Додатно визначені квадратичні форми

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

22 травня 2023 року

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, …, x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел,

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Якщо замість змінних x_1, x_2, ..., x_n

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Якщо замість змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ підставити відповідно дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$,

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, …, x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Якщо замість змінних x_1, x_2, …, x_n підставити відповідно дійсні числа γ_1, γ_2, …, γ_n, то дійсне число, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Якщо замість змінних x_1, x_2, ..., x_n підставити відповідно дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_n, то дійсне число, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$$

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Якщо замість змінних x_1, x_2, ..., x_n підставити відповідно дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_n, то дійсне число, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$$

називається значенням квадратичної форми f

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, …, x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Якщо замість змінних x_1, x_2, …, x_n підставити відповідно дійсні числа γ_1, γ_2, …, γ_n, то дійсне число, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$$

називається значенням квадратичної форми f для даних значень змінних

Означення 1

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Якщо замість змінних x_1, x_2, ..., x_n підставити відповідно дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_n, то дійсне число, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$$

називається значенням квадратичної форми f для даних значень змінних і позначається через $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$,

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною,

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n,

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, . . . , γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, . . . , γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Теорема 1

Дійсна квадратична форма від n змінних є додатно визначеною тоді і тільки тоді,

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Теорема 1

Дійсна квадратична форма від n змінних є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми,

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Теорема 1

Дійсна квадратична форма від n змінних є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її додатний індекс інерції

Означення 2

Дійсна квадратична форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, називається додатно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Теорема 1

Дійсна квадратична форма від n змінних є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її додатний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою.

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду, у якій відсутній квадрат деякого змінного,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду, у якій відсутній квадрат деякого змінного, наприклад y_j,

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду, у якій відсутній квадрат деякого змінного, наприклад y_j, або деякий квадрат змінного входить у квадратичну форму із знаком $-$

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду, у якій відсутній квадрат деякого змінного, наприклад y_j, або деякий квадрат змінного входить у квадратичну форму із знаком $-$ (інакше кажучи коефіцієнт біля y_j^2 або дорівнює 0, або -1):

Доведення.

Нехай $f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ — деяка дійсна квадратична форма від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Припустимо спочатку, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Доведемо від протилежного, що тоді ранг $\operatorname{rank} f$ дорівнює n, а також сигнатура $\operatorname{sign} f$ дорівнює n, або теж саме, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Припустимо, що існує таке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, що виконавши його у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму g нормального вигляду, у якій відсутній квадрат деякого змінного, наприклад y_j, або деякий квадрат змінного входить у квадратичну форму із знаком $-$ (інакше кажучи коефіцієнт біля y_j^2 або дорівнює 0, або -1):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \cdots + \gamma y_j^2 + \cdots ,$$

де $\gamma \in \{0, -1\}$.

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі,

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю.

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю,

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим.

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) =$$

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \gamma$$

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{значення } j\text{-ї змінної}}}{1}, 0, \ldots, 0) = \gamma \leq 0.$$

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{значення } j\text{-ї змінної}}}{1}, 0, \ldots, 0) = \gamma \leq 0.$$

Але це суперечить тому, що f — додатно визначена квадратична форма.

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{значення } j\text{-ї змінної}}}{1}, 0, \ldots, 0) = \gamma \leq 0.$$

Але це суперечить тому, що f — додатно визначена квадратична форма. Отже, квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду (1).

Доведення.

Підставимо у праві частини рівностей (2) замість $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ нулі, а замість y_j одиницю. Одержимо

$$x_1 = \beta_{1j}, \quad x_2 = \beta_{2j}, \quad \ldots, \quad x_n = \beta_{nj}.$$

Хоча б одне з чисел $\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{nj}$ не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку лінійне перетворення (2) є виродженим. Тоді

$$f(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{1j}) = g(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{значення } j\text{-ї змінної}}}{1}, 0, \ldots, 0) = \gamma \leq 0.$$

Але це суперечить тому, що f — додатно визначена квадратична форма. Отже, квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду (1). Необхідність теореми доведена.

Доведення.

