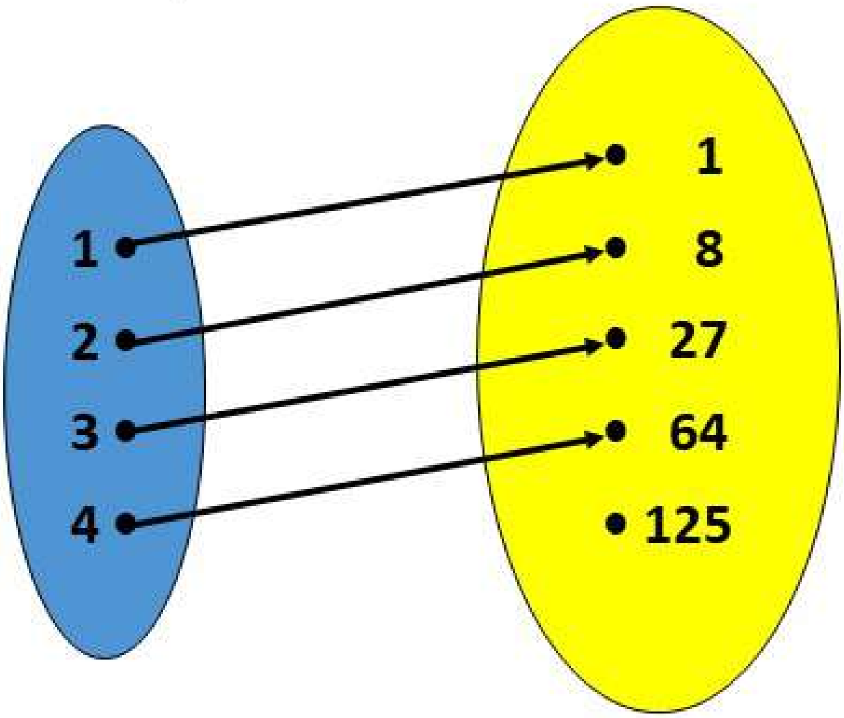
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

І. А. МИЧ, В. В. НІКОЛЕНКО, О. В. ВАРЦАБА

ЕЛЕМЕНТИ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

$$\rho = \{(a, b) | b = a^3\} \subset A \times B$$



Ужгород - 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

І.А. МИЧ, В. В. НІКОЛЕНКО, О. В. ВАРЦАБА

ЕЛЕМЕНТИ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

методичні рекомендації та вказівки, практичні, лабораторні і модульні завдання

Ужгород - 2020

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ВКАЗІВКИ, ПРАКТИЧНІ, ЛАБОРАТОРНІ І МОДУЛЬНІ ЗАВДАННЯ

*до вивчення курсу “**Дискретна математика**”*

(част. 1.2. *Елементи бінарних відношень*)

для студентів 1-го курсу
факультету математики
та цифрових технологій

Ужгород – 2020

УДК 510

Методичні рекомендації та вказівки, практичні, лабораторні і модульні завдання до вивчення курсу "Дискретна математика" (част.1.2 ***Елементи теорії бінарних відношень***) / Мич І.А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2020. – 48 с.

Відповідальний за випуск:
кандидат технічних наук, доцент М.М.Маляр

Рецензент:
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В.Шапочка

ЗМІСТ

1. Поняття бінарного відношення

Означення 1. *Бінарним відношенням* між елементами множин A і B називається підмножина декартового добутку множин A і B.

Бінарні відношення звичайно позначають малими латинськими буквами $\rho, \delta, \sigma, ..., \rho_1, \delta_1, \sigma_1, ...$. Те, що ρ бінарне відношення між множинами A і B позначають $\rho \subset A \times B$ (або $a\rho b$, де $a \in A$, $b \in B$ і читають a знаходиться у відношенні ρ з b).

Множини A, B називаються базисними множинами бінарного відношення ρ, причому множина A називається першою базисною множиною, а множина B – другою базисною множиною.

Приклад 1. Нехай $A = \{2,3,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$. Побудувати довільні бінарні відношення.

Розв'язання. Знайдемо декартовий добуток цих множин:

$$A \times B = \{(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),...,(5,c),(5,d)\}.$$

Тоді бінарними відношеннями між множинами A і B можуть бути:

$$\rho = \{(2,a),(2,c),(3,a),(5,a),(5,c)\},$$
$$\delta = \{(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\},$$
$$\delta_1 = \{(2,a),(3,a),(5,a)\},$$
$$\sigma = \{(3,c),(5,c)\},$$
$$\sigma_1 = \{(2,a),(3,b),(5,c)\} \text{ і т.д.}$$

Легко показати, якщо множина A містить n елементів, множина B містить m елементів, то для цих множин можна побудувати 2^{nm} різних бінарних відношень.

Означення 2. Бінарне відношення називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають (позначають $\rho \subset A^2$, де $A^2 = A \times A$).

Можна також сказати, що бінарне відношення між елементами множин A і B є деяка сукупність упорядкованих пар, перша і друга компоненти яких належать відповідно множинам A і B. Значить, щоб задати бінарне відношення між елементами заданих множин A і B необхідно із всіх упорядкованих пар, утворених із елементів цих множин, якимось способом виділити їх певну сукупність.

Бінарні відношення можна задавати наступними способами:

1) *Переліком елементів*.

2) *За допомогою форми* $\{(x,y) \mid P(x,y)\}$.

Приклад 2. Бінарне відношення $\rho \subset A^2$, де $A=\{x \in N \mid x^2 < 18\}$, задане формою $\rho = \{(x,y) \mid x+2y - \textit{просте число}\}$. Задати бінарне відношення ρ за допомогою переліку елементів.

Розв'язання. Множина А буде містити елементи $A=\{1,2,3,4\}$.

Тоді $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,4)\}$.

3) *За допомогою матриць* (*таблиць*).

Нехай $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, ..., b_m\}$, $\delta \subset A \times B$.

Матриця $M(\delta)$ цього відношення є прямокутною, бінарною матрицею, яка має n рядків, m стовпчиків і будується за формулою:

$$M(\delta) = \begin{cases} 1,\ \textit{якщо}\ (a_i, b_j) \in \delta, \\ 0,\ \textit{якщо}\ (a_i, b_j) \notin \delta, \end{cases} \qquad (1)$$

для $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Приклад 3. Побудувати матрицю бінарного відношення

$$\delta = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,4)\} \subset \{1,2,3,4\}^2 .$$

Розв'язання. На основі (1) отримаємо:

$$M(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) *За допомогою графіка на координатній площині для числових множин.* Коли графіком бінарного відношення є не ізольовані точки і не лінія, а частина площини, то її заштриховують.

