УДК 681.14:517.11

Ф. Э. ГЕЧЕ, В. П. ПОЛИВКО, В. И. РОБОТИШИН

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ НА ПОРОГОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Интерес к методам синтеза дискретных устройств в пороговом базисе, как известно [1—5], вызван тем, что пороговые элементы (ПЭ) обладают большими функциональными возможностями и свойством перестраиваемости, благодаря чему могут играть существенную роль в развитии элементной базы ЭВМ, при построении кибернетических систем, решающих задачи распознавания образов, и при создании управляющих устройств с перестраиваемыми структурами в системах автоматического управления. Методы порогового представления функций алгебры логики успешно могут использоваться для решения задачи распознавания образов и для сжатия информации.

В работе предлагается комбинаторно-алгебраический подход к изучению булевых пороговых функций, основанный на применении свойств матриц толерантности [6, 7], приводится ряд необходимых условий пороговости булевых функций и впервые дается практически приемлемый метод синтеза порогово-дизъюнктивной сети из целочисленных ПЭ, не накладывающий никакого ограничения на число аргументов реализуемой функции. Полученный метод порогового представления булевых функций позволяет описать классы бинарных изображений, допускающие сжатия без потери информации с коэффициентом

$$\varkappa_t = \frac{p \times q}{([\log_2 p] + [\log_2 q] + 3)\, t},$$

где $p \times q$ — размеры изображений, $[a]$ — целая часть числа a, t — число пороговых функций, входящих в пороговое разложение булевой функции, сопоставленной (однозначно) изображению.

Впервые получено порогово-дизъюнктивное разложение функции Мура [2], не совпадающее ни с тривиальным пороговым, ни с кратчайшей ДНФ этой функции. Число пороговых функций, входящих в порогово-дизъюнктивное разложение функции Мура, в два-три раза меньше числа элементарных коньюнкций кратчайшей ДНФ, реализующую эту же функцию.

1. Необходимые условия реализуемости булевых функций на одном ПЭ. Пусть $Z_2 = \{0, 1\}$ и Z_2^n — n-я декартова степень множества Z_2. Обозначим через $f^{-1}(1)$ множество всех наборов, на которых булева функция $f: Z_2^n \to Z_2$ равна 1, а через $f^{-1}(0)$ — множество всех наборов, на котором булева функция f принимает значение 0. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется пороговой, если существуют n-мерный вещественный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, называемый весовым, и действительное число A — порог, такие что $\mathbf{X} \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} < A$, где T, $\cdot$ — соответственно символы транспонирования матриц и матричного умножения. Введем понятие ядра $K(f)$ для булевой функции f, полагая $K(f) = f^{-1}(1)$, если $|f^{-1}(1)| \leqslant |f^{-1}(0)|$, и $K(f) = f^{-1}(0)$ в противном случае, где $|f^{-1}(i)|$ — число элементов множества $f^{-1}(i)$.

Пусть $|K(f)| = q$. Запишем элементы ядра $K(f)$ в некотором порядке в строки матрицы (β_{ij}), сохраняя для полученной матрицы обозначение $K(f)$. Тогда $K(f) = (\beta_{ij})$ — матрица размерности $q \times n$. Если S_n — группа подстановок на множестве из n элементов и $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$, то обозначим через $K_\xi^\sigma(f)$ матрицу $(\beta_{\xi(i)\sigma(j)})$, где $\xi(i)$ — действие подстановки на символ i.

Рассмотрим множество Ω_n всех n-мерных вещественных векторов $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ таких, что для всех различных $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in Z_2^n$ числа $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ различны. Известно [8], что все пороговые булевы функции могут быть реализованы на ПЭ с весовым вектором $\mathbf{w} \in \Omega_n$.

Пусть $c_1 > c_2 > \dots > c_{2^n}$ — расположенные в порядке убывания взвешенные суммы $\mathbf{X} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ (при фиксированном $\mathbf{w} \in \Omega_n$), а $\mathbf{c}_{\mathbf{w}} = (c_1, c_2, \dots, c_{2^n})$. Полагая $s = 2^{n-1} - i + 1$, сопоставим каждой матрице $N = (\alpha_{ij})$ над Z_2 матрицу $N^* = (\alpha_{sj})$, где $\alpha_{sj} = \bar{\alpha}_{ij}$ — булево отрицание α_{ij}. В [6] доказано, что для всякого $\mathbf{w} \in \Omega_n$ найдется матрица толерантности $L_{\mathbf{w}}$ такая, что $\begin{pmatrix} L_{\mathbf{w}} \\ L_{\mathbf{w}}^* \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}$. Введем следующие обозначения:

$$E_n = \bigcup_{\mathbf{w} \in \Omega_n} L_{\mathbf{w}}, \quad \Omega_n' = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n \mid 0 > \omega_1 > \dots > \omega_n\}$$

$$E_n' = \bigcup_{\mathbf{w} \in \Omega_n'} L_{\mathbf{w}}.$$

Теорема 1. Если булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ пороговая, то ядро $K(f)$ не содержит одновременно строку $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\mathbf{a}' = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, где $\bar{\alpha}_i$ — инвертированное значение $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция. Тогда в силу теоремы 1 [6] найдется такой элемент $\xi \in S_q$ и такая матрица толерантности $L \in E_n$, что $K_\xi(f) \lhd L$. Множество всех строк матрицы толерантности L является классом толерантности отношения τ, определенного на Z_2^n:

$\alpha_1, \dots, \alpha_n) \tau (\beta_1, \dots, \beta_n) \Leftrightarrow \exists i (\alpha_i = \beta_i)$. Тогда из $K_\xi(f) \lhd L$ следует, что $K(f)$ не может содержать одновременно $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$, что и доказывает теорему.

