Н. Н. АЙЗЕНБЕРГ, А. А. БОВДИ, Э. И. ГЕРГО, Ф. Э. ГЕЧЕ

НЕКОТОРЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОРОГОВОЙ ЛОГИКИ

УДК 681.14:517.11

В работе предлагается алгебраический подход к изучению булевых пороговых функций, основанный на применении аппарата теории групповых колец [1]. Отметим, что алгебраический метод в теории булевых функций является весьма плодотворным. Здесь уместно назвать ряд работ: [2]—[5], [8]—[10]. Известно, что интерес к пороговым функциям определяется, с одной стороны, развитием элементной базы ЭВМ, а с другой — развитием теории распознавания образов, при становлении которой пороговые функции играли основную роль.

1. **Постановка задачи.** Пусть G — конечная группа относительно операции умножения. Рассмотрим совокупность всех формальных линейных комбинаций вида $u = \sum_{g\in G} \alpha_g g$, где $g \in G$ и α_g — элементы некоторого поля K. Определим над этими формальными линейными комбинациями операции сложения и умножения, задав произведение следующим образом:

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h h\right) = \sum_{v\in G}\left(\sum_{\substack{g,h\in G\\ v=gh}}\alpha_g\beta_h\right)v.$$

Относительно введенных операций множество всех формальных линейных комбинаций $\sum_{g\in G}\alpha_g g$ образует кольцо KG, называемое групповым кольцом.

Пусть $Z_2 = \{0, 1\}$ — поле из двух элементов и Z_2^n — n-я декартовая степень множества Z_2. Обозначим через f^{-1} (1) множество всех наборов, на которых булева функция $f: Z_2^n \to Z_2$ равна 1, а через f^{-1} (0) — на которых булева функция f принимает значение 0. Пороговым элементом (ПЭ) называется релейный элемент с n входами, состояния которых описываются векторами $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ из множества Z_2^n и выходом $f(\mathbf{X})$, принимающим значение 0 и 1, так что

$$f(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{X}\cdot\bar{\omega}^T \geqslant A, \\ 0, & \text{если } \mathbf{X}\cdot\bar{\omega}^T < A, \end{cases}$$

где $\bar{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — вещественный n-мерный вектор, называемый весовым; A — вещественное число — порог; $[\bar{\omega}, A]$ — вектор структуры ПЭ; T, $\cdot$ — соответственно символы — транспонирования матриц и матричного умножения. Булева функция $f(\mathbf{X})$, допускающая реализацию на одном ПЭ, называется пороговой.

Пусть $G = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_n\rangle$ — прямое произведение n циклических групп 2-го порядка и RG — групповое кольцо над полем вещественных чисел R. Определим функцию f на группе G со значениями в R так:

$$f(g) = \alpha_g. \tag{1}$$

Элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n}$. С учетом этого обстоятельства функцию (1) удобно задавать на векторах $(x_1, \ldots, x_n) \in Z_2^n$, полагая

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_g. \tag{2}$$

Обозначим через F множество всех элементов группового кольца RG, в записи которых участвуют только коэффициенты 0 и 1. Очевидно, на основании (1) и (2) множеству F взаимно-однозначно соответствует множество всех булевых функций от n переменных. Это соответствие в дальнейшем будем обозначать так: $f \leftrightarrow u$.

Элемент u группового кольца RG называется P-элементом, если функция f, соответствующая u, является пороговой.

В [6] над булевыми функциями определены четыре операции, сохраняющие свойство пороговости (непороговости). Рассмотрим эти операции на языке групповых колец.

А. Если булева функция f^1 получена из булевой функции f инвертированием i-й переменной и $f \leftrightarrow u$, то $f^1 \leftrightarrow ua_i$. Следовательно, инвариантная операция первого типа — это умножение элемента u, соответствующего f, на i-ю образующую группы G. Отображение $u \to ua_i$ является автоморфизмом аддитивной группы группового кольца.

