Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-037-5-001 УДК [378.016:51]:004

ЗАСОБИ АКТИВІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тетяна БОЯРИЩЕВА
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-2899-4900

Мирослава ГЕРИЧ ✉
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-9634-5254

Олександр ПОГОРІЛЯК
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна
oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0501-4861

Ольга СИНЯВСЬКА
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2711-3940

Антоніна ТЕГЗА
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-5310-4311

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Першочерговим завданням системи вищої освіти є підготовка висококваліфікованих фахівців у різних галузях науки і виробництва. При цьому сама система освіти змушена організовувати свою діяльність в екстремальних умовах. Різкий перехід до дистанційного навчання насамперед позбавив викладачів і здобувачів освіти живого спілкування, що спричинило послаблення пізнавальної активності. Наслідком цього, в свою чергу, стало те, що знання, здобуті неохоче, є нечіткими і поверхневими. Тому виявлення і дослідження засобів, які б стимулювали пізнавальну діяльність здобувача, є одним із першочергових завдань системи освіти. Натомість перехід до дистанційного навчання змусив викладачів широко використовувати засоби комп'ютерного навчання, зокрема, різноманітні програми та застосунки, які мають необмежений спектр можливостей при вивченні математики. Практична значущість цих засобів надзвичайно велика. Поряд із їх застосуванням згідно безпосереднього призначення, вони також спонукають до практичного застосування здобутих теоретичних знань; стимулюють засвоєння нових форм і методів навчання, що є особливо важливим для майбутнього вчителя. Одночасно з цим необхідно дотримуватись балансу в питанні використання даних засобів. Адже вони не здатні самостійно сформувати цілісну систему знань у студента і являють собою лише допоміжний, хоч і дуже ефективний інструмент. Дослідження і порівняння можливостей деяких із цих програм поряд з традиційними методами навчання складає предмет дослідження даної статті.*

Матеріали і методи. *У процесі дослідження використано теоретичні (аналіз навчально-методичної літератури, порівняльний аналіз можливостей середовища GeoGebra та пакету Maxima) та практичні методи дослідження (дослідження ефективності різних класичних способів розв'язування задач, розгляд*

MEANS OF ACTIVATING EDUCATIONAL ACTIVITIES OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS DURING THE STUDY OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Tetiana BOIARYSHCHEVA
Uzhhorod National University, Ukraine
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0003-2899-4900

Myroslava HERYCH ✉
Uzhhorod National University, Ukraine
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-9634-5254

Oleksandr POHORILIAK
Uzhhorod National University, Ukraine
oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-0501-4861

Olga SYNIAVSKA
Uzhhorod National University, Ukraine
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0002-2711-3940

Antonina TEGZA
Uzhhorod National University, Ukraine
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-5310-4311

ABSTRACT

Formulation of the problem. *The primary task of the higher education system is the training of highly qualified specialists in various fields of science and production. At the same time, the education system itself is forced to organize its activities in extreme conditions. The sharp transition to distance learning primarily deprived teachers and students of education of live communication, which caused a weakening of cognitive activity. The consequence of this, in turn, was that the knowledge acquired unwillingly is vague and superficial. Therefore, identifying and researching means that would stimulate the cognitive activity of the acquirer is one of the primary tasks of the education system. Instead, the transition to distance learning has forced teachers to make extensive use of computer-based learning tools, in particular, a variety of programs and applications that have an unlimited range of possibilities in the study of mathematics. The practical significance of these means is extremely great. Along with their application according to their immediate purpose, they also encourage the practical application of acquired theoretical knowledge; stimulate the assimilation of new forms and methods of learning, which is especially important for a future teacher. At the same time, it is necessary to maintain a balance in the issue of using these funds. After all, they are not able to independently form a complete system of knowledge in a student and are only an auxiliary, albeit very effective, tool. Research and comparison of some of these programs' capabilities and traditional teaching methods are the subjects of this article.*

Materials and methods. *In the research process, theoretical (analysis of educational and methodological literature, comparative analysis of capabilities of the GeoGebra environment and the Maxima package) and practical research methods were used (study of the effectiveness of various classic methods of solving problems, consideration of the functional capabilities of the GeoGebra and Maxima services for effective learning of the material in the learning process mathematical analysis).*

Для цитування:
Боярищева Т., Герич М., Погоріляк О., Синявська О., Тегза А. Засоби активізації навчальної діяльності майбутніх вчителів математики під час вивчення математичного аналізу. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 37. № 5. С. 7-16. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-037-5-001
Боярищева, Т., Герич, М., Погоріляк, О., Синявська, О., & Тегза, А. (2022). Засоби активізації навчальної діяльності майбутніх вчителів математики під час вивчення математичного аналізу. *Фізико-математична освіта*, 37(5), 7-16. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-001

For citation:
Boiaryshcheva, T., Herych, M., Pohoriliak, O., Syniavska, O., & Tegza, A. (2022). Means of activating educational activities of future mathematics teachers during the study of mathematical analysis. *Physical and Mathematical Education*, 37(5), 7-16. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-001
Boiaryshcheva, T., Herych, M., Pohoriliak, O., Syniavska, O., & Tegza, A. (2022). Zasoby aktyvizatsii navchalnoi diialnosti maibutnikh vchyteliv matematyky pid chas vyvchennia matematychnoho analizu [Means of activating educational activities of future mathematics teachers during the study of mathematical analysis]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 37(5), 7-16. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-001

✉ Corresponding author
© T. Boiaryshcheva, M. Herych, O. Pohoriliak, O. Syniavska, A. Tegza, 2022

функціональних можливостей сервісів GeoGebra та Maxima для ефективного засвоєння матеріалу в процесі вивчення математичного аналізу).

***Результати.** В даній статті запропоновано для активізації пізнавальної діяльності здобувача під час вивчення математичного аналізу поєднувати класичні засоби разом із сучасними комп'ютерними, зокрема використання пакетів GeoGebra та Maxima. Реалізацію такого підходу показано на конкретних прикладах.*

Наведено приклади розв'язування задач у системі динамічної математики GeoGebra та пакету Maxima.

***Висновки.** Активізація пізнавальної діяльності здобувачів вищої освіти досягається, зокрема, за рахунок підвищення рівня навчальної мотивації, який спостерігається при максимально можливому наближенні процесу навчання до індивідуальних прагнень і можливостей здобувачів. Допомагає активізувати пізнавальну діяльність в процесі вивчення математичного аналізу використання різних засобів навчання. Крім класичних, які можуть бути урізноманітненні різними способами розв'язання однієї і тієї ж самої задачі, сучасні програмні засоби GeoGebra та Maxima сприяють кращому розумінню та формування навичок самостійного вивчення програмового матеріалу. З використанням GeoGebra та Maxima створюється зручне середовище для організації та підтримки навчально-пізнавальної діяльності, зокрема й навчальних досліджень.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: засоби активізації; пізнавальна діяльність; математичний аналіз; GeoGebra; Maxima.