Пусть $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \in Z_2^n (b \neq e_i)$ $I_\mathbf{b} = \{i \mid \beta_i = 1\}$. Если $K(f) = (\beta_{ij})$ и $\mathbf{g}_i = ((-1)^{\beta_{i1}}, \dots, (-1)^{\beta_{in}})$, то согласно [6] $T(f) = \{K(f)_i = \mathbf{g}_i K(f) \mid \; i = 1, 2, \dots, q\}$ будет множеством приведенных ядер булевой функции f.

Теорема 2. Если булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ пороговая, то во множестве приведенных ядер $T(f)$ найдется ядро $K(f)_r$ такое, что

$$\mathbf{b} \in K(f)_r \Rightarrow \{\mathbf{e}_i \mid i \in I_\mathbf{b}\} \subset K(f)_r.$$

Доказательство. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция, то по теореме 2 [6] $K_\xi^\sigma(f)_r \lhd L \in E_n'$. Для любой матрицы толерантности $N \in E_n'$ существует вектор $\mathbf{w} = \mathbf{w}_N \in \Omega_n'$ такой, что $\tilde{N} \cdot \mathbf{w}^\mathrm{T} = \mathbf{c}_\mathbf{w}^\mathrm{T}$, где $\tilde{N} = \begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix}$. Пусть $N = L$, тогда вектор $\mathbf{w} = \mathbf{w}_L \in \Omega_n'$ удовлетворяет условию

$$\tilde{L} \cdot \mathbf{w}^\mathrm{T} = \mathbf{c}_\mathbf{w}^\mathrm{T}. \qquad (1)$$

Для любого $i \in I_\mathbf{b}$ выполняется неравенство $\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}^\mathrm{T} < < \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{w}^\mathrm{T}$.

В силу (1) и $K_\xi^\sigma(f)_r \lhd L$ порядковый номер строки $\mathbf{b}$ в матрице L больше порядкового номера строки $\mathbf{e}_i$ $(i \in I_\mathbf{b})$. Следовательно, $\mathbf{b} \in K(f)_r \Rightarrow \{\mathbf{e}_i \mid i \in \in I_\mathbf{b}\} \subset K(f)_r$.

В случае когда $\mathbf{b}$ — нулевой вектор, теорема очевидна.

Итак, теорема доказана.

Следствие. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция, то во множестве приведенных ядер $T(f)$ найдется ядро $K(f)_r$ такое, что если $\mathbf{e}_j \notin K(f)_r$, то j-й столбец приведенного ядра состоит из нулей.

Пусть $A = (\alpha_{ij})$ — прямоугольная $m \times n$-матрица над Z_2, $X \subset Z_2^n$, $\chi(A, i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$ и $I(X) = \{i \mid \mathbf{e}_i \in X\}$.

Теорема 3. Если ядро $K(f)$ пороговой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет неравенству $2^j < |K(f)| \leqslant \leqslant 2^{j+1}$ $(j \in \{1, 2, \dots, n-2\})$, то во множестве приведенных ядер $T(f)$ найдется ядро $K(f)_r$ такое, что:

1) $\forall i \in \{1, 2, \dots, |K(f)|\}$ $\chi(K(f)_r, i) \leqslant j + 1$;

2) $|I(K(f)_r| \geqslant j + 1$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция и $2^j < |K(f)| \leqslant 2^{j+1}$. В силу пороговости данной функции $K_\xi^\sigma(f)_r \lhd L \in E_n'$ [6].

Рассмотрим вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n'$, удовлетворяющий условию $\omega_1 < 0$, $\omega_i < \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j$ $(i = 2, 3, \dots, n)$, и множество матриц толерантности:

$$L_1 = (0_1), \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0_1 \\ L_1^* & 0_1 \end{pmatrix}, \dots, L_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0_{n-1} \\ L_{n-1}^* & 0_{n-1} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Здесь 0_i — нулевой столбец длины 2^{i-1}. Для матрицы $\tilde{L}_n = \begin{pmatrix} L_n \\ L_n^* \end{pmatrix}$

$$\tilde{L}_n \cdot \mathbf{w}^\mathrm{T} = \mathbf{c}_\mathbf{w}^\mathrm{T}. \qquad (3)$$

Пусть $2^j < q \leqslant 2^{j+1}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Из построения вектора $\mathbf{w}$ и из (3) следует, что любая матрица $H \in E_n'$ удовлетворяет условию: $\forall m \in \{1, 2, \dots, q\}$ $\exists k \in \{1, 2, \dots, q\}$ такой, что

$$\chi(H, m) \leqslant \chi(L_n, k) \leqslant j + 1.$$

Тогда из $K_\xi^\sigma(f)_r \lhd L \in E_n'$ получим $\forall i \in \{1, 2, \dots \dots, |K(f)|\}$ $\chi(K(f) r, i) \leqslant j + 1$.

