МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу

Т. В. Боярищева, М. С. Герич, О. О. Синявська,
П. В. Слюсарчук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ **З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ
ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ужгород 2023

Диференціальне числення функції однієї змінної: методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій/ *Уклад. Т. В. Боярищева, М. С. Герич, О. О. Синявська, П. В. Слюсарчук*, Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2023. 92 с.

У методичних вказівках наведено коротко основні теоретичні відомості та проілюстровано розв'язування опорних задач математичного аналізу з тем: «Означення похідної та диференціала. Умови диференціювання функції», «Правила диференціювання функції однієї змінної», «Логарифмічне диференціювання. Диференціювання неявно та параметрично заданих функцій», «Геометричний зміст похідної. Наближені обчислення», «Похідні та диференціали вищих порядків», «Правило Лопіталя», «Формула Тейлора», «Застосування диференціального числення до дослідження функції». Також після кожної з тем наведено завдання для індивідуальних робіт студентів. Методичні вказівки розроблено для студентів факультету математики та цифрових технологій всіх спеціальностей.

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, проф. Тилищак О.А.,
канд. фіз-мат. наук., доц. Млавець Ю.Ю.

Рекомендовано до друку кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 16 червня 2023 року, протокол № 11.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 20 червня 2023 року, протокол № 10.

ЗМІСТ

ТЕМА 1. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. ОДНОСТОРОННІ ПОХІДНІ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. УМОВИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Основні теоретичні відомості до теми 1

<table>
<tr><th colspan="3">1.1. Означення похідної функції однієї змінної в точці</th></tr>
<tr><th>Текстове формулювання</th><th>Аналітичний запис</th><th>Позначення</th></tr>
<tr><td>Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.</td><td>$f'(x_0)=$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$</td><td>$f'(x_0)$,
$y'(x_0)$,
$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$,
$\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Зауваження 1. Операцію знаходження похідної називають диференціюванням функції.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">1.2. Означення односторонніх похідних</th></tr>
<tr><th>Лівостороння похідна (похідна функції зліва)</th><th>Правостороння похідна (похідна функції справа)</th></tr>
<tr><td>Лівосторонньою похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля зліва.</td><td>Правосторонньою похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля справа.</td></tr>
<tr><td>$f'_{x_0-0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
або
$f'_{x_0-0}=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$</td><td>$f'_{x_0+0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
або
$f'_{x_0+0}=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>1.3. Критерій існування похідної</th></tr>
<tr><td>Функція $y=f(x)$ має в точці x_0 похідну тоді й лише тоді, коли існують правостороння та лівостороння похідні і ці похідні рівні між собою:
$f'_{x_0+0}=f'_{x_0-0}=f'(x_0).$</td></tr>
<tr><th>1.4. Означення диференційовності функції в точці</th></tr>
<tr><td>Функція $y=f(x)$ називається диференційовною в точці x_0, якщо її приріст $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ у цій точці можна зобразити як
$\Delta f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$
де A — деяке дійсне число, $\alpha(\Delta x)$ — нескінченно мала функція, коли $\Delta x\to 0$.</td></tr>
<tr><th>1.5. Критерій диференційовності</th></tr>
<tr><td>Функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)=A$.</td></tr>
<tr><th>1.6. Необхідна умова диференційовності</th></tr>
</table>

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.
1.7. Схема знаходження похідної в точці за означенням
1 крок. Записати приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 користуючись формулою: $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 2 крок. Скласти відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ отриманого на 1-му кроці до приросту аргументу Δx і спростити його; 3 крок. Знайти границю відношення приросту функції до приросту аргументу отриманого на 2-му кроці при умові, що приріст аргументу Δx прямує до 0; 4 крок. Отримана границя, якщо вона існує і скінченна і буде похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0.
1.8. Диференціал функції
Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 , тобто має скінченну похідну $f'(x_0)$ і $$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \Delta x \to 0.$$ *Диференціалом функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 називають головну, лінійну щодо Δx, частину приросту диференційовної функції $f(x)$ і позначають $$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Розв'язування типових задач до теми 1

Завдання 1. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = x^3$ у точці x_0.

Розв'язання. Для знаходження похідної скористаємось схемою наведеною в таблиці у п. 1.7.

1 крок. Знайдемо приріст функції:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3\\ &= x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3\\ &= 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \Delta x \cdot (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2).\end{aligned}$$

2 крок. Складемо відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ отриманого на 1-му кроці до приросту аргументу Δx і спростимо його:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3 крок. Знайдемо границю відношення приросту функції до приросту аргументу отриманого на 2-му кроці при умові, що приріст аргументу Δx прямує до 0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2.$$

4 крок. Отримана границя, якщо вона існує і скінченна і буде похідною функції $f(x) = x^3$ в точці x_0. Отже, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Завдання 2. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = 5x^2 - 4x + 6$ у точці x_0. Обчислити $f'(1)$.

Розв'язання. Для знаходження похідної скористаємось схемою наведеною в таблиці у п. 1.7.

