МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу

Погоріляк О.О., Сливка-Тилищак Г.І., Тегза А.М.

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ:

методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій

Ужгород – 2023

Методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій/*Укладачі: О.О. Погоріляк, Г.І. Сливка-Тилищак, А.М. Тегза.* Ужгород: ДВНЗ "УжНУ 2023. – 49с.

У методичних вказівках проілюстровано розв'язування опорних задач математичного аналізу з тем: «Подвійні інтеграли», «Потрійні інтеграли», «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли». Також після кожної з тем наведено завдання для індивідуальних та самостійних робіт.

Методичні вказівки розроблено для студентів факультету математики та цифрових технологій всіх спеціальностей.

Рекомендовано до друку засіданням кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, протокол №11 від 16 червня 2023 року.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ "УжНУ протокол №10 від 20 червня 2023 року.

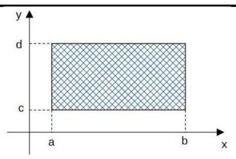
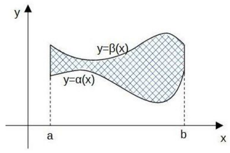
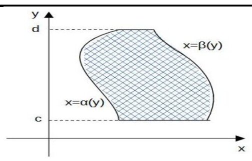
Рецензенти:
докт. техн. наук, проф. Гече Ф.Е.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Рейтій О.К.

ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Теоретичні питання

1. Подвійні інтеграли, його властивості.

2. Зведення подвійного інтеграла до повторного.

Область інтегрування D	Зведення до повторного інтеграла
	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$
	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$
	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$

3. Заміна змінних у подвійному інтегралі.

Загальний випадок заміни $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) \cdot \lvert J\rvert d\xi d\eta,$ де $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$
Полярні координати $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \qquad \lvert J\rvert = r$
Узагальнені полярні координати $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}, \qquad \lvert J\rvert = abr$

4. Геометричні та фізичні застосування подвійних інтегралів.

Площа плоскої фігури D :	$S = \iint\limits_D dxdy$
Об'єм циліндричного бруса:	$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$
Маса плоскої пластини D з густиною $\rho(x,y)$:	$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$
Координати центра мас пластини D	$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy;$ $y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy.$

Детальніше з даним метеріалом можна ознайомитись у підручниках [4]-[6].

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *У подвійному інтегралі* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *розставити межі повторного інтегрування в одному і другому порядку для вказаних областей:*

а) $D = \{x + y \le 1,\ x - y \le 1, x \ge 0\}$.

б) D *– трикутник із сторонами* $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

в) $D = \{y \ge \frac{x}{2},\ y \le 2x, y \le \frac{2}{x}\}$.

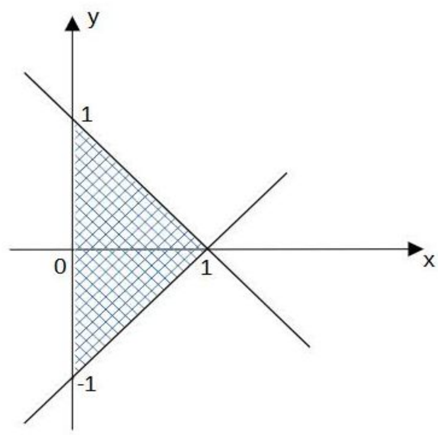
Розв'язок.

а) Відобразимо область D на рисунку.

При зовнішньому інтегруванні по x, одержимо такий перехід від подвійного до повторного інтеграла: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy.$

При зовнішньому інтегруванні по y область інтегрування потрібно розбити на дві частини прямою $y = 0$.

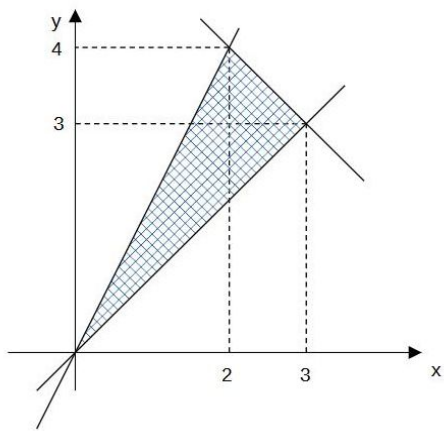
Тоді матимемо такий перехід: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_0^{y+1} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y)dx.$



б) Аналогічно до попереднього прикладу область інтегрування потрібно розбити на підобласті. При зовнішньому інтегруванні по x, область D

ділимо на дві частини прямою $x = 2$. У цих підобластях переходимо до повторних інтегралів. Одержимо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{6-x} f(x,y)dy.$$

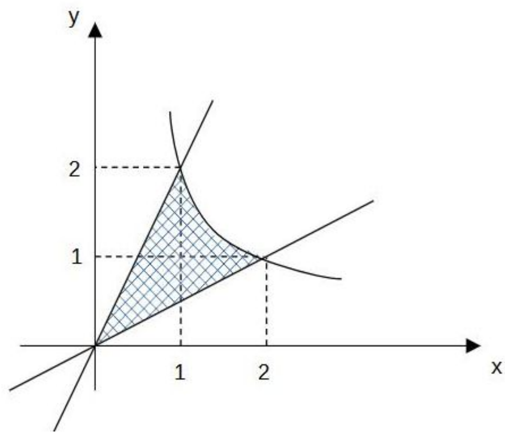


При зовнішньому інтегруванні по y область інтегрування розбиваємо на дві частини прямою $y = 3$.
Тоді матимемо такий перехід:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{6-y} f(x,y)dx.$$

в) При зовнішньому інтегруванні по x, область D ділимо на дві частини прямою $x = 1$. У цих підобластях переходимо до повторних інтегралів. Одержимо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)dy.$$



При зовнішньому інтегруванні по y область інтегрування розбиваємо на дві частини прямою $y = 1$.
Тоді матимемо такий перехід:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x,y)dx.$$

Завдання 2. *У повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:*

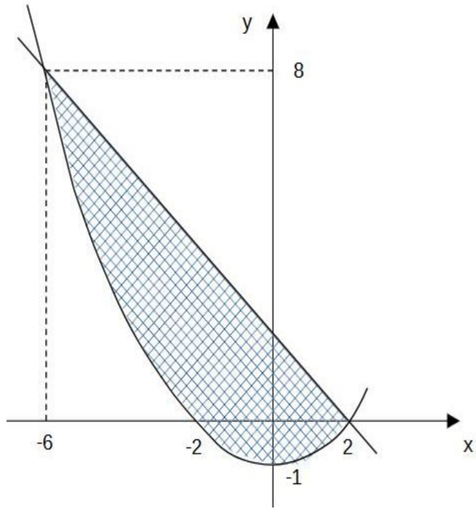
а) $\displaystyle\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

б) $\displaystyle\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy, \quad (a > 0).$

Розв'язок.

а)

Для того, щоб змінити порядок інтегрування спершу відобразимо область $D = \{x = -6,\ x = 2,\ y = \frac{x^2}{4} - 1,\ y = 2 - x\}$.

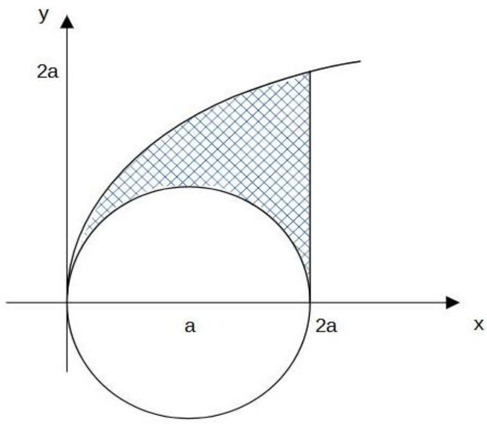


Тепер бачимо, що для можливості зовнішнього інтегрування по змінній y необхідно область інтегрування розбити на дві частини прямою $y = 0$. Тоді матимемо суму таких повторних інтегралів:

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

б)

З даного повторного інтеграла відновимо область інтегрування: $D = \{x = 0,$ $x = 2a,\ y = \sqrt{2ax - x^2},\ y = \sqrt{2ax}\}$.



Тепер бачимо, що для зміни порядку інтегрування, необхідно область інтегрування D розбити на три частини прямими $y = a$ та $y = 2a$ Тоді матимемо суму таких повторних інтегралів:

$$\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \;=\; \int_{0}^{a} dy \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx \right) +$$

$$+ \int_{a}^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

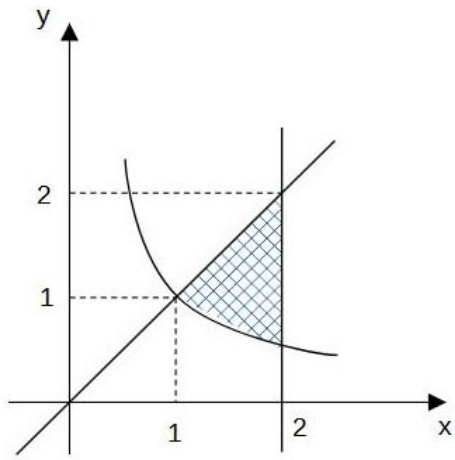
Завдання 3. *Обчислити подвійні інтеграли:*

а) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, якщо D – область, обмежена лініями $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

б) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, якщо D – область, обмежена лініями $y = x$, $y = x+a$, $y = a$, $y = 3a$ $(a > 0)$.

Розв'язок.

а)



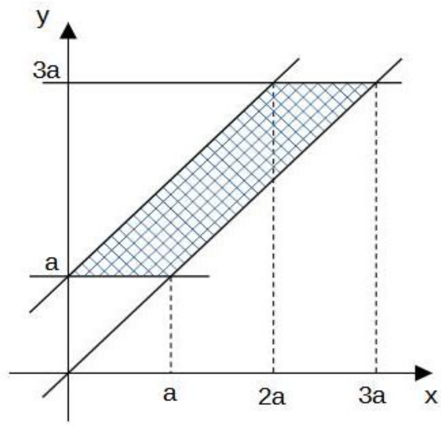
Зобразимо область інтегрування на рисунку. Бачимо, що простішим способом переходу до повторних інтегралів є спосіб, при якому зовнішнє інтегрування ведеться по змінній x. Тоді одержимо:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy =$$

$$= \int\limits_1^2 x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int\limits_1^2 (x^3 - x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{9}{4}$$

б)



Зобразивши область інтегрування на рисунку, видно, що в даному випадку простішим способом переходу до повторних інтегралів є спосіб, при якому зовнішнє інтегрування ведеться по змінній y. Тоді одержимо:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_a^{3a} dy \int\limits_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx =$$

$$= \int\limits_a^{3a} \left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right)\Big|_{y-a}^{y} dy = \int\limits_a^{3a} \left(\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-a)^3}{3} - y^2(y-a)\right) dy = 14a^4.$$

Завдання 4. *У подвійному інтегралі* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *перейти до полярних (або до криволінійних) координат і поставити межі повторного інтегрування, якщо:*

а) D – область, обмежена лініями $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$, $y = x$ і $y = 2x$.

б) D – область, яка є спільною частиною двох кругів $x^2+y^2 \le ax$, $x^2+y^2 \le by$.

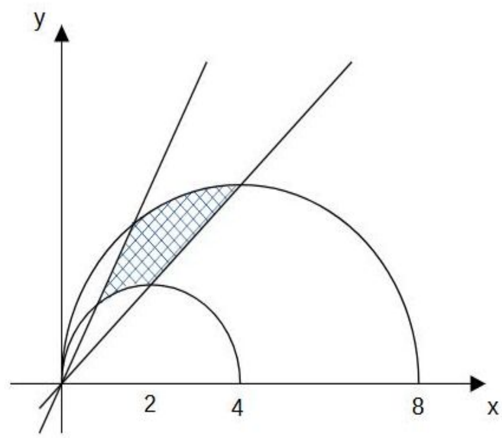
в) D – параболічний сегмент $-a \le x \le a$, $\frac{x^2}{a} \le y \le a$.