***Results.** In this article, to activate the cognitive activity of the student during the study of mathematical analysis, it is proposed to combine classical tools with modern computer tools, in particular, the use of GeoGebra and Maxima packages. The implementation of this approach is shown in concrete examples.*

***Conclusions.** Activation of the cognitive activity of students of higher education is achieved, in particular, by increasing the level of educational motivation, which is observed when the learning process is as close as possible to students' individual aspirations and capabilities. Helps to activate cognitive activity in the process of studying mathematical analysis with the use of various teaching aids. In addition to the classic ones, which can be diversified by different ways of solving the same problem, modern software tools GeoGebra and Maxima contribute to a better understanding and formation of skills for the independent study of software material. With the use of GeoGebra and Maxima, a convenient environment is created for the organization and support of educational and cognitive activities, including educational research.*

KEYWORDS: means of activation; cognitive activity; mathematical analysis; GeoGebra; Maxima.

ВСТУП

Постановка проблеми. Сучасна вища освіта в Україні стоїть перед безліччю викликів. Насамперед вони зумовлені потребою суспільства у висококласних спеціалістах, здатних не тільки якісно і професійно здійснювати ту діяльність, якої безпосередньо навчалися у виші, але й уміли б адаптувати свої знання, уміння і навички до нових умов та сучасних потреб суспільства.

Особливо важливо виробити це вміння у майбутніх вчителів, зокрема, математики. Їхня майбутня сфера професійної діяльності включає в себе передачу знань наступним здобувачам освіти. Тобто одночасно із вивченням предметів спеціальності такий студент (можливо, навіть несвідомо) вчиться методиці: вмінню подати навчальний матеріал, дотримуватися при цьому основних дидактичних принципів, і найголовніше – зацікавити учня у вивченні матеріалу. Адже тільки мотивований та зацікавлений учень здобуватиме знання свідомо та активно.

Усе згадане подвійною мірою стосується викладачів закладів вищої освіти. Їм теж необхідно включити всі можливості, щоб активізувати навчальну діяльність студента. Методи, що використовуються при цьому, з великою вірогідністю будуть, у свою чергу, застосовані у їх подальшій професійній діяльності.

Одним із засобів, які стимулюють активізацію навчальної діяльності студента, є дотримання таких принципів дидактики, як наочність, практичність та системність. Наприклад, вивчаючи таку важливу дисципліну як математичний аналіз, здобувач обов'язково потребує розуміння того, «де це знадобиться», наглядної демонстрації того, «як це виглядає» і обов'язково – усвідомлення тісного зв'язку предмету вивчення з іншими навчальними дисциплінами, їх взаємопроникнення, використання подібних методів досліджень, тобто все те, що включається в поняття системності.

Забезпечувати дотримання цих принципів необхідно безперервно в процесі вивчення будь-якого предмета, але під час вивчення математичних дисциплін, зокрема, математичного аналізу, постійне акцентування на практичній значущості матеріалу, на зв'язку з іншими науками тощо часто призводить до того, що студент втрачає основну змістову лінію і втрачає можливість свідомо і активно сприймати матеріал. Засоби комп'ютерного навчання, зокрема комп'ютерне середовище GeoGebra чи пакет Maxima у цій ситуації є практично незамінними. З їх допомогою можливо без зайвих втрат часу і розпорошення уваги проілюструвати незрозумілі чи надто абстрактні поняття, реалізувати або здійснити громіздкі перетворення чи обчислення тощо.

Предметом нашого дослідження є використання програмних засобів GeoGebra та Maxima для підвищення пізнавальної діяльності у процесі навчання математичного аналізу у майбутніх вчителів математики.

Аналіз актуальних досліджень. Як свідчать дослідження О. Співаковського (2003), В. Кухаренка, В. Бондаренка (2020) та В. Величка (2019) надзвичайної популярності набувають тенденції впровадження різних комп'ютерних засобів, що активізують пізнавальну діяльність здобувача, особливо в умовах дистанційного навчання. Адже формування пізнавальної активності інформаційно-освітнього середовища на базі різних новітніх технологій є пріоритетним напрямом розвитку саме в галузі математичної освіти, і цей напрям зараз інтенсивно розвивається, що показано у роботі В. Величка (2019). Існуючі підходи впровадження цих технологій у навчальний процес з педагогічної точки зору висвітлено у роботі М. Жалдака (2003). Окремий комплекс проблем стосується застосування пакетів прикладних програм для здійснення різноманітних математичних операцій, дій і обрахунків систем комп'ютерної математики, зокрема Maxima, GeoGebra. Порівняльний аналіз різних видів програмного забезпечення з точки зору педагогічного використання, визначення чинників успішної організації освітнього середовища навчального закладу (наявність кваліфікованого педагогічного і технічного персоналу, матеріально-технічних умов та устаткування для розгортання приватної або загальнодоступної хмари, врахування ліцензійних угод доступу до програмного забезпечення та інші чинники) проведено в роботах А. Федонюк та В. Юнчик (2019), а також М. Шишкіної та ін. (2014). У працях цих науковців досліджувалися сучасні комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання, які зорієнтовані на педагогічно доцільне та збалансоване поєднання досягнень традиційних методичних систем навчання та сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Проблема інтеграції комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання в навчальний процес вищих навчальних закладів розглядалася в працях Ю. Сінько (2009). У своєму дослідженні Ю. Сінько розглядає основні програмні засоби зарубіжного та вітчизняного виробництва останніх років, визначає роль і місце систем комп'ютерної алгебри у викладанні точних наук. Останнім часом системи динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри дуже вплинули на матемачну освіту. На жаль, ці інструменти були абсолютно не пов'язані між собою. Сучасні вільнопоширювані системи GeoGebra та Maxima — це нове програмне забезпечення, яке об'єднує можливості як динамічної геометрії, так і комп'ютерної алгебри в одному інструменті. На сьогоднішній день у світі існує величезна кількість програмного забезпечення, використання якого дозволяє вирішувати задачі різного рівня складності з достатньо високим рівнем візуалізації та різноманітними засобами виведення результату, отриманого за допомогою ЕОМ. Це позитивно впливає на мотивацію студентів до вивчення матеріалу та дає поштовх до пошуку нових алгоритмів розв'язання різноманітних математичних задач (Hohenwarter & Preiner, 2007). Проте проблема вибору системи комп'ютерної алгебри для викладання дисциплін математичного циклу в педагогічних закладах вищої освіти, особливо в умовах недостатнього фінансування, залишається досить вагомою. Тому у світлі викладеного важливим є пошук найбільш прийнятного рішення щодо вибору сучасних комп'ютерних засобів для викладання дисциплін фундаментального циклу студентам педагогічних закладів вищої освіти України, які здобувають освіту на математичних спеціальностях в сучасних умовах обмеженого фінансування, шляхом впровадження можливостей вільнопоширюваних комп'ютерних засобів.