Из построения матрицы L_n следует, что порядковый номер строки $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ в любой матрице толерантности $H \in E_n'$ не превосходит порядкового номера строки $\mathbf{e}_i$ в матрице L_n $(i \in \{1, 2, \dots, n-1\})$. Следовательно, если $L_n(q)$ и $H(q)$ обозначать соответственно предматрицы толерантности матриц L и H, состоящих из q строк, то (2) повлечет

$$|I(H(q))| \geqslant |I(L_n(q))| = j + 1.$$

В силу произвольности H можно положить $H = L$. Тогда из $K_\xi^\sigma(f)_r \lhd L$ имеем $H(q) = K_\xi^\sigma(f)_r$. Итак,

$$|I(H(q))| = |I(K_\xi^\sigma(f)_r)| = |I(K(f)_r) \geqslant j + 1.$$

Теорема доказана.

Возникает вопрос, для каких булевых функций от n переменных можно установить пороговость (непороговость) с помощью матриц толерантности из E_m' $(m < n)$. В случае $m = n$ ответ на этот вопрос содержится в теореме 2 [6].

Теорема 4. Если в приведенных ядрах $K(f)_i$ $(i = 1, 2, \dots, q)$ булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ число нулевых столбцов $K(f)_i$ равно s, где $s \in \{1, 2, \dots \dots, n-1\}$, а $|K(f)| \leqslant 2^{n-s-1}$, то функция f будет пороговой тогда и только тогда, когда хотя бы для одного приведенного ядра $K(f)_r$ найдутся такие элементы $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ и матрица толерантности $V \in E_{n-s}'$, что

$$K_\xi^\sigma(f)_r \lhd (V \underbrace{0_m \dots 0_m}_{s}), \qquad (4)$$

где $m = n - s$.

Доказательство. Необходимость. Если $f(x_1, \dots \dots, x_n)$ — пороговая функция, то $K_\xi^\sigma(f)_r \lhd L \in E_n'$ [6]. Следовательно,

$$L = \begin{pmatrix} K_\xi^\sigma(f)_r \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' \; \overbrace{0_m \dots 0_m}^{s} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Покажем, что во множестве E_m' найдется матрица толерантности V, удовлетворяющая условию $L' \lhd V$. Пусть вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n'$ такой, что

$$\tilde{L} \cdot \mathbf{w}^\mathrm{T} = \mathbf{c}_\mathbf{w}^\mathrm{T}, \qquad (6)$$

где $\tilde{L} = \begin{pmatrix} L \\ L^* \end{pmatrix}$. Вектор $\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, очевидно, принадлежит множеству Ω'_m и, значит, существует такая матрица толерантности $V \in E'_m$, что

$$\tilde{V} \cdot \mathbf{w}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^{\mathrm{T}}.$$

Тогда из (5) и (6) следует, что начальные отрезки векторов $\mathbf{c}_{\mathbf{w}}$ и $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}$, состоящие из первых q компонент, совпадают. Откуда $L' \lhd V$ и (4) доказано.

Достаточность. Пусть выполняется (4). Из определения ядра $K(f)$ $K(f) = f^{-1}(1)$, если $|f^{-1}(1)| \leqslant |f^{-1}(0)|$, в противном случае $K(f) = f^{-1}(0)$. Для определенности предположим $K(f) = f^{-1}(1)$.

Рассмотрим множество матриц толерантности

$$\left\{ L_1 = \begin{pmatrix} V & 0_m \\ V^* & 0_m \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0_{m+1} \\ L_1^* & 0_{m+1} \end{pmatrix}, \dots \right.$$
$$\left. \dots, L_s = \begin{pmatrix} L_{s-1} & 0_{m+s-1} \\ L_{s-1}^* & 0_{m+s-1} \end{pmatrix} \right\},$$

где $V \in E'_m$. Матрица L_s принадлежит множеству E'_n и имеет вид

$$L_s = \begin{pmatrix} V \ 0_m \dots 0_m \\ \text{———————} \\ \text{———————} \\ \text{———————} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

По определению $K(f)_r = \mathbf{g}_r K(f)$, где $\mathbf{g}_r = ((-1)^{\alpha_{r1}}, \dots, (-1)^{\alpha_{rn}})$, $(\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rn}) \in K(f)$.

Из построения E'_n для матрицы $L_s \in E'_n$ существует вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega'_n$, удовлетворяющий условию

$$\tilde{L}_s \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

где $\tilde{L}_s = \begin{pmatrix} L_s \\ L_s^* \end{pmatrix}$. Тогда в силу (4), (7) и (8) булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ реализуется на ПЭ с весовым вектором $\mathbf{w}_* = \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ и порогом $A \in (c_q, c_{q+1})$, где c_q, c_{q+1} — соответственно q-, $q+1$-я компоненты $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_*}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{g}_r \tilde{L}^{\sigma^{-1}}) \cdot \mathbf{w}_*^{\mathrm{T}}$. Значит, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ пороговая.