г) D – область, обмежена лініями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ $(x, y > 0)$.

Розв'язок.

а) Використаємо формули перетворення декартових у полярні координати: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. При цьому якобіан переходу дорівнює $|J| = r$. Підставивши дані координати в початкові рівняння ліній, одержимо, що пряма $y = x$ відобразиться на $r\sin\varphi = r\cos\varphi$, звідки $\operatorname{tg}\varphi = 1$, а отже $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Аналогічно для прямої $y = 2x$ одержимо $\operatorname{tg}\varphi = 2$, тобто $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. Коло $x^2 + y^2 = 4x$ перейде при такому відображенні у $r = 4\cos\varphi$, а коло $x^2 + y^2 = 8x$ у коло $r = 8\cos\varphi$.

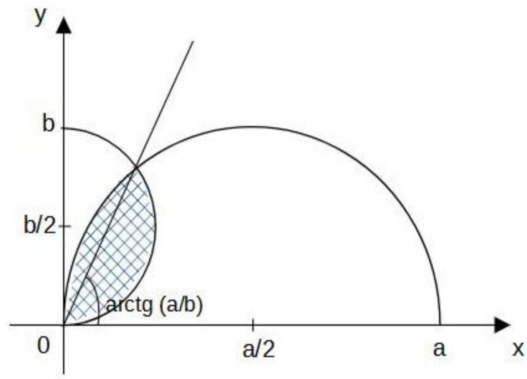
Тоді, дивлячись на рисунок області D, можемо від подвійного інтеграла перейти до повторного, використовуючи полярні координати. Отже, щоб покрити заштриховану область потрібно пройти променю від 45° до arctg 2, а радіус-вектор буде змінюватись від меншого кола до більшого. Тому отримаємо такий результат:



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\cdot r\,dr.$$

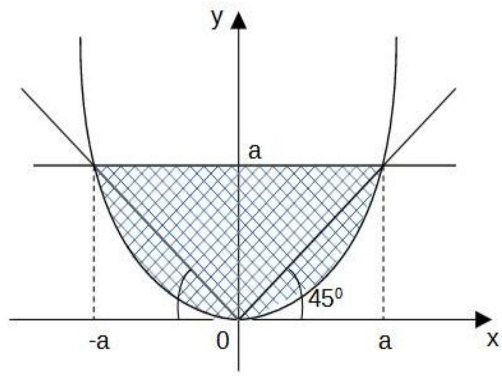
б) Запишемо аналогічно до попереднього прикладу рівняння ліній у полярних координатах. Матимемо: $r = a\cos\varphi$ і $r = b\sin\varphi$. Знайдемо перетин цих кіл: $a\cos\varphi = b\sin\varphi$, звідки $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$, отже вони перетинаються під кутом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Це значить, що на проміжку $\varphi \in [0,\ \operatorname{arctg}\frac{a}{b}]$ маємо криволінійний сектор, обмежений кривою

$r = b\sin\varphi$, а на проміжку $\varphi \in [\operatorname{arctg}\frac{a}{b},\ \frac{\pi}{2}]$ – криволінійний сектор, обмежений кривою $r = a\cos\varphi$. Тобто область D маємо розбити на дані дві підобласті, на кожній з яких проводимо інтегрування. В результаті одержимо:
$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$



$$= \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\,dr + \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\,dr.$$

в) Оскільки парабола $y = \frac{x^2}{a}$ і пряма $y = a$ перетинаються у двох точках $(-a,\ a)$ та $(a,\ a)$, то з малюнку видно, що область D потрібно розбити на три підобласті, з такими кутовими проміжками: $[0,\ \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}]$ та $[\frac{3\pi}{4},\ \pi]$. В результаті кожний криволінійний сектор буде обмеженим лиш однією дугою. Запишемо рівняння цих ліній у полярних координатах: $y = a$ приймає вигляд $r = \frac{a}{\sin\varphi}$, парабола $y = \frac{x^2}{a}$ матиме зображення $r = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.



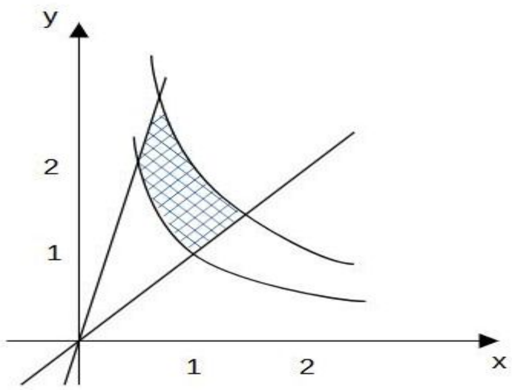
Отже, одержимо суму трьох повторних інтегралів:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\,dr +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\,dr.$$

г)

Для даних кривих $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ $(x, y > 0)$ зручно буде застосувати інші криволінійні координати. Враховуючи певну закономірність рівнянь, виберемо формули перетворення таким чином: $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, звідки $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$. Тоді дана область відобразиться на прямокутник, обмежений лініями $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 4$.

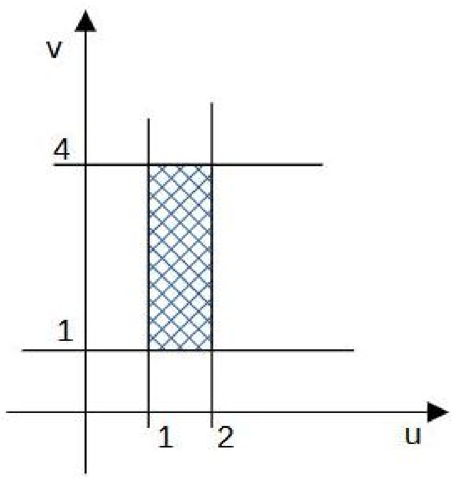


Знайдемо якобіан переходу:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{u}{2v\sqrt{uv}} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{u}{4uv} + \frac{uv}{4uv^2} = \frac{1}{2v}.$$

Тепер можна переходити до повторних інтегралів:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 du \int\limits_1^4 f(\sqrt{\tfrac{u}{v}},\ \sqrt{uv})\tfrac{1}{v}\, dv.$$



Завдання 5. *Обчислити подвійні інтеграли:*

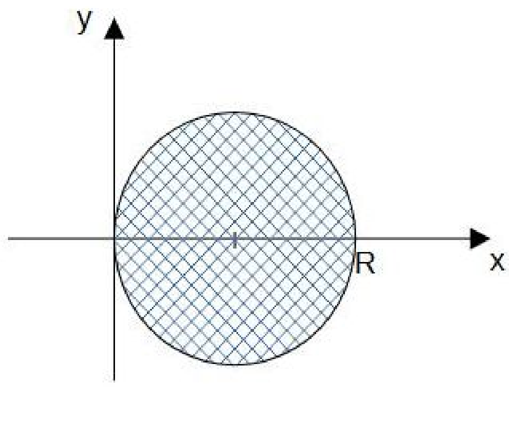
а) $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, якщо D – круг $x^2 + y^2 \le Rx$;

б) $\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dxdy$, якщо D – область, обмежена лінією $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ (частина першого квадранту).

Розв'язок.

а)

Обчислимо даний інтеграл, переходячи до полярних координат. Тоді коло $x^2 + y^2 = Rx$ матиме задання $r = R\cos\varphi$. Якобіан перетворення $|J| = r$. Одержимо: $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy =$ $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, dr =$



$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{R\cos\varphi} (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - r^2) = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi =$$

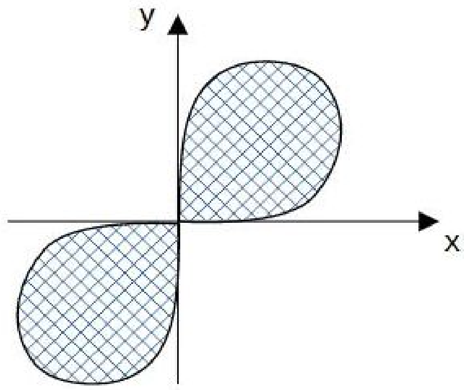
Після застосування формули Ньютона-Лейбніца бачимо, що підінтегральна функція є парною відносно змінної φ і межі інтеграла є симетричними, то матимемо продовження:

$$= -\frac{2R^3}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\varphi - 1)\, d\varphi = \frac{2R^3}{3}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi R^3}{3} = \frac{R^3}{3}(\pi - \frac{4}{3}).$$

б)

Для даної кривої, яка задає одну з форм лемніскати Бернуллі $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ варто застосувати узагальнені полярні координати:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}r\cos\varphi \\ y = \sqrt{3}r\sin\varphi. \end{cases}$$



При цьому якобіан переходу $|J| = \sqrt{6}r$. Тоді лемніската матиме задання

$$r = \sqrt[6]{\frac{\sin 2\varphi}{2}}.$$

Оскільки за умовою потрібно розглянути лиш половину площі лемніскати, то матимемо такий повторний інтеграл:

$$\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[6]{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} \sqrt{\sqrt{6}r^2\sin\varphi\cos\varphi}\cdot\sqrt{6}r\, dr =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{6^3}}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[6]{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} d\varphi = \frac{\sqrt[4]{6^3}}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$$

Завдання 6. *Обчислити площі, обмежені такими кривими:*

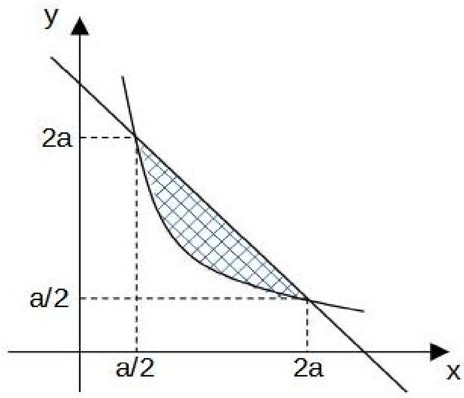
а) $xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a, \quad a > 0;$

б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 \geq a^2.$

Розв'язок.

