. *Тоді у евклідовому просторі* L *існує ортонормований базис, в якому матриця* A *оператора* φ *має блочно-діагональний вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{k \text{ раз}} & & & & & \\ & \overbrace{-1 \quad \ddots \quad -1}^{l \text{ раз}} & & & & \\ & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & \\ & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{matrix} \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{matrix} \end{pmatrix},$$

де $k,\ l,\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

Теорема 11 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора)

Нехай φ — ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у евклідовому просторі L існує ортонормований базис, в якому матриця A оператора φ має блочно-діагональний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{k \text{ раз}} & & & & \\ & \overbrace{-1 \quad \ddots \quad -1}^{l \text{ раз}} & & & \\ & & \begin{matrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{matrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{matrix} \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{matrix} \end{pmatrix},$$

де k, l, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — деякі дійсні числа.

Приклад ортогонального оператора.

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий,

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) =$$
$$= \left(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\right)$$

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) =$$
$$= \big(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\big)$$

для довільного вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{R}^3$.

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) =$$
$$= \left(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\right)$$

для довільного вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором.

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) =$$
$$= \left(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\right)$$

для довільного вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис,

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) =$$
$$= \big(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\big)$$

для довільного вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, як у теоремі 11.

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1,x_2,x_3)\big) = \\ = \big(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\big)$$

для довільного вектора (x_1,x_2,x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, як у теоремі 11.

Розв'язання.

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1, x_2, x_3)\big) =$$
$$= \left(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\right)$$

для довільного вектора (x_1, x_2, x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, як у теоремі 11.

Розв'язання. Випишемо матрицю лінійного оператора f у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^3$

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1,x_2,x_3)\big) = \\ = \left(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3,\ -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\right)$$

для довільного вектора (x_1,x_2,x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, як у теоремі 11.

Розв'язання. Випишемо матрицю лінійного оператора f у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^3$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & -\frac{13}{23} & -\frac{18}{23} \\ -\frac{3}{23} & \frac{18}{23} & -\frac{14}{23} \\ -\frac{22}{23} & -\frac{6}{23} & -\frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

Приклад ортогонального оператора.

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1,x_2,x_3)\big) =$$
$$= \left(\tfrac{6}{23}x_1 - \tfrac{13}{23}x_2 - \tfrac{18}{23}x_3, \, -\tfrac{3}{23}x_1 + \tfrac{18}{23}x_2 - \tfrac{14}{23}x_3, \, -\tfrac{22}{23}x_1 - \tfrac{6}{23}x_2 - \tfrac{3}{23}x_3\right)$$

для довільного вектора (x_1,x_2,x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, як у теоремі 11.

Розв'язання. Випишемо матрицю лінійного оператора f у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^3$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & -\frac{13}{23} & -\frac{18}{23} \\ -\frac{3}{23} & \frac{18}{23} & -\frac{14}{23} \\ -\frac{22}{23} & -\frac{6}{23} & -\frac{3}{23} \end{pmatrix} = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T =$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F\cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\left(\quad 36+169+324 \right.$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\left(\begin{array}{ccc} 36+169+324 & -18-13\cdot 18+14\cdot 18 & \\ & & \\ & & \end{array} \right.$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\left(\begin{matrix} 36+169+324 & -18-13\cdot 18+14\cdot 18 & -22\cdot 6+13\cdot 6+9\cdot 6 \\ & & \\ & & \end{matrix} \right.$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix}$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot 18+14\cdot 18 & -22\cdot 6+13\cdot 6+9\cdot 6 \\ -18-13\cdot 18+14\cdot 18 & 9+324+196 & 11\cdot 6-18\cdot 6+7\cdot 6 \\ -22\cdot 6+13\cdot 6+9\cdot 6 & 11\cdot 6-18\cdot 6+7\cdot 6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею.

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F\cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36{+}169{+}324 & -18{-}13{\cdot}18{+}14{\cdot}18 & -22{\cdot}6{+}13{\cdot}6{+}9{\cdot}6 \\ -18{-}13{\cdot}18{+}14{\cdot}18 & 9{+}324{+}196 & 11{\cdot}6{-}18{\cdot}6{+}7{\cdot}6 \\ -22{\cdot}6{+}13{\cdot}6{+}9{\cdot}6 & 11{\cdot}6{-}18{\cdot}6{+}7{\cdot}6 & 484{+}36{+}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі,

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором.

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot 18+14\cdot 18 & -22\cdot 6+13\cdot 6+9\cdot 6 \\ -18-13\cdot 18+14\cdot 18 & 9+324+196 & 11\cdot 6-18\cdot 6+7\cdot 6 \\ -22\cdot 6+13\cdot 6+9\cdot 6 & 11\cdot 6-18\cdot 6+7\cdot 6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором. Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора f

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором. Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора f

$$|F - \lambda E| =$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором. Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора f

$$|F - \lambda E| = \left(-\frac{1}{23}\right)^3 \begin{vmatrix} -6+23\lambda & 13 & 18 \\ 3 & -18+23\lambda & 14 \\ 22 & 6 & 3+23\lambda \end{vmatrix}$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F \cdot F^T = -\tfrac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & -18 & 14 \\ 22 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\tfrac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22 \\ 13 & -18 & 6 \\ 18 & 14 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 \\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 \\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором. Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора f

$$|F - \lambda E| = \left(-\tfrac{1}{23}\right)^3 \begin{vmatrix} -6+23\lambda & 13 & 18 \\ 3 & -18+23\lambda & 14 \\ 22 & 6 & 3+23\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \tfrac{21}{23}\lambda^2 + \tfrac{21}{23}\lambda - 1$$

Приклад ортогонального оператора.