1 крок. Знайдемо приріст функції:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= (5(x_0 + \Delta x)^2 - 4(x_0 + \Delta x) + 6) - (5x_0^2 - 4x_0 + 6) \\ &= 5x_0^2 + 10x_0 \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 4x_0 - 4\Delta x + 6 - 5x_0^2 + 4x_0 - 6 \\ &= 10x_0 \Delta x + 5(\Delta x)^2 - 4\Delta x = \Delta x \cdot (10x_0 + 5\Delta x - 4). \end{aligned}$$

2 крок. Складемо відношення: $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (10x_0 + 5\Delta x - 4)}{\Delta x} = 10x_0 + 5\Delta x - 4.$

3 крок. Знайдемо границю відношення при умові, що приріст аргументу Δx прямує до 0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10x_0 + 5\Delta x - 4) = 10x_0 - 4.$$

4 крок. Отже, $f'(x_0) = 10x_0 - 4$.

Обчислимо тепер $f'(1)$, для цього в отриману формулу похідної підставимо замість точки $x_0 = 1$, таким чином $f'(1) = 10 \cdot 1 - 4 = 6$.

Завдання 3. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = sin 3x$ у точці x_0. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Для знаходження похідної скористаємось схемою наведеною в таблиці у п. 1.7.

1 крок) Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = sin\big(3(x_0 + \Delta x)\big) - sin(3x_0)$$
$$= 2sin\frac{3(x_0 + \Delta x) - 3x_0}{2}cos\frac{3(x_0 + \Delta x) + 3x_0}{2}$$
$$= 2sin\frac{3\Delta x}{2}cos\frac{6x_0 + 3\Delta x}{2}.$$

2 крок. Складемо відношення: $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2sin\frac{3\Delta x}{2}cos\frac{6x_0+3\Delta x}{2}}{\Delta x}$. На жаль, дане відношення не можна подати у більш простішій формі.

3 крок. Знайдемо границю відношення при умові, що приріст аргументу Δx прямує до 0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2sin\frac{3\Delta x}{2}cos\frac{6x_0 + 3\Delta x}{2}}{\Delta x} = \left|\begin{array}{c}\text{Щоб обчислити} \\ \text{дану границю} \\ \text{використаємо першу} \\ \text{чудову границю}\end{array}\right|$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2cos\frac{6x_0 + 3\Delta x}{2}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} 3cos\frac{6x_0 + 3\Delta x}{2} = 1 \cdot 3$$
$$\cdot \lim_{\Delta x \to 0} cos\frac{6x_0 + 3\Delta x}{2} = 3cos3x_0.$$

4 крок. Отже, $f'(x_0) = 3cos3x_0$.

Обчислимо тепер $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, для цього в отриману формулу похідної підставимо замість точки $x_0 = \frac{\pi}{3}$, таким чином $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 3cos(\pi) = -3$.

Завдання 4. Довести, що функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Доведемо дане твердження використовуючи критерій існування похідної. Для цього знайдемо односторонні похідні функції в точці $x_0 = 0$.

Обчислимо лівосторонню похідну функції в точці $x_0 = 0$:

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x}$$
$$= -1.$$

Обчислимо правосторонню похідну функції в точці $x_0 = 0$:

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Оскільки односторонні похідні існують, але різні, то це означає, що функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Завдання 5. Довести, що функція $y = \sqrt[3]{x}$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Відповідно до означення границі функції в точці знайдемо границю:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Отже, похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x_0 = 0$ не існує.

Завдання 6. Дослідити диференційовність функції у точці x_0, якщо:

а) $f(x) = |\ln(x-5)|, x_0 = 6$; б) $f(x) = \begin{cases} sinx, & x \in [0, +\infty), \\ x, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$ $x_0 = 0$.

Розв'язання.

а) Дослідимо дане завдання використовуючи критерій існування похідної. Для цього знайдемо односторонні похідні функції в точці $x_0 = 6$.

$$f'_{6-0} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(6+\Delta x) - f(6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\ln(1+\Delta x)| - |\ln 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

$$f'_{6+0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(6+\Delta x) - f(6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\ln(1+\Delta x)| - |\ln 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Так як, $f'_{6-0} \neq f'_{6+0}$, то дана функція не має похідної в точці $x_0 = 6$, тобто дана функція недиференційовна в цій точці. Графік функції зображений на рис.1.1.