Если предположить, что $K(f) = f^{-1}(0)$, то аналогично случаю $K(f) = f^{-1}(1)$ можно показать реализуемость функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на одном ПЭ. Однако функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{f}(x_1, \dots, x_n)$ одновременно пороговые или одновременно непороговые. Следовательно, $f(x_1, \dots, x_n)$ пороговая.

Теорема доказана.

2. Достаточное условие пороговости булевой функции. Вновь рассмотрим множество матриц толерантности (2) и введем следующие обозначения:

$L_i^*(q_i)$ — предматрица матрицы толерантности L_i^*, состоящая из q_i строк,

$\mathbf{e}_{q_i}^{i}$ — q_i-я строка матрицы толерантности L_i^*.

Определим над предматрицами толерантностей $(L_i^*(q_i)\underbrace{0 \dots 0}_{n-i})$, $(L_j^*(q_j)\underbrace{0 \dots 0}_{n-j})$ операцию $\square$ так:

$$(L_i^*(q_i)\underbrace{0 \dots 0}_{n-i}) \ \square \ (L_j^*(q_j)\underbrace{0 \dots 0}_{n-j}) =$$
$$= \begin{pmatrix} L_i^*(q_i)\overbrace{0 \dots 0}^{n-i} \\ L_j^*(q_j)\underbrace{0 \dots 0}_{n-j} \end{pmatrix}.$$

Здесь нулевой столбец 0 в предматрице толерантности $(L_t^*(q_t)\underbrace{0 \dots 0}_{n-t})$ имеет длину q_t. Очевидно, что

$$(L_i^*(q_i)\underbrace{0 \dots 0}_{n-i}) \ \square \ (L_j^*(0)\underbrace{0 \dots 0}_{n-j}) = (L_j^*(0)\underbrace{0 \dots 0}_{n-j}) \ \square$$
$$\square \ (L_i^*(q_i)\underbrace{0 \dots 0}_{n-i}) = (L_i^*(q_i)\underbrace{0 \dots 0}_{n-i}).$$

Теорема 5. Булева функция $f(x_1, \dots x_n)$ пороговая, если в множестве приведенных ядер $T(f)$ найдется такое ядро $K(f)_r$ и такие элементы $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$, что

$$K_\xi^\sigma(f)_r = (L_j 0_j \dots 0_j) \ \square \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n-j} (L_{j+i}^*(q_i)\underbrace{0 \dots 0}_{n-(j+i)}) \right). \tag{9}$$

Здесь $q_0 \geqslant q_1 \geqslant \dots \geqslant q_{n-j}$.

Доказательство. Пусть $K(f) = f^{-1}(1)$. Если имеет место (9) и выполняется неравенство $q_0 \geqslant q_1 \geqslant \dots \geqslant q_{n-j}$, то можно построить n-мерный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ такой, что

$$\forall \mathbf{X} \in K^\sigma(f)_r \ \forall \mathbf{Y} \in Z_2^n \diagdown K^\sigma(f)_r \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} > \mathbf{Y} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Действительно, пусть t — такое наименьшее целое положительное число, что $q_t \neq 0$ и $q_{t+1} = q_{t+2} = \dots = q_{n-j} = 0$, тогда построим n-мерный целочисленный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$:

а) $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = \omega_1 - 1, \dots, \omega_j = \sum_{i=1}^{j-1} \omega_i - 1$;

б) компоненты ω_{j+s} последовательно находим из равенств

$$\mathbf{e}_{q_s}^{j+s} \cdot (\omega_1, \dots, \omega_{j+s})^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}_{q_{s-1}}^{j+s-1} \cdot (\omega_1, \dots, \omega_{j+s-1})^{\mathrm{T}},$$
$$s = 1, 2, \dots, t;$$

в) $\omega_{j+t+1} = \omega_{j+t+2} = \dots = \omega_n = \mathbf{e}_{q_t}^{j+t} \cdot (\omega_1, \dots, \omega_{j+t})^{\mathrm{T}} - 1$. Построенный таким образом вектор удовлетворяет (10).

По определению $K(f)_r = \mathbf{g}_r K(f)$, где $\mathbf{g}_r = ((-1)^{\alpha_{r1}}, \dots, (-1)^{\alpha_{rn}})$ и $(\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rn}) \in K(f)$. В силу того, что $\mathbf{w}$ удовлетворяет (10), заключаем: булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ реализуется на ПЭ с весовым вектором $\mathbf{w}_* = \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ и порогом $A = \mathbf{g}_i(\mathbf{e}_{q_0}^{j}\underbrace{0 \dots 0}_{n-j})^{\sigma^{-1}} \cdot \mathbf{w}_*^{\mathrm{T}}$.

Если $K(f)=f^{-1}(0)$ и $\mathbf{w}_1=-\mathbf{w}$, то функция $f(x_1,\dots,x_n)$ реализуется на ПЭ с весовым вектором $\mathbf{w}_{1*}=\mathbf{g}_r\mathbf{w}_1^{\sigma^{-1}}$ и порогом $A=\mathbf{g}_r(\mathbf{e}^j_{q_*}\underbrace{0\dots0}_{n-j})^{\sigma^{-1}}\cdot\mathbf{w}^{\mathrm{T}}_{1_*}+1$.