Приклад 4. На координатній площині зобразити графіки бінарних відношень:

а) $\rho = \{(x,y) \mid y = x\} \subset R^2$,

б) $\delta = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\} \subset R^2$.

Розв'язання. Зображення графіків відношень а), б) подано відповідно на рис.1 та рис. 2.

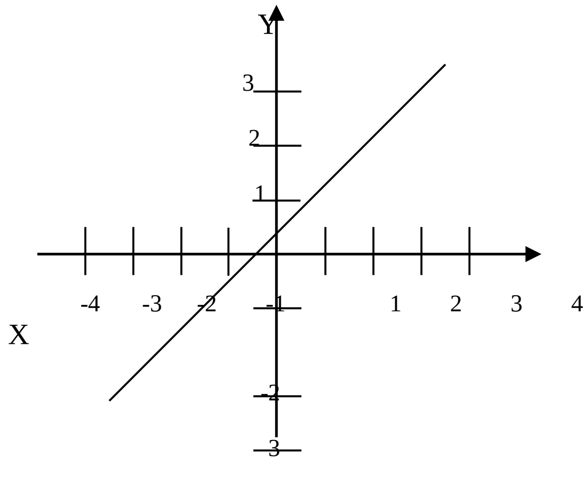


Рис. 1

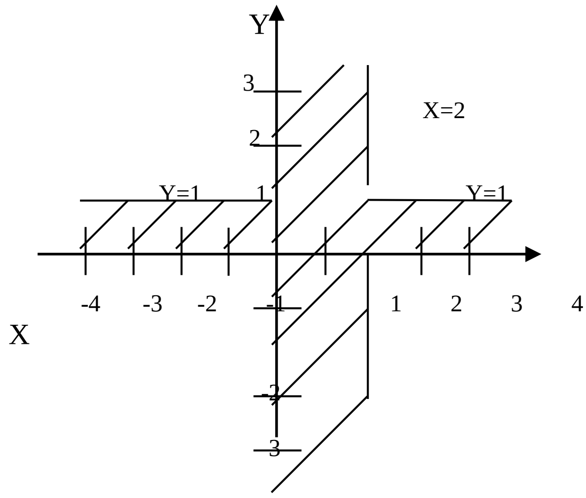


Рис. 2

5) *За допомогою графів для скінчених множин.*

Відповідність між елементами двох скінчених множин зручно зображати за допомогою схеми, на якій елементи множин зображено точками, які за законом відповідності з'єднані між собою стрілками. Така схема називається графом.

Приклад 5. Нехай $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,8,27,64,125\}$. Задати за допомогою графа бінарне відношення $\rho \subset A\times B$: "b є кубом a", де $a\in A$, $b\in B$, тобто $\rho=\{(a,b)\,|\,b=a^3\}\subset A\times B$.

Розв'язання. Побудуємо бінарне відношення за допомогою переліку елементів , отримаємо: $\rho=\{(1,1),(2,8),(3,27),(4,64)\}$.

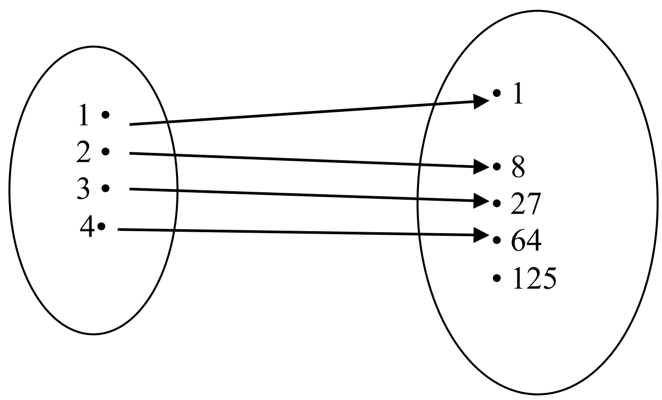


Рис. 3.

Означення 3. *Першою проекцією* (*областю визначення*) бінарного відношення $\rho\subset A\times B$ називається множина перших координат всіх впорядкованих пар, які утворюють відношення ρ, тобто за означенням

$$np_1\rho = \{x \,|\, (x, y) \in \rho\} \subset A.$$

Означення 4. *Другою проекцією* (*множиною значень*) бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ називається множина других координат всіх впорядкованих пар, які утворюють бінарне відношення ρ, тобто за означенням

$$np_2\rho = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\} \subset B.$$

Приклад 6. Для бінарного відношення

$$\rho = \{(2,a),(2,b),(3,c),(5,a),(5,d)\} \subset \{2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$$

знайти а) $np_1\rho$, $np_2\rho$.

Розв'язання. а) $np_1\rho = \{2,3,5\} \neq A$, $np_2\rho = \{a,b,c,d\} = B$.

Означення 5. *Зрізом* бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ через елемент $x \in A$ називається множина других координат всіх впорядкованих пар бінарного відношення ρ, перша координата яких дорівнює x, тобто за означенням

$$\rho\langle x\rangle \overset{df}{=} \{y \,|\, (x, y) \in \rho\},\ x \in A.$$

Означення 6. *Зрізом* бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ через множину X називається множина других координат усіх впорядкованих пар відношення ρ, перші координати яких належать X, тобто за означенням

$$\rho[X] \overset{df}{=} \{y \,|\, \exists x \in X,\ (x, y) \in \rho\},\ \rho[X] = \bigcup_{x \in X} \rho\langle x\rangle,\ \ X \subset A.$$

Приклад 6 (*продовження*). Для бінарного відношення $\rho = \{(2,a),(2,b),(3,c),(5,a),(5,d)\} \subset \{2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$ знайти

б) $\rho\langle 2\rangle$, $\rho\langle 3\rangle$, $\rho\langle 4\rangle$, $\rho\langle 5\rangle$;

в) $\rho[\{3,4\}]$, $\rho[\{2,5\}]$.