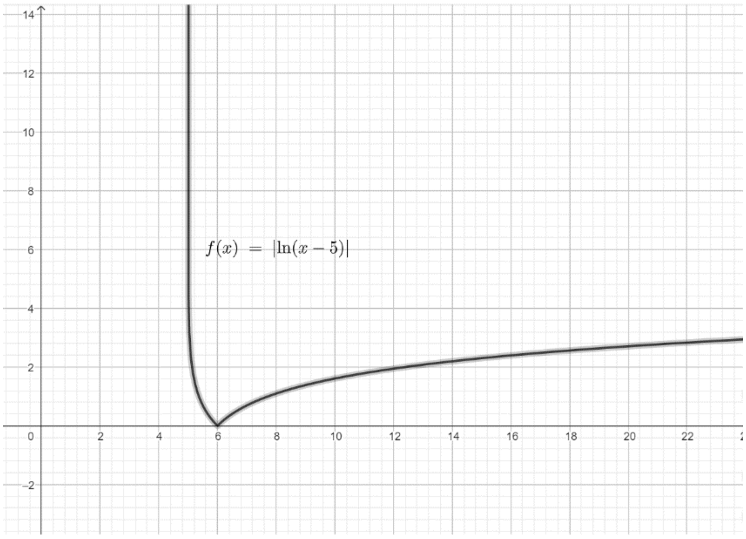


Рис. 1.1. Графік функції $f(x) = |\ln(x-5)|$.

б) Аналогічно до випадку а) використаємо критерій існування похідної. Для цього знайдемо односторонні похідні функції в точці $x_0 = 0$.

$$f'_{0-0} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{(0+\Delta x) - sin0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$f'_{0+0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin(0+\Delta x) - sin0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Так як, має місце рівність $f'_{0-0} = f'_{0+0} = 1$, то можемо зробити висновок, що дана функція має похідну в точці $x_0 = 0$, тобто дана функція диференційовна в цій точці. Графік функції зображений на рис.1.2.

Рис. 1.2. Графік функції до прикладу б).

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 1

1. Знайти похідну функції $f(x)$ в точці $x_0 \in D(f)$, використовуючи означення. Обчислити $f'(x_1)$

№ варіанту	Функція	Точка
1.	$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	$x_1 = 1$
2.	$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$	$x_1 = 4$
3.	$f(x) = \sqrt[5]{x^2}$	$x_1 = -1$
4.	$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$	$x_1 = 2$
5.	$f(x) = 5x^3 + 3x + 6$	$x_1 = 1$
6.	$f(x) = 2x^4 - 4x + 6$	$x_1 = -1$
7.	$f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 6x + 7$	$x_1 = 0$
8.	$f(x) = 2^{3x}$	$x_1 = 1$
9.	$f(x) = 3^{5x}$	$x_1 = 0$
10.	$f(x) = e^{3x}$	$x_1 = 0$
11.	$f(x) = 2cos4x$	$x_1 = \frac{\pi}{4}$
12.	$f(x) = 3cos6x$	$x_1 = 0$
13.	$f(x) = 2sin5x$	$x_1 = \frac{\pi}{5}$
14.	$f(x) = sin6x$	$x_1 = 0$
15.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	$x_1 = 0$
16.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$	$x_1 = 0$
17.	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$	$x_1 = 1$
18.	$f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$	$x_1 = 3$
19.	$f(x) = \sqrt[4]{x - 3}$	$x_1 = 4$
20.	$f(x) = \sqrt[5]{x - 4}$	$x_1 = 5$
21.	$f(x) = e^{-2x}$	$x_1 = 0$
22.	$f(x) = \ln(x^2 + 1)$	$x_1 = 0$
23.	$f(x) = \ln(x + 1)$	$x_1 = 2$
24.	$f(x) = \ln(3x + 1)$	$x_1 = 1$
25.	$f(x) = arcsin2x$	$x_1 = 0$
26.	$f(x) = 7sin6x$	$x_1 = 0$
27.	$f(x) = arctg2x$	$x_1 = 0$

28.	$f(x) = e^{5x}$	$x_1 = 0$
29.	$f(x) = \ln(x+2)$	$x_1 = 3$
30.	$f(x) = x^3 + 3x^2$	$x_1 = 1$

2. Дослідіть диференційовність функції $f(x)$ у точці x_0. Намалюйте ескізи графіків функцій в околі точки x_0.

№ варіанту	***Функція***	***Точка***
1.	$f(x) = \|sin2x\|$	$x_0 = 0$
2.	$f(x) = \|x-4\|$	$x_0 = 4$
3.	$f(x) = \|tgx\|$	$x_0 = 0$
4.	$f(x) = \|x-5\|$	$x_0 = 5$
5.	$f(x) = \begin{cases} 2sinx, & x < 0, \\ tg2x, & x \geq 0 \end{cases}$	$x_0 = 0$
6.	$f(x) = \|\ln(x-10)\|$	$x_0 = 11$
7.	$f(x) = \|arctgx\|$	$x_0 = 0$
8.	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ shx, & x < 0 \end{cases}$	$x_0 = 0$
9.	$f(x) = \|tg5x\|$	$x_0 = 0$
10.	$f(x) = \|\ln(3x-1)\|$	$x_0 = \frac{2}{3}$
11.	$f(x) = e^{-\|x\|}$	$x_0 = 0$
12.	$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$	$x_0 = 0$
13.	$f(x) = e^{\|x-3\|}$	$x_0 = 3$
14.	$f(x) = \|\ln(x+2)\|$	$x_0 = -1$
15.	$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} - 1, & x < 0, \\ sinx, & x \geq 0 \end{cases}$	$x_0 = 0$
16.	$f(x) = \left\|cos\frac{x}{2}\right\|$	$x_0 = \pi$
17.	$f(x) = \|arctgx\|$	$x_0 = 0$
18.	$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1, \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}$	$x_0 = 1$
19.	$f(x) = \|x+5\|$	$x_0 = 10$