Пусть φ — автоморфизм группы G. Если $u = \sum_{g\in G}\alpha_g g$, то, полагая $\varphi(u) = \sum_{g\in G}\alpha_g\varphi(g)$, получаем автоморфизм группового кольца RG. Совокупность всех таких автоморфизмов группового кольца RG образует группу, которую обозначим через $\mathrm{Aut}\, G$, а ее подгруппу, состоящую из автоморфизмов, задающих подстановки на фиксированном множестве образующих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ группы G, — через $\mathrm{Aut}^* G$.

Б. Пусть булева функция f^2 получена из булевой функции f путем перестановки двух входных переменных x_i, x_j и $f \leftrightarrow u$. Если φ — автоморфизм из $\mathrm{Aut}^* G$, оставляющий на месте все a_h $(h \neq i, j)$ и $\varphi(a_i) = a_j$, то $f^2 \leftrightarrow \varphi(u)$.

Следовательно, инвариантная операция второго типа является автоморфизмом из $\mathrm{Aut}^* G$.

В. Если f^3 является функцией двойственной функции f, причем $f \leftrightarrow u$ и $f^3 \leftrightarrow v$, то v получается из элемента $ua_1 \dots a_n + \sum_{g \in G} g$ приведением коэффициентов по mod 2.

Г. Рассмотрим следующую операцию над функцией f:

$$f^4(x_1, \dots, x_n) = x_j \oplus \overline{f(\overline{x_1 \oplus x_j}, \dots, \overline{x_{j-1} \oplus x_j}, x_j, \overline{x_{j+1} \oplus x_j}, \dots, \overline{x_n \oplus x_j})},$$

где $\oplus$ — суммирование по mod 2 и $f \leftrightarrow u$.

Пусть $H_j = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_{j-1} \rangle \times \langle a_{j+1} \rangle \times \dots \times \langle a_n \rangle$ и $u = \sum_{g \in G} \alpha_g g$. Если $f^4 \leftrightarrow v$, то v получается из элемента

$$\left(\sum_{g \in H_j} \alpha_g g \right) a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_{j+1} \dots a_n + \sum_{g \in H_j} g + \sum_{g \in a_j H_j} \alpha_g g$$

приведением коэффициентов по mod 2.

Совокупность всех P-элементов из множества F обозначим через P. В связи с инвариантными операциями возникает вопрос: какие отображения группового кольца оставляют инвариантным множество P? Ответ дает теорема 4. Предлагается также новый базис для булевых функций, состоящих из пороговых функций (теорема 3). Для доказательства этих теорем рассмотрим некоторые факты, касающиеся пороговых функций и представляющие сами по себе интерес.

2. Критерий реализуемости булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на одном ПЭ. Пусть Ω — множество всех n-мерных вещественных векторов $\bar{\omega}$ таких, что для всех различных $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in Z_2^n$ числа $\mathbf{X}_1 \cdot \bar{\omega}^T$ и $\mathbf{X}_2 \cdot \bar{\omega}^T$ различны. Известно [7], что если булева функция $f(\mathbf{X})$ реализуется на ПЭ с весовым вектором $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \notin \Omega$ и порогом A, то существует ПЭ с весовым вектором $\bar{\omega}' \in \Omega$ и порогом A', реализующий функцию $f(\mathbf{X})$. Поэтому все пороговые функции могут быть реализованы на пороговых элементах с весовыми векторами из Ω. Только такие ПЭ будут здесь рассмотрены.

Пусть $\bar{\omega}$ — фиксированный вектор из Ω. Обозначим через $Q(\bar{\omega})$ класс всех пороговых функций с весовым вектором $\bar{\omega}$, а через $\rho(\bar{\omega})$ — множество всех упорядоченных пар булевых векторов $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ таких, что $\mathbf{X} \cdot \bar{\omega}^T > \mathbf{Y} \cdot \bar{\omega}^T$. Очевидно, мощность $|Q(\bar{\omega})|$ класса $Q(\bar{\omega})$ равна $2^n + 1$.

Векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1 \in \Omega$ назовем эквивалентными, если $\rho(\bar{\omega}) = \rho(\bar{\omega}_1)$.