Нові тенденції вивчення математики в коледжах та університеті через засоби Geogebra висвітлено у роботах L. Diković (2009a), L. Diković (2009b) та N. Arbain, N. Shukor (2015), що може бути особливо важливим для майбутнього вчителя математики. В роботах показано як концепції динамічної геометрії можна застосувати до тем математики за допомогою запропонованих програмних засобів GeoGebra, а також підкреслюється важлива роль безкоштовних пакетів програмного забезпечення з відкритим кодом для викладання математики в усьому світі, проте вибір програмного забезпечення має бути правильно спланованим. У роботі (Wassie & Zergaw, 2019) досліджується внесок GeoGebra у викладання та вивчення математики: як інструменту для сприяння інтересу та досягнень учнів, а також як середовища для процвітання різних стилів навчання. Крім того, вказано застереження, які слід враховувати перед впровадженням інтегрованого уроку GeoGebra, а також виклики, обмеження та сфери майбутнього розвитку. Серед них: переконання та вільне володіння технологіями користувачів, а також співвідношення учнів у класі є одними з проблем для ефективної інтеграції GeoGebra на уроках математики. Серед обмежень GeoGebra розглядається складність деяких команд на панелі введення, особливо для студентів і викладачів без попереднього досвіду програмування.

У статті В. Величко та ін. (2019) та N. Karjanto, H. Husain (2021) наведено аргументи на користь використання вільної системи комп'ютерної алгебри Maxima в навчальній і науковій діяльності студентів. Представлені її основні переваги та недоліки. Розглянуто основний функціонал цієї системи, що дозволяє оптимізувати час вирішення різноманітних математичних задач, налаштувати виведення отриманого результату, виконати поетапну перевірку правильності проведення необхідних розрахунків.

Метою статті є висвітлення класичних засобів активізації пізнавальної діяльності здобувачів освіти на ряду із сучасними комп'ютерними засобами, які б враховували специфіку вивчення математичного аналізу майбутніми вчителями математики, зокрема, на прикладі середовища GeoGebra та пакету Maxima.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз та систематизація навчально-методичної літератури із проблем використання та впровадження в освітній процес комп'ютерних програмних засобів в процес навчання математичного аналізу. Практичний розгляд функціональних можливостей сервісів GeoGebra та Maxima для ефективного засвоєння матеріалу в процесі вивчення математичного аналізу.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Математичний аналіз є одним із базових, системоутворюючих предметів у програмі підготовки спеціаліста математика, чи то майбутнього вчителя, чи то науковця, чи то працівника іншої, пов'язаної з використанням математичних знань, сфери. З його оволодінням закладаються основи великої кількості інших математичних дисциплін: диференціальних рівнянь, функціонального та комплексного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики тощо, а також методи математичного аналізу незамінні у дослідженнях проблем фізики, хімії, економіки, соціології та інших наук. Тому вкрай важливо, щоб знання з цієї дисципліни, здобуті студентом, були якомога більш повними, систематизованими і придатними для практичного використання. Більш того, студент повинен оволодіти методами математичного аналізу на такому рівні, щоб мати змогу застосовувати їх при подальшому навчанні.

Якщо розглядати цілі навчання з точки зору таксономії Блума, то першою, базовою метою навчання є якраз здобуття певного (доволі об'ємного) обсягу знань, фактичного матеріалу: означень, властивостей, теорем, понять, взаємних зв'язків. Навіть на цьому етапі вивчення математичного аналізу викликає у студента значні труднощі, пов'язані як із уже згаданим значним обсягом нової інформації, так і з новою, незвичною концепцією побудови об'єкта вивчення. Мова математичної логіки та теорії множин, яка єдина здатна повно і всебічно висвітлити матеріал, – нова і незвична. З огляду на це, значна кількість студентів, починаючи навчання за спеціальністю «Математика» або «Середня освіта (математика)» тощо з математичного аналізу, втрачають інтерес до навчання, і, як наслідок, не набувають необхідного обсягу знань, без якого неможливе подальше навчання. Тож перша мета, досягнення якої сприятиме оволодінню першим рівнем таксономії, – активізація навчальної діяльності студента.

При цьому, звичайно, важливо дотримуватися принципу подання матеріалу «від простого до складного». Великий обсяг нової, складної для розуміння інформації здебільшого не активізує пізнавальну діяльність, а притлумлює її. Принаймні значна частина студентів-математиків згодом зізнаються, що на перших порах були вражені тим, що математика – «без цифр». І від того, наскільки швидко студент усвідомить необхідність такого переходу, наскільки якісно він зможе його здійснити, залежить його майбутня кваліфікація як спеціаліста. На цьому етапі викладачеві вкрай важливо починати з найпростіших понять, всебічно ілюструючи їх прикладами, щоб у свідомості студента нарешті «з'явились цифри». Разом з цим необхідно наголошувати, що, наприклад, ті ж самі властивості множин і дій над ними мають місце не лише для звичних нам числових множин, але й для будь-яких сукупностей об'єктів довільної природи.

Вважаємо, що на цьому початковому етапі визначальна роль належить неухильному дотриманню принципу наочності навчання. Практично кожне означення, сформульоване сухою і строгою мовою математичної логіки, може (і повинне!) бути проілюстроване наочним прикладом, контрприкладом, зразком застосування. Зробити це можна, звичайно, традиційним чином, під час читання лекції, демонструючи їх на дошці. Але, звісно, значно якісніше можна це здійснювати, використовуючи можливості навчання з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій (ІКТ). Абсолютно несподівано це використання активізувалося з переходом до дистанційного навчання.

Дистанційне навчання у свою чергу поставило викладачів та студентів перед новою серією викликів, головними з-поміж яких є відсутність живого спілкування та безпосереднього контакту та погіршення якості знань. Під час заняття, яке проводиться дистанційно, викладач має змогу продемонструвати ефектні, динамічні ілюстрації навчального матеріалу, практичні приклади чи доведення, не витрачаючи часу на, наприклад, побудову графіка функції у реальному часі, на іноді неякісній дошці абощо. Завжди можливо підготувати найякісніший приклад чи ілюстрацію наперед, безпосередньо під час заняття коментуючи або змінюючи дані (багато застосунків дозволяють робити це у реальному часі). Такої наочності складно досягти, працюючи традиційно з дошкою і крейдою. Все це вже певною мірою активізує пізнавальну діяльність студента.