20.	$f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$	$x_0=0$
21.	$f(x)=e^{-\lvert 2x\rvert}$	$x_0=0$
22.	$f(x)=\lvert 1-x\rvert$	$x_0=1$
23.	$f(x)=\lvert\sin(x+4)\rvert$	$x_0=-4$
24.	$f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\geq 2,\\ \lvert -x+2\rvert, & x<2\end{cases}$	$x_0=2$
25.	$f(x)=\lvert cosx\rvert$	$x_0=\frac{\pi}{2}$
26.	$f(x)=\lvert\ln(x+5)\rvert$	$x_0=-4$
27.	$f(x)=\begin{cases}e^{-5x}-1, & x<0,\\ arcsin5x, & x\geq 0\end{cases}$	$x_0=0$
28.	$f(x)=\lvert arctg5x\rvert$	$x_0=0$
29.	$f(x)=\lvert 3x+3\rvert$	$x_0=-1$
30.	$f(x)=e^{\lvert x+7\rvert}$	$x_0=-7$

ТЕМА 2. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ТА ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЇ.ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛІВ

Основні теоретичні відомості до теми 2

2.1. Основні правила диференціювання функції однієї змінної	
Аналітичний запис	***Текстове формулювання***
2.1.1. $(u+v)'=u'+v'$	Похідна від суми функцій дорівнює сумі похідних цих функцій
2.1.2. $(u-v)'=u'-v'$	Похідна від різниці функцій дорівнює різниці похідних цих функцій
Зауваження 1. Формула диференціювання суми або різниці функцій має місце на будь-яку скінченну кількість доданків або членів різниці, а саме: $(u \pm v \pm \cdots \pm w)'=u' \pm v' \pm \cdots \pm w'.$	
2.1.3. $(\mathrm{C}u)'=\mathrm{C}\cdot u'$, *C=const*	Похідна від добутку сталого множника на функцію дорівнює добутку сталого множника на похідну функції (сталий множник можна виносити за знак похідної)
2.1.4. $(uv)'=u'v+uv'$	Похідна від добутку двох функцій дорівнює похідній від першого множника помноженій на незмінний другий множник плюс незмінний другий множник помножений на похідну від другого множника
2.1.5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, v \neq 0$	Похідна частки від двох функцій дорівнює частці, де новий чисельник утворюється як похідна від чисельника помножена на незмінний знаменник мінус незмінний чисельник помножений на похідну від знаменника, а новий знаменник дорівнює початковому знаменнику піднесеному до квадрату.
Зауваження 2. У попередніх формулах під u *і* v *ми розуміємо функції, тобто* $u=u(x)$ *і* $v=v(x)$.	
2.2. Диференціювання складеної функції	
Якщо функція $u=g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y=f(u)$ диференційовна в точці $u_0=g(x_0)$, то складена функція $y=f(g(x))$ також диференційовна в точці x_0 і $y'(x_0)=f'(u_0)\cdot g'(x_0)$.	
Аналітичний запис	***Текстове формулювання***
$y'=f'(u)\cdot g'(x)$ *або*	Похідна складеної функції $y=f(g(x))$

$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$	дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ по проміжному аргументу $u = g(x)$ і похідної внутрішньої функції $g(x)$ по незалежній змінній x.
2.3. Диференціювання оберненої функції	
Нехай функція $y = f(x)$ має обернену функцію $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) \neq 0$, то обернена функція $x = \varphi(y)$ також має у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ похідну, причому $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$	
2.4. Основні властивості диференціалів	
Аналітичний запис	***Текстове формулювання***
2.4.1. $d(u+v) = du + dv$	Диференціал від суми функцій дорівнює сумі диференціалів цих функцій
2.4.2 $d(u-v) = du - dv$	Диференціал від різниці функцій дорівнює різниці диференціалів цих функцій
2.4.3. $d(\mathrm{C}u) = \mathrm{C}du$*, C=const*	Диференціал від добутку сталого множника на функцію дорівнює добутку сталого множника на диференціал функції (Сталий множник можна виносити за знак диференціала)
2.4.4. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$	Диференціал від добутку двох функцій дорівнює диференціалу від першого множника помноженій на незмінний другий множник плюс незмінний другий множник помножений на диференціал від другого множника
2.4.5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0$	Диференціал частки від двох функцій дорівнює частці, де новий чисельник утворюється як диференціал від чисельника помножений на незмінний знаменник мінус незмінний чисельник помножений на диференціал від знаменника, а новий знаменник дорівнює початковому знаменнику піднесеному до квадрату.
Зауваження 3. Щоб вивчити властивості диференціала варто вивчити властивості похідної, а після чого у властивостях достатньо слово похідна замінити на слово диференціал, аналогічно і в записі формул, знак похідної замінити на знак диференціала.	
2.5. Таблиця похідних	
Похідні основних елементарних функцій	***Похідні складних елементарних функцій, де*** $u = u(x)$
2.5.0. $(\mathrm{C})' = 0, C = const$	2.5.0а. $(f(\mathrm{C}))' = 0, C = const$