Доведемо тепер достатність.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11} y_1 + \cdots + \gamma_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1} y_1 + \cdots + \gamma_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11} y_1 + \cdots + \gamma_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1} y_1 + \cdots + \gamma_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n, \end{array} \tag{3}$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.
Нехай δ_1, δ_2, ..., δ_n — довільні дійсні числа,

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.
Нехай $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — довільні дійсні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \dots + \gamma_{1n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \dots + \gamma_{nn}y_n, \end{aligned} \qquad (3)$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$.
Нехай δ_1, δ_2, ..., δ_n — довільні дійсні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Розглянемо систему лінійних рівнянь від змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$\begin{cases} \gamma_{11}y_1 + \dots + \gamma_{1n}y_n = \delta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}y_1 + \dots + \gamma_{nn}y_n = \delta_n. \end{cases}$$

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n, \end{aligned} \qquad (3)$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.

Нехай $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — довільні дійсні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Розглянемо систему лінійних рівнянь від змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\begin{cases} \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n = \delta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n = \delta_n. \end{cases}$$

Ця система рівнянь є системою n лінійних рівнянь від n змінних

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.
Нехай δ_1, δ_2, ..., δ_n — довільні дійсні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Розглянемо систему лінійних рівнянь від змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$\begin{cases} \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n = \delta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n = \delta_n. \end{cases}$$

Ця система рівнянь є системою n лінійних рівнянь від n змінних і детермінант матриці цієї системи рівнянь не дорівнює нулю.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай дійсна квадратична форма f від n змінних еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Тоді існує деяке невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n, \end{aligned} \qquad (3)$$

де $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ таке, що виконавши його у квадратичній формі f ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.
Нехай δ_1, δ_2, ..., δ_n — довільні дійсні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Розглянемо систему лінійних рівнянь від змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$\begin{cases} \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1n}y_n = \delta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}y_1 + \cdots + \gamma_{nn}y_n = \delta_n. \end{cases}$$

Ця система рівнянь є системою n лінійних рівнянь від n змінних і детермінант матриці цієї системи рівнянь не дорівнює нулю. Тому за теоремою Крамера вона має єдиний розв'язок ε_1, ε_2, ..., ε_n.

Доведення.

Хоча б одне з чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ не дорівнює нулю,

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю.

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) =$$

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 > 0.$$

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 > 0.$$

Таким чином, $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел δ_1, δ_2, ..., δ_n,

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 > 0.$$

Таким чином, $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел δ_1, δ_2, ..., δ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 > 0.$$

Таким чином, $f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел δ_1, δ_2, ..., δ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Це означає, що f — додатно визначена квадратична форма.

Доведення.

Хоча б одне з чисел ε_1, ε_2, ..., ε_n не дорівнює нулю, бо у протилежному випадку всі числа δ_1, δ_2, ..., δ_n дорівнюють нулю. Тоді

$$f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 > 0.$$

Таким чином, $f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) > 0$ для будь-яких дійсних чисел δ_1, δ_2, ..., δ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Це означає, що f — додатно визначена квадратична форма. Теорема доведена. $\square$

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11},$$

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (критерій Сільвестра)

Дійсна квадратична форма є додатно визначеною

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (критерій Сільвестра)

Дійсна квадратична форма є додатно визначеною тоді і тільки тоді,

Означення 3

Нехай f — дійсна квадратична форма від n змінних з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами квадратичної форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2 (критерій Сільвестра)

Дійсна квадратична форма є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори додатні.

Доведення.

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел,

Доведення.

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Доведення.

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Якщо $n = 1$, то теорема справджується,

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$.

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Доведення.

Нехай
$$f=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Якщо $n=1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f=\alpha_{11}x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11}>0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм,

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4),

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.
Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$.

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною.

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_{n-1}

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, . . . , x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \dots, n$.
Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.
Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних x_1, x_2, . . . , x_{n-1} вигляду
$$g = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j . \qquad (5)$$

Доведення.

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.
Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_{n-1} вигляду

$$g = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

Ця квадратична форма є також додатно визначеною,

Доведення.

Нехай

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

— деяка дійсна квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ вигляду

$$g = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

Ця квадратична форма є також додатно визначеною, оскільки для довільних дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$,

Доведення.