Розв'язання. б) $\rho\langle 2\rangle = \{a,b\}$, $\rho\langle 3\rangle = \{c\}$, $\rho\langle 4\rangle = \varnothing$, $\rho\langle 5\rangle = \{a,d\}$.

в) $\rho[\{3,4\}] = \{c\}$, $\rho[\{3,5\}] = \{a,b,d\}$.

2. Операції над бінарними відношеннями

Оскільки кожне бінарне відношення є множиною, то над бінарними відношеннями можна виконувати всі операції алгебри множин: перетин, об'єднання, доповнення, різниця. Крім цього над бінарними відношеннями можна виконувати операції обертання і добутку.

1) *Обертання бінарного відношення*.

Означення 7. *Обертанням* бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ називається бінарне відношення ρ^{-1}, яке складається з усіх пар (y, x) таких, що пари $(x, y) \in \rho$, тобто за означенням

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\} \subset B \times A.$$

Зауважимо, що $\left(\rho^{-1}\right)^{-1} = \rho$.

Приклад 7. Нехай $\rho = \{(a,3),(a,4),(c,2),(d,4)\} \subset \{a,c,d\} \times \{2,3,4\}$ Знайти ρ^{-1}.

Розв'язання. На основі означення 7 отримаємо:

$$\rho^{-1} = \{(3,a),(4,a),(2,c),(4,d)\} \subset \{2,3,4\} \times \{a,c,d\} .$$

2) *Операція композиції* (*добуток, множення бінарних відношень*).

Означення 8. *Добутком* бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ на бінарне відношення $\delta \subset B \times C$ називається бінарне відношення $\delta \circ \rho \subset A \times C$, яке складається з усіх таких пар (x, z), для яких існує таке y, що $(x, y) \in \rho$ і $(y, z) \in \delta$, тобто за означенням

$$\delta \circ \rho = \{(x, z) \mid \exists (y \in B), \ \ (x, y) \in \rho, (y, z) \in \delta\}.$$

Приклад 8. Нехай $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

$$\rho = \{(a,1),(a,5),(b,2),(b,5),(d,1)\} \subset A \times B,$$

$$\delta = \{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\gamma),(3,\alpha),(3,\gamma),(4,\gamma),(5,\gamma)\} \subset B \times C.$$

Знайти $\delta \circ \rho$.

Розв'язання. На основі означення 7 отримаємо:

$$\delta \circ \rho = \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\gamma),(d,\alpha),(d,\beta)\}.$$

***Теорема* 6**. *Для довільних бінарних відношень* $\rho \subset A \times B$, $\delta \subset B \times C$

$$(\delta \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \delta^{-1}.$$

3. Спеціальні бінарні відношення

Розглянемо типи найбільш важливих бінарних відношень.

Означення 9. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *рефлексивним*, якщо кожен елемент множини A перебуває у даному відношенні сам з собою, тобто за означенням

$$\forall(a \in A),\ (a,a) \in \rho .$$

Означення 10. *Діагоналлю множини* A (бінарним відношенням тотожності між елементами множини A) називається множина, яка складається з усіх пар вигляду (a,a), тобто за означенням

$$\Delta_A = \{(a,a) \mid \forall(a \in A)\},$$

і позначається Δ_A (або I_A).

Критерій рефлексивності: Бінарне відношення ρ рефлексивне тоді і тільки тоді, коли $\Delta_A \subset \rho$.

Приклад 9. Чи рефлексивні бінарні відношення:

а) $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$?

Бінарне відношення ρ рефлексивне, оскільки

$$\Delta_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \subset \rho .$$

б) Нехай B – множина студентів 1-го курсу математичного факультету.

δ – бінарне відношення: “студент x ровесник студента y”.

Бінарне відношення δ рефлексивне, оскільки зрозуміло, що кожен студент сам собі ровесник, отже пара $(x,x) \in \delta$ для всіх $x \in B$.

в) σ – бінарне відношення: “пряма x паралельна прямій y в площині z”.

Оскільки пряма x співпадає сама з собою, то пара (x,x) належить даному відношенню, а отже, бінарне відношення σ – рефлексивне.

Означення 11. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *антирефлексивним*, якщо жоден елемент множини A не перебуває у відношенні ρ сам з собою, тобто за означенням

$$\forall(a \in A),\ (a,a) \notin \rho .$$

Приклад 10. Які з наведених бінарних відношень є антирефлексивними:

а) $\rho = \{(a,b),(a,c),(a,d)\} \subset \{a,b,c,d\}^2$?

б) $\delta = \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,c),(c,d)\} \subset \{a,b,c,d\}^2$?

в) $\sigma = \{(a,c),(b,d\} \subset \{a,b,c,d\}^2$?

Розв'язання. Бінарні відношення ρ і σ антирефлексивні, оскільки не включають жодного елемента $(a,a)\ \forall(a \in \{a,b,c,d\})$.

Бінарне відношення δ не є антирефлексивним тому, що включає пару (c,c).

Означення 12. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *іррефлексивним*, якщо $(a,a) \in \rho$ не має сенсу.

Приклад 11. Іррефлексивним є бінарне відношення строгого порядку $x < x$ на множині дійсних або множині раціональних чисел (воно не має сенсу тому, що завжди хибне).

Означення 13. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *симетричним*, якщо $\forall(x, y \in A)$ з того, що пара $(x, y) \in \rho$ слідує, що пара $(y, x) \in \rho$, тобто за означенням

$$\forall(x, y \in A) \quad (x, y) \in \rho \ \Rightarrow (y, x) \in \rho .$$

Критерій симетричності. Бінарне відношення $\rho \subset A^2$ симетричне тоді і тільки тоді, коли $\rho = \rho^{-1}$.

Приклад 12. Чи симетричні бінарні відношення:

а) $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$?

б) Нехай B – множина студентів 1-о курсу математичного факультету.

δ – бінарне відношення: “студент x є сусідом по парті студента y”.

в) σ – бінарне відношення: “пряма x перпендикулярна прямій y в площині z”.

Розв'язання. а) Знайдемо ρ^{-1}:

$$\rho^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\}.$$

Оскільки $\rho = \rho^{-1}$, то бінарне відношення ρ симетричне.

б) Дійсно, для всякого студента x, якщо y сусід, то для y x також сусід. Отже, бінарне відношення δ – симетричне.