2.5.1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.	2.5.1a. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.
2.5.2. $(x)' = 1$.	2.5.2a. $(u)' = u'$.
2.5.3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.	2.5.3a. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2.5.4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.	2.5.4a. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.
2.5.5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$.	2.5.5a. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
2.5.6. $\left(e^x\right)' = e^x$.	2.5.6a. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.
2.5.7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.	2.5.7a. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.
2.5.8. $(\lg x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$.	2.5.8a. $(\lg u)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$.
2.5.9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.	2.5.9a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
2.5.10. $(\sin x)' = \cos x$.	2.5.10a. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
2.5.11. $(\cos x)' = -\sin x$.	2.5.11a. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
2.5.12. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.	2.5.12a. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
2.5.13. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.	2.5.13a. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
2.5.14. $(shx)' = chx$.	2.5.14a. $(shu)' = chu \cdot u'$.
2.5.15. $(ch\, x)' = shx$.	2.5.15a. $(ch\, u)' = shu \cdot u'$.
2.5.16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$.	2.5.16a. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$.
2.5.17. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.	2.5.17a. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.
2.5.18. $(arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	2.5.18a. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
2.5.19. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	2.5.19a. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
2.5.20. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.	2.5.20a. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
2.5.21. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.	2.5.21a. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Розв'язування типових задач до теми 2

Завдання 1. Скориставшись табличними похідними знайти похідні даних функцій:

а) $y = x^2$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt[3]{x}$; г) $y = \sqrt[n]{x}$; д) $y = x^2 \cdot \sqrt[6]{x}$; е) $y = 10^x$; є) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$; ж) $y = sin\frac{\pi}{8}$; з) $y = arcsin\frac{1}{4} + arctg3$.

Розв'язання.

а) $y' = (x^2)' = 2x$ (в табличній формулі 2.5.1 поклали $n = 2$);

б) $y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ (спочатку для знаходження похідної скористаємось формулою $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, а потім в табличній формулі 2.5.1 поклали $n = -2$);

в) $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (для знаходження похідної скористаємось формулою $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, а потім в табличній формулі 2.5.1 поклали $n = \frac{1}{3}$);

г) $y' = \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (для знаходження похідної скористаємось формулою $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, а потім в табличній формулі 2.5.1 замінити n на $\frac{1}{n}$);

д) $y' = \left(x^2\sqrt[6]{x}\right)' = \left(x^2 \cdot x^{\frac{1}{6}}\right)' = \left(x^{2+\frac{1}{6}}\right)' = \left(x^{\frac{13}{6}}\right)' = \frac{13}{6} \cdot x^{\frac{7}{6}} = \frac{13}{6}\sqrt[6]{x^7}$ (для знаходження похідної скористаємось коментарем до прикладу г), а потім властивістю степенів $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, після чого в табличній формулі 2.5.1 покласти $n = \frac{13}{6}$ і отримали похідну);

е) $y' = (10^x)' = 10^x ln10$ (для знаходження похідної в табличній формулі 2.5.5 покласти $a = 10$);

є) $y' = \left(\log_{\frac{2}{3}} x\right)' = \frac{1}{xln\frac{2}{3}}$ (для знаходження похідної в табличній формулі 2.5.7 покласти $a = \frac{2}{3}$);

ж) $y' = \left(sin\frac{\pi}{8}\right)' = 0$ (для знаходження похідної в табличній формулі 2.5.0 покласти $\mathrm{C} = sin\frac{\pi}{8}$);

з) $y' = \left(arcsin\frac{1}{4} + arctg3\right)' = 0$ (для знаходження похідної в табличній формулі 2.5.0 покласти $\mathrm{C} = arcsin\frac{1}{4} + arctg3$).

Завдання 2. Скориставшись табличними похідними та основними правилами диференціювання знайти похідні даних функцій:

а) $y = 5x^7$; б) $y = -4sinx$; в) $y = arctgx + arccosx$;

г) $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$; д) $y = 9x^5 - \frac{4}{x^3} + 9\sqrt[3]{x^7} - 3x + 4$;

е) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[5]{x} + 6x\sqrt[3]{x}$; є) $y = x^5(2 - x + 3x^2)$;

ж) $y = (x^2 - 1)tgx$; з) $y = arcsinx \cdot lnx$; и) $y = \frac{e^x}{ctgx}$; і) $y = \frac{cosx}{x^3 + e^x}$.

Розв'язання.