Нехай
$$f=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j \tag{4}$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Якщо $n=1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f=\alpha_{11}x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11}>0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n=k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних x_1, x_2, ..., x_{n-1} вигляду
$$g=\sum_{i,j=1}^{n-1}\alpha_{ij}x_ix_j. \tag{5}$$
Ця квадратична форма є також додатно визначеною, оскільки для довільних дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_{n-1}, хоча б одне з яких не дорівнює нулю,
$$g(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1})=f(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1},0)$$

Доведення.

Нехай
$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (4)$$
— деяка дійсна квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n з коефіцієнтами α_{ij} з поля дійсних чисел, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Якщо $n = 1$, то теорема справджується, оскільки у цьому випадку квадратична форма f має вигляд $f = \alpha_{11} x_1^2$. А така квадратична форма вона є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{11} > 0$.

Нехай твердження теореми є правильними для всіх квадратичних форм, число n змінних якої менше за певне фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму f вигляду (4), де $n = k$. Припустимо спочатку, що квадратична форма f є додатно визначеною. Нехай g квадратична форма від змінних x_1, x_2, $\dots$, x_{n-1} вигляду
$$g = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j. \qquad (5)$$
Ця квадратична форма є також додатно визначеною, оскільки для довільних дійсних чисел γ_1, γ_2, $\dots$, γ_{n-1}, хоча б одне з яких не дорівнює нулю,
$$g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}) = f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, 0) > 0.$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11},$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними.

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f.

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f,

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A,

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \dots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$,

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n.

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.
За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n. Звідси $|Q^T AQ| = 1$.

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n. Звідси $|Q^T AQ| = 1$. З іншого боку

$$|Q^T AQ| =$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.
За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n. Звідси $|Q^T AQ| = 1$. З іншого боку

$$|Q^T AQ| = |Q^T| \cdot |A| \cdot |Q|$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n. Звідси $|Q^T AQ| = 1$. З іншого боку

$$|Q^T AQ| = |Q^T| \cdot |A| \cdot |Q| = |A| \cdot |Q|^2.$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n. Звідси $|Q^T AQ| = 1$. З іншого боку

$$|Q^T AQ| = |Q^T| \cdot |A| \cdot |Q| = |A| \cdot |Q|^2.$$

Отже,

$$|A| = \frac{1}{|Q|^2} > 0,$$

Доведення.

Тоді за припущенням всі головні мінори

$$\alpha_{11}, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1\,1} & \ldots & \alpha_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

квадратичної форми g є додатними. Але ці мінори є головними мінорами квадратичної форми f. Покажемо, що і останній головний мінор n-го порядку квадратичної форми f, тобто детермінант її матриці A, також є додатним дійсним числом.

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Тому за наслідком із закону зміни квадратичної форми існує невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що $Q^T AQ = E$, де E — одинична матриця порядку n. Звідси $|Q^T AQ| = 1$. З іншого боку

$$|Q^T AQ| = |Q^T| \cdot |A| \cdot |Q| = |A| \cdot |Q|^2.$$

Отже,

$$|A| = \frac{1}{|Q|^2} > 0,$$

що завершує доведення необхідності.

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними.

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5))

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними,

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними, а тому, за припущенням індукції,

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними, а тому, за припущенням індукції, g є додатно визначеною квадратичною формою.

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними, а тому, за припущенням індукції, g є додатно визначеною квадратичною формою. Через це існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n-1}y_{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= \beta_{n-1\,1}y_1 + \cdots + \beta_{n-1n-1}y_{n-1} \end{aligned} \qquad (6)$$

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними, а тому, за припущенням індукції, g є додатно визначеною квадратичною формою. Через це існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n-1} y_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \beta_{n-1\,1} y_1 + \cdots + \beta_{n-1n-1} y_{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

таке, що якщо виконати його у квадратичній формі g

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними, а тому, за припущенням індукції, g є додатно визначеною квадратичною формою. Через це існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n-1}y_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= \beta_{n-1\,1}y_1 + \cdots + \beta_{n-1n-1}y_{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

таке, що якщо виконати його у квадратичній формі g ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2$.

Доведення.

Припустимо тепер, що всі головні мінори квадратичної форми f є додатними. Тоді всі головні мінори квадратичної форми g (див. (5)) також є додатними, а тому, за припущенням індукції, g є додатно визначеною квадратичною формою. Через це існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} &x_1 = \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n-1}y_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{n-1} = \beta_{n-1\,1}y_1 + \cdots + \beta_{n-1n-1}y_{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

таке, що якщо виконати його у квадратичній формі g ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2$.