в) Дійсно, якщо пряма x перпендикулярна до прямої y, то пряма y перпендикулярна до прямої x.

Отже, бінарне відношення σ – симетричне.

Зауважимо, що наведені відношення не є рефлексивними.

Означення 14. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *антисиметричним*, якщо $\forall(x, y \in A)$ з того, що $(x, y) \in \rho$ і $(y, x) \in \rho$ слідує, що $x = y$, тобто за означенням

$$\forall(x, y \in A) \quad (x, y) \in \rho \text{ і } (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y.$$

Критерій антисиметричності: Бінарне відношення $\rho \subset A^2$ антисиметричне тоді і тільки тоді, коли $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$.

Приклад 13. Чи антисиметричні бінарні відношення:

а) $\rho = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(d,d)\} \subset \{a,b,c,d\}^2$?

б) δ – бінарне відношення: "множина A є підмножиною множини B".

Розв'язання. а) Побудуємо ρ^{-1}:

$$\rho^{-1} = \{(a,a),(b,a),(c,b),(d,b),(d,d)\}.$$

Знайдемо $\rho \cap \rho^{-1}$:

$$\rho \cap \rho^{-1} = \{(a,a),(d,d)\}$$

Оскільки $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$, то бінарне відношення ρ антисиметричне.

б) Якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то з аксіоми об'ємності випливає, що множини A і B складаються з одних і тих же елементів, тобто $A = B$, а значить бінарне відношення δ є антисиметричним.

Означення 15. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *транзитивним*, якщо $\forall(x, y, z \in A)$ з того, що $(x, y) \in \rho$ і $(y, z) \in \rho$ слідує, що $(x, z) \in \rho$, тобто за означенням

$$\forall(x, y, z \in A) \quad (x, y) \in \rho \text{ і } (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho.$$

Критерій транзитивності: Бінарне відношення $\rho \subset A^2$ транзитивне тоді і тільки тоді, коли $\rho = \rho^2$ ($\rho^2 = \rho \circ \rho$).

Приклад 14. Чи транзитивні бінарні відношення:
а) $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$?
б) δ – бінарне відношення: "студент x є ровесником студента y".
в) σ – бінарне відношення: "дійсне число a більше дійсного числа b".

Розв'язання.

Знайдемо ρ^2: $\rho^2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}$.

Оскільки $\rho = \rho^2$, то бінарне відношення ρ транзитивне. В останніх двох випадках транзитивність очевидна.

4. Відношення еквівалентності. Фактор-множина

Означення 16. Однорідне бінарне відношення ε між елементами множини A називається *відношенням еквівалентності* на множині A, якщо воно рефлексивне, симетричне, транзитивне.

Означення 17. Якщо ε відношення еквівалентності на множині A, то *класом еквівалентності* породженим елементом $a \in A$ називається зріз відношення ε через елемент a, тобто за означенням

$$[a]_\varepsilon \overset{df}{=} \varepsilon\langle a \rangle.$$

Лема 1. *Якщо ε - відношення еквівалентності на множині A, $a, b \in A$, то класи еквівалентності $[a]_\varepsilon$ і $[b]_\varepsilon$ або не перетинаються або співпадають.*

Означення 18. Число класів еквівалентності відношення еквівалентності ε називається *індексом множини* A.

Якщо число класів еквівалентності скінчене, то множина A називається *множиною скінченого індексу*.

Означення 19. *Фактор–множиною* $A/_\varepsilon$ множини A по відношенні еквівалентності ε називається множина всіх класів еквівалентності породжених елементами множини A, тобто за означенням

$$A/_\varepsilon = \{X \mid \exists x \in X,\ X = [x]_\varepsilon\}.$$

Приклад 15. Чи є бінарне відношення $\rho = \{(1,1),(1,3),(2,2),(1,5),(4,4),(3,5),(2,6),(3,3),(3,1),(6,6),(5,3),(6,2)$ $(5,1),(5,5)\}$ відношенням еквівалентності на множині $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Якщо так, то побудувати фактор-множину множини A.

Розв'язання.

1) рефлексивність: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\in\rho$

Отже, ρ – рефлексивне.

2) симетричність: $(1,3)\in\rho$ і $(3,1)\in\rho$;
$(1,5)\in\rho$ і $(5,1)\in\rho$;
$(3,5)\in\rho$ і $(5,3)\in\rho$;
$(2,6)\in\rho$ і $(6,2)\in\rho$. Отже, ρ - симетричне.

3) транзитивність: $(1,3)\in\rho$, $(3,5)\in\rho$ і $(1,5)\in\rho$;
$(3,5)\in\rho$, $(5,1)\in\rho$ і $(3,1)\in\rho$;
$(3,1)\in\rho$, $(1,5)\in\rho$ і $(3,5)\in\rho$;
$(1,5)\in\rho$, $(5,3)\in\rho$ і $(1,3)\in\rho$;
$(1,5)\in\rho$, $(5,1)\in\rho$ і $(1,1)\in\rho$;
$(3,5)\in\rho$, $(5,3)\in\rho$ і $(3,3)\in\rho$, і т.д.
Отже, ρ - транзитивне.

А значить, бінарне відношення ρ є відношенням еквівалентності. Побудуємо класи еквівалентності множини A.

$[1]_\rho = \rho\langle 1\rangle=\{1,3,5\}$;
$[2]_\rho = \rho\langle 2\rangle=\{2,6\}$;
$[3]_\rho = \rho\langle 3\rangle=\{5,3,1\}$;
$[4]_\rho = \rho\langle 4\rangle=\{4\}$;
$[5]_\rho = \rho\langle 5\rangle=\{3,1,5\}$;
$[6]_\rho = \rho\langle 6\rangle=\{6,2\}$.

Тоді фактор-множиною $A|_\rho$ множини A буде множина $\{\{1,3,5\},\{4\},\{2,6\}\}$.

Означення 20. *Розбиттям множини* A називається сукупність $\tau=\{A_i\}$ непорожніх підмножин множини A, яка задовольняє умови:

1. $A_i\cap A_j=\varnothing$, при $i\neq j$, тобто підмножини A_i із τ не перетинаються.
2. $\bigcup\limits_i A_i = A$, тобто об'єднання всіх підмножин $A_i\in\tau$ дорівнює A.