Із успішним досягненням першої цілі навчання, згідно таксономії Блума, можна переходити до другого етапу – відтворення знань. На жаль, на цьому етапі навчання зупиняється певна кількість студентів. Щоправда, цієї мети можна досягти старим і неефективним методом «зубріння». Про якість і міцність таких знань говорити не доводиться. Тим паче, нереально перейти до третьої (за Блумом) мети – застосування. У межах курсу математичного аналізу це насамперед формування вміння розв'язувати практичні задачі. Основні типи задач, які розглядаються в межах курсу математичного аналізу – це обчислення границь числових послідовностей і функцій, диференціювання та інтегрування функцій, дослідження збіжності рядів і інтегралів. При цьому використовується дуже велика кількість різноманітних методів, кожен з яких є оптимальним для розв'язання одного типу задач, допустимим (але не найкращим) – для іншого, і абсолютно неефективним – для третього. Усвідомлення цього факту і потреба в тому, щоб встановити однозначний зв'язок «Проблема» – «Метод розв'язання» є першим кроком до переходу на вищий щабель таксономії – аналіз, а також наступний – порівняння. Цей перехід є надзвичайно важливим, і щоб його забезпечити, викладач повинен продемонструвати ефективність різних методів розв'язання однієї і тієї ж задачі з метою порівняння їх затратності по часу, складності перетворень тощо.

Наведемо приклад.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язання. Спосіб 1. Підстановка $x = 2sint$. При цьому $t = arcsin\frac{x}{2}, dx = d(2sint) = 2cost\ dt$.

При використанні цієї підстановки підінтегральний вираз перетвориться так:

$$\sqrt{4-x^2}dx = \sqrt{4-(2sint)^2}2cost\ dt = \sqrt{4-4sin^2t}2cost\ dt = \sqrt{4cos^2t}2cost\ dt = 4cos^2tdt = 4\cdot\frac{1-cos2t}{2}dt =$$
$$= 2(1-cos2t)dt$$

Після цього інтеграл набуває вигляду, який легко інтегрується елементарними способами.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx = \int 2(1-cos2t)dt = 2\left(t-\frac{1}{2}sin2t\right)+\text{C}$$

Залишається повернутися до початкової змінної:

$$2\left(t-\frac{1}{2}sin2t\right)+\text{C} = 2\left(arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}sin\left(2arcsin\frac{x}{2}\right)\right)+\text{C} = 2arcsin\frac{x}{2}-2sin\left(arcsin\frac{x}{2}\right)cos\left(arcsin\frac{x}{2}\right)+C =$$
$$= 2arcsin\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-sin^2\left(arcsin\frac{x}{2}\right)}+C = 2arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C =$$
$$= 2arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}+C = 2arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

Цей спосіб є найпоширенішим при інтегруванні виразів, що містять $\sqrt{a^2-x^2}$. Багато посібників навіть включають інтеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ в число табличних, не даючи змоги студенту самостійно отримати результат, що не піднімає нас вище від рівня відтворення. Натомість можливість здійснити процес самостійно і повністю є надзвичайно важливою для формування навичок свідомого використання теоретичного матеріалу. І як приємний бонус – в процесі розв'язання доводиться користуватися шкільними знаннями з тригонометрії, які в свій час теж здавалися школярам сухими і відірваними від практичного застосування.

Спосіб 2. Майже ідентичний: використовується заміна $x = 2cost$. Затрати часу і зусиль при його реалізації абсолютно такі ж.

Спосіб 3. Перетворивши підінтегральну функцію

$\sqrt{4-x^2} = x\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$, доцільно здійснити заміну $\sqrt{\frac{4}{x^2}-1} = t$, при якій $x = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}, dx = -\frac{2tdt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Інтеграл при цьому набуде вигляду

$$\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\left(-\frac{2tdt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right) = -4\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = -4\int\frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}dt = -4\left(\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt\right).$$

Перший інтеграл – табличний: $\int\frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}+\text{C} = arctg\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+\text{C}$, натомість для знаходження другого доведеться застосувати рекурентну формулу (при $n = 1, a = 1$)

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + arctgt\right) + C.$$

Зрештою, повертаючись до старої змінної, отримаємо:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + arctgt\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}{\frac{4}{x^2}-1+1} + arctg\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}{4} + arctg\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Врешті-решт, звівши разом розв'язки обох інтегралів, отримаємо

$$-4arctg\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2arctg\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C = -\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} - 2arctg\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C.$$

Можна помітити, що цей шлях значно складніший для реалізації, ніж перший спосіб. Натомість, на відміну від першого, тут не доводиться вводити до розгляду функції принципово іншої природи – ми навіть після здійснення заміни залишаємося в полі раціональних функцій, бо заміна допомогла позбутися радикала. Натомість довелося використовувати рекурентну формулу, яка не надто часто фігурує в задачах, і, як наслідок, забувається.

Ще один цікавий момент пов'язаний з різним виглядом другого доданка, одержаного при інтегруванні першим та другим способами. Варто було б дослідити, чи справді функції $-2arctg\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ та $2arcsin\frac{x}{2}$ співпадають чи принаймні відрізняються на сталу величину.

Спосіб 4. Використання другої підстановки Ейлера.

Спосіб 5. Використання третьої підстановки Ейлера.

Спосіб 6. Використання третьої підстановки Чебишева (зводиться до способу 2)

Такий всебічний аналіз дозволяє втілити в життя принцип системності навчання, доводячи тісний зв'язок між різними розділами математичного аналізу та шкільної математики, активізує інтерес студентів до предмета, що вивчається. Та на цьому етапі виникає ускладнення. В умовах сьогоднішніх реалій кількість годин, що виділяються на вивчення предмета, суттєво скорочені, без, звісно, звуження навчальної (робочої) програми. Тому розв'язувати одну задачу шістьма способами в режимі реального часу дуже затратно. Доводиться залишати подібні завдання на самостійний розгляд студента, котрий далеко не завжди бачить у них реальну потребу. Адже метод розв'язання наведено, для чого ж ускладнювати собі життя? Виходом із цієї ситуації теж може стати використання можливостей обчислювальної техніки – наперед заготовлені розв'язки задачі можливими способами можуть бути продемонстровані на екрані без витрати часу на безпосереднє розв'язування, але з можливістю порівняти обсяг здійсненої роботи для реалізації того чи іншого методу з можливістю їх порівняння.