Лемма 1. Пусть $[\bar{\omega}_1, A_1]$ — вектор структуры ПЭ, реализующего $f(\mathbf{X})$, $\bar{\omega}_1 \in \Omega$ и $\bar{\omega}_1$ эквивалентен $\bar{\omega}_2$. Тогда найдется порог A_2 такой, что ПЭ с вектором структуры $[\bar{\omega}_2, A_2]$ также реализует функцию $f(\mathbf{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}_1$ — набор из $f^{-1}(0)$, на котором $\mathbf{X} \cdot \bar{\omega}_1^T$ принимает наибольшее значение. Тогда для эквивалентного вектора $\bar{\omega}_2$ наибольшее значение величины $\mathbf{X} \cdot \bar{\omega}_2^T$ на $f^{-1}(0)$ также принимается на векторе $\mathbf{X}_1$. Поэтому для выполнения соотношения $\mathbf{X} \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow \mathbf{X} \cdot \bar{\omega}_2^T < A_2$ порог A_2 достаточно выбрать из полузамкнутого промежутка $(\max\{\mathbf{X} \cdot \bar{\omega}_2^T \mid \mathbf{X} \in f^{-1}(0)\}, \min\{\mathbf{X} \cdot \bar{\omega}_2^T \mid \mathbf{X} \in f^{-1}(1)\}]$.

В силу леммы классы $Q(\omega_1)$, $Q(\omega_2)$ для эквивалентных векторов совпадают. Следовательно, ρ индуцирует на множестве Ω также отношение эквивалентности; классы эквивалентности обозначим через Ω_i $(i = 1, 2, \dots, t)$. Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Если $\bar{\omega}^i$ — представитель класса Ω_i, то множество всех пороговых функций π_n совпадает с $\bigcup_{i=1}^{t} Q(\bar{\omega}^i)$.

Определим на Z_2^n отношение толерантности τ:

$$(a_1, \dots, a_n)\, \tau\, (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \exists i\ (a_i = b_i).$$

Множество, состоящее из всех классов толерантности относительно отношения τ, обозначим через M_τ. Составим всевозможные матрицы, строками которых будут n-мерные булевы векторы, являющиеся элементами класса толерантности $N \in M_\tau$. Число всех матриц, построенных из класса толерантности N, равно $|N|!$, где $|N|$ — мощность класса N. Пусть $S(N)$ — совокупность всех матриц, построенных из N, и $M = \bigcup_{N \in M_\tau} S(N)$. Элементы множества M назовем матрицами толерантности отношения τ. Если $N \in M_\tau$, то $|N| = 2^{n-1}$. Действительно, N — максимальное подмножество множества Z_2^n такое, что $(a_1, \dots, a_n) \in N \Rightarrow (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \notin N$, где $\bar{a}_i$ — инвертированное значение a_i.

Пусть $c_1 > c_2 > \dots > c_{2^n}$ — расположенные в порядке убывания взвешенные суммы $\mathbf{X} \cdot \bar{\omega}^T$ (при фиксированном $\bar{\omega} \in \Omega$) для всех наборов $\mathbf{X} \in Z_2^n$, а $\mathbf{c}_{\bar{\omega}} = (c_1, \dots, c_{2^n})$. Полагая $s = 2^{n-1} - i + 1$, сопоставим каждой матрице толерантности $N = (a_{ij})$ матрицу $N^* = (a_{sj})$, где $a_{sj} = \bar{a}_{ij}$.

Лемма 3. Если $\bar{\omega} \in \Omega$ и $R_{\bar{\omega}}$ — матрица над Z_2 размерности $n \times 2^n$, удовлетворяющая условию

$$R_{\bar{\omega}} \cdot \bar{\omega}^T = \mathbf{c}_{\bar{\omega}}^T, \tag{3}$$

то $R_{\bar{\omega}}$ можно записать в клеточном виде $\begin{pmatrix} L_{\bar{\omega}} \\ L_{\bar{\omega}}^* \end{pmatrix}$, где $L_{\bar{\omega}} = (a_{ij})$ — матрица толерантности.