Приклад 15 (продовження). У наведеному вище прикладі $\tau=\{\{1,3,5\},\{4\},\{2,6\}\}$, тобто $A_1=\{1,3,5\}$, $A_2=\{4\}$, $A_3=\{2,6\}$. Очевидно, що $A_i\cap A_j=\varnothing$ для всіх $i\neq j$, $i,j=\overline{1,3}$.

$$\bigcup_i A_i = A_1\cup A_2\cup A_3=\{1,3,5\}\cup\{4\}\cup\{2,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}=A.$$

***Теорема* 7.** *Кожна фактор-множина* $A/_{\varepsilon}$ *множини* A *є розбиттям множини* A *і навпаки, кожне розбиття множини* A *однозначно породжує деяке відношення еквівалентності* ε *на множині* A *таке, що* $A/_{\varepsilon} = \tau$.

5. Відношення часткового порядку

Означення 21. Однорідне бінарне відношення ρ між елементами множини A називається *відношенням порядку (часткового порядку)* на множині A, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне.

Означення 22. Множина A називається *частково-впорядкованою*, якщо на ній задано деяке відношення порядку.

Частковий порядок на множині A як правило позначають символом $\leq$, а саму частково упорядковану множину A через $(A, \leq)$.

Означення 23. *Найменшим елементом* множини A відносно відношення порядку ρ називається такий елемент $a \in A$, що $\forall (x \in A)\ (a, x) \in \rho$.

Означення 24. *Найбільшим елементом* множини A відносно відношення порядку ρ називається такий елемент $a \in A$, що $\forall (x \in A)\ (x, a) \in \rho$.

Означення 25. Елемент b називається *мінімальним елементом* множини A відносно відношення часткового порядку ρ, якщо не існує відмінного від b елемента множини A такого, що пара $(x, b) \in \rho$.

Означення 26. Елемент b називається *максимальним елементом* множини A відносно відношення часткового порядку ρ, якщо не існує відмінного від b елемента множини A такого, що $(b, x) \in \rho$.

Приклад 16. Чи є бінарне відношення

ρ={(1,1),(1,5),(1,7),(2,2),(2,7),(4,4),(4,5),(4,7),(5,5),(5,7),(7,7)} $\subset$ $\subset \{1,2,4,5,7\}^2$ відношенням часткового порядку? Якщо так, то знайти найменший, найбільший, максимальний і мінімальний елементи множини $\{1,2,4,5,7\}$ відносно заданого на ній відношенні порядку ρ.

Розв'язання. Знайдемо $\Delta_A = \{(1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (7,7)\}$. Оскільки $\Delta_A \subset \rho$, то ρ–рефлексивне. Побудуємо

$\rho^{-1} = \{(1,1),(5,1),(7,1),(2,2),(7,2),(4,4),(5,4),(7,4),(5,5),(7,5),(7,7)\}$ і знайдемо $\rho \cap \rho^{-1} = \{(1,1),(2,2),(4,4),(5,5),(7,7)\}$. Оскільки $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$, то ρ–антисиметричне.

Знайдемо

$\rho^2 = \{(1,1),(1,5),(1,7),(2,2),(2,7),(4,4),(4,5),(4,7),(5,5),(5,7),(7,7)\}$.

Оскільки $\rho = \rho^2$, то бінарне відношення ρ–транзитивне.

Отже, бінарне відношення ρ є відношенням часткового порядку.

За означенням, елемент $a \in A$– найменший, якщо $\forall(x \in A)$, $(a,x) \in \rho$.

Для множини A отримаємо:

$(1,1) \in \rho$, $(1,5) \in \rho$, $(1,7) \in \rho$, а $(1,4) \notin \rho$, отже 1 - не найменший елемент,

$(2,1) \notin \rho$, отже 2 – не найменший елемент,

$(4,1) \notin \rho$, отже 4 – не найменший елемент,

$(5,1) \notin \rho$, отже 5 – не найменший елемент,

$(7,1) \notin \rho$, отже 7 – не найменший елемент,

а отже, найменшого елемента множини A відносно ρ не існує.

Оскільки, $(1,7) \in \rho$, $(2,7) \in \rho$, $(4,7) \in \rho$, $(5,7) \in \rho$, $(7,7) \in \rho$, то 7 найбільший елемент частково впорядкованої множини A.

Аналогічно визначаємо, що $1,2,4$ – мінімальні елементи множини A, а 7 – максимальний елемент.

Теорема 8. *У кожній частково упорядкованій множині* $(A,\leq)$ *існує не більше одного найменшого елемента (а в силу принципу подвійності і найбільшого елемента).*

Можна показати, що

1. Якщо найменший (найбільший) елемент частково впорядкованої множини існує, то він є єдиним мінімальним (максимальним).

2. Якщо найменший (найбільший) елемент не існує, то частково-впорядкована множина має більше одного мінімального (максимального) елемента.

Означення 27. Бінарне відношення порядку ρ називається зв'язним, якщо будь-які два елементи множини A перебувають у відношенні ρ між собою, тобто

$\forall(a,b \in A)$ виконується умова: $(a,b) \in \rho$ або $(b,a) \in \rho$.

Означення 28. Зв'язне відношення порядку називається *відношенням лінійного порядку*.

Прикладом такого відношення є відношення $\le$.

Означення 29. Множина A називається *лінійно впорядкованою*, якщо на ній задано деяке відношення лінійного порядку.

Означення 30. Транзитивне та іррефлексивне відношення називається *відношенням строгого порядку*.

Означення 31. Транзитивне та рефлексивне відношення називається відношенням *квазіпорядку*.

6. Відношення та функції

Означення 32. Довільна підмножина множини $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називається відношенням, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, ..., A_n$.

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n$, то декартовий добуток $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називається декартовим добутком n-го степеня множини A і позначається $A^{\times n}$ або A^n, а відношення ρ називається n-арним відношенням на множині A.

При $n=1$ відношення називається унарним, при $n=2$ – бінарним, при $n=3$– тернарним і т.д.

Означення 33. Бінарне відношення f між елементами множин A і B називається *функціональним*, якщо для кожного елемента множини A існує не більше одного елемента множини B такого, що $(a,b) \in f$, тобто за означенням

$$\forall(a \in A),\ \forall(b,c \in B)\ (a,b) \in f,\ (a,c) \in f\ \Rightarrow\ b=c \text{ або}$$

$$\forall(a \in A)\ \exists!(b \in B)\ (a,b) \in f\ .$$

Якщо зобразити бінарне відношення $f \subset A \times B$, яке є функціональним, за допомогою графа, то з кожної точки множини A виходить тільки одна стрілка. Що ж до точок множини B, то в деякі із них немає жодної стрілки, в деякі – одна стрілка, а в деякі можуть бути дві і більше стрілок.