Зокрема, принципу наочності зручно слідувати, використовуючи при вивченні математичного аналізу інформаційні технології. Наприклад, ефективним є використання засобу GeoGebra.

Якщо GeoGebra – готовий до використання засіб створення наочних зображень графіків, векторів, геометричних фігур тощо, який доступний навіть школяреві, завдяки зручному, інтуїтивно зрозумілому інтерфейсу, то на вищий рівень пізнання може вивести використання власноруч створених програм. Такий якісний перехід відповідатиме, згідно таксономії Блума, досягненню таких цілей навчання як аналіз (дослідження нових засобів навчання, які навіть виходять за межі класичного математичного аналізу), оцінювання (порівняння ефективності цих засобів з відомими раніше) та нарешті синтез як здатність використовувати здобутки інших галузей науки для розв'язання задач того ж таки математичного аналізу і навпаки – його методи і засоби можуть використовуватися для потреб інших наук.

Крім того, оновлена версія таксономії Блума ставить на вершину піраміди навчальних цілей (вище навіть від синтезу) креативність. Використання програмування забезпечує досягнення цієї мети повною мірою і допомагає активізації навчальної діяльності студента. Адже нікого не треба переконувати у важливості знань, умінь і навичок у сфері ІТ. Цифрові технології шаленими темпами впроваджуються у всі сфери життя і діяльності людини, тож навички впевненої роботи з ними дуже важливі, і здобути їх краще у процесі навчання, де помилка – всього лише привід для подальшого самовдосконалення, ніж при прямому використанні, де неточність може призвести до небажаних наслідків. Формування математичного складу мислення (яке, на відміну від поширеної думки, є доступним для кожної людини) є значною перевагою у різних сферах діяльності. На цьому варто наголошувати, чітко аргументуючи свою позицію. Це повинно стимулювати мотивацію студента до вивчення математики не лише на рівні знання, відтворення і застосування, але й далі, аж до синтезу та креативності.

Слід наголосити, що логіка таксономії не означає можливість нехтувати нижніми щаблями піраміди навчальних цілей. Адже тільки коли є міцна база знань, тобто сформовано перший рівень, можна переходити до відтворення (другий) та застосування (третій рівень). І лише коли закладені ґрунтовні знання, уміння та навички, можна аналізувати щось нове і креативне.

Уміння здобувача використовувати ІКТ в освітньому процесі є однією із предметних компетенцій майбутнього вчителя математики, що є однією із суттєвих складових професійної компетентності. Оскільки, саме використання ІКТ може стати засобом до активізації пізнавальної діяльності здобувача, який принесе в освітній процес нотки сучасності, і, можливо, може перетворити гаджети студентів із «ворогів» у «друзів» викладача.

Розглянемо порівняльну характеристику обраних пакетів та наведемо ілюстративні приклади, що допомагають викладачеві активізувати пізнавальну діяльність здобувача.

Проведемо аналіз використання системи комп'ютерної математики GeoGebra як засобу активізації діяльності майбутніх учителів математики в процесі навчання математичного аналізу. GeoGebra є універсальним програмним засобом, що використовується для підтримки навчання усіх розділів вищої математики, зокрема математичного аналізу.

Суттєвою перевагою GeoGebra є його доступність, пристосованість до різних операційних систем, можливість використання готових шаблонів заготовлених задач, постійне вдосконалення командою студентів, вчителів та науковців усього світу GeoGebra. Access mode: https://geogebra.org/.

Виконання студентами на практичних заняттях із математичного аналізу завдань з використанням середовища GeoGebra створює можливість для урізноманітнення кола завдань, включаючи в нього завдання прикладного та дослідницького характеру, оптимізаційні задачі. Такі задачі пов’язані із застосуванням математики у техніці, фізиці, хімії, економіці, медицині, екології, а також у побуті. Ці задачі відрізняються від типових як формулюванням так і способами розв’язування. Як правило на розв'язання таких задач витрачається значно більше часу ніж на розв’язування типових завдань. При розв’язувані таких задач потрібно скласти модель процесу (за умовою задачі скласти співвідношення, яке пов’язує функцію і змінні), і цей етап є найважчим, а потім використовуючи відповідні теоретичні знання знайти розв’язок абстрактної математичної задачі. Щоб мінімізувати витрати часу на обрахунки, візуалізувати модель доцільно використовувати середовище GeoGebra.

Наведемо основні можливості пакету GeoGebra, що полегшать навчання студента на даний час :

● візуалізація різних математичних об’єктів (графіки функцій, рівнянь, зображення фігур, тіл тощо);

● ілюстрація методів побудови;

● можливість моделювання та емпіричного дослідження властивостей різних об’єктів;

● інструментально-обчислювальний комплекс, що надає користувачеві набір різних спеціалізованих інструментів для створення об’єкту та вимірювання його різних параметрів;

● можливість дослідження та спостерігання властивостей чи поведінки об’єктів у динаміці.

Як ми знаємо одним із найскладніших для розуміння є матеріал про рівномірну збіжність функціональної послідовності до заданої функції на певному проміжку. То під час вивчення даної теми приходить на допомогу візуалізація графіків елементів функціональної послідовності на вказаному проміжку, а особливо допомагає більш чітко зрозуміти цей матеріал при побудові елементів функціональної послідовності та їх поведінка у динаміці. Проілюструємо дану можливість на конкретному прикладі.

Приклад 2. Дослідити функціональну послідовність $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на рівномірну збіжність на відрізку [0,1].

Розв’язання. Знайдемо граничну функцію на проміжку [0,1]:

$$f(x) = f_n(x) \; = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) = 0.$$

Дослідимо $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на рівномірну збіжність до $f(x) = 0$ на [0,1] за критерієм

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \; = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \; = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{2n} - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{2n}| =$$

$$= \left| \text{Знайдемо критичні точки:} \quad \begin{gathered} (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0, \\ nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \\ x = 0 \text{ або } 1 - 2x^n = 0 \\ x^n = \frac{1}{2} \; x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \end{gathered} \right| = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |x^n - x^{2n} - 0| = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \neq 0\,.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що функціональна послідовність $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ не є рівномірно збіжною до 0 на [0,1].

Зазвичай студенти дуже важко сприймають завдання даної тематики, тому для кращого розуміння варто скористатися пакетом GeoGebra, який дозволить в динаміці побачити і відчути порушення рівномірної збіжності даної функціональної послідовності на проміжку [0,1].

Як бачимо із рисунків 1-4 при збільшенні n функціональна послідовність не є рівномірно збіжною на проміжку [0,1] до 0.