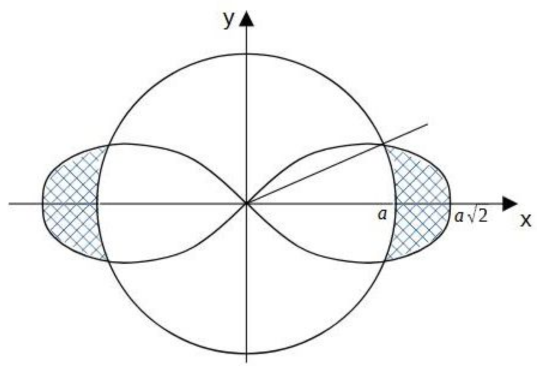
а)

Відобразимо дану площу на графіку і знайдемо точки перетину кривих $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$, які нанесемо на рисунок. Тепер обчислимо площу даної криволінійної трапеції, як подвійний інтеграл по цій області. $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int\limits_{\frac{a^2}{x}}^{2.5a-x} dy = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{2a} \left(2.5a - x - \frac{a^2}{x}\right) dx =$
$= \left(2.5ax - \frac{x^2}{2} - a^2 \ln|x|\right)\Big|_{\frac{a}{2}}^{2a} =$
$= a^2\left(\frac{15}{8} - \ln 4\right).$



б)

Відобразивши дані криві на графіку і, врахувавши симетрію області, шукану площу можна обчислити як $S = 4\iint\limits_{D_1} dxdy$, де D_1 – область першого квадранту. Для обчислення подвійного інтегралу зручно перейти до полярних координат. Лемніската Бернуллі і коло задаються рівняннями $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ і $r = a$ відповідно. Якщо прирівняти дані рівняння, то одержимо $\varphi = \frac{\pi}{6}$, тобто промінь, що проходить через точку перетину ліній має $\angle 30°$ з додатнім напрямком осі абсцис. Отже,



$S = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos(2\varphi) - 1)\, d\varphi = 2a^2 (\sin(2\varphi) - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$
$= \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$

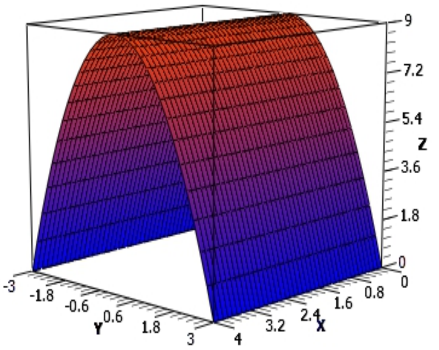
Завдання 7. *Обчислити об'єми тіл, обмежених такими поверхнями:*

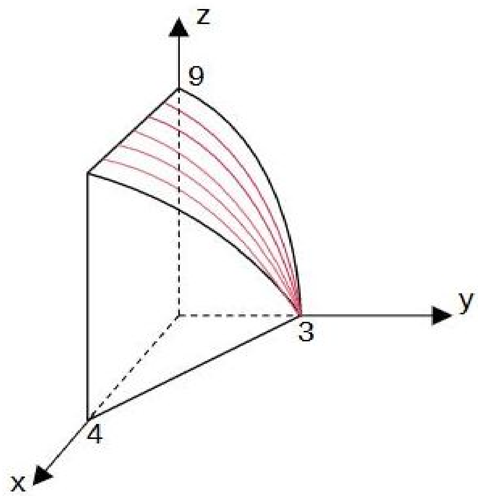
а) $z = 9 - y^2$, $3x + 4y = 12$, та координатними площинами $(y \geq 0)$;

б) $x^2 + y^2 = 4$, $z = \frac{y^2}{2} + 1$, $z = 0$.

Розв'язок.

а) Поверхня $z = 9 - y^2$ задає параболічний циліндр; рівняння $3x + 4y = 12$ задає площину, паралельну осі OZ. В результаті перетину їх із координатними площинами (для $y \geq 0$) одержимо трикутну призму зверху накритою поверхнею параболічного циліндра. Тому в ролі підінтегральної функції беремо $z = 9 - y^2$.



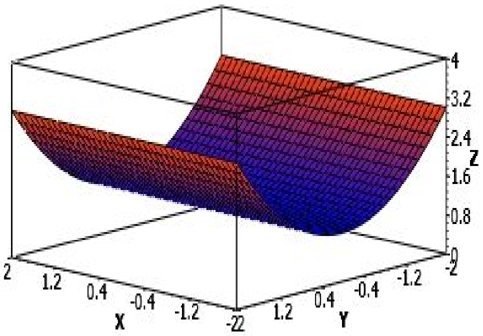


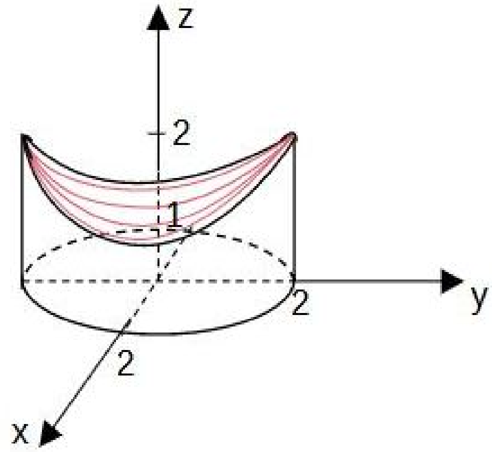
Тоді

$$V = \iint\limits_D (9-y^2)dxdy = \int\limits_0^3 (9-y^2)dy \int\limits_0^{\frac{12-4y}{3}} dx = \int\limits_0^3 (9-y^2)\frac{12-4y}{3}dy$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^3 (y^3 - 3y^2 - 9y + 27)dy = \frac{4}{3}\left(\frac{y^4}{4} - y^3 - \frac{9}{2}y^2 + 27y\right)\Big|_0^3 = 45$$

б) Поверхня $x^2 + y^2 = 4$ задає круговий циліндр витягнутий вздовж осі OZ; рівняння $z = \frac{y^2}{2} + 1$ задає параболічний циліндр прогнутий донизу і піднятий на 1 одиницю по осі OZ; $z = 0$ – це площина XOY. Три поверхні задають круговий циліндр накритий зверху параболічним циліндром, тому підінтегральною функцією є $z = \frac{y^2}{2} + 1$.





Тому об'єм виражаємо інтегралом:
$\iint\limits_D (\frac{y^2}{2}+1)dxdy$, де $D = \{x^2+y^2 \leq 4\}$. Очевидно, найзручнішим способом обчислення такого подвійного інтеграла є перехід до полярних координат. Враховуючи симетрію об'ємного тіла, матимемо:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \left(\frac{r^2\sin^2\varphi}{2}+1\right) rdr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\cdot\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^2 d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2\varphi+2)d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3-\cos 2\varphi)d\varphi = 6\pi - 2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi$$

Завдання 8. *Знайти масу пластинки з густиною $\rho(x,y) = 2x$, обмеженої кривою: $(x^2+y^2)^2 = 2xy, \quad x, y > 0$*

Розв'язок.

Оскільки дана крива задає лемніскату, то зручніше перейти до полярних координат. Матимемо рівняння $r = \sqrt{\sin 2\varphi}, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Масу пластинки обчислюємо за формулою:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \iint\limits_D xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi)^{\frac{5}{2}}d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}B(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{7}{4})}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{16}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ розставити межі інтегрування в одному і другому порядку:

   1) $D: \quad \{x+y \le 2,\, x-y \le 2,\, x \ge 0\}$;
   2) D — трикутник зі сторонами $\{y=x,\, y=3x,\, x=3\}$;
   3) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 4,\, y \ge x^2\}$;
   4) $D: \quad \{y=x^2-2x,\, y=x\}$;
   5) $D: \quad \{x=2,\, y=\sqrt{x},\, y=-x^3\}$;
   6) $D: \quad \{y=|x-3|,\, y=3\}$;
   7) $D: \quad \{y=|2x-1|,\, y=2\}$;
   8) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 10,\, 3y \ge x^2\}$;
   9) $D: \quad \{x+y \le 3,\, x-y \le 3,\, x \ge 0\}$;
   10) $D: \quad \{y=x^3,\, y=2-x^2,\, x \ge 0\}$;
   11) $D: \quad \{y=4-x^2,\, 3x-2y=6,\, x \ge 0\}$;
   12) $D: \quad \{x^2+y^2=9,\, x+y \ge 3,\, y \ge 1.5\}$;
   13) $D: \quad \{y \le 3\log_3(x+1),\, y \ge 0,\, x \le 3\}$;
   14) $D: \quad \{y \le 3^{x+1},\, y \ge 0,\, x=-1,\, x=1\}$;
   15) $D: \quad \{y=2-(x-1)^2,\, y=0\}$;
   16) $D: \quad \{y=|x+2|,\, y=3\}$;
   17) $D: \quad \{y=x^2-3x-4,\, y=1\}$;
   18) $D: \quad \{y=|x|,\, y=1-x^2\}$;
   19) $D: \quad \{y=x^2+3x-4,\, y=x+4\}$;
   20) $D: \quad \{y=|x|-1,\, y=1-x^2\}$.

2. Обчислити подвійні інтеграли:

   1) $\iint\limits_D e^{x^2+y} x dxdy, \qquad D: \ \{x \in [0,\, 1],\ y \in [0,\, 2]\}$;
   2) $\iint\limits_D x \sin y dxdy, \qquad D: \ \{x \in [1,\, 2],\ y \ge 0,\ y \le 3x-1\}$;
   3) $\iint\limits_D x^2 y e^{xy} dxdy, \qquad D: \ \{x \in [0,\, 1],\ y \in [1,\, 2]\}$;
   4) $\iint\limits_D e^y dxdy, \qquad D: \ \{x \in [0,\, 1.5],\ y \ge x,\ y \le 3-x\}$;

5) $\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy, \quad D:\ \{x\in[0,\,0.5],\ y\in[0,\,0.5]\}\,;$

6) $\iint\limits_D (x-y)dxdy, \quad D:\ \{x\in[1,\,4],\ y\geq 4/x,\ y\leq 5-x\}\,;$

7) $\iint\limits_D (5x^2y^2+x^4y)dxdy, \quad D:\ \{x\in[0,\,1],\ y\in[0,\,x]\}\,;$

8) $\iint\limits_D y\sin xydxdy, \quad D:\ \left\{x=1,\ x=2,\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi\right\}\,;$

9) $\iint\limits_D e^{2y}dxdy, \quad D:\ \{x\in[1,\,2],\ y\in[0,\,\ln x]\}\,;$

10) $\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)dxdy, \quad D:\ \left\{x\in[0,\,\frac{\pi}{2}],\ y\in[0,\,2]\right\}\,;$

11) $\iint\limits_D \ln ydxdy, \quad D:\ \left\{x\in[0,\,1],\ y\geq e^x,\ y\leq e^{2x}\right\}\,;$

12) $\iint\limits_D \frac{x^2y}{1+y^2}dxdy, \quad D:\ \{x\in[0,\,1],\ y\in[0,\,1]\}\,;$

13) $\iint\limits_D x\cos(x^2+y)dxdy, \quad D:\ \left\{x\in[0,\,\sqrt{\pi}],\ y\in[0,\,\frac{\pi}{2}]\right\}\,;$

14) $\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy, \quad D:\ \left\{x\in[0,\,1],\ y\geq x^2,\ y\leq x\right\}\,;$

15) $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy, \quad D:\ \{x\in[0.5,\,1],\ y\in[\ln 3,\ \ln 4]\}\,;$

16) $\iint\limits_D (2x+y)dxdy, \quad D:\ \{x\in[1,\,2],\ y\geq 2/x,\ y\leq 3-x\}\,;$

17) $\iint\limits_D (2x^2y-xy^3)dxdy, \quad D:\ \{x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1-x\}\,;$

18) $\iint\limits_D x\cos(xy)dxdy, \quad D:\ \left\{x=0,\ x=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi\right\}\,;$

19) $\iint\limits_D e^{3x-y}dxdy, \quad D:\ \{x\in[1,\,e],\ y\in[0,\,\ln x]\}\,;$

20) $\iint\limits_D x^3y\sin(xy^2)dxdy, \quad D:\ \left\{x\in[0,\,\frac{\pi}{4}],\ y\in[0,\,x]\right\}\,.$

3. Перейти до полярних координат у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$:

1) $D:\quad \{x=0,\, y=x,\, y=1\};$

2) $D:\quad \{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1,\, \frac{x}{2}+\frac{y}{3}\geq 1\};$

3) $D:\quad \{x^2+y^2\leq 6y,\, x\leq 0\};$

4) $D:\quad \{x^2+y^2\geq 2x,\ \ x^2+y^2\leq 2y,\ \ x\geq 0\};$

5) $D:\quad \{x^2+y^2\leq -x\};$

6) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 4x, \;\; y \le \frac{x}{2}\}$;

7) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 2, \;\; y \ge x\}$;

8) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 10, \;\; y \le -x, \;\; y \ge x\}$;

9) $D: \quad \{x+y \le 3, \;\; x^2+y^2 \le 9\}$;

10) $D: \quad \{y \le 4-x^2, \;\; y \ge 0\}$;

11) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 4, \;\; y \ge x^3, \;\; y \ge 0\}$;

12) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 1, \;\; y \ge -x^3, \;\; y \ge 0\}$;

13) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 2x, \;\; y=0, \;\; y=x\}$;

14) $D: \quad \{y = 3-3^x, \;\; y=-x, y=x\}$;

15) $D: \quad \{y = 3-x^2, y=x\}$;

16) $D: \quad \{x=0, y=2x, y=1\}$;

17) $D: \quad \{\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1, \frac{x}{2}+y \ge 1\}$;

18) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 1, \;\; y \le x^4, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0\}$;

19) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 8x, \;\; x^2+y^2 \ge 2x, \;\; y \ge 0\}$;

20) $D: \quad \{x^2+y^2 \le 1, \;\; y \ge -\sqrt{x}\}$.

4. Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних (або узагальнених полярних) координат:

1) $\iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy, \quad D: \left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 1, \;\; y \ge 0\right\}$;

2) $\iint\limits_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \le 2y, \;\; x^2+y^2 \ge y\right\}$;

3) $\iint\limits_D xy dxdy, \quad D: \left\{\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0\right\}$;

4) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \le 4, \;\; y \ge x, \;\; y \ge 0\right\}$;

5) $\iint\limits_D (x^2+1) y dxdy, \quad D: \left\{\frac{x^2}{9}+y^2 \le 1\right\}$;

6) $\iint\limits_D x dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \ge 2y, \; x^2+y^2 \le 4y\right\}$;

7) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy, \quad D: \left\{y \le 2x, \;\; x^2+y^2 \le 4y\right\}$;

8) $\iint\limits_D 2y dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \ge 2x, \; x^2+y^2 \le 4x\right\}$;

9) $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2} dxdy, \quad D: \left\{1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$;

10) $\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}dxdy, \quad D: \left\{1 \le \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 4\right\};$

11) $\iint\limits_D ydxdy, \quad D: \left\{x^2+(y-1)^2 \le 1,\ x \ge 0,\ \ y \ge 0.5\right\};$

12) $\iint\limits_D xdxdy, \quad D: \left\{(x-2)^2+y^2 \le 4,\ x \ge 1,\ \ y \ge 0\right\};$

13) $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy, \quad D: \left\{(x^2+y^2)^2 = xy,\ \ x,y \ge 0\right\};$

14) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \le 1,\ x,y \ge 0\right\};$

15) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy, \quad D: \left\{x^2+\frac{y^2}{4} \le 1\right\};$

16) $\iint\limits_D (x+1)dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \ge y,\ x^2+y^2 \le 2y\right\};$

17) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad D: \left\{y \le x,\ \ x^2+y^2 \le 8y\right\};$

18) $\iint\limits_D (2+y)dxdy, \quad D: \left\{x^2+y^2 \le -4x,\ \ y \ge 0\right\};$

19) $\iint\limits_D \sqrt{2-x^2-y^2}dxdy, \quad D: \left\{1 \le x^2+y^2 \le 2\right\};$

20) $\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}dxdy, \quad D: \left\{1 \le \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 4\right\};$

5. Обчислити площу, обмежену кривими:

1) $y^2 = 4x; \quad y = 3-x, \quad y \ge 0;$
2) $(x^2+y^2)^2 = 8xy;$
3) $x^2+y^2 = 2x, \ \ x^2+y^2 = 4x, \ \ y = x, \quad y = 0;$
4) $(x^2+y^2)^2 = 3(x^2-y^2);$
5) $x^2+y^2 = 72, \quad 6y = -x^2, \quad (y \le 0);$
6) $y^2 = 2x, \ \ x+y = 2;$
7) $x = y, \ \ x = 2y, \ \ x+y = 2, \ \ x+3y = 2;$
8) $D: \quad \{x^2 = y, \ \ x^3 = y^2\};$
9) $D: \quad \{y = \frac{\sqrt{x}}{2}, \ \ y = \frac{1}{2x}, \ \ x = 16\};$
10) $D: \quad \{x+y = 2, x+y = 5, y = x, \quad y = 4x\};$
11) $D: \quad \{x \ge 1, \ \ x^2+y^2 \le 4\}.$

Знайти масу пластинки D, якщо відома густина $\rho(x,y)$ розподілу мас:

12) $D:\quad \{y^2 = \frac{x}{2},\ \ x = 2,\ \ y \geq 0\};\quad \rho(x,y) = 3.5x^2 + 6y;$

13) $D:\quad \{x = 1,\ \ y^2 = 4x,\ \ y \geq 0\};\quad \rho(x,y) = 7x^2 + y;$

14) $D:\quad \{y^2 = 4x,\ \ x + y = 2;\};\quad \rho(x,y) = x;$

15) $D:\quad \{x = 2,\ \ y^2 = 2x,\ \ y \geq 0,\}\quad \rho(x,y) = x^2 + y;$

16) $D:\quad \{1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 4\};\quad \rho(x,y) = x^2 + y^2;$

17) $D:\quad \{x = 1,\ \ y^2 = x,\ \ y \geq 0\};\quad \rho(x,y) = 9x^2 - y;$

18) $D:\quad \{y^2 = 4x,\ \ x + y = 1;\};\quad \rho(x,y) = 2x + 1;$

19) $D:\quad \{x \geq 1,\ \ x^2 + y^2 = 4,\}\quad \rho(x,y) = x^2 + y;$

20) $D:\quad \{x^2 + y^2 \geq y,\ x^2 + y^2 \leq 2y\};\quad \rho(x,y) = x + y.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x^2 + z^2 = 4,\ y = x,\ y \geq 0,\ z \geq 0;$

2) $x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = z^2;$

3) $z = y^2,\quad x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 0;$

4) $x^2 + y^2 = 2y,\ \ z = \frac{5}{4} - x^2,\ \ z = 0;$

5) $z = x^2 + y^2,\quad x^2 + y^2 = 2y,\ \ z = 0;$

6) $z = x^2 + y^2,\quad x^2 + y^2 = 4x,\ \ z = 0;$

7) $z = x^2 + y^2,\quad x + y = 4,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0;$

8) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = x,\ \ z = 0;$

9) $x^2 + z^2 = 9,\ y = x,\ y \geq 0,\ z \geq 0;$

10) $x^2 + y^2 = 4x,\ \ z = 10 - y^2,\ \ z = 0;$

11) $z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2},\ \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4;$

12) $z^2 = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1;$

13) $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},\quad z = 4;$

14) $z = \frac{x^2}{4} + y^2,\quad z = 1;$

15) $z = x^2 + y^2,\quad x + y = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

16) $z = x^2 + y^2 + 1,\quad x^2 + y^2 = 2x,\ \ z = 0;$

17) $z^2 = x^2 + y^2,\quad x + y = -2,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z \geq 0;$

18) $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},\quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ \ z = 0;$

19) $y^2 + z^2 = 9,\ \ y = x,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ z \geq 0;$

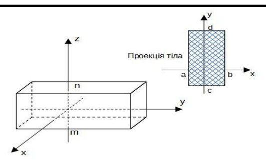
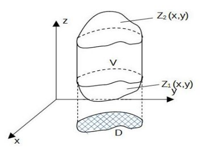
20) $x^2 + y^2 \leq 4,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9;$

ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Теоретичні питання

1. Потрійні інтеграли, його властивості.

2. Зведення потрійного інтеграла до повторного.

Область інтегрування V	Зведення до повторного інтеграла
	$\iiint\limits_V f(x,y)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz$
	$\iiint\limits_V f(x,y)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

3. Заміна змінних у подвійному інтегралі.

Загальний випадок заміни
$\iint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_\Delta f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)) \cdot \lvert J\rvert d\xi d\eta d\zeta,$ де $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$
Циліндричні координати
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \qquad \lvert J\rvert = r$
Сферичні координати
$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad \lvert J\rvert = r^2\sin\theta, \quad \varphi \in [0,\ 2\pi], \quad \theta \in [0,\ \pi]$

4. Геометричні та фізичні застосування потрійних інтегралів.

Об'єм просторового тіла (V):	$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$
Маса тіла (V) з густиною розподілу мас $\rho(x,y,z)$:	$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)dxdydz$
Координати центра мас тіла (V)	$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} x\rho(x,y,z)dxdydz;$ $y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{(V)} y\rho(x,y,z)dxdydz.$ $z_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{(V)} z\rho(x,y,z)dxdydz.$
Статичні моменти відносно площин	$M_{xy} = \iiint\limits_{V} z\rho\, dxdydz,$ $M_{yz} = \iiint\limits_{V} x\rho\, dxdydz,$ $M_{zx} = \iiint\limits_{V} y\rho\, dxdydz,$
Моменти інерції відносно осей	$I_x = \iiint\limits_{V} (y^2+z^2)\rho\, dxdydz,$ $I_y = \iiint\limits_{V} (x^2+z^2)\rho\, dxdydz,$ $I_z = \iiint\limits_{V} (x^2+y^2)\rho\, dxdydz,$

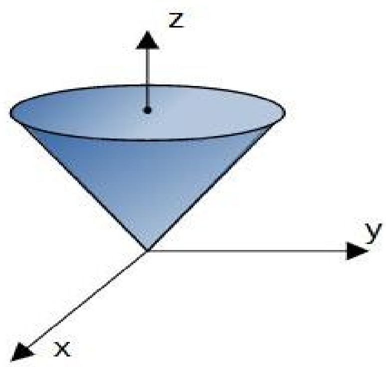
Детальніше з даним метеріалом можна ознайомитись у підручниках [4]-[6].

Розв'язування типових задач

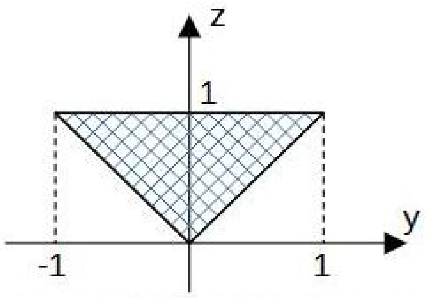
Завдання 1. *У потрійному інтегралі* $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz$ *розставити межі повторного інтегрування різними способами, якщо область інтегрування* V *обмежена поверхнями* $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 1$.

Розв'язок.

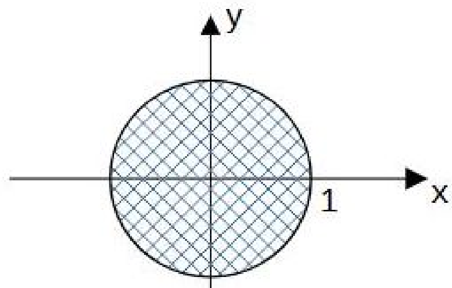
Тіло V задає конус $z = \sqrt{x^2+y^2}$, обрізаний зверху площиною $z = 1$.



Для того, щоб перейти від потрійного до повторних інтегралів, потрібно спроектувати тіло на координатну площину. Якщо спроектувати його на площини XOZ чи YOZ, то в обох випадках проективними площинами будуть трикутники. Якщо спроектувати тіло на XOY, то областю D буде круг $x^2+y^2=1$.



Проекція тіла V на пл.YOZ



Проекція тіла V на пл.XOY

Розглянемо різні способи переходу до повторних інтегралів. Проте слід зауважити, що незалежно від способу, обчислення інтегралів приводить до одного і того ж значення.