Теорема доказана.

Теорема 6. Булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ с ядром $|K(f)|<11$ будет пороговой тогда и только тогда, когда в $T(f)$ найдется ядро $K(f)_r$, удовлетворяющее условию (9).

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — пороговая функция, тогда

$$K^\sigma_\xi(f)_r\lhd L\in E'_n. \qquad (11)$$

Если $|K(f)|=1$, то функция $f(x_1,\dots,x_n)$, очевидно, пороговая. Рассмотрим случай $1<|K(f)|<11$. В силу (11) найдется число $t\in\{2,3,4\}$ такое, что

$$(L_t\underbrace{0_t\dots0_t}_{n-t})\lhd K^\sigma_\xi(f)_r \quad \text{и} \quad (L_{t+1}\underbrace{0_{t+1},\dots,0_{t+1}}_{n-(t+1)})$$
$$\text{не} \lhd K^\sigma_\xi(f)_r. \qquad (12)$$

Пусть вектор $\mathbf{w}=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega^*_n$ удовлетворяет $\begin{pmatrix}L\\L^*\end{pmatrix}\cdot\mathbf{w}^{\mathrm{T}}=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}_{\mathbf{w}}$. Тогда из того, что $0>\omega_1>\omega_2>\dots>\omega_n$, и из (11), (12) при $t=2,3$ получим

$$\forall i\in\{1,2,\dots,|K(f)|\}\ \chi(K^\sigma_\xi(f)_r,i)\leqslant t-1.$$

Откуда

$$K^\sigma_\xi(f)_r=(L_t\underbrace{0_t\dots0_t}_{n-t})\ \Box\left(\mathop{\Box}_{s=0}^{n-t}(L^*_{t+s}(q_s)\underbrace{0\dots0}_{n-(t+s)})\right), \qquad (13)$$

где $2^{t-1}-1\geqslant q_0\geqslant q_1\geqslant\dots\geqslant q_{n-t}$.

Если $t=4$, то из $|K(f)|<11$ и из строения L^*_{t+s} $(s=0,1,\dots,n-t)$ следует $q_0<3$ и для всех $i_s\in\{1,2,\dots,q_s\}$ при $q_s\leqslant q_{s-1}$ $(s\geqslant1)$

$$\chi(L^*_{t+s}(q_s),i_s)\leqslant\chi(L^*_{t+s-1}(q_{s-1}),i_{s-1})\leqslant2.$$

Тогда в силу (11) и $0>\omega_1>\dots>\omega_n$ $K^\sigma_\xi(f)_r$ представляется в виде (13). Значит, необходимость доказана.

Достаточность вытекает из теоремы 5.

Часто при решении ряда практических задач распознавания образов, диагностики, при построении комбинационных схем, сталкиваемся с частично определенными булевыми функциями, поэтому разработка методов синтеза схем из ПЭ, реализующих частично определенные булевы функции,— актуальная и практически важная задача.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — частично определенная булева функция, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(*)$ — множества булевых векторов, на которых функция соответственно принимает значения 1, 0, неопределена. Предположим, что элементы из $f^{-1}(i)$ записаны некоторым образом в строки матрицы, для которой сохраняем обозначение $f^{-1}(i)$ $(i\in\{0,1,*\})$. Если к $f^{-1}(i)$ использовать теоретико-множественные операции, то под $f^{-1}(i)$ в дальнейшем будем понимать множество, а в противном случае—матрицу. Ядром $K(f)$ частично определенной булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ назовем множество $f^{-1}(1)$, если $|f^{-1}(1)|\leqslant|f^{-1}(0)|$ и $f^{-1}(0)$ в случае $|f^{-1}(0)|<|f^{-1}(1)|$. Неполностью определенная булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется пороговой, если существуют n-мерный вещественный вектор $\mathbf{w}=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ и число A — порог, такие, что

$$\mathbf{X}\in f^{-1}(0)\Rightarrow\mathbf{X}\cdot\mathbf{w}^{\mathrm{T}}<A,$$
$$\mathbf{X}\in f^{-1}(1)\Rightarrow\mathbf{X}\cdot\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\geqslant A.$$

Пусть $K(f)=\{\mathbf{a}_i=(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in})\,|\,i=1,2,\dots,q\}$ — ядро f, $\tilde{\mathbf{a}}_i=((-1)^{\alpha_{i1}},\dots,(-1)^{\alpha_{in}})$ и $T(f)=\{K(f)_i=\tilde{\mathbf{a}}_iK(f)\,|\,i=1,2,\dots,q\}$ — множество приведенных ядер частично определенной булевой функции f. Построим расширенное приведенное ядро $K(f,s)_i$ неполностью определенной булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ так: матрица $K(f,s)_i$ содержит все строки матрицы $K(f)_i$ и любых s строк матрицы $\tilde{\mathbf{a}}_if^{-1}(*)$. Очевидно, $K(f,0)_i=K(f)_i$.