На вищенаведеному прикладі видно, як достатньо абстрактне, на перший погляд, поняття рівномірної збіжності наглядно ілюструється засобами GeoGebra. Можна проаналізувати поведінку окремого елемента функціональної послідовності (див. рис.1-4) залежно від його номера, зробити висновок про цю поведінку при граничному переході, і, як наслідок, помітити порушення рівномірної збіжності в околі точки $x = 1$. При цьому демонструється різниця між неперервністю та рівномірною неперністю. Це є прикладом побудови структурних зв’язків в межах програмового матеріалу. У більш широкій перспективі це сприяє формуванню системи наукових знань здобувача.

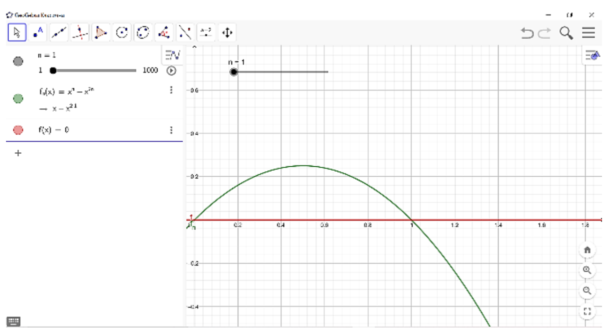

Рис.1. Візуалізація елементу послідовності при n=1

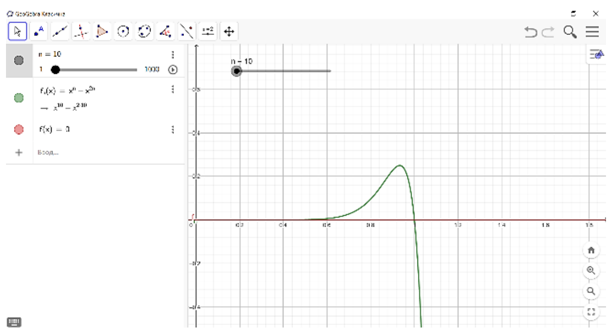

Рис.2. Візуалізація елементу послідовності при n=10

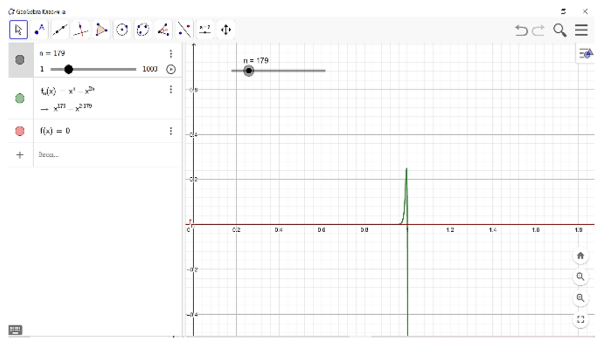

Рис.3. Візуалізація елементу послідовності при n=179

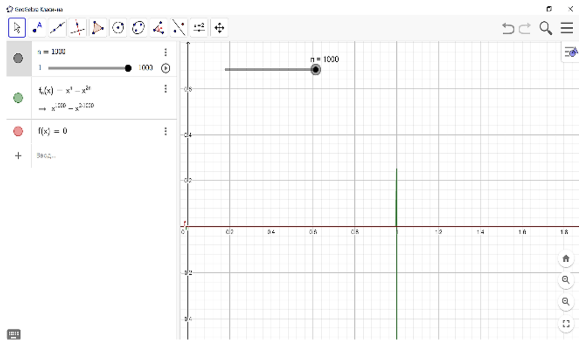

Рис.4. Візуалізація елементу послідовності при n=1000

Таким чином, використання системи GeoGebra при вивченні курсу «Математичний аналіз» дозволяє оптимізувати навчальний процес, проводити індивідуальну роботу, використовуючи різні гаджети студентів, що сприяє підвищенню ефективності навчання, активізує пізнавальну діяльність та сприяє формуванню алгоритмічного стилю мислення у майбутніх учителів математики, створює можливість наочно демонструвати результати своєї навчальної діяльності, створення інтерактивної моделі, інтерактивні завдання з моделювання різних явищ, і головне, посилює інтерес студентів до фундаментальної науки через можливість візуалізації застосування математичного апарату до розв'язування прикладних задач.

Поруч із відомими системами комп'ютерної математики (СКМ) Maple, Mathematica, MATLAB, MathCad, вагоме місце посідає пакет Maxima, який на відміну від згаданих комерційних програм, є вільно розповсюдженою. Програма Maxima є нащадком відомої системи комп'ютерної алгебри Macsyma, яка була розроблена в США у 60-ті роки XX ст. Maxima оновлюється дуже часто, для того щоб виправити наявні помилки, покращити код і документацію (останнє оновлення квітень 2022 р).

За можливостями свого застосування та основними характеристиками Maxima є достатньо близькою до інших СКМ, але разом із цим має істотні переваги. Дана система є універсальним математичним пакетом, за допомогою якого користувач може розв'язувати велику кількість різноманітних задач математики, не володіючи при цьому значними навичками програмування. При цьому, Maxima доступна не тільки для користувачів Windows, але й також для Linux та Mac OS X, вона володіє зручним та інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом (наявні інтерфейси на багатьох мовах, зокрема на українській), який допомагає виконувати числові та символьні обчислення без запам'ятовування необхідних для цього команд.

Також, у якості переваги, можна відзначити роботу цього пакету як інтерпретатора, так як всі зроблені помилки користувача відразу з'являються на екрані із поясненням та вказівками щодо їх виправлення. Maxima здійснює чисельні обчислення високої точності, використовуючи точні дроби, цілі числа і числа з плаваючою точкою довільної точності Maxima (2022).

На сьогодні, за допомогою Maxima, користувач може:

- використовувати пакет в якості універсального калькулятора;
- розв'язувати задачі елементарної математики (операції з поліномами, символьні обчислення, спрощення виразів, розкриття дужок тощо)
- спрощувати символьні вирази;
- (розв'язувати задачі елементарної математики)
- працювати із спеціальними функціями, зокрема еліптичними функціями;
- розв'язувати алгебраїчні рівняння та системи;
- розв'язувати задачі лінійної алгебри (операції з матрицями, знаходження оберненої матриці та визначників, рангу і мінорів матриці, ортогоналізація, розв'язування матричних рівнянь);
- розв'язувати нелінійні алгебраїчні рівняння та їх системи;
- обчислювати границі послідовностей та функцій;
- знаходити похідні функцій однієї та багатьох змінних;
- шукати екстремуми функцій;
- аналітично обчислювати визначені і невизначені інтеграли;
- обчислювати кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли;
- розкладати функцій у степеневі ряди;
- проводити операції із степеневими рядами та рядами Фур'є;
- розв'язувати диференціальні та інтегральні рівняння;
- будувати графіки функцій, заданих неявно, параметрично, у полярній системі координат;
- будувати тривимірні графіки.