Приклад 17. Чи є бінарні відношення функціями:

а) $\rho_1 = \{(1,2),(2,4),(2,5),(5,5)\} \subset A^2$, де $A=\{1,2,4,5\}$?

б) $\rho_2 = \{(1,2),(2,4),(4,5)\}$?

в) $\rho_3 = \{(x,y) | x \in R, y=x^2+2x-1\}$?

Розв'язання.

а) Ні

б) Так.

в) Так.

Якщо $f \in A \times B$ функція, то $np_1\rho$ називають областю визначення функції f і позначають $D(f)$ або D_f, а $np_2\rho$ – множиною значень функції f і позначають $R(f)$ або R_f.

Якщо $f \subset A \times B$ функція, $D_f = A$, то f називається функціональним відношенням визначеним на множині A (визначеним на всій множині). Якщо $D_f \neq A$, то f називається частково фунціональним відношенням.

Означення 34. Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, якщо $\forall(x_1, x_2 \in A)$ і $\forall(y \in B)$ виконується умова: $(x_1, y) \in f$ і $(x_2, y) \in f$, то $x_1 = x_2$.

Означення 35. Функція $f : A \to B$ називається *сюр'єктивною*, якщо $\forall(y \in B)$ $\exists(x \in A)$ таке, що $(x, y) \in f$.

Означення 36. Функція $f : A \to B$ називається *бієктивною*, якщо вона ін'єктивна і сюр'єктивна (здійснює взаємно-однозначне відображення множини A на множину B).

.

Лабораторна робота

Теоретична частина

№ вар.	**Запитання**
1, 4, 7	1. *Навести означення бінарного відношення, однорідного бінарного відношення, вказати способи задання бінарних відношень*. 2. *Сформулювати означення транзитивного бінарного відношення та критерій транзитивності бінарного відношення* 3. *Навести означення відношення часткового порядку, найменшого, найбільшого, мінімального та максимального елементів частково впорядкованої множини*.
2, 5, 8	1. *Вказати властивості найменшого, найбільшого, мінімального та максимального елементів частково впорядкованої множини.* 2. *Сформулювати означення симетричного і антисиметричного бінарного відношення та критерій симетричності і антисиметричності бінарного відношення*. 3. *Навести означення операцій над бінарними відношеннями*.
3, 6, 9	1. *Навести означення першої та другої проекцій бінарного відношення, зрізу бінарного відношення через елемент і множину.* 2. *Сформулювати означення рефлексивного бінарного відношення, діагоналі множини та критерій рефлексивності бінарного відношення*. 3. *Навести означення відношення еквівалентності, класу еквівалентності, фактор-множини.*

Практична частина

***Завдання* 1.**

№ вар.	Умова завдання
1	Задати бінарне відношення $\rho=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$ між елементами множини $A=\{1,2,3,4\}$ за допомогою матриці.
2	Задати бінарне відношення $\rho=\{(1,1),(1,2),(2,4),(2,3),(3,4),(4,4),(2,2)\}$ між елементами множини $A=\{1,2,3,4,5\}$ за допомогою матриці.
3	Задати бінарне відношення $\rho=\{(2,b),(2,a),(1,a),(2,d),(3,b),(1,d),(3,a)\}$ між елементами множин $A=\{1,2,3,4,5\}$ та $B=\{a,b,c,d\}$ за допомогою матриці.
4	Нехай $\rho=\{(1,a),(2,a),(3,a),(3,c),(4,c),(2,b),(4,b),(4,c)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A=\{1,2,3,4,5\}$ та $B=\{a,b,c,d\}$. Знайти $B\setminus\rho[\{2,3\}]$.
5	Нехай $\rho=\{(a,2),(b,3),(a,5),(c,5),(a,1),(c,3),(d,4),(b,2)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A=\{a,b,c,d\}$ та $B=\{1,2,3,4,5\}$. Знайти $B\setminus\rho[\{b,c\}]$.
6	Нехай $\rho=\{(1,1),(2,4),(3,1),(3,3),(4,3),(2,2),(4,2),(4,3)\}$ - бінарне відношення між елементами множини $A=\{1,2,3,4\}$. Знайти $B\setminus\rho[\{2,3\}]$.
7	Нехай $\rho=\{(2,a),(4,a),(3,d),(4,d),(4,f),(3,a)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A=\{1,2,3,4,5\}$ та $B=\{a,b,c,d,f\}$. Знайти $(A\setminus np_1\rho)\times(B\setminus np_2\rho)$.
8	Нехай $\rho=\{(a,2),(a,4),(d,3),(d,4),(f,4),(a,3)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A=\{a,b,c,d,f\}$ та $B=\{1,2,3,4,5\}$. Знайти $(B\setminus np_2\rho)\setminus(A\setminus np_1\rho)$.
9	Нехай $\rho=\{(1,a),(3,a),(2,d),(3,d),(3,f),(2,a)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A=\{1,2,3,4,5\}$ та $B=\{a,b,c,d,f\}$. Знайти $(A\setminus np_1\rho)\times(B\setminus np_2\rho)$.