Теорема 7. Частично определенная булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ пороговая, если можно построить такое расширенное приведенное ядро $K(f,s)_i$ $(s\in\{0,1,\dots,|f^{-1}(*)|\})$, для которого найдутся элементы $\sigma\in S_n$, $\xi\in S_t$ $(t=|K(f)|+s)$ такие, что

$$K^\sigma_\xi(f,s)_i=(L_j\underbrace{0_j\dots0_j}_{n-j})\ \Box\left(\mathop{\Box}_{r=0}^{n-j}(L^*_{j+r}(q_r)\underbrace{0\dots0}_{n-(j+r)})\right),$$

где $q_0\geqslant q_1\geqslant\dots\geqslant q_{n-j}$.

Доказательство следует из теоремы 5 и из определения пороговости частично определенной булевой функции.

3. Синтез порогово-дизъюнктивной сети из целочисленных ПЭ. Любая булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ представляется в виде дизъюнкции пороговых функций $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_t(x_1,\dots,x_n)$, т. е.

$$f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{t}f_i(x_1,\dots,x_n). \qquad (14)$$

Действительно, если $f^{-1}(1)=\{\mathbf{a}_1,\ \dots,\ \mathbf{a}_t\}\subseteq Z_2^n$ и $f_i^{-1}(1)=\{\mathbf{a}_i\}$ $(i=1,2,\dots,t)$, то получим тривиальное порогово-дизъюнктивное представление функции $f(x_1,\dots,x_n)$. Разложение (14) называется оптимальным, если оно содержит минимальное число пороговых функций. С точки зрения простоты и надежности функционирования порогово-дизъюнктивной сети важно, чтобы разложение (14) было оптимальным. Приведенный ниже алгоритм гарантирует оптимальность разложения (14) для класса булевых функций, достаточное условие (теорема 5) для которых будет и необходимым. Алгоритм не накладывает никакого ограничения на число аргументов n реализуемой функции, тогда как в алгоритмах [1, 2] $n\leqslant7$ и при синтезе порогово-дизъюнктивной сети в отличие от известных алгоритмов нет необходимости в таблице пороговых функций.

Пусть B — множество n-мерных булевых наборов. Запишем элементы B в строки матрицы $\|B\|$, а матрицу, полученную из $\|B\|$ путем перестановки строк $\xi \in S_q$ и столбцов $\sigma \in S_n$, обозначим $\|B\|_\xi^\sigma$. Через $m(B)$ обозначим максимальное подмножество множества B, удовлетворяющее условию: строки и столбцы матрицы $\|m(B)\|$ можно переставлять так, чтобы

$$\|m(B)\|_\xi^\sigma = (L_j \underbrace{0_j \dots 0_j}_{n-j}) \,\square \left(\overset{n-j}{\underset{r=0}{\square}} (L_{j+r}^{*}(q_r) \underbrace{0 \dots 0}_{n-(j+r)}) \right),$$

где $q_0 \geqslant q_1 \geqslant \dots \geqslant q_{n-j}$.

Рассмотрим алгоритм синтеза порогово-дизъюнктивной сети.

Шаг 1. По предъявленной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ запишем ядро $K(f) = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{q1}\}$ и построим множество приведенных ядер $T(f) = \{K(f)_i = \tilde{a}_i K(f) \mid_{i} = 1, 2, \dots, q_1\}$. Положим $M_0 = \varnothing$, $j = 0$ и перейдем к шагу 2.

Шаг 2. $j = j + 1$.

Шаг 3. Построим

$$\left\{N_i = m'(K(f)_i) \cap \left(K(f) \setminus \bigcup_{e=0}^{j-1} M_e\right) \mid i = 1, 2, \dots, q_j\right\},$$

где элементами $m'(K(f)_i)$ являются строки матрицы $\tilde{a}_i \|m(K(f)_i\|_\xi^{\sigma^{-1}})$. Во множестве $\{N_i \mid i = 1, 2, \dots, q_j\}$ найдем элемент N_s максимальной мощности и положим $M_j = m'(K(f)_s)$. Если в $\{N_i \mid i = 1, 2, \dots, q_j\}$ N_s — не единственный элемент максимальной мощности, т. е. $|N_s| = |N_{s_1}| = \dots = |N_{s_r}|$, то положим $t = s^* (s^* \in \{s, s_1, \dots, s_r\})$, $M_j = m'(K(f)_t)$ и перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Построим функцию $f_j : f_j^{-1}(1) = M_j$ и рассмотрим разность $K(f) \setminus \left(\bigcup_{e=0}^{j} M_e\right)$. Если

$$K(f) \setminus \left(\bigcup_{e=0}^{j} M_e\right) = \varnothing,$$

то перейдем к шагу 5, а в противном случае сформируем множество

$$\left\{K(f)_i = \tilde{\mathbf{a}}_i K(f) \mid \mathbf{a}_i \in K(f) \setminus \left(\bigcup_{e=0}^{j} M_e\right)\right\}.$$

Примем $q_j = \left| K(f) \setminus \left(\bigcup_{e=0}^{j} M_e\right) \right|$ и перейдем к шагу 2.

Шаг 5. Если $K(f) = f^{-1}(1)$, то $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{e=1}^{t} f_e(x_1, \dots, x_n)$, а если $K(f) = f^{-1}(0)$, то $f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{e=1}^{t} \bar{f}_e(x_1, \dots, x_n)$.