Доказательство. Из определения множества Ω следует, что для каждого $\overline{\omega}\in\Omega$ можно указать матрицу $R_{\overline{\omega}}$ размерности $n\times 2^n$ над Z_2 с условием (3). Рассмотрим верхнюю клетку $L_{\overline{\omega}}$ матрицы $R_{\overline{\omega}}$. Тогда $L_{\overline{\omega}}$ не может содержать в качестве строк одновременно векторы $\mathbf{X}=(x_1,\dots,x_n)$ и $\overline{\mathbf{X}}=(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$. Действительно, если бы это было не так, то $c_p=\sum_{q=1}^{n}\omega_q a_{pq}$ и $c_l=\sum_{q=1}^{n}\omega_q a_{lq}=\sum_{q=1}^{n}\omega_q\overline{a}_{pq}$ принадлежат множеству $\{\mathbf{X}\cdot\overline{\omega}^T\mid\mathbf{X}\in L_{\overline{\omega}}\}$, т. е. $p,l\in\{1,2,\dots,2^{n-1}\}$. Пусть для определенности $c_p>c_l$ и r — строка, состоящая только из единиц, матрицы $R_{\overline{\omega}}$. Тогда $c_l=r\cdot\overline{\omega}^T-c_p$, откуда в силу (3)

$$l=2^n-p+1. \qquad (4)$$

Поэтому если $p\in\{1,2,\dots,2^{n-1}\}$, то $l\notin\{1,2,\dots,2^{n-1}\}$. Отсюда следует неверность предположения, что доказывает принадлежность $L_{\overline{\omega}}$ множеству M. Если c_p пробегает начальный отрезок $(c_1,c_2,\dots,c_{2^{n-1}})$ вектора $c_{\overline{\omega}}$, то в силу (4) c_l пробегает $(c_{2^n},c_{2^n-1},\dots,c_{2^{n-1}+1})$. Поэтому $R_{\overline{\omega}}=\begin{pmatrix}L_{\omega}\\ L^*_{\omega}\end{pmatrix}$.

Согласно леммам 2 и 3 перечисление всех пороговых функций от n переменных сводится к построению множества матриц толерантности $E=\bigcup_{\overline{\omega}\in\Omega}L_{\overline{\omega}}$. Зададим отображение $\psi(\Omega_i)=L_{\overline{\omega}^i}$, где $\overline{\omega}^i$ — представитель класса Ω_i. Тогда ψ — биективное отображение множества Ω на E.

Пусть $\varphi_L^i(x_1,\dots,x_n)$—булева функция, принимающая значение 1 на тех и только тех наборах, которые совпадают с первыми i строками матрицы $R=\begin{pmatrix}L\\ L^*\end{pmatrix}$ $(L\in E)$. Если $\varphi_L^0(x_1,\dots,x_n)\equiv 0$, то в силу равенства $\psi(\Omega)=E$ из леммы 2 следует

$$\pi_n=\bigcup_{i=1}^{t}Q(\overline{\omega}^i)=\bigcup_{L\in E}\bigcup_{i=0}^{2^n}\varphi_L^i(x_1,\dots,x_n). \qquad (5)$$

Предматрицей толерантности называется матрица, строками которой являются первые по порядку r строк матрицы толерантности $L=(a_{ij})$ $(1\leqslant r\leqslant 2^{n-1})$. Если L' — предматрица, полученная из матрицы толерантности L, то будем писать $L'\lhd L$. Введем понятие ядра $K(f)$ для булевой функции f, полагая $K(f)=f^{-1}(1)$, если $|f^{-1}(1)|\leqslant|f^{-1}(0)|$, и $K(f)=f^{-1}(0)$ в противном случае.

Пусть число элементов ядра $K(f)$ равно $|K(f)|=q$. Запишем элементы ядра $K(f)$ в некотором порядке в строки матрицы (b_{ij}), сохраняя для полученной матрицы обозначение $K(f)$. Тогда $K(f)=(b_{ij})$ — матрица размерности $n\times q$. Если S_n — группа подстановок на множестве из n элементов и $\sigma\in S_n$, $\xi\in S_q$, то обозначим через $K_\xi^\sigma(f)$ матрицу $(b_{\xi(i)\sigma(j)})$, где $\xi(i)$ — действие подстановки на символ i.

Теорема 1. Булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ с ядром $K(f)$ является пороговой тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\xi\in S_q$ и такая матрица толерантности $L\in E$, что $K_\xi(f)\lhd L$.