а) $y' = (5x^7)' = 5 \cdot (x^7)' = 5 \cdot 7 \cdot x^6 = 35x^6$ (використали правило 2.1.3 яке стверджує, що сталий множник виноситься за знак похідної, і взяли похідну функції за табличною формулою 2.5.1, поклавши $n = 7$);

б) $y' = (-4sinx)' = -4 \cdot (sinx)' = -4 \cdot cosx = -4cosx$ (використали правило 2.1.3 і взяли похідну функції за табличною формулою 2.5.10);

в) $y' = (arctgx + arccosx)' = (arctgx)' + (arccosx)' = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (використали правило 2.1.1 і табличні формули 2.5.20 і 2.5.19);

г) $y' = \left(x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^3)' - \left(\frac{1}{x^4}\right)' + \left(6\sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^3)' - (x^{-4})' + +6\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3x^2 - (-4) \cdot x^{-5} + 6 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + 4 \cdot \frac{1}{x^5} + 4 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

(перед тим як застосувати основні правила диференціювання застосуємо до даної функції властивості степенів $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і подамо задану функцію у вигляді більш зручному для диференціювання. Потім використаємо правила диференціювання 2.1.2, 2.1.1, 2.1.3 та формулу 2.5.1);

д) міркуючи аналогічно до прикладу г) отримаємо

$y' = \left(9x^5 - \frac{4}{x^3} + 9\sqrt[3]{x^7} - 3x + 4\right)' = \left(9x^5 - 4 \cdot x^{-3} + 9 \cdot x^{\frac{7}{3}} - 3x + 4\right)' = (9x^5)' - (4 \cdot x^{-3})' + \left(9 \cdot x^{\frac{7}{3}}\right)' - (3x)' + (4)' = 9(x^5)' - 4(x^{-3})' + 9\left(x^{\frac{7}{3}}\right)' - 3(x)' + (4)' = 9 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3) \cdot x^{-4} + 9 \cdot \frac{7}{3} x^{\frac{7}{3}-1} - 3 \cdot 1 + 0 = 45x^4 + 12 \cdot \frac{1}{x^4} + 21 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 3 = 45x^4 + \frac{12}{x^4} + 21\sqrt[3]{x^4} - 3$ (перед тим як застосувати основні правила диференціювання застосуємо до даної функції властивості степенів $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і подамо дану функцію у вигляді більш зручному для диференціювання. Потім використаємо правила диференціювання 2.1.2, 2.1.1, 2.1.3 та формулу 2.5.1, 2.5.2 і 2.5.0);

е) Спочатку перетворимо функцію до іншого вигляду

$$y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[5]{x} + 6x\sqrt[3]{x} = \frac{5x^2}{x^{\frac{2}{5}}} + 30x^{\frac{1}{5}} + 6x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5x^{2-\frac{2}{5}} + 30x^{\frac{1}{5}} + 6x^{1+\frac{1}{3}}$$

$$= 5x^{\frac{8}{5}} + 30x^{\frac{1}{5}} + 6x^{\frac{4}{3}};$$

Міркуючи аналогічно до прикладів г), д) знайдемо $y' = \left(5x^{\frac{8}{5}} + 30x^{\frac{1}{5}} + 6x^{\frac{4}{3}}\right)' = \left(5x^{\frac{8}{5}}\right)' + \left(30x^{\frac{1}{5}}\right)' + \left(6x^{\frac{4}{3}}\right)' = 5 \cdot \left(x^{\frac{8}{5}}\right)' + 30 \cdot \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' + 6 \cdot \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = 5 \cdot \frac{8}{5} \cdot x^{\frac{8}{5}-1} + 30 \cdot \frac{1}{5} \cdot x^{\frac{1}{5}-1} + 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} = 8x^{\frac{3}{5}} + 6x^{-\frac{4}{5}} + 8 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^4}} + 8\sqrt[3]{x}$;

є) $y = x^5(2 - x + 3x^2)$.

Перед тим як братись до виконання завдань варто пам'ятати, що краще спочатку вибрати простіший спосіб вирішення завдання.

1 спосіб) Похідну заданої функції можна знайти безпосередньо за правилом диференціювання добутку 2.1.4.

$$y' = \left(x^5(2-x+3x^2)\right)' = (x^5)'(2-x+3x^2) + x^5(2-x+3x^2)'$$
$$= 5x^4(2-x+3x^2) + x^5(2'-x'+(3x^2)')$$
$$= 10x^4 - 5x^5 + 15x^6 + x^5(0-1+6x)$$
$$= 10x^4 - 5x^5 + 15x^6 - x^5 + 6x^6 = 21x^6 + 10x^4 - 6x^5.$$

2 спосіб) Але простіше розкрити спочатку дужки, а далі скористатись тим самим підходом, що і в прикладах г), д) і е):

$$y = x^5(2-x+3x^2) = 2x^5 - x^6 + 3x^7;$$
$$y' = (2x^5 - x^6 + 3x^7)' = 2(x^5)' - (x^6)' + 3(x^7)' = 10x^4 - 6x^5 + 21x^6;$$

ж) $y = (x^2-1)tgx$.