***Завдання* 2.**

№ вар.	Умова завдання
1	Нехай $\rho = \{(2,a),(3,a),(3,b),(2,d),(5,a),(4,d),(4,a),(2,c)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A = \{1,2,3,4,5\}$ та $B = \{a,b,c,d\}$. Знайти $(\rho^{-1} < d > \times \rho < 2 >) \cap \rho^{-1}$.
2	Нехай $\rho = \{(a,2),(b,3),(a,5),(d,2),(c,2),(a,4),(d,4),(b,2),(a,3)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A = \{a,b,c,d\}$ та $B = \{1,2,3,4,5\}$. Знайти $\rho < b > \times \rho^{-1} < 5 > \backslash \rho^{-1}$.
3	Нехай $\rho = \{(b,3),(c,4),(b,1),(a,3),(d,3),(b,5),(a,5)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A = \{a,b,c,d\}$ та $B = \{1,2,3,4,5\}$. Знайти $(\rho^{-1} < 2 > \times \rho < a >) \cap \rho$.
4	Нехай ρ_1 та ρ_2- бінарні відношення між елементами множини $A = \{1,2,3\}$ задані матрицями $M(\rho_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ та $M(\rho_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Задати за допомогою переліку його елементів бінарне відношення $\rho_1^2 \cap \rho_2^2$.
5	Нехай ρ_1 та ρ_2- бінарні відношення між елементами множини $A = \{1,2,3\}$ задані матрицями $M(\rho_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ та $M(\rho_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Задати за допомогою переліку його елементів бінарне відношення $\rho_1 \circ \rho_2$.
6	Нехай ρ_1 та ρ_2- бінарні відношення між елементами множини $A = \{1,2,3\}$ задані матрицями $M(\rho_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ та $M(\rho_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Задати за допомогою переліку його елементів бінарне відношення $\rho_2 \circ \rho_1$.

7	Для однорідного бінарного відношення $\rho=\{(a,a),(a,c),(a,b),(c,b),(d,a),(c,d),(b,f),(d,b),(b,d),(f,b),(c,c),(f,c)\}$ між елементами множини $A=\{a,b,c,d,f\}$ знайти $A^2\setminus(\rho\circ\rho)$.
8	Для однорідного бінарного відношення $\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(5,1),(2,5),(3,4),(5,3),(3,5),(4,3),(2,2),(4,2)\}$ між елементами множини $A=\{1,2,3,4,5\}$ знайти $A^2\setminus\rho^2$.
9	Для однорідного бінарного відношення $\rho=\{(d,d),(d,f),(d,c),(f,c),(a,d),(f,a),(c,b),(a,c),(c,a),(b,c),(f,f),(b,f)\}$ між елементами множини $A=\{a,b,c,d,f\}$ знайти $(\rho\circ\rho)^{-1}$.
10	Для однорідного бінарного відношення $\rho=\{(a,a),(a,c),(a,b),(c,b),(d,a),(c,d),(b,f),(d,b),(b,d),(f,b),(c,c),(f,c)\}$ між елементами множини $A=\{a,b,c,d,f\}$ знайти $A^2\setminus(\rho\circ\rho)$.
11	Для однорідного бінарного відношення $\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(5,1),(2,5),(3,4),(5,3),(3,5),(4,3),(2,2),(4,2)\}$ між елементами множини $A=\{1,2,3,4,5\}$ знайти $A^2\setminus\rho^2$.
12	Для однорідного бінарного відношення $\rho=\{(d,d),(d,f),(d,c),(f,c),(a,d),(f,a),(c,b),(a,c),(c,a),(b,c),(f,f),(b,f)\}$ між елементами множини $A=\{a,b,c,d,f\}$ знайти $(\rho\circ\rho)^{-1}$.

***Завдання* 3**.

№ вар.	Умова завдання
1	Побудувати мінімальне за числом елементів бінарне відношення між елементами множини $M=\{a,b,c,d,e,f\}$, яке було б рефлексивним, симетричним, нетранзитивним.
2	Побудувати мінімальне за числом елементів бінарне відношення між елементами множини $M=\{a,b,c,d,f\}$, яке було б рефлексивним, несиметричним, транзитивним.
3	Побудувати мінімальне за числом елементів бінарне відношення між елементами множини $M=\{a,b,c,d,e,f\}$, яке було б

	нерефлексивним, антисиметричним, транзитивним.
4	Нехай $\rho = \{(1,a),(2,a),(3,a),(3,c),(4,c),(2,b),(4,b)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A = \{1,2,3,4\}$ та $B = \{a,b,c\}$, $\delta = \{(a,2),(a,3),(b,1),(c,2),(c,4),(b,3)\}$- бінарне відношення між елементами множин $B = \{a,b,c\}$ та $A = \{1,2,3,4\}$. Чи є бінарне відношення $(\delta \circ \rho)^{-1}$ відношенням часткового порядку?
5	Нехай $\rho = \{(1,a),(2,a),(3,a),(3,c),(4,c),(2,b),(4,b)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A = \{1,2,3,4\}$ та $B = \{a,b,c\}$, $\delta = \{(a,2),(a,3),(b,1),(c,2),(c,4),(b,3)\}$- бінарне відношення між елементами множин $B = \{a,b,c\}$ та $A = \{1,2,3,4\}$. Чи є бінарне відношення $(\rho \circ \delta)^{-1}$ нерефлексивним, симетричним і нетранзитивним?
6	Нехай $\rho = \{(1,a),(2,a),(3,a),(3,c),(4,c),(2,b),(4,b)\}$ - бінарне відношення між елементами множин $A = \{1,2,3,4\}$ та $B = \{a,b,c\}$, $\delta = \{(a,2),(a,3),(b,1),(c,2),(c,4),(b,3)\}$- бінарне відношення між елементами множин $B = \{a,b,c\}$ та $A = \{1,2,3,4\}$. Чи є бінарне відношення $\rho \circ \delta$ відношенням еквівалентності?
7	Нехай $\rho = \{(a,a),(b,d),(b,b),(c,c),(c,h),(d,b),(d,d),(d,g),$ $(f,f),(g,d),(g,g),(h,c),(h,h),(b,g),(g,b)\}$ – бінарне відношення між елементами множини $M = \{a,b,c,d,f,g,h\}$. Чи є відношення ρ відношенням еквівалентності на множині M? Якщо так, то знайти фактор-множину множини M за відношенням еквівалентності ρ.
8	Нехай $\rho = \{(2,2),(6,6),(6,2),(6,4),(7,7),(7,3),(4,4),(2,4),(2,6),$ $(4,6),(3,3),(3,7),(5,5)\}$– бінарне відношення між елементами множини $M = \{2,3,4,5,6,7\}$. Чи є відношення ρ відношенням еквівалентності на множині M? Якщо так, то знайти фактор-множину множини M за відношенням еквівалентності ρ.
9	Нехай $\rho = \{(7,7),(3,3),(5,7),(3,7),(3,5),(2,2),(2,6),(5,5),(7,5),$ $(7,3),(5,3),(6,6),(6,2),(4,4)\}$– бінарне відношення між елементами множини $M = \{2,3,4,5,6,7\}$. Чи є відношення ρ відношенням еквівалентності на множині M? Якщо так, то знайти фактор-множину множини M за відношенням еквівалентності ρ.