Доказательство. Если $f(x_1,\dots,x_n)$ — пороговая, то согласно (5) существует матрица толерантности $L\in E$ такая, что $f(x_1,\dots,x_n)=\varphi_L^q(x_1,\dots,x_n)$, когда $|f^{-1}(1)|\leqslant|f^{-1}(0)|$, а в случае $|f^{-1}(1)|>|f^{-1}(0)|$ $\varphi_L^q(x_1,\dots,x_n)=\overline{f}(x_1,\dots,x_n)$, где черта над f означает булево отрицание. Множество первых q строк матрицы $\begin{pmatrix}L\\ L^*\end{pmatrix}$ совпадает с ядром $K(f)$. Поэтому существует такой элемент $\xi\in S_q$, что $K_\xi(f)\lhd L$.

Если же существует такой элемент $\xi\in S_q$ и такая матрица $L\in E$, что $K_\xi(f)\lhd L$, то из определения функции $\varphi_L^i(x_1,\dots,x_n)$ получим, что $f(x_1,\dots,x_n)=\varphi_L^q(x_1,\dots,x_n)$, если $|f^{-1}(1)|\leqslant|f^{-1}(0)|$, и $\overline{f}(x_1,\dots,x_n)=\varphi_L^q(x_1,\dots,x_n)$, если $|f^{-1}(1)|>|f^{-1}(0)|$. Известно, что функции $f(\mathbf{X})$ и $\overline{f}(\mathbf{X})$ одновременно пороговые либо одновременно непороговые. Так как $L\in E$, то $\varphi_L^q(x_1,\dots,x_n)\in\pi_n$. Следовательно, $f(\mathbf{X})$ — пороговая.

Превратим множество Z_2^n в абелеву группу относительно покомпонентного сложения по mod 2 и рассмотрим ей изоморфную абелеву группу $\tilde{Z}_2^n=\{((-1)^{x_1},\dots,(-1)^{x_n})\mid(x_1,\dots,x_n)\in Z_2^n\}$ относительно операции покомпонентного умножения. Определим действия группы $\tilde{Z}_2^n$ на множествах Ω и E так: если $g=(h_1,\dots,h_n)\in\tilde{Z}_2^n$ и $\overline{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega$, $L=(a_{ij})\in E$, то $g\overline{\omega}\overset{df}{=}(h_1\omega_1,\dots,h_n\omega_n)$, а $gL=(s_{ij})$, где $s_{ij}=a_{ij}$, если $h_j=1$, и $s_{ij}=\overline{a}_{ij}$, если $h_j=-1$. Результат действия элемента $\sigma\in S_n$ на $\overline{\omega}\in\Omega$ обозначим $\overline{\omega}^\sigma$, а на матрицу $L=(a_{ij})\in E$ — L^σ, полагая по определению $\overline{\omega}^\sigma=(\omega_{\sigma(1)},\dots,\omega_{\sigma(n)})$, $L^\sigma=(a_{i\sigma(j)})$.

Пусть $\Omega'=\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega\mid 0>\omega_1>\omega_2>\dots>\omega_n\}$, $E'=\bigcup_{\overline{\omega}\in\Omega'}L_{\overline{\omega}}$, $E_1=\{(gL)^\sigma\mid L\in E',\ g\in\tilde{Z}_2^n,\ \sigma\in S_n\}$.

Лемма 4. Множество E_1 совпадает с множеством матриц толерантности E.

Доказательство. Пусть $\bar\omega \in \Omega$ и g, σ — элементы соответствующих групп Z_2^n, S_n. Если $\bar\chi = (g\bar\omega)^\sigma \in \Omega$ и L — такая матрица толерантности из E', что $\begin{pmatrix} L \\ L^* \end{pmatrix}\cdot\bar\omega^T = c_{\bar\omega}^T$, то $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_1^* \end{pmatrix}\cdot\bar\chi^T = c_{\bar\chi}^T$, где $L_1 = (gL)^\sigma$. Значит, $E \subseteq E_1$. Обратное включение $E_1 \subseteq E$ является очевидным. Итак, лемма доказана.