Для знаходження похідної використаємо правило 2.1.4, де $u = x^2 - 1$, а $v = tgx$ і правило 2.1.2, та відповідно формули табличних похідних 2.5.1, 2.5.0, 2.5.12.

$$y' = \left((x^2-1)tgx\right)' = (x^2-1)'tgx + (x^2-1)\cdot(tgx)'$$
$$= 2xtgx + (x^2-1)\cdot\frac{1}{cos^2x} = 2xtgx + \frac{x^2-1}{cos^2x};$$

з) $y = arcsinx \cdot lnx$.

Для знаходження похідної використаємо правило 2.1.4, де $u = arcsinx$, а $v = lnx$ та відповідно формули табличних похідних 2.5.9, 2.5.18.

$$y' = (arcsinx \cdot lnx)' = (arcsinx)'lnx + arcsinx \cdot (lnx)'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}lnx + arcsinx \cdot \frac{1}{x} = \frac{lnx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{arcsinx}{x};$$

и) $y' = \left(\frac{e^x}{ctgx}\right)' = \frac{(e^x)'\cdot ctgx - e^x\cdot(x^3+e^x)'}{ctg^2x} = \frac{e^x\cdot ctgx - e^x\cdot\left(-\frac{1}{sin^2x}\right)}{ctg^2x} = \frac{e^x\cdot\left(ctgx + \frac{1}{sin^2x}\right)}{ctg^2x}$

(для знаходження похідної використано правило диференціювання частки 2.1.5 та табличні формули 2.5.6 і 2.5.13);

і) $y' = \left(\frac{cosx}{x^3+e^x}\right)' = \frac{(cosx)'\cdot(x^3+e^x) - cosx\cdot(x^3+e^x)'}{(x^3+e^x)^2} = \frac{-sinx\cdot(x^3+e^x) - cosx\cdot(3x^2+e^x)}{(x^3+e^x)^2}$

(для знаходження похідної використано правило диференціювання частки 2.1.5 та суми 2.1.1, а також табличні формули 2.5.1, 2.5.6 і 2.5.11).

Окремо розглянемо похідну частки функцій, коли чисельник або знаменник є сталою величиною.

1 випадок) Нехай маємо функцію $y = \frac{C}{u}$ $(C = const,\ \ u = u(x))$. Тоді за правилом диференціювання частки 2.1.5 маємо:

$$y' = \left(\frac{C}{u}\right)' = \frac{C' \cdot u - C \cdot u'}{u^2} = \frac{0 \cdot u - C \cdot u'}{u^2} = \frac{-C \cdot u'}{u^2} = -\frac{C}{u^2} \cdot u'.$$

Тому доцільно запам'ятати, що $\left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C}{u^2} \cdot u'$.

Завдання 3. Знайти похідну функції $y = \frac{2}{x^2+5x-4}$.

Розв'язання. За попередньою формулою отримаємо:

$$y' = \left(\frac{2}{x^2+5x-4}\right)' = -\frac{2}{(x^2+5x-4)^2} \cdot (x^2 + 5x - 4)' = -\frac{2}{(x^2+5x-4)^2} \cdot ((x^2)' + (5x)' - (4)') = -\frac{2}{(x^2+5x-4)^2} \cdot (2x + 5 - 0) = -\frac{2(2x+5)}{(x^2+5x-4)^2}.$$

2 випадок) Нехай маємо функцію $y = \frac{u}{C}$ $(C = const,\ \ u = u(x))$. Тоді за правилом диференціювання добутку сталого множника на функцію 2.1.3 і табличною похідною 2.5.4а отримаємо:

$$y' = \left(\frac{u}{C}\right)' = \left(\frac{1}{C} \cdot u\right)' = \frac{1}{C} \cdot (u)' = \frac{1}{C} \cdot u'.$$

Тому доцільно запам'ятати, що $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u'$.

Завдання 4. Знайти похідну функції $y = \frac{x^5+3^x}{sin3}$.

Розв'язання. За попередньою формулою отримаємо:

$$y' = \left(\frac{x^5+3^x}{sin3}\right)' = \frac{1}{sin3} \cdot (x^5 + 3^x)' = \frac{1}{sin3} \cdot ((x^5)' + (3^x)') = \frac{1}{sin3} \cdot (5x^4 + 3^x ln3) = \frac{5x^4+3^x ln3}{sin3}.$$

Завдання 5. Знайти похідну даної функції, скориставшись правилом диференціювання складної функції:

а) $y = \sqrt{x^2 + 5}$; б) $y = \sqrt[3]{x^4 + sinx}$; в) $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$;

г) $y = sin15x$; д) $y = arctg\sqrt{x}$; е) $y = 7^{\frac{1}{4x}}$; є) $y = \log_5(x^2 + 4)$;

ж) $y = \sqrt[4]{(3x^2 - 2x + 1)^3} - \frac{6}{(x-2)^2}$; з) $y = arccos\sqrt{x} \cdot tg^6(3x + 1)$;

и) $y = \frac{\sqrt{3x^2-5x+3}}{2e^{3x}}$.

Розв'язання. а) $y = \sqrt{x^2+5}$.