10	Нехай $\rho = \{(1,1),(3,1),(2,2),(3,3),(1,4),(5,5),(4,4),(3,4),(5,2)\}$ – бінарне відношення між елементами множини $M = \{1,2,3,4,5\}$. Чи є відношення ρ відношенням часткового порядку на множині M? Якщо так, то знайти найменший і максимальні елементи множини M за відношенням ρ.
11	Нехай $\rho = \{(a,a),(b,a),(c,c),(b,b),(a,f),(d,d),(f,f),(b,f),(d,c)\}$ – бінарне відношення між елементами множини $M = \{a,b,c,d,f\}$. Чи є відношення ρ відношенням часткового порядку на множині M? Якщо так, то знайти найбільший і мінімальні елементи множини M за відношенням ρ.
12	Нехай $\rho = \{(1,3),(1,1),(4,1),(2,2),(4,3),(5,5),(2,5),(3,3),(4,4)\}$ – бінарне відношення між елементами множини $M = \{1,2,3,4,5\}$. Чи є відношення ρ відношенням часткового порядку на множині M? Якщо так, то знайти найменший і мінімальні елементи множини M за відношенням ρ.

Завдання для самостійної роботи

1. Бінарне відношення
$\rho = \{(a,2),(a,3),(b,1),(b,4),(f,2)(d,1),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)\} \subset$
$\subset \{a,b,c,d,f\} \times \{1,2,3,4,5\}$ задати матрицею $M(\rho)$.

2. Для бінарного відношення $\rho = \{(a,1),(a,2),(c,1),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4)\}$ знайти:

а) $\rho[\{a,b,d\}] \times np_1\rho$;

б) $\rho < a > \times \rho^{-1} < 2 >$.

3. Нехай $\rho = \{(x,y) \mid x - 2y = 1\} \subset \mathrm{A}$, де $A = \{x \in N \mid x^2 < 150\}$. Знайти $np_1\rho$ та $np_2\rho$.

4. Нехай $A = \{1,2,3,4\}$. Бінарні відношення $\rho_1 \subset A^2$ та $\rho_2 \subset A^2$ задані матрицями

$$M(\rho_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ та } M(\rho_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задати матрицями відношення ρ_2^{-1}, $\rho_1 \cap \rho_2$, $A^2 / \rho_1 \circ \rho_2$.

5. За бінарним відношенням $\rho_1 = \{(a,c),(b,d),(d,a),(b,b)\} \subset \{a,b,c,d\}^2$ побудувати мінімальне за числом елементів відношення ρ_2, яке було б

а) нерефлексивним, симетричним, нетранзитивним;

б) рефлексивним, несиметричним, транзитивним.

6. Побудувати мінімальне за числом елементів бінарне відношення $\rho \subset \{a,b,c,d\}^2$, яке було б

а) симетричним, транзитивним;

б) нерефлексивним, антисиметричним, нетранзитивним.

7. Чи є відношення
$\rho = \{(3,3),(2,2),(3,5),(6,6),(3,7),(2,4),(5,3),(6,8),(5,5)\}$
$\{(4,2),(5,7),(8,6),(7,3),(4,4),(7,5),(8,8),(7,7)\}$ відношенням еквівалентності між елементами множини $A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Якщо так, то побудувати фактор-множину A / ε.

Модульна робота
з курсу «Дискретна математика»

студента 1-го курсу факультету математики
та цифрових технологій

1. Поняття бінарного відношення (означення бінарного відношення, однорідного бінарного відношення, першої та другої проекцій, зрізу бінарного відношення через елемент та множину).

2. Операції над бінарними відношеннями (означення операцій обертання та композиції бінарних відношень, теорему з доведенням про властивість операції композиції, побудова матриці та графа композиції бінарних відношень).

3. Відношення часткового порядку (означення відношення часткового порядку, найменшого, найбільшого, мінімального максимального елементів частково впорядкованої множини, властивості вказаних елементів, означення зв'язного бінарного відношення та відношення лінійного порядку).

4. Нехай $\rho = \{(1,a),(2,a),(3,a),(3,c),(4,c),(2,b),(4,b),(4,c)\}$ – бінарне відношення між елементами множин $A = \{2,3,4,5,6,7\}$ і $B = \{a,b,c,d\}$. Знайти $B \setminus \rho[\{2,3\}]$.

5. Нехай $\rho = \{(1,1),(3,1),(2,2),(3,3),(1,4),(5,5),(4,4),(3,4),(5,2)\}$ – бінарне відношення між елементами множини $M = \{1,2,3,4,5\}$. Чи є відношення ρ відношенням часткового порядку на множині M? Якщо так, то знайти найменший і максимальні елементи множини M за відношенням ρ.

6. Нехай $\rho = \{(a,2),(a,3),(c,1),(d,1),(d,3)\}$ бінарне відношення між елементами множин $A = \{a,b,c,d,f\}$ і $B = \{1,2,3,4,5\}$, а $\delta = \{(1,k),(2,k),(1,m),(3,n),(5,n),(4,k),(4,m)\}$ – бінарне відношення між елементами множин $B = \{1,2,3,4,5\}$ і $C = \{k,n,m\}$. Знайти $(C \times A) \setminus (\delta \circ \rho)^{-1}$.

Література

№ п/п	Автор, назва посібника, рік видання
	Основна література
1.	*Капитонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К.* Основи дискретної математики.– К.: Літсофт, 2000.– 380 с.
2.	*Латотин Ю.А., Макаренков В.В., Николаєва А.А. Столяр*. Математическая логика.– Мн.: Выш. шк. 1991.– 269 с.
3.	*Нефедов В.Н., Осипова В.А*. Курс дискретной математики.– М.: Из-во МАИ, 1992.– 264 с.
4.	*Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є.* Дискретна математика. – К.: Вища шк., 2002.– 287 с.
5.	*Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.– М.: Наука, 1984.– 224 с.
	Допоміжна література
1.	*Горбатов В.А*. Фундаментальные основы дискретной математики. – М.: Наука, Физмат лит., 2000. – 544 с.
2.	*Акимов О. Е*. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Єкимов.– 2-е изд., доп.– Лаборатория Базовых Знаний, 2003.– 376с.

Для нотаток