Обчислимо добуток матриць

$$F\cdot F^T = -\tfrac{1}{23}\begin{pmatrix} -6 & 13 & 18\\ 3 & -18 & 14\\ 22 & 6 & 3\end{pmatrix}\cdot\left(-\tfrac{1}{23}\right)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 22\\ 13 & -18 & 6\\ 18 & 14 & 3\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{529}\begin{pmatrix} 36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6\\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6\\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором. Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора f

$$|F-\lambda E| = \left(-\tfrac{1}{23}\right)^3\begin{vmatrix} -6+23\lambda & 13 & 18\\ 3 & -18+23\lambda & 14\\ 22 & 6 & 3+23\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \tfrac{21}{23}\lambda^2 + \tfrac{21}{23}\lambda - 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \tfrac{44}{23}\lambda + 1).$$

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1.

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1.

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор,

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f.

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i,$$

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \frac{22}{23} + \frac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \frac{22}{23} + \frac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Зауважимо, що це також власні значення,

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \frac{22}{23} + \frac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Зауважимо, що це також власні значення, але вже унітарного оператора f унітарного простору $\mathbb{C}^3$

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \frac{22}{23} + \frac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Зауважимо, що це також власні значення, але вже унітарного оператора f унітарного простору $\mathbb{C}^3$ з матрицею F у канонічному базисі.

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \frac{22}{23} + \frac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Зауважимо, що це також власні значення, але вже унітарного оператора f унітарного простору $\mathbb{C}^3$ з матрицею F у канонічному базисі. Знайдемо деякий власний вектор унітарного оператора f,

Приклад ортогонального оператора.

Знаходимо деякий власний вектор (будь-який), що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є власним вектором ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \frac{22}{23} + \frac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Зауважимо, що це також власні значення, але вже унітарного оператора f унітарного простору $\mathbb{C}^3$ з матрицею F у канонічному базисі. Знайдемо деякий власний вектор унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i$.

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix}$$

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \ldots$$

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \dots$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \ldots$$

$$\ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \dots$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$ є власним вектором унітарного оператора f,

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \dots$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$ є власним вектором унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23}-\frac{3\sqrt{5}}{23}i$.

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \ldots$$

$$\ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$ є власним вектором унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23}-\frac{3\sqrt{5}}{23}i$. Розглянемо вектори

$$\left(-1, -\tfrac{1}{2}, 1\right),$$

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \ldots$$

$$\ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$ є власним вектором унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23}-\frac{3\sqrt{5}}{23}i$. Розглянемо вектори

$$\left(-1, -\tfrac{1}{2}, 1\right), \qquad \left(\tfrac{3\sqrt{5}}{10}, -\tfrac{3\sqrt{5}}{5}, 0\right). \tag{5}$$

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \dots$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$ є власним вектором унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23}-\frac{3\sqrt{5}}{23}i$. Розглянемо вектори

$$\left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right), \qquad \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}, -\frac{3\sqrt{5}}{5}, 0\right). \tag{5}$$

Ці вектори ортогональні.

Приклад ортогонального оператора.

Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim \dots$$

$$\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(-1+\frac{3\sqrt{5}}{10}i, -\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i, 1\right)$ є власним вектором унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23}-\frac{3\sqrt{5}}{23}i$. Розглянемо вектори

$$\left(-1, -\tfrac{1}{2}, 1\right), \qquad \left(\tfrac{3\sqrt{5}}{10}, -\tfrac{3\sqrt{5}}{5}, 0\right). \tag{5}$$

Ці вектори ортогональні. За властивістю унітарного оператори кожен з цих векторів також ортогональний до раніше знайденого власного вектора u.

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \frac{22}{23}v + \frac{3\sqrt{5}}{23}w,$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u = \left(\tfrac{4\sqrt{5}}{15}, \tfrac{2\sqrt{5}}{15}, \tfrac{\sqrt{5}}{3}\right),$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right),$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u = \left(\tfrac{4\sqrt{5}}{15}, \tfrac{2\sqrt{5}}{15}, \tfrac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v=\left(-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right), \qquad w=\left(\tfrac{\sqrt{5}}{5},-\tfrac{2\sqrt{5}}{5},0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v)=\tfrac{22}{23}v+\tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w)=-\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v+\tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u=\left(\tfrac{4\sqrt{5}}{15},\tfrac{2\sqrt{5}}{15},\tfrac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad v=\left(-\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right), \quad w=\left(\tfrac{\sqrt{5}}{5},-\tfrac{2\sqrt{5}}{5},0\right)$$

є шуканим ортонормованим базисом,

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u = \left(\tfrac{4\sqrt{5}}{15}, \tfrac{2\sqrt{5}}{15}, \tfrac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

є шуканим ортонормованим базисом, а матриця ортогонального оператора f у цьому базисі

Приклад ортогонального оператора.

Пронормуємо кожен із векторів системи векторів (5):

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна переконатися, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u = \left(\tfrac{4\sqrt{5}}{15}, \tfrac{2\sqrt{5}}{15}, \tfrac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

є шуканим ортонормованим базисом, а матриця ортогонального оператора f у цьому базисі має вигляд

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{22}{23} & -\frac{3\sqrt{5}}{23} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{23} & \frac{22}{23} \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Показати, що ортогональний оператор двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є або оператором відбиття, або оператором повороту.

Завдання для самостійної роботи.

1. Показати, що ортогональний оператор двовимірного евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є або оператором відбиття, або оператором повороту.
2. Довести теорему про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора скінченновимірного евклідового простору.