Отже, середовище Maxima є потужним сучасним засобом комп'ютерної математики і може бути чудовим інструментом для проведення числових і символьних розрахунків при розв'язанні різних задач математичного аналізу для здобувачів освіти.

До прикладу, при розв'язанні вправ до теми "Інтегрування раціональних функцій" у пакеті Maxima для невизначених інтегралів вигляду $\int f(x)dx$, де $f(x)$ – раціональна функція, корисною є команда partfrac(f(x),x). Оскільки, інтеграли від раціональних функцій часто потребують вмінь по розкладу правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів, що інколи для студентів є складною операцією, то команда partfrac(f(x),x) легко розв'язує це завдання і допомагає студенту перевірити самого себе, адже їй тільки потрібно вказати ім'я змінної, відносно якої вона робить вказане перетворення. При цьому також, у відповідних випадках, виділяється ціла частина дробу.

Також у системі Maxima можна проілюструвати застосування загальної схеми інтегрування раціональних дробів. При цьому використовуються наступні команди: для розкладу знаменнику дробу $Q(x)$ на елементарні множники – factor(Q(x)) (рис.5), для зведення отриманого виразу до спільного знаменника ratsimp(%,x) (рис.5). Далі, визначають невизначені коефіцієнти методом прирівнювання при однакових степенях x у чисельнику даного дробу і початкового. З отриманих рівностей потрібно скласти систему рівнянь і розв'язати її можна також з допомогою пакету Maxima із застосуванням команди solve (рис.6). Остаточно, підставивши отримані коефіцієнти у розклад дробу, можна проводити інтегрування за допомогою стандартної команди integrate (рис.6).

Приклад 3. Знайти інтеграл з використанням пакету Maxima: $\int \frac{(7x^3-9)dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

Розв'язання.

```
→ Розклад знаменника на множники
→ factor(x^4-5·x^3+6·x^2);
(%o1) (x-3) (x-2) x^2
→ Запис розкладу на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами
→ (A/(x-3))+(B/(x-2))+(C/x)+(D/x^2);
(%o2) C/x + D/x^2 + B/(x-2) + A/(x-3)
→ Визначення невизначених коефіцієнтів методом прирівнювання
→ 1) зведення отриманого виразу до спільного знаменника
→ ratsimp(%,x);
(%o3) ((C+B+A) x^3 + (D-5 C-3 B-2 A) x^2 + (6 C-5 D) x + 6 D) / (x^4 - 5 x^3 + 6 x^2)
```

Рис.5. Розклад многочлена на множники, дробу на суму елементарних дробів та знаходження невизначених коефіцієнтів з допомогою Maxima

```
→ 2) прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у чисельнику даного дробу
→ і початкового для знаходження невизначених коефіцієнтів:
→ solve([A+B+C=7,D-5·C-3·B-2·A=0,6·C-5·D=0,6·D=-9]);
(%o4) [[D=-3/2,C=-5/4,B=-47/4,A=20]]
→ Підставляємо отримані невизначені коефіцієнти у розклад дробу з підінтегральної функції
→ і проводимо інтегрування
→ integrate(-(5/(4·x))-(3/(2·x^2))-(47/(4·(x-2)))+(20/(x-3)),x);
(%o10) -5 log(x)/4 + 3/(2 x) - 47 log(x-2)/4 + 20 log(x-3)
→ Порівнюємо відповіді безпосереднім інтегруванням
→ integrate((7·x^3-9)/(x^4-5·x^3+6·x^2),x);
(%o8) -5 log(x)/4 + 3/(2 x) - 47 log(x-2)/4 + 20 log(x-3)
```

Рис.6. Знаходження невизначених коефіцієнтів та невизначеного інтегралу з допомогою Maxima

Відчутними перевагами застосування наведених команд є: можливість копіювання та вставлення отриманого в Maxima результату (із рядку виведення %oN) для проведення подальших операцій; автоматичне спрощення (групування в чисельнику коефіцієнтів при x) при застосуванні команди ratsimp.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

До предметних компетенцій майбутнього вчителя, очевидно, належить вміння використовувати у професійній діяльності засоби комп'ютерного навчання. Навіть якщо оволодіння ними не входить в програму вивчення математичного аналізу, використання комп'ютерних технологій викладачем спонукає до освоєння цих можливостей і здобувача. Geogebra та Maxima є наразі найоптимальнішими для досягнення згаданих цілей з ряду причин: вільнопоширювані програми, можливість використання на різних гаджетах, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, широкий спектр можливостей, зокрема здатність до наглядної візуалізації.

Загалом кажучи, використання засобів ІТ-навчання дозволяє досягти таких цілей: структуризація навчального матеріалу; можливості раціонального використання програмних засобів; доцільність застосування ІКТ у навчальній діяльності; можливість економії часу, необхідного для подачі матеріалу без втрат у фактичній інформації; результативність; формування предметної компетенції здобувача та можливість досягнення всіх цілей навчання згідно таксономії Блума.

В умовах широкого використання інформаційних технологій необхідним є інтегрування майбутнього спеціаліста – педагога в інформаційне середовище, вироблення навичок активно використовувати засоби ІКТ для створення навчально-методичних матеріалів; для динамічної та наглядної подачі матеріалу; для демонстрації зв'язку теоретичного матеріалу, який вивчається, із практичними потребами, а також з іншими навчальними дисциплінами.