Розглянемо проекцію на площину YOZ, тоді x буде функцією $x = x(y, z)$, а отже поверхня конуса представляється $x = \pm\sqrt{z^2 - y^2}$. Тоді матимемо:

$$I_1 = \iint\limits_D dydz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{|y|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx.$$

Або

$$I_2 = \iint\limits_D dydz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx.$$

Аналогічно, якщо спроектувати тіло на площину XOZ, тоді змінна y буде функцією $y = y(z, x)$, а отже поверхня конуса представляється $y = \pm\sqrt{z^2 - x^2}$. Тоді матимемо:

$$I_3 = \iint\limits_D dxdz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy.$$

Або

$$I_4 = \iint\limits_D dxdz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy.$$

І накінець, розглянемо проекцію на площину XOY. Тоді z буде функцією $z = z(x, y)$, а отже, при руху по осі OZ бачимо, що знизу тіло обмежене поверхнею конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а зверху накрите площиною $z = 1$. Тоді матимемо:

$$I_5 = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)dz.$$

Або

$$I_6 = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)dz = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)dz.$$

Завдання 2. *Обчислити потрійні інтеграли:*

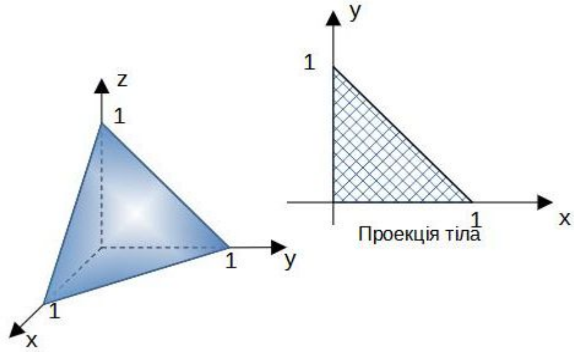
а) $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, якщо область V обмежена поверхнями: $x+y+z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

б) $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$, якщо область V розташована в першому октанті і обмежена поверхнями: $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 3x$, $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, $z = x^2 + y^2$.

Розв'язок.

а)

Тіло V задає піраміду, тому однаково на яку координатну площину її проектувати. Припустимо розглянемо проекцію на площину XOY, тоді за рисунками розкладемо межі повторних інтегралів.



$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right) \Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

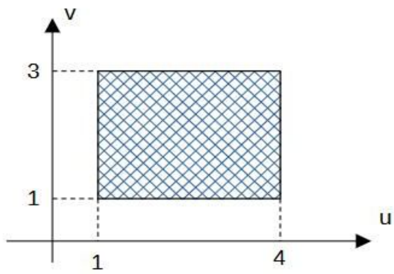
$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

б) Область інтегрування V є складною. Щоб спростити обчислення, введемо нові змінні: $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, $z = z$. Тоді $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$, а отже, матимемо: $u = 1$, $u = 4$, $v = 1$, $v = 3$, $z = \frac{u+uv^2}{2v}$, $z = \frac{u+uv^2}{v}$. Знайдемо якобіан переходу:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} & 0 \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Нову просторову область не потрібно зображувати, достатньо лиш проективну фігуру на площині UOV. А при рухові по осі OZ тіло знизу обмежене поверхнею $z = \frac{u+uv^2}{2v}$, а зверху накрито – $z = \frac{u+uv^2}{v}$.



Тепер можна вже обчислити інтеграл:

$$I = \int_1^4 du \int_1^3 dv \int_{\frac{u+uv^2}{2v}}^{\frac{u+uv^2}{v}} \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \sqrt{uv} \cdot z \cdot \frac{1}{2v} dz = \frac{1}{2} \int_1^4 u du \int_1^3 \frac{1}{v} dv \int_{\frac{u+uv^2}{2v}}^{\frac{u+uv^2}{v}} z dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 u du \int_1^3 \frac{1}{2v} \left(\frac{(u+uv^2)^2}{v^2} - \frac{(u+uv^2)^2}{4v^2} \right) dv =$$

$$= \frac{3}{16} \int_1^4 u^3 du \int_1^3 \frac{(1+v^2)^2}{v^3} dv = \frac{3}{16} \cdot \frac{u^4}{4}\Big|_1^4 \cdot \int_1^3 (v^{-3} + 2v^{-1} + v) dv =$$

$$= \frac{765}{32} (\frac{20}{9} + \ln 3).$$

Завдання 3. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:*

а) $\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^2 + \frac{z^4}{16} = 1.$

б) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$

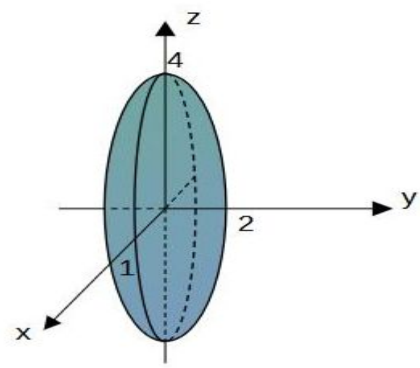
Розв'язок.

а) З рівняння поверхні $\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^2 + \frac{z^4}{16} = 1$ видно, що тіло симетричне відносно координатних площин, тому обчислимо восьму частину його об'єму, яка знаходиться в першому октанті. Оскільки рівняння досить складне, то для простоти обчислень доцільно перейти до узагальнених циліндричних координат: $x = 2r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = 2z$, $J = 4r$. Тоді поверхня матиме рівняння: $z = \sqrt[4]{1-r^4}$.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_V dxdydz = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 4rdr \int\limits_0^{\sqrt[4]{1-r^4}} dz = 32\cdot\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 r\sqrt[4]{1-r^4}dr = \\
&= \left|\begin{array}{c} r^4 = t \\ dr = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt \end{array}\right| = 16\pi\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{4}\cdot t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}dt = 4\pi\cdot B(\frac{1}{2},\frac{5}{4}) = \\
&= 4\pi\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{7}{4})} = 4\pi\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma^2(\frac{1}{4}) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}\Gamma^2(\frac{1}{4})
\end{aligned}$$

б)

Дане тіло $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ задає еліпсоїд з півосями 1, 2 і 4 відповідно по осях OX, OY і OZ. Об'єм його можна знайти, користуючись елементарною геометричною формулою. Проте переконаємось у її правильності, використовуючи потрійний інтеграл.



Для його обчислення, перейдемо до узагальнених сферичних координат: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = 2r\sin\varphi\sin\theta$, $z = 4r\cos\theta$, $J = 8r^2\sin\theta$. Тоді еліпсоїд задається рівнянням $r = 1$.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin\theta d\theta \int\limits_0^1 r^2dr = 32\pi(-cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{32\pi}{3}.$$

Завдання 4.

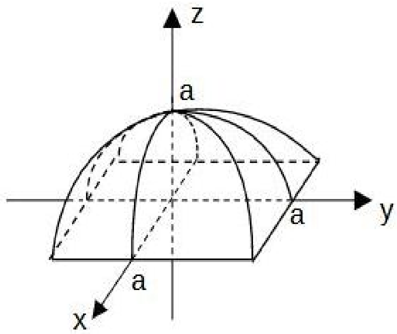
а) *Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:* $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

б) *Знайти момент інерції кулі* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ *відносно її діаметра, якщо густина кулі* $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв'язок.

а)

Дане тіло представляє перетин двох циліндрів: $x^2 + z^2 = a^2$ (витягнутий вздовж осі OY) і $y^2+z^2 = a^2$ (витягнутий вздовж осі OX). Оскільки за умовою $z \geq 0$, то розглядаємо лиш верхню половину цього тіла. Так як воно симетричне відносно осі OZ, то центр мас знаходиться на цій осі.



Тому його координати: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz$.

Тіло однорідне, тому $\rho(x,y,z) = 1$, а отже маса чисельно рівна об'єму. Знайдемо ту частину об'єму, що знаходиться в першому октанті. Проте, якщо ще і врахувати його симетричність відносно площини $y = x$, то можна записати:

$$m = V = 4 \cdot 2 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 8\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{8}{3}a^3.$$

Тоді

$$z_c = \frac{3}{8a^3} \cdot 8 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} zdz = \frac{3}{2a^3}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x (a^2-x^2)dy = \frac{3a}{8}.$$

б) Оскільки центр кулі $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ знаходиться в початку координат, то момент інерції відносно її діаметра означає момент інерції відносно довільної осі, хай це буде вісь OZ. Запишемо формулу її обрахунку: $I_z = I_{zx}+I_{zy} = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho dxdydz = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$

Для обчислення перейдемо до сферичних координат: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $J = r^2\sin\theta$. Куля при цьому задається рівнянням $r = 2$. Тоді матимемо:

$$I_z = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^2 r^5 \sin^3\theta d\theta = -2\pi \cdot \frac{2^6}{6} \cdot \int\limits_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = \frac{256}{9}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити:

   1) $\iiint\limits_V \sqrt{xy}\, dxdydz$, де V : $\{y = x^2,\ y = 1,\ x \geq 0,\ z = 0,\ z = x^2 + 2y^2\}$;

   2) $\iiint\limits_V (y-2x) dxdydz$, де V : $\{y = x,\ y = -2,\ x = 0,\ z = 5x^2+y^2,\ z = 0\}$;

   3) $\iiint\limits_V (y^2 - x^2) dxdydz$, де V : $\{x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 2y\}$;

   4) $\iiint\limits_V x dxdydz$, де V : $\{y = 10x,\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = xy\}$;

   5) $\iiint\limits_V (y - z^2)\, dxdydz$, де V : $\{y = |x|,\ y = 1 - x^2;\ z = 0,\ z = 3\}$;

   6) $\iiint\limits_V y^2 z\, dxdydz$, де V : $\{y = \frac{x}{2},\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = \sqrt{x}\}$;

   7) $\iiint\limits_V \cos x\, dxdydz$, де V : $\{y = \sin x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ y = 0,\ z = 0,\ z = 2y\}$;

   8) $\iiint\limits_V xyz\, dxdydz$, де V : $\{y = -2x,\ x = -1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$;

   9) $\iiint\limits_V \sqrt[3]{xy}\, dxdydz$, де V : $\{y = x^2,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 2x^2 + 3y^2\}$;

   10) $\iiint\limits_V (\sqrt{x}+2y)\, dxdydz$, де V : $\{x+2y = 1,\ x = -1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 3x\}$;

   11) $\iiint\limits_V (5x+\frac{3z}{2}) dxdydz$, де V : $\{y = x,\ y = 0,\ x = 1,\ z = x^2+15y^2,\ z = 0\}$;

   12) $\iiint\limits_V (y + z) dxdydz$, де V : $\{y = x,\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0,\ z = \sqrt{x^2 + 5y^2}\}$;

   13) $\iiint\limits_V (y^3 + z) dxdydz$, де V : $\{y = 2x,\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 5x\}$;

   14) $\iiint\limits_V \sqrt[3]{2y}\, dxdydz$, де V : $\{y \geq x^2,\ x \geq 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = x^2 + 3y^2\}$;

15) $\iiint\limits_V \sin x\,dxdydz$, де $V:$ $\{y=\sin x,\ x\in[0,\pi],\ y=0,\ z=0,\ z=y\}$;

16) $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$, де $V:$ $\{y=x^2, x=1, y=0, z=0, z=x^2+y^2\}$;

17) $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, де $V:$ $\{y=e^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ z=0,\ z=x^2+y^2\}$;

18) $\iiint\limits_V (x^2+z^3)\,dxdydz$, де $V:$ $\{y=|2x-1|, y=2; z=0, z=2\}$;

19) $\iiint\limits_V (x+2y)dxdydz$, де $V:$ $\{y=-x,\ x=1,\ y=0,\ z=0,\ z=2x^2+5y^2\}$;

20) $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$, де $V:$ $\{y=2^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ z=0,\ z=y\}$;

2. Обчислити потрійні інтеграли, перейшовши або до циліндричних або до сферичних (чи відповідних узагальнених) координат:

1) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0,\ z^2=x^2+y^2\}$;

2) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2+z^2\le -x\}$;

3) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, де $V:$ $\{z^2=4(x^2+y^2),\ z=2\}$;

4) $\iiint\limits_V xdxdydz$, де $V:$ $\{2z=x^2+y^2,\ z=x^2+y^2-4\}$;

5) $\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2+z^2\le 2y\}$;

6) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, де $V:$ $\{z=0,\ 2z=4-x^2-y^2\}$;