Рассмотрим множество $T(f) = \{K(f)_i \mid i=1, 2, \ldots, q\}$, где $K(f)_i = g_i K(f)$, $K(f) = (b_{ij})$, $g_i = ((-1)^{b_{i1}}, \ldots, (-1)^{b_{in}})$, и назовем его множеством приведенных ядер.

Теорема 2. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является пороговой тогда и только тогда, когда хотя бы для одного приведенного ядра $K(f)_i \in T(f)$ можно указать такие $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ и матрицу толерантности $L \in E'$, что $K_\xi^\sigma(f)_i \lhd L$.

Доказательство. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — пороговая, то ввиду теоремы 1 существуют $\xi \in S_q$ и матрица толерантности $N \in E$ такая, что $K_\xi(f) \lhd N$. Тогда по лемме 4 каждую матрицу $N \in E$ можно представить в виде $N = (gL)^\sigma$ $(L \in E')$. Откуда $L = g^{-1}N^{\sigma^{-1}} = gN^{\sigma^{-1}}$. Так как $K_\xi(f) \lhd N$, то $gK_\xi^{\sigma^{-1}}(f) \lhd L$. Первая строка любой матрицы толерантности L из E' нулевая. Значит, найдется такая строка $(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$ из ядра $K(f)$, что $g^\sigma = g_i$ и $gK_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = (g^\sigma K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = (g_i K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)_i$. Следовательно, для приведенного ядра $K(f)_i \in T(f)$ пороговой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ указаны элементы $\sigma_1 = \sigma^{-1} \in S_n$, $\xi \in S_q$ и матрица толерантности $L \in E'$ такая, что $K_\xi^{\sigma_1}(f)_i \lhd L$.

Пусть теперь $K_\xi^\sigma(f)_i \lhd L$ $(L \in E')$. Докажем пороговость функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $\bar\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega'$ и $R_{\bar\omega_1}\cdot\bar\omega_1^T = c_{\bar\omega_1}^T$, то ПЭ с весовым вектором $\bar\omega_1 = g_i\bar\omega^{\sigma^{-1}}$ и порогом $A \in (c_q, c_{q+1})$ реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ или $\bar f(x_1, \ldots, x_n)$, в зависимости от того: $K(f) = f^{-1}(1)$ или $K(f) = f^{-1}(0)$. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — пороговая и теорема доказана.

3. Отображения группового кольца RG, сохраняющие множество P. Пусть $G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n \rangle$ — прямое произведение n циклических групп 2-го порядка. Множество $A(Z_2G) = \left\{\sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0\right\}$ называется фундаментальным идеалом группового кольца Z_2G. Очевидно, $A(Z_2G)$ является нильпотентным идеалом группового кольца, так как произведение любых $n+1$ элементов из $A(Z_2G)$ равно нулю. Элементы из $A(Z_2G)$ вида

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + a_j)^{r_j} \quad (r_j \in \{0, 1\}) \qquad (6)$$

линейно независимы над полем Z_2 и составляют базис линейного пространства $A(Z_2G)$. В дальнейшем этот базис будем называть стандартным базисом фундаментального идеала.

Теорема 3. Стандартный базис фундаментального идеала $A(Z_2G)$ состоит из P-элементов группового кольца Z_2G.

Доказательство. Пусть $f_t(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \leftrightarrow \prod_{j=1}^{t} (1 + a_j)^{r_j}$, $1 \leqslant t \leqslant n$, и

$$N_1 = (0),\ N_2 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ N_1^* & 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ N_t = \begin{pmatrix} N_{t-1} & 0 \\ N_{t-1}^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где 0 — метка-столбец, который состоит из нулей, N_1 — матрица размерности 1×1.