Здесь $\bar{f}_e(x_1, \dots, x_n)$ — инвертированная функция функции $f_e(x_1, \dots, x_n)$. Функции $f_1, f_2, \dots, f_j$ удовлетворяют условию теоремы 5 и целочисленные векторы структуры ПЭ, реализующие функции f_i $(i = 1, 2, \dots, j)$, находятся по этой же теореме. Остается синтезировать выходной ПЭ. Рассмотрим возможные случаи:

1) если $K(f) = f^{-1}(1)$, то целочисленным вектором структуры выходного ПЭ может быть выбран $j+1$-мерный вектор $[(\underset{(1)}{\omega}, \dots, \underset{(j)}{\omega}); \omega - 1]$, где ω — произвольное натуральное число;

2) если $K(f) = f^{-1}(0)$, то $j+1$-мерный вектор $[(\underset{(1)}{\omega}, \dots, \underset{(j)}{\omega}); j\omega]$, где $\omega > 1$ — натуральное число, может быть выбран в качестве целочисленного вектора структуры выходного ПЭ.

Процесс закончен.

Пусть $K(f)_i$ — приведенное ядро частично определенной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, s_i^* — число из $\{0, 1, \dots, |f^{-1}(*)|\}$ такое, что $\forall s_i \in \{0, 1, 2, \dots, |f^{-1}(*)|\}$ $(s_i \neq s_i^*)$ $|m(K(f, s_i^*)_i)| > |m(K(f, s_i)_i)|$. Тогда алгоритм синтеза порогово-дизъюнктивной сети, реализующей частично определенную булеву функцию, получится из приведенного выше алгоритма путем замены шага 3 на шаг 3′.

Шаг 3′. Построим

$$\left\{N_i = m'(K(f, s_i^*)_i) \cap \left(K(f) \setminus \bigcup_{e=0}^{j-1} M_e\right) \mid i = 1, 2, \dots, q_j\right\},$$

где элементами $m'(K(f, s_i^*)_i)$ являются строки матрицы $\tilde{\mathbf{a}}_i \|m(K(f, s_i^*)_i)\|_\xi^{\sigma^{-1}}$. Выбор элемента N_s максимальной мощности из $\{N_i \mid i = 1, 2, \dots, q_j\}$ осуществляется по такому же принципу, как в шаге 3.

Определим теперь класс булевых функций, для которых тривиальное порогово-дизъюнктивное представление является оптимальным.

Приведенное ядро $K(f)_i \in T(f)$ булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем выродженным, если $I(K(f)_i) = \varnothing$.

Теорема 8. Тривиальное порогово-дизъюнктивное представление булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будет оптимальным тогда и только тогда, когда все приведенные ядра этой функции вырождены.

Доказательство. Необходимость. Пусть тривиальное порогово-дизъюнктивное представление булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ является оптимальным, т. е.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{t} f_j(x_1, \dots, x_n), \quad |K(f_j)| = 1,$$

$j = 1, 2, \dots, t$. Предположим, что найдется приведенное ядро $K(f)_i \in T(f)$, удовлетворяющее условию $I(K(f)_i) \neq \varnothing$. Тогда в множестве $\{f_j \mid j = 1, 2, \dots, t\}$ найдется функция $f_s(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $|K(f_s)| \geqslant 2$. Полученное неравенство противоречит условию $|K(f_j)| = 1$, $j = 1, 2, \dots, t$.