7) $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2=4,\ (x,y\ge 0),\ z=0,\ z=2y\}$;

8) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2+z^2\le 9,\ (x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2),\ x\ge 0\}$;

9) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1\}$;

10) $\iiint\limits_V dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2=1,\ y\le 0,\ z=0,\ z=x^2+y^2\}$;

11) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, де $V:$ $\{x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\le 0,\ y\ge 0\}$;

12) $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, де $V:\ \ \{z=0,\,z=\sqrt{3-x^2-y^2}\}$;

13) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де $V:\ \ \{x^2+y^2+z^2\le -y\}$;

14) $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, де $V:\ \ \{x^2+y^2=3,\,(x\le 0,\,y\ge 0),\,z=0,$ $z=3x\}$;

15) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де $V:\ \ \{x^2+y^2+\frac{(z+3)^2}{3}=1\}$;

16) $\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, де $V:\ \ \{x^2+y^2+z^2\le 4x\}$;

17) $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, де $V:\ \ \{z=0,\,z=2-x^2-y^2,\,x\ge 0,\,y\le 0\}$;

18) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, де $V:\ \ \{x^2+y^2+z^2\le 8,\,(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2),$ $x\ge 0,\,z\ge 0\}$;

19) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де $V:\ \ \{x^2+y^2+z^2\le 2x\}$;

20) $\iiint\limits_V 2dxdydz$, де $V:\ \ \{x+y=1,x=0,y=0,z=0,z=x^2+y^2\}$;

3. За допомогою потрійних інтегралів, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $\{x^2+z^2=4,\,x+y=\pm 2,\,x-y=\pm 2\}$;

2) $\{z=1-(x-1)^2-y^2,\,z=0\}$;

3) $\{3z=9-x^2-y^2,\,z=0,\,x\le 0\}$;

4) $\{x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1,\,y\ge 0\}$;

5) $\{16\le x^2+y^2+z^2\le 81,\,y\ge x\}$;

6) $\{z=2-x^2-y^2,\,z=x^2+y^2\}$;

7) $\{(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2)^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\}$;

8) $\{x^2+y^2+z^2\le 100,\,z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\}$;

9) $\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{z}{4}\}$;

10) $\{4\le x^2+y^2+z^2\le 81,\,y\le x\}$;

11) $\{z\le x^2+y^2,\,x+y=1,\,x,y\ge 0,\,z=0\}$;

12) $\{x^2+y^2+z^2\ge 1,\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le 1\}$;

13) $\{x^2+y^2+z^2=9,\,z=\frac{x^2+y^2}{4}\}$;

14) $\{z = x^2 + y^2 - 36,\ z = 2,\ z = 0,\ z \geq 0\}$;

15) $\{(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4})^2 = x^2 + y^2\}$;

16) $\{z = 4 - (x-2)^2 - y^2,\ z = 0\}$;

17) $\{(x^2 + y^2)^2 + z^4 = 9\}$;

18) $\{x + y = 6,\ y = \sqrt{3x},\ y = 0,\ z = 0,\ z = 4y\}$;

19) $\{z = 1 - x^2 - (y-1)^2,\ z = 0\}$;

20) $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \geq 1\}$;

4. За допомогою потрійних інтегралів, знайти:

   1) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 = 9z^2, x, y, z \geq 0\}$; густина $\rho = 10z$.

   2) M_{xy} тіла, обмеженого поверхнями: $\{x = 0, x = 2,\ y = 0,\ y = 4,\ z = 0,\ x + y + z = 8\}$;

   3) координати центра мас тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ та площинами $z = 0, \quad x + z = 4$;

   4) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2+y^2+z^2 = 3, 2z \geq x^2+y^2$; густина $\rho = x^2 + y^2 + z^2$.

   5) момент інерції еліпсоїда $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} \leq 1$ відносно осі OZ;

   6) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 6z, x, y, z \geq 0\}$; густина $\rho = 90y$.

   7) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2,\ x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z,\ x, y \geq 0\}$; густина $\rho = 5x$.

   8) x_c півкулі $x^2+y^2+z^2 \leq 81, z \geq 0$, якщо її густина $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

   9) момент інерції однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2 + y^2 = 2x,\ z^2 = 4x,\ z = 0\}$ відносно осі OZ;

   10) координати центра мас однорідного тіла, обмеженого частиною параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$, яку відтинає площина $z = 1$;

   11) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\}$; густина $\rho = 4|z|$.

   12) статичний момент тіла відносно площини XOY, обмеженого поверхнями: $\{x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 3,\ z = 0,\ z = 5\}$, густина якого $\rho = x^2 + y$.;

   13) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 = z^2, x = y = 0,\ z \geq 0\}$; густина $\rho = 6z$.

14) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{z^2 = 36(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0,\ z = 0, (x, z \geq 0)\}$; густина $\rho = \frac{5}{6}(x^2 + y^2)$.

15) статичний момент однорідного тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ і площиною XOY відносно цієї площини;

16) координати центра мас однорідного тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 4\sqrt{x}$ та площинами $z = 0$, $\ x + z = 4$;

17) координати центра мас однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $z = \frac{x^2+y^2}{4}$ та сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ $(z \geq 0)$;

18) координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $z = 0$;

19) момент інерції однорідного паралелепіпеда: $\{x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = c\}$ відносно одного з ребер;

20) масу тіла, обмеженого поверхнями: $\{z^2 = 9(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0, (x, y, z \geq 0)\}$; густина $\rho = \frac{5}{3}(x^2 + y^2)$.

КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Теоретичні питання

1. Криволінійні інтеграли, його властивості.

2. Зведення криволінійного інтеграла 1-го роду до звичайного визначеного.

Задання кривої L	Зведення до визначеного інтеграла
параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\ \beta]$	$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$
явним рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a,\ b]$	$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$
явним рівнянням $x = g(y)$, $y \in [c,\ d]$	$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(g(y),y)\sqrt{1+g'^2(y)}dy$

3. Зведення криволінійного інтеграла 2-го роду до звичайного визначеного.

Задання кривої L (напрямок по зростанню параметра)	Зведення до визначеного інтеграла
параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\ \beta]$	$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt$
явним рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a,\ b]$	$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))\,dx$
Зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го родів	$\int\limits_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_L (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha)\,dl,$ де $\alpha = \alpha(M)$ кут між дотичною до кривої в точці M і додатним напрямком осі OX.

4. Застосування криволінійних інтегралів:

Довжина дуги кривої L	$\int\limits_L dl$
Маса кривої L з густиною $\rho(x,y)$	$m = \int\limits_L \rho(x,y)dl$
Координати центра мас кривої L з густиною $\rho(x,y)$	$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_L x\rho(x,y)dl,$ $y_c = \frac{1}{m}\int\limits_L y\rho(x,y)dl$
Робота сили $\overrightarrow{F} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ при переміщенні вздовж кривої L	$A = \int\limits_L Pdx + Qdy$

5. Формула Гріна:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

6. Поверхневі інтеграли, їх властивості.

7. Зведення поверхневого інтегралу 1-го роду до звичайного подвійного

Задання поверхні S	Зведення до подвійного інтеграла
параметричними рівняннями: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \Delta$	$\iint\limits_S f(x,y,z)dS =$ $= \iint\limits_\Delta f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\sqrt{EG - F^2}dudv,$ $E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u;$ $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v;$ $G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v;$
явним рівнянням: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$	$\iint\limits_S f(x,y,z)dS =$ $= \iint\limits_D f\left(x, y, z(x,y)\right)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}dxdy,$

8. Зведення поверхневого інтегралу 2-го роду до звичайного подвійного

Задання поверхні S	Зведення до подвійного інтеграла
параметричними рівняннями: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \Delta$	$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$ $= \pm \iint\limits_\Delta (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \cdot$ $\cdot\sqrt{EG-F^2}dudv,$
явним рівнянням: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$	$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy =$ $= \pm \iint\limits_D R(x,y,z(x,y))\,dxdy,$
Формула Остроградського:	$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$ $= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$

9. Елементи векторного аналізу

Детальніше з даним метеріалом можна ознайомитись у підручниках [4]-[6].

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Обчислити криволінійні інтеграли 1-го роду:*

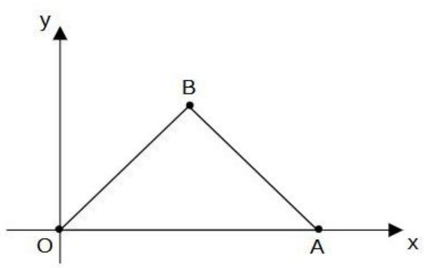
а) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – контур трикутника з вершинами $O(1,1)$, $A(2,0)$ і $B(1,1)$;

б) $\int\limits_L |y|dl$, де L – дуга лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geq 0.$;

Розв'язок.

а)

Оскільки L – контур трикутника з вершинами $O(1,1)$, $A(2,0)$ і $B(1,1)$, то кожний відрізок можна задати явним рівнянням. Тому скористаємось формулою переходу: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$



$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_{OA} (x+y)dl + \int\limits_{OB} (x+y)dl + \int\limits_{AB} (x+y)dl$

Відрізок OA задається рівнянням $y = 0$, тоді $dl = dx$, $x \in [0,\, 2]$, а отже,

$$\int\limits_{OA} (x+y)dl = \int\limits_0^2 xdx = 2.$$

Відрізок OB задається рівнянням $y = x$, тоді $dl = \sqrt{2}dx$, $x \in [0,\, 1]$, отже,

$$\int\limits_{OB} (x+y)dl = \int\limits_0^1 2x\sqrt{2}dx = \sqrt{2}.$$

Відрізок AB лежить на прямій $y = 2 - x$, тоді $dl = -dx$, $x \in [1,\, 2]$, тоді

$$\int\limits_{AB} (x+y)dl = -\int\limits_1^2 dx = -2.$$

Додаючи одержані значення, одержимо: $\int\limits_L (x+y)dl = \sqrt{2}$.

б) У полярній системі координат лемніската задається рівнянням: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, а отже, параметричні рівняння кривої мають вигляд: $x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$, $y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{4}]$.

Підставимо у формулу: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$, але елемент довжини дуги $dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ кривої L обчислимо за альтернативною формулою:

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + \left(-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}d\varphi = \frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Тоді,

$$\int\limits_L |y|dl = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}|\sin\varphi|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = a^2(2-\sqrt{2}).$$

Завдання 2. *Обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду:*

а) $\int\limits_L (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, де L – крива $y = 1 - |1-x|$, $(0 \le x \le 2)$;

б) $\int\limits_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, де L – коло, яке утворюється перетином сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ і площини $y=x$, і яке є додатно орієнтованим, якщо дивитись з боку додатного напряму осі OX.

Розв'язок.