Легко заметить, что

$$K(f_t) = K(f_t)_1 = \begin{pmatrix} N_t & 0 \\ N_t^* & 0 \end{pmatrix},$$

где 0 — клетка из нулей размером $|N_t| \times (n - t)$. Рассмотрим вектор $\bar\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega'$, удовлетворяющий условию $\sum_{i=1}^{j-1} \omega_i > \omega_j$, $j = 2, 3, 4, \ldots, n$. Тогда матрица толерантности

$$L_{\bar\omega} = \begin{pmatrix} N_{n-1} & 0 \\ N_{n-1}^* & 0 \end{pmatrix} \in E' \text{ такая, что } \begin{pmatrix} L_{\bar\omega} \\ L_{\bar\omega}^* \end{pmatrix} \cdot \omega^T = c_{\bar\omega}^T.$$

Из (7) вытекает, что матрица N_{n-1} имеет следующий вид:

$$N_{n-1} = \begin{pmatrix} N_t & \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{n-t-1} \\ N_t^* & 0\ 0\ \ldots\ 0 \\ \text{———} & \text{———} \\ \text{———} & \text{———} \\ \text{———} & \text{———} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$L_{\bar\omega} = \begin{pmatrix} K(f_t)_1 \\ \text{————} \\ \text{————} \\ \text{————} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $K(f_t)_1 \lhd L_{\bar\omega}$ $(L_{\bar\omega} \in E')$ и в силу теоремы 2 функция f_t — пороговая. Следовательно, элементы вида (6) являются P-элементами.

Теорема 4. Множество P инвариантно относительно автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathrm{Aut}^*\, G$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Aut}^* G$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}\, G$, оставляющая инвариантным множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Докажем, что если $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G \setminus \mathrm{Aut}^* G$, то $\varphi(u) \notin P$ для некоторого u из P. Если положить $u = 1 + a_i$, то в силу теоремы 3 $u \in P$. Для автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G \setminus \mathrm{Aut}^* G$ существует такой номер i, что $\varphi(a_i) = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ и $\varphi(1 + a_i) = 1 + a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$, где $r > 1$. Если $f_r(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow 1 + a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$, то

$$\begin{array}{r@{}c} K(f_r) = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{matrix} & & & & (i_1) & & & & (i_2) & & & & (i_r) & \end{matrix} \end{array}$$

где 1 стоят в i_r-х столбцах матрицы. Отсюда

$$T(f) = \Big\{ K(f_r)_1 = K(f_r),\ K(f_r)_2 =$$

$$\begin{array}{r@{}c} & \begin{matrix} & & & (i_1) & & & & (i_2) & & & & (i_r) & \end{matrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Так как первые две строки для любой $L \in E'$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, то для $K(f_r)_i$ $(i = 1, 2)$ нельзя выбрать $\sigma_i \in S_n$, $\xi_i \in S_2$ так, чтобы $K_{\xi_i}^{\sigma_i}(f_r)_i \lhd L$ $(L \in E')$. Согласно теореме 2 функция $f_r(x_1, \ldots, x_n)$ — непороговая и $\varphi(u) = 1 + a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ не является P-элементом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бовди А. А. Групповые кольца.— Ужгород: Изд-во Ужгородского ун-та, 1974.— 120 с.
2. Страздинь И. Э. Подалгебры в алгебре булевых функций трех переменных.— В кн.: Автоматика и вычислительная техника, 1962, т. 3, с. 35—53.
3. Страздинь И. Э. Группа самодвойственных преобразований булевых функций.— В кн.: Теория дискретных автоматов. Рига, 1967, с. 191—199.
4. Каммозев Н. Ф., Сычев А. В. Спектральная интерпретация метода целочисленной реализации порогового элемента.— Автоматика и вычислительная техника, 1978, № 2, с. 7—11.
5. Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л., Поспелов Д. А., Худяков Г. Ф. Многозначные пороговые функции. II. Синтез многочисленных пороговых элементов.— Кибернетика, 1973, № 1, с. 53—66.
6. Дертоузос М. Пороговая логика.— М.: Мир, 1967.— 342 с.
7. Яджима С., Ибараки Т. Нижняя оценка числа пороговых функций.— Кибернетический сборник. Новая серия, 1969, вып. 6.— 263 с.
8. Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л. Многозначная пороговая логика.— Киев: Наук. думка, 1977.— 145 с.
9. Захарова Е. Ю. О синтезе схем из пороговых элементов.— Проблемы кибернетики, 1963, вып. 9, с. 317—319.
10. Шоломов Л. А. О некотором классе логических функций, связанных с пороговыми.— Проблемы кибернетики, 1965, вып. 13, с. 97—113.

Поступила в редакцию 28.VIII 1979