Таблица 1

Функции f	Весовые векторы $(\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i, \omega_4^i, \omega_5^i, \omega_6^i, \omega_7^i, \omega_8^i, \omega_9^i, \omega_{10}^i, \omega_{11}^i, \omega_{12}^i)$												Пороги A_i
1	32	32	32	32	32	32	32	8	16	-1	-2	-4	209
2	-1	24	24	24	24	24	24	-2	4	8	16	16	161
3	-1	24	24	24	24	24	24	4	-2	8	16	16	161
4	-1	24	24	24	24	24	24	4	8	-2	16	16	161
5	-1	24	24	24	24	24	24	4	8	16	-2	16	161
6	24	-1	24	24	24	24	24	-2	4	8	16	16	161
7	24	24	-1	24	24	24	24	-2	4	8	16	16	161
8	24	24	-1	24	24	24	24	4	-2	8	16	16	161
9	24	24	-1	24	24	24	24	4	8	16	-2	16	161
10	24	24	24	-1	-2	16	16	4	8	16	16	16	137
11	24	24	24	-1	16	-2	16	4	8	16	16	16	137
12	24	24	24	-1	16	16	-2	4	8	16	16	16	137
13	24	24	24	-1	16	16	16	-2	4	8	16	16	137
14	24	24	24	-1	16	16	16	4	-2	8	16	16	137
15	24	24	24	-1	16	16	16	4	8	16	-2	16	137
16	24	24	24	16	-1	-2	16	4	8	16	16	16	137
17	24	24	24	16	-1	16	-2	4	8	16	16	16	137
18	24	24	24	16	-1	16	16	-2	4	8	16	16	137
19	24	24	24	16	-1	16	16	4	-2	8	16	16	137
20	24	24	24	16	16	-1	16	-2	4	8	16	16	137
21	24	24	24	-1	-2	-4	16	8	16	16	16	16	137
22	24	24	24	-1	16	16	-2	8	16	-4	16	16	137
23	24	24	24	16	-1	16	16	4	8	16	16	-2	137
24	24	24	24	16	16	-1	-2	8	-4	16	16	16	137
25	24	24	24	16	16	-1	-2	8	16	-4	16	16	137
26	-1	-2	8	8	8	8	8	4	8	8	8	8	65
27	-1	8	-2	8	8	8	8	4	8	8	8	8	65
28	-1	8	8	-2	8	8	8	4	8	8	8	8	65
29	-1	8	8	8	-2	8	8	4	8	8	8	8	65
30	-1	8	8	8	8	-2	8	4	8	8	8	8	65
31	-1	8	8	8	8	8	-2	4	8	8	8	8	65
32	8	-1	-2	8	8	8	8	4	8	8	8	8	65
33	8	-1	8	-2	8	8	8	4	8	8	8	8	65
34	8	-1	8	8	-2	8	8	4	8	8	8	8	65
35	8	-1	8	8	8	-2	8	4	8	8	8	8	65
36	8	-1	8	8	8	8	-2	4	8	8	8	8	65
37	8	8	-1	-2	8	8	8	4	8	8	8	8	65
38	8	8	-1	8	-2	8	8	4	8	8	8	8	65
39	8	8	-1	8	8	-2	8	4	8	8	8	8	65
40	8	8	-1	8	8	8	-2	4	8	8	8	8	65
41	8	8	8	8	8	8	-8	-8	-8	1	2	2	51
42	4	-4	4	4	4	4	4	4	-4	-4	1	2	29
43	4	4	4	-4	-4	4	-4	4	4	4	1	2	29
44	4	4	4	-4	-4	4	4	4	4	-4	1	2	29
45	4	4	4	-4	4	-4	-4	4	4	4	1	2	29
46	4	4	4	-4	4	-4	4	4	4	-4	1	2	29
47	4	4	4	4	-4	-4	-4	4	4	4	1	2	29
48	4	4	4	4	-4	-4	4	4	4	-4	1	2	29
49	4	4	4	4	-4	4	-4	4	4	-4	1	2	29
50	4	4	4	4	4	4	-4	4	-4	-4	1	2	29
51	4	4	4	4	4	-4	4	4	-4	-4	1	2	29
52	4	4	4	4	4	-4	-4	-4	4	4	1	2	29
53	4	4	4	4	4	4	-4	-4	4	-4	1	2	29
54	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	8
55	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	8
56	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	8
57	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	8
58	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	8
59	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	8
60	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	8
61	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	8
62	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	8
63	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	8
64	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	8
65	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	8
66	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	8
67	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	8

Следовательно, предположение неверно и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $K(f) = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ и для всех $K(f)_i \in T(f)$ $I(K(f)_i) = \varnothing$. Тогда все приведенные ядра булевых функций $g_r(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$K(g_r) = K(f) \setminus \bigcup_{s=1}^{r-1} \{\mathbf{a}_s\}, \qquad r = 1, 2, \ldots, q,$$

также вырождены $\left(\text{при этом полагаем, что } \bigcup_{s=1}^{0} \{\mathbf{a}_s\} = \varnothing\right)$. Следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{q} f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad |K(f_j)| =$$

$$= |m(K(g_j))| = |\{\mathbf{a}_{i_j}\}| = 1 (i_j \in \{1, \ldots, q\}).$$

Теорема доказана.

Алгоритм синтеза порогово-дизъюнктивной сети программно реализован на языке ПЛ-1. Построена порогово-дизъюнктивная схема из целочисленных ПЭ, реализующая функцию Мура [2]. Если $f(x_1, \ldots, x_{12})$ — функция Мура, то она представляется так:

$$f(x_1, \ldots, x_{12}) = \bigvee_{i=1}^{67} f_i(x_1, \ldots, x_{12}).$$

Весовые векторы и пороги ПЭ, реализующие функции f_i, приведены в табл. 1.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. Н. Айзенбергу за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дертоузос М. Пороговая логика.— М.: Мир, 1967.— 342 с.
2. Бутаков Е. А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов.— М.: Энергия, 1970.— 325 с.
3. Дворцин В. И., Иваненко В. И. Структурный синтез управляющих устройств в системах автоматического управления на основе сетей из пороговых элементов.— Кибернетика, 1966, № 5, с. 49—65.
4. Мкртчян С. О. Проектирование логических устройств ЭВМ на нейронных элементах. М. Энергия, 1977.— 200 с.
5. Вавилов Е. Н. и др. Синтез схем на пороговых элементах. М.: Сов. радио, 1970.— 368 с.
6. Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики/Н. Н. Айзенберг, А. А. Бовди, Э. И. Герго, Ф. Э. Гече.— Кибернетика, 1980, № 2, с. 26—30.
7. Гече Ф. Э. Синтез порогово-дизъюнктивной сети.— В кн.: Оптимизация вычислений. Киев: ИК АН УССР, 1979, с. 13—21.
8. Яджима С., Ибараки Т. Нижняя оценка числа пороговых функций.—Кибернет. сб. Нов сер., 1969, вып. 6, с. 72—81.

Поступила 09.10.81