В даній статті запропоновано для активізації пізнавальної діяльності здобувача під час вивчення математичного аналізу поєднувати класичні засоби разом із сучасними комп'ютерними, зокрема використання пакетів GeoGebra та Maxima. Реалізацію такого підходу показано на конкретних прикладах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Співаковський, О. В. (2003). *Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі навчання студентів з математичних спеціальностей.* Херсон: Айлант.
2. Кухаренко, В. М., & Бондаренко, В. В. (2020). *Екстрене дистанційне навчання в Україні*. Харків: КП «Міська друкарня». https://duan.edu.ua/images/News/UA/Departments/Management/2020/monograph_ekstr_dyst_navch.pdf
3. Величко, В. Є. (2019). *Теоретико-методичні засади використання вільних програм при підготовці майбутніх вчителів математики, фізики та інформатики.* Дис. докт. пед. наук, Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний університет». Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний університет». https://ddpu.edu.ua/images/stories/news/specrada/191219/Velichko/velychko01.pdf
4. Федонюк, А. А., & Юнчик, В. Л. (2019). Порівняльна характеристика функціональних можливостей систем комп'ютерної математики в процесі розв'язування задач. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи та мережі,* 6, 90 – 102.
5. Жалдак, М. І. (2003). Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання,* 7, 3–16. https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/584
6. Шишкіна, М. П., Когут, У. П., & Попель, М. В. (2014). Системи комп'ютерної математики у хмаро орієнтованому освітньому середовищі навчального закладу. *Наука і освіта: новий вимір. Педагогіка і психологія,* 27 (14), 75-78. https://lib.iitta.gov.ua/6499/1/article-science-edu.pdf
7. Sinko, Yu.I. (2009). Systems of Computer Mathematics and their role in mathematical education. *Information technology in education*. 3, 274-278.
8. *GeoGebra*. https://geogebra.org/
9. Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal for Online Mathematics and its Applications*, 7(1), 2-12. https://www.researchgate.net/publication/294345528_Dynamic_mathematics_with_GeoGebra
10. Diković, L. (2009a). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203. http://doi.org/10.2298/csis0902191D
11. Dikovic, L. (2009b). Implementing Dynamic Mathematics Resources with GeoGebra at the College Level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET),* 4(3), 51–54. http://doi.org/10.3991/ijet.v4i3.784
12. Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015). The Effects of GeoGebra on Students Achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172, 208–214. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356
13. Wassie, Y.A., & Zergaw, G.A. (2019). Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education.* 15(8), 17-34. https://doi.org/10.29333/ejmste/108436
14. Velychko, V. Y, Stopkin, A. V., & Fedorenko, O. H. (2019). USE OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEM MAXIMA IN THE PROCESS OF TEACHING FUTURE MATHEMATICS TEACHERS. *Information Technologies and Learning Tools*. 69(1), 112–123. https://doi.org/10.33407/itlt.v69i1.2284
15. Karjanto, N. (2021) Calculus and Digital Natives in Rendezvous: wxMaxima Impact. *Educ. Sci.* 11, 490. https://doi.org/10.3390/educsci11090490
16. Karjanto, N., & Husain, H.S. (2021). Not Another Computer Algebra System: Highlighting wxMaxima in Calculus. *Mathematics.* 9, 1317. https://doi.org/10.3390/math9121317
17. Maxima. *A Computer Algebra System*. https://maxima.sourceforge.io/index.html

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Spivakovskyi, O. V. (2003). *Teoriia i praktyka vykorystannia informatsiinykh tekhnolohii u protsesi navchannia studentiv z matematychnykh spetsialnostei [Theory and practice of using information technology in preparing students mathematical skills]*. Kherson: Ailant. (in Ukrainian).
2. Kukharenko, V. M., & Bondarenko, V. V. (2020). *Ekstrene dystantsiine navchannia v Ukraini [Emergency distance learning in Ukraine].* Kharkiv: KP «Miska drukarnia». https://duan.edu.ua/images/News/UA/Departments/Management/2020/monograph_ekstr_dyst_navch.pdf (in Ukrainian)
3. Velychko, V. Ye. (2019). *Teoretyko-metodychni zasady vykorystannia vilnykh prohram pry pidhotovtsi maibutnikh vchyteliv matematyky, fizyky ta informatyky*. Dys. dokt. ped. nauk, Derzhavnyi vyshchyi navchalnyi zaklad «Donbaskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet». Derzhavnyi vyshchyi navchalnyi zaklad «Donbaskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet». https://ddpu.edu.ua/images/stories/news/specrada/191219/Velichko/velychko01.pdf (in Ukrainian).
4. Fedoniuk, A. A., & Yunchyk, V. L. (2019). Porivnialna kharakterystyka funktsionalnykh mozhlyvostei system kompiuternoi matematyky v protsesi rozviazuvannia zadach [Comparative characteristics of the functional possibilities of the systems of computer mathematics in the process of solving tasks]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». Informatsiini systemy ta merezhi – Bulletin of the Lviv Polytechnic National University. Information systems and networks,* 6, 90-102. https://doi.org/10.23939/sisn2019.02.090 (in Ukrainian)
5. Zhaldak, M. I. (2003). Pedahohichnyi potentsial kompiuterno-oriientovanykh system navchannia matematyky [Pedagogical potential of computer-oriented mathematics learning systems]. *Naukovyi chasopys NPU imeni M.P. Drahomanova. Seriia 2. Kompiuterno-oriientovani systemy navchannia – Scientific journal of the NPU named after M.P. Drahomanova. Series 2. Computer-oriented learning systems*, 7, 3–16. https://sj.npu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/584 (in Ukrainian).
6. Shyshkina, M. P., Kohut, U. P., & Popel, M. V. (2014). Systemy kompiuternoi matematyky u khmaro oriientovanomu osvitnomu seredovyshchi navchalnoho zakladu [Systems of computer mathematics in the cloud-based learning environment of the educational institution]. *Nauka i osvita: novyi vymir. Pedahohika i psykholohiia – Science and education: a new dimension. Pedagogy and psychology,* 27 (14), 75-78. https://lib.iitta.gov.ua/6499/1/article-science-edu.pdf (in Ukrainian).
7. Sinko, Yu.I. (2009). Systems of Computer Mathematics and their role in mathematical education. *Information technology in education*. 3, 274-278.
8. *GeoGebra*. https://geogebra.org/

9. Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal for Online Mathematics and its Applications*, 7(1), 2-12. https://www.researchgate.net/publication/294345528_Dynamic_mathematics_with_GeoGebra
10. Diković, L. (2009a). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203. http://doi.org/10.2298/csis0902191D
11. Dikovic, L. (2009b). Implementing Dynamic Mathematics Resources with GeoGebra at the College Level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET),* 4(3), 51–54. http://doi.org/10.3991/ijet.v4i3.784
12. Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015). The Effects of GeoGebra on Students Achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172, 208–214. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356
13. Wassie, Y.A., & Zergaw, G.A. (2019). Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education.* 15(8), 17-34. https://doi.org/10.29333/ejmste/108436
14. Velychko, V. Y, Stopkin, A. V., & Fedorenko, O. H. (2019). USE OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEM MAXIMA IN THE PROCESS OF TEACHING FUTURE MATHEMATICS TEACHERS. *Information Technologies and Learning Tools*. 69(1), 112–123. https://doi.org/10.33407/itlt.v69i1.2284
15. Karjanto, N. (2021) Calculus and Digital Natives in Rendezvous: wxMaxima Impact. *Educ. Sci.* 11, 490. https://doi.org/10.3390/educsci11090490
16. Karjanto, N., & Husain, H.S. (2021). Not Another Computer Algebra System: Highlighting wxMaxima in Calculus. *Mathematics.* 9, 1317. https://doi.org/10.3390/math9121317
17. Maxima. *A Computer Algebra System*. https://maxima.sourceforge.io/index.html

This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.