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} &x_1 = \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n-1}y_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{n-1} = \beta_{n-1\,1}y_1 + \cdots + \beta_{n-1n-1}y_{n-1}, \\ &x_n = y_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення.

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення.

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-11} & \dots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона є невиродженою матрицею,

Доведення.

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона є невиродженою матрицею, позаяк

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

Доведення.

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона є невиродженою матрицею, позаяк

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

є матрицею невиродженого лінійного перетворення змінних (6).

Доведення.

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона є невиродженою матрицею, позаяк

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

є матрицею невиродженого лінійного перетворення змінних (6). Виконаємо лінійне перетворення змінних (7) у квадратичні формі f,

Доведення.

Матриця цього перетворення має вигляд

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона є невиродженою матрицею, позаяк

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-1\,1} & \dots & \beta_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

є матрицею невиродженого лінійного перетворення змінних (6).
Виконаємо лінійне перетворення змінних (7) у квадратичні формі f, попередньо записавши f у вигляді

$$f = g + 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}x_i x_n + \alpha_{nn}x_n^2.$$

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h,

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1\,n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \dots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \dots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2,$$

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2,$$

де ε — деяке дійсне число.

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2,$$

де ε — деяке дійсне число. Це число є додатним числом,

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2,$$

де ε — деяке дійсне число. Це число є додатним числом, позаяк детермінант матриці A квадратичної форми f є додатним числом

Доведення.

Одержимо квадратичну форму

$$h = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{in} y_i y_n + \delta_{nn} y_n^2,$$

де δ_{in} — деяке дійсне число, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$y_i^2 + 2\delta_{in} y_i y_n = (y_i + \delta_{in} y_n)^2 - \delta_{in}^2 y_n^2.$$

Тому, якщо виконаємо лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h, обернене до наступного

$$z_1 = y_1 + \delta_{1n} y_n, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = y_{n-1} + \delta_{n-1n} y_n, \quad z_n = y_n,$$

ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2,$$

де ε — деяке дійсне число. Це число є додатним числом, позаяк детермінант матриці A квадратичної форми f є додатним числом і існує

Доведення.

невироджена матриця Q

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T AQ =$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1,$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1},$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми це в свою чергу означає,

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми це в свою чергу означає, що f є додатно визначеною квадратичною формою.

Доведення.

невироджена матриця Q порядку n над полем дійсних чисел така, що

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

через що

$$\varepsilon = |A| \cdot |Q|^2 > 0.$$

Нарешті, якщо у квадратичні формі $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 + \varepsilon z_n^2$ виконати невироджене лінійне перетворення змінних

$$z_1 = u_1, \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_n,$$

то ми одержимо квадратичну форму нормального вигляду

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2.$$

За попередньою ознакою додатної визначеності квадратичної форми це в свою чергу означає, що f є додатно визначеною квадратичною формою. Теорема доведена. $\square$

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми.

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм,

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною,

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$,

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, $\ldots$, γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми,

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Теорема 4

Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Теорема 4

Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Теорема 4

Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки всіх її головних мінорів чергуються,

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел γ_1, ..., γ_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю.Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Теорема 4

Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки всіх її головних мінорів чергуються, починаючи з знаку −

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Теорема 4

Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки всіх її головних мінорів чергуються, починаючи з знаку — і переходячи від мінорів менших порядків до більших.

Зауваження 1

Зауважимо, що розглядають також від'ємно визначені квадратичні форми. Їх визначення подібне визначенню додатно визначених квадратичних форм, а саме, дійсна квадратична форма f називається від'ємно визначеною, якщо $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$ для будь-яких дійсних чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю. Справджуються також теореми аналогічні ознаці додатної визначеності квадратичні форми та критерію Сільвестра.

Теорема 3

Дійсна квадратична форма від n змінних є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли і ранг квадратичної форми, і її від'ємний індекс інерції дорівнюють числу n змінних.

Теорема 4

Дійсна квадратична форма є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки всіх її головних мінорів чергуються, починаючи з знаку $-$ і переходячи від мінорів менших порядків до більших.