а) Рівняння кривої L запишемо у такому вигляді:

$$y = 1 - |1-x| = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1; \\ 2-x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

і запишемо інтеграл вздовж кривої L у вигляді суми інтегралів на цих ланках. Кожен з цих інтегралів зведемо до визначеного за формулою:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right)dx.$$

$$\int\limits_L (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = \int\limits_0^1 (x^2+x^2)dx + (x^2-x^2)dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 (x^2+(2-x)^2)dx + (x^2-(2-x)^2)(-dx) =$$

$$= \int\limits_0^1 2x^2dx + 2\int\limits_1^2 (2-x)^2dx = \frac{4}{3}.$$

б) Коло L лежить у площині $y=x$ і його радіус рівний a. Параметризуємо криву, вибравши параметром змінну x, тоді параметричні рівняння кола можна записати у вигляді:

$$x = x,\ y = x,\ z = \pm\sqrt{a^2-2x^2},\ x \in [-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}].$$

Знак "+" перед z відповідає верхньому півколу, змінна x змінюється від $\frac{a}{\sqrt{2}}$ до $-\frac{a}{\sqrt{2}}$. Знак "−" перед z відповідає нижньому півколу, змінна x змінюється від $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ до $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Знайдемо $dy = dx$, $dz = \pm\frac{2x}{\sqrt{a^2-2x^2}}dx$. Тоді,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \\ &= -\int\limits_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(x - \sqrt{a^2-2x^2}\right)dx + \left(\sqrt{a^2-2x^2} - x\right)dx + \\ &+ \int\limits_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(x + \sqrt{a^2-2x^2}\right)dx + \left(-\sqrt{a^2-2x^2} - x\right)dx = 0 \end{aligned}$$

Завдання 3. *Знайти координати центра мас кривої:* $y = 3\operatorname{ch}\frac{x}{3}$, $x \in [-3, 3]$, *якщо густина в кожній точці обернено пропорційна ординаті цієї точки.*

Розв'язок. Густина кривої задається як $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$.
Спершу знайдемо масу кривої:

$$m = \int\limits_L \rho(x, y)dl = \int\limits_{-3}^{3} \frac{1}{3\operatorname{ch}\frac{x}{3}}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{3}}dx = \int\limits_{-3}^{3} \frac{1}{3}dx = 2.$$

Тепер можна знаходити координати центра мас:

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_L x\rho(x, y)dl = \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{3} x\frac{1}{3\operatorname{ch}\frac{x}{3}}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{3}}dx = \int\limits_{-3}^{3} \frac{x}{6}dx = 0.$$

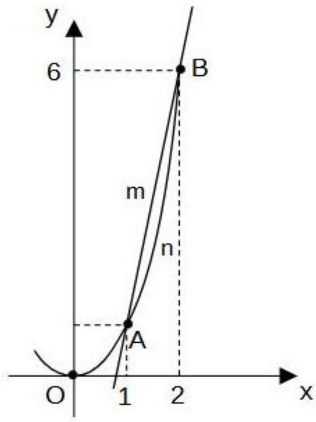
$$y_c = \frac{1}{m}\int\limits_L y\rho(x, y)dl = \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{3} 3\operatorname{ch}\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3\operatorname{ch}\frac{x}{3}}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{3}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{3} \operatorname{ch}\frac{x}{3}dx = 3\operatorname{sh}1.$$

Завдання 4. *Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду:* $I = \int\limits_L (x+y)^2dx - (x-y)^2dy$, де L – замкнута крива, що утворена від перетину ліній $y = 2x^2 - x$ і $y = 5x - 4$ (рух ведеться проти ходу часової стрілки).

Розв'язок.

Оскільки L – це замкнутий контур $AnBmA$, то можемо застосувати формулу Гріна:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$



$$I = \int\limits_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-(x-y)^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2\right) dxdy =$$
$$= -4\iint\limits_D xdxdy = -4\int\limits_1^2 xdx \int\limits_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4\int\limits_1^2 (6x^2-4x-2x^3)dx = -2.$$

Завдання 5. *Обчислити поверхневі інтеграли:*

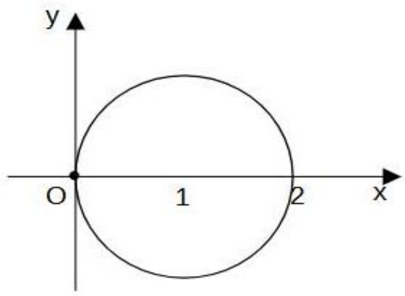
а) $I = \iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$, де S – частина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2+y^2}$, яку вирізає поверхня $x^2+y^2 = 2x$;

б) $I = \iint\limits_S zdS$, де S – частина поверхні гелікоїда $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$ $(0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi)$.

Розв'язок.

а)

Оскільки поверхня інтегрування проектується на площину XOY в круг: $(x-1)^2 + y^2 \le 1$, а елемент площі конічної поверхні дорівнює: $dS = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$



Тоді, застосувавши формулу:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy,$$

де S – гладка поверхня, що задана рівнянням $z = \sqrt{x^2+y^2}$, а D – замкнена проективна область $(x-1)^2+y^2 \le 1$, матимемо

$$I = \sqrt{2}\iint\limits_{D}\left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Для обчислення цього інтегралу, перейдемо до полярних координат. Тоді круг задається рівнянням $r \le 2\cos\varphi$, де $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ і в результаті заміни змінних, одержимо:

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3dr = \\
&= 4\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cos^5\varphi+\sin\varphi\cos^4\varphi)d\varphi+4\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi = \\
&= 8\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)^2 d\sin\varphi = \frac{64\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Тут ми використали той факт, що інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку дорівнює нулю.

б) Оскільки поверхня S задана в параметричній формі, то використаємо формулу:

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Delta} f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

де $E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$; $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$; $G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$. Матимемо,

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1, \quad G = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + 1 = u^2+1,$$

$$F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0.$$

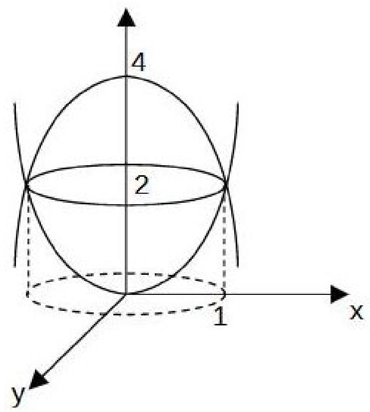
Оскільки, D – область зміни параметрів u і v, то одержимо:

$$I = \int\limits_{0}^{a}\sqrt{1+u^2}du\int\limits_{0}^{2\pi} vdv = 2\pi^2\int\limits_{0}^{a}\sqrt{1+u^2}du = \pi^2(a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2}))$$

Завдання 6. *Знайти потік векторного поля:* $\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$ *через замкнену поверхню* S *(нормаль зовнішня), яка задається як* $z = 4-2(x^2+y^2)$, $z = 2(x^2+y^2)$.

Розв'язок.

Оскільки поверхня інтегрування замикає в собі тіло V, то можна використати формулу Остроградського: $\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$, де P, Q і R координати векторного векторного поля $\bar{a}$. Тоді матимемо:



$$I = \iint\limits_S xdydz + zdzdx - ydxdy = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Враховуючи, що перерізом ($\perp OZ$) тіла V є круг, зручно буде перейти до циліндричних координат. Тоді тіло V знизу обмежене поверхнею $z = 2r^2$, а зверху – $z = 4 - 2r^2$. Отже,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{2r^2}^{4-2r^2} dz = 8\pi \int\limits_0^1 (r - r^3)dr = 2\pi.$$

Завдання 7. *Знайти циркуляцію векторного поля:* $\bar{a} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j} + x\bar{k}$ *вздовж замкненого контуру* $L = \{x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2 - 2\cos t - 2\sin t\}$ *у напрямку зростання параметру.*

Розв'язок.

Циркуляцію вектора $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ вздовж контура L знаходять за формулою:

$$Ц = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Для наших умов, матимемо:

$$Ц = \int\limits_L 2ydx - 3xdy + xdz = -4 \int\limits_0^{2\pi} (2\sin^2 t + 8\cos^2 t - \sin t \cos t)dt = -24\pi.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

1) а) $\int\limits_L (x+\sqrt{y})dl$, де L – пряма, що з'єднує точки $A(1,2)$ і $B(3,4)$;

б) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де $L : \{x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ t \in [0, 2\pi]\}$;

в) $\int\limits_L (1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z})dx + (\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2})dy + \frac{xy}{z}dz$, де $L : \{y = x^2,\ y+z = 2\}$ від точки $A(0.5, 0.25, 1.75)$ до точки $B(1,1,1)$;

2) а) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2})dl$, де L: $r = 3\cos\varphi$;

б) $\int\limits_{AB} \cos y dx - \sin x dy$, де AB – відрізок прямої $y = -x$ $A(2,-2)$, $B(-2,2)$;

в) $\int\limits_L ydx - xdy$, де L – дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0,\pi]$;

3) а) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x+y+9}}dl$, де L– пряма AB, де $A(1,1)$, $B(3,4)$;

б) $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, де L : $\{x = 3(\cos t + t\sin t),\ y = 3(\sin t - t\cos t),\ t \in [0,2\pi]\}$;

в) $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{1-y^2}dy + xdz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \frac{t}{2\pi}$ $t \in [0, 2\pi]$;

4) а) $\int\limits_L ydl$, де L : $\{x = y^2,\ y \in [0,1]\}$;

б) $\int\limits_L \sqrt{z^2+2y^2}dl$, де L : $\{x^2+y^2+z^2 = 25,\ y = x,\ z \geq 0\}$;

в) $\int\limits_L (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, де L : $\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1\}$;

5) а) $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, де L : $\{x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in [0,2\pi]\}$;

б) $\int\limits_L xydx - x^2ydy$, де L : $\{x^2+y^2 = 16\}$;

в) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, де L – пряма AB, де $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$;

6) а) $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, де L : $\{x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ z = 2t,\ t \in [0,2\pi]\}$;

б) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L : $\{r = 3\sqrt{\cos 2\varphi},\ \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$;

в) $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, де L – дуга еліпса $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

7) а) $\int\limits_L xydl$, де $L:\ r = 2 + \sin\varphi,\quad \varphi \in [0, \pi]$;

б) $\int\limits_L \frac{ydx - xdy}{y^2}$, де $L:\ \{y = x^2 - 2,\ x \in [0, 4]\}$;

в) $\int\limits_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$;

8) а) $\int\limits_L xydl$, де L – периметр трикутника з вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 2)$;

б) $\int\limits_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де $L:\ \{x = 5\cos t,\ y = 5,\ z = 5\sin t,\ t \in [0, \pi]\}$;

в) $\int\limits_L \frac{dx - dy}{x + y}$, де $L:\ \{y = x^2,\ x \in [1, 3]\}$;

9) а) $\int\limits_L ydl$, де $L:\ \{y = x^2 + 3,\ x \in [0, 3]\}$;

б) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$, де $L:\ \{r = 4\cos\varphi,\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$;

в) $\int\limits_L \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, де $L:\ \{r = \sqrt{\cos 2\varphi},\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$;

10) а) $\int\limits_L (x - y)dl$, де $L:\ \{x^2 + y^2 = 4x\}$;

б) $\int\limits_L y^2 dl$, де $L:\ \{x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t),\ t \in [0, \pi]\}$;

в) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 4)$, $D(0, 4)$ (обхід додатний);

11) а) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dl$, де $L:\ \{x = 3(\cos t + t\sin t),\ y = 3(\sin t - t\cos t),\ t \in [0, 2\pi]\}$;

б) $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{9 - y^2}dy + xdz$, де L – дуга лінії $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 1$ $t \in [0, 2\pi]$;

в) $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де $L:\ y = x^2 - 1$ від точки $A(0, -1)$ до точки $B(1, 0)$;

12) а) $\int\limits_L (y + \sqrt{x})dl$, де L – пряма, що з'єднує точки $A(-2, -1)$ і $B(1, 4)$;

б) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де $L:$ пряма $y = 0.5x - 2$ від точки $A(0, -2)$ до точки $B(4, 0)$;

в) $\int\limits_L x^3ydx - xydy$, де $L:\ \{x^2+y^2=25\}$;

13) а) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2})dl$, де L: $r = 2\sin\varphi$;
б) $\int\limits_L (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(0,0), B(3,3), C(2,5)$ (обхід додатний); в) $\int\limits_L \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy + \frac{xy}{z}dz$, де $L:\ \{y=x^2, y+z=2\}$ від точки $A(1,1,1)$ до точки $B(2,4,-2)$;

14) а) $\int\limits_L xdl$, де $L:\ \{y=x^2-5,\ x\in[0,1]\}$;
б) $\int\limits_L (x-y)dl$, де $L:\ \{x=t,\ y=\frac{3t^2}{\sqrt{6}},\ z=t^3,\ t\in[0,1]\}$;
в) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, де L – пряма AB, де $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$;

15) а) $\int\limits_L ydl$, де L: $\{y=x^2,\ x\in[1,2]\}$;
б) $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, де $L:\ \{x=5(\cos t+t\sin t),\ y=5(\sin t - t\cos t),\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$;
в) $\int\limits_L (x^2+y^2)dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами в точках $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, $D(2,2)$ (обхід додатний);

16) а) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x+y+2}}dl$, де L– пряма AB, де $A(-1,1)$, $B(2,3)$;
б) $\int\limits_L ydx+xdy$, де $L:\ \{r=3\cos\varphi,\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{3}]\}$ (обхід додатний);
в) $\int\limits_L yzdx + z\sqrt{1-y^2}dy + xdz$, де L – дуга гвинтової лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $t\in[0,\pi]$;

17) а) $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, де $L:\ \{x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=2t,\ t\in[0,\pi]\}$;
б) $\int\limits_L \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$, L – пряма, що проходить через точки $A(0,1)$ і $B(1,1)$;
в) $\int\limits_L (x^2-2xy)dx + (2xy+y^2)dy$, де L – дуга еліпса $x = 4\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{3}]$;

18) а) $\int\limits_L xdl$, де L– пряма AB, де $A(1,1)$, $B(5,6)$;
б) $\int\limits_L (x+y)dl$, де $L:\ \{r=3\sqrt{\sin 2\varphi},\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$;

в) $\int\limits_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, де $L:\ \{r=\sqrt{\sin 2\varphi},\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{4}]\}$;

19) а) $\int\limits_L (2y-\sqrt{x})dl$, де L – пряма, що з'єднує точки $A(-2,0)$ і $B(0,4)$;
б) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{y^2-x^2}}$, де $L:$ пряма $y=2x-1$ від точки $A(0,-1)$ до точки $B(2,3)$;
в) $\int\limits_L \frac{xdx-ydy}{x^2+y^2}$, де $L:\ \{r=2\sin\varphi,\ \varphi\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\}$;

20) а) $\int\limits_L (x^2+y)dl$, де L – пряма, що з'єднує точки $A(-1,2)$ і $B(2,-2)$;
б) $\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, де $L:\ \{x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$;
в) $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, де $L:\ y=x^2-3$ від точки $A(0,-3)$ до точки $B(1,-2)$;

2. Обчислити довжину дуги кривої L:

1) $x=\operatorname{sh}t-t$, $y=\operatorname{ch}t-1$, $t\in[0,3]$;
2) $y=\ln\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$;
3) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, $y\in[1,e]$;
4) $y=x^{\frac{3}{2}}$, $x\in[0,4]$;
5) $r=4(1-\sin\varphi)$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{6}]$;
6) $r=2(1-\cos\varphi)$;

Знайти масу дуги кривої:

7) $r=2\sin\varphi$, $\rho(x,y)=|x|$;
8) $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $\rho(x,y)=|y|$, $t\in[0,2\pi]$;
9) $r=3\cos\varphi$, $\rho(x,y)=|y|$;
10) $x=2t$, $y=t^2$, $z=\frac{2t^3}{3}$, $\rho(x,y)=\sqrt{y}$, $t\in[0,1]$;

Знайти координати центра мас дуги кривої:

11) $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $t\in[0,\pi]$;
12) $r=3(1-\cos\varphi)$;

13) $x^2 + y^2 = 4x$, $x, y \geq 0$;

Знайти роботу сили $\overrightarrow{F}$ при переміщенні вздовж кривої L від точки M до точки N, якщо:

14) $\bar{F} = (x^2 - 2y)\bar{i} + (y^2 - 2x)\bar{j}$, $L:$ відрізок MN, $M(-4, 0)$, $N(0, 2)$;

15) $\bar{F} = (x^2 + 2y)\bar{i} + (y^2 + 2x)\bar{j}$, $L:$ $y = 2 - \frac{x^2}{8}$, $M(-4, 0)$, $N(0, 2)$;

16) $\bar{F} = x^3\bar{i} - y^3\bar{j}$, $L:$ $x^2 + y^2 = 4$, $(x \leq 0, y \geq 0)$, $M(-2, 0)$, $N(0, 2)$;

За допомогою формули Гріна обчислити такі інтеграли:

17) $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, $L:$ $x^2 + y^2 = 8x$, обхід додатний;

18) $\oint\limits_L (x + 3y)dx + (x^2 - y)dy$, L – контур трикутника з вершинами в точках $A(1, 5)$, $B(5, 5)$ і $C(3, 1)$, обхід додатний;

19) $\oint\limits_L (x + 2y)dx + (x^2 - y + 1)dy$, $L:$ $x^2 + y^2 = 2x$, обхід додатний;

20) $\oint\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (x - 2y^3)dy$, L – контур чотирикутника з вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(3, 2)$ і $D(1, 0)$, обхід додатний

3. Обчислити поверхневий інтеграл 1-го роду:

1) $\iint\limits_S z^3 ds$, де S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 0$;

2) $\iint\limits_S ds$, де S – частина поверхні $z = x^2 + y^2$, яку вирізають площини $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$;

3) $\iint\limits_S x ds$, де S – частина поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яку вирізає циліндр $z^2 = 4y$;

4) $\iint\limits_S (x + y + z)ds$, де S – поверхня куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$;

5) $\iint\limits_S x^2y^2 ds$, де S – половина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$;

6) $\iint\limits_S \frac{ds}{z^2+4}$, де S – поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$, $y \geq 0$;

7) $\iint\limits_S (6x + 4y + 3z)ds$, де S – частина площини $x + 2y + 3z = 6$, що знаходиться в першому октанті;

8) $\iint\limits_S x ds$, де S – частина поверхні $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$;

9) $\iint\limits_S xds$, де S – частина поверхні $2z = x^2 + y^2$, що міститься між площиною $z = 0$ і конусом $z^2 = x^2 + y^2$;

10) $\iint\limits_S z^2ds$, де S – частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = x$;

11) $\iint\limits_S zds$, де S – частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$;

12) $\iint\limits_S z^2ds$, де S – частина поверхні $z^2 = 4x$, яку вирізає циліндр $y^2 = 4x$ і площина $x = 1$;

13) $\iint\limits_S ds$, де S – частина площини $6x+3y+2z = 12$, що знаходиться всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$;

14) $\iint\limits_S x^2y^2ds$, де S – половина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \leq 0$;

15) $\iint\limits_S ds$, де S – частина поверхні $z = xy$, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = 2x$;

16) $\iint\limits_S \frac{ds}{z^2+1}$, де S – циліндр $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 5$;

17) $\iint\limits_S xds$, де S – частина поверхні $7z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 7$;

18) $\iint\limits_S (2x + y - 3z)ds$, де S – частина площини $2x + y + 3z = 6$, що знаходиться в першому октанті;

19) $\iint\limits_S yds$, де S – частина поверхні $3z = x^2 + y^2$, що міститься між площиною $z = 0$ і конусом $z^2 = x^2 + y^2$;

20) $\iint\limits_S z^2ds$, де S – частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = 3x$;

4. Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через замкнену поверхню S:

1) $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (z + y)\bar{k}$, $\quad S: \{x^2 + y^2 = 9,\ z = x,\ z \geq 0\}$;

2) $\bar{a} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k}$, $\quad S: \{y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 1,\ y = z,\ z = 0,\ x \geq 0\}$;

3) $\bar{a} = 2(z - y)\bar{i} + (x - z)\bar{k}$, $\quad S: \{x^2 + 3y^2 + 1 = z,\ x^2 + 3y^2 = 1,\ z = 0\}$;

4) $\bar{a} = 17x\bar{i} + 7y\bar{j} + 11z\bar{k}$, $\quad S: \{z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ y = x^2,\ y = x\}$;

5) $\bar{a} = 3x\bar{i} - z\bar{k}, \quad S: \{z = 6 - x^2 - y^2,\, z^2 = x^2 + y^2,\, z \geq 0\};$

Знайти циркуляцію векторного поля $\bar{a}$ вздовж контура L у напрямку зростання параметру:

6) $\bar{a} = (x^2 - y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 = 1,\, z = 1\};$

7) $\bar{a} = 4x\bar{i} + 2\bar{j} - xy\bar{k}, \quad L = \{z = 2(x^2 + y^2) + 1,\, z = 7\};$

8) $\bar{a} = (x - y)\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 = 1,\, z = 5\};$

9) $\bar{a} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} + y^2\bar{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 + z^2 = 25,\, x^2 + y^2 = 16,\, z > 0\};$

10) $\bar{a} = y\bar{i} + (1 - x)\bar{j} - z\bar{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\, x^2 + y^2 = 1,\, z > 0\};$

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через замкнену поверхню S:

11) $\bar{a} = (z + y)\bar{i} + (x - 2y + z)\bar{j} + x\bar{k}, \quad S: \{z = x^2 + y^2,\, x^2 + y^2 = 1,$ $z = 0\};$

12) $\bar{a} = (3x - y - z)\bar{i} + 3y\bar{j} + 2z\bar{k}, \quad S: \{z = x^2 + y^2,\, z = 2y\};$

13) $\bar{a} = (x + y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (x + z)\bar{k}, \quad S: \{y = 2x,\, z = y^2,\, y = 4x,$ $x = 1,\, z = 0\};$

14) $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + y\bar{k}, \quad S: \{z = 8 - x^2 - y^2,\, z = x^2 + y^2\};$

15) $\bar{a} = (6x + y)\bar{i} + 5(x + z)\bar{j} + 4y\bar{k}, \quad S: \{y = 2x,\, y = x,\, y = 2$ $z = x^2 + y^2,\, z = 0\};$

Знайти циркуляцію векторного поля $\bar{a}$ вздовж контура L у напрямку зростання параметру:

16) $\bar{a} = 4y\bar{i} - 3x\bar{j} + x\bar{k}, \quad L = \{x = 4\cos t,\, y = 4\sin t,\, z = 4 - 4\cos t -$ $4\sin t\};$

17) $\bar{a} = 2y\bar{i} + 5z\bar{j} + 3x\bar{k}, \quad L = \{2x^2 + 2y^2 = 1,\, x + y + z = 3\};$

18) $\bar{a} = (x^2 - y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k},\, L = \{x = \cos t,\, y = \sin t,\, z = 1\};$

19) $\bar{a} = 2y\bar{i} - x\bar{j} + x\bar{k}, \quad L = \{x = 3\cos t,\, y = 3\sin t,\, z = 3 - 3\cos t -$ $3\sin t\};$

20) $\bar{a} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j} + z^2\bar{k}, \quad L = \{z = x^2 + y^2,\, z = 1\}.$

Література

[1] *Бохонов Ю.Є.* Математичний аналіз. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Навч. посібн. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Київ. КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 162 с

[2] *Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І.* Математичний аналіз. Київ. Знання, 2008. 421 с.

[3] *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: підручник : у 2.ч. Ч. 1. 3-е вид., випр. і доп. К. : Вища школа, 2005. 446 с.

[4] *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: підручник : у 2 ч. Ч. 2. 3-е вид., випр. і доп. К. : Вища школа, 2005. 510 с.

[5] Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. (I курс II семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В.Алєксєєва, О. О. Диховичний, К.: НТУУ «КПІ», 2013. 144 с.

[6] Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум. (I курс II семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К.: НТУУ «КПІ», 2014. 190 с.

доц. **Погоріляк Олександр Олександрович** – канд. фіз.-мат. наук;
доц. **Сливка-Тилищак Ганна Іванівна** – докт. фіз.-мат. наук;
доц. **Тегза Антоніна Михайлівна** – канд. фіз.-мат. наук;

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ:

методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій

Віддруковано в КП "Ужгородська міська друкарня"