Поклавши в ролі проміжного аргументу $u = x^2+5$, маємо $y = \sqrt{u}$. Тому за правилом диференціювання складеної функції наведеному у пункті 2.2 маємо:

$$y' = \underbrace{\left(\sqrt{u}\right)'}_{\substack{\text{похідна зовнішньої} \\ \text{функції по проміжному} \\ \text{аргументу } u}} \cdot \underbrace{u'}_{\substack{\text{похідна внутрішньої} \\ \text{функції по незалежній} \\ \text{змінній } x}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot (x^2+5)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot (2x+0) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію за правилом наведеним у п. 2.2, не вводячи проміжний аргумент:

$$y' = \underbrace{\left(\sqrt{x^2+5}\right)'}_{\substack{\text{похідна від квадратного} \\ \text{кореня із функції}}} \cdot \underbrace{(x^2+5)'}_{\substack{\text{похідна від функції,} \\ \text{що стоїть під коренем} \\ \text{квадратним}}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}};$$

б) $y = \sqrt[3]{x^4 + sinx}$.

Поклавши в ролі проміжного аргументу $u = x^4 + sinx$, маємо $y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$. Тому за правилом диференціювання складеної функції наведеному у пункті 2.2 маємо:

$$y' = \underbrace{\left(u^{\frac{1}{3}}\right)'}_{\substack{\text{похідна зовнішньої} \\ \text{функції по проміжному} \\ \text{аргументу } u}} \cdot \underbrace{u'}_{\substack{\text{похідна внутрішньої} \\ \text{функції по незалежній} \\ \text{змінній } x}} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u' =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^4+sinx)^2}} \cdot (x^4+sinx)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^4+sinx)^2}} \cdot ((x^4)' + (sinx)') = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^4+sinx)^2}} \cdot$$

$$(4x^3 + cosx) = \frac{4x^3+cosx}{3\sqrt[3]{(x^4+sinx)^2}};$$

в) $y = (5x^2+7x+2)^3$

Поклавши в ролі проміжного аргументу $u = 5x^2+7x+2$, маємо $y = u^3$. За правилом диференціювання складеної функції наведеному у пункті 2.2 матимемо:

$$y' = (u^3)' \cdot u' = 3 \cdot u^2 \cdot u' = 3 \cdot (5x^2+7x+2)^2 \cdot (5x^2+7x+2)' =$$

$$= 3 \cdot (5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot ((5x^2)' + (7x)' + 2')$$

$$= 3 \cdot (5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (5 \cdot (x^2)' + 7 \cdot (x)' + 2') =$$

$$= 3 \cdot (5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0) = 3 \cdot (5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (10x + 7);$$

г) $y = sin15x$.

Поклавши в ролі проміжного аргументу $u = 15x$, маємо $y = sinu$. За правилом диференціювання складеної функції наведеному у пункті 2.2 матимемо: $y' = (sinu)' \cdot u' = cosu \cdot u' = cos15x \cdot (15x)' = 15(x)' \cdot cos15x = 15cos15x$;

д) $y = arctg\sqrt{x}$.

Поклавши в ролі проміжного аргументу $u = \sqrt{x}$, маємо $y = arctgu$. За правилом диференціювання складеної функції наведеному у пункті 2.2 матимемо:

$y' = (arctgu)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

е) $y = 7^{\frac{1}{4x}}$.

Поклавши в ролі проміжного аргументу $u = \frac{1}{4x}$, маємо $y = 7^u$. За правилом диференціювання складеної функції наведеному у пункті 2.2 матимемо:

$$y' = (7^u)' \cdot u' = 7^u ln7 \cdot u' = 7^{\frac{1}{4x}} ln7 \cdot \left(\frac{1}{4x}\right)' = 7^{\frac{1}{4x}} ln7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 7^{\frac{1}{4x}} ln7 \cdot \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 7^{\frac{1}{4x}} ln7 \cdot \left(-\frac{1}{4x^2}\right) = -\frac{7^{\frac{1}{4x}} ln7}{4x^2}.$$

Після деякого числа вправ можна відмовитись від введення проміжного аргументу u, розуміючи його в тих місцях, де він потрібен.

є) $y = \log_5(x^2 + 4)$.

$$y' = (\log_5(x^2 + 4))' = \frac{1}{(x^2 + 4)ln5} \cdot (x^2 + 4)' = \frac{1}{(x^2 + 4)ln5} \cdot ((x^2)' + 4')$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 4)ln5} \cdot (2x + 0) = \frac{2x}{(x^2 + 4)ln5};$$

ж) $y = \sqrt[4]{(3x^2 - 2x + 1)^3} - \frac{6}{(x-2)^2}$.

$$y' = \left(\sqrt[4]{\left(3x^2-2x+1\right)^3} - \frac{6}{(x-2)^2}\right)' = \left(\sqrt[4]{\left(3x^2-2x+1\right)^3}\right)' - \left(\frac{6}{(x-2)^2}\right)' =$$

$$= \left(\left(3x^2-2x+1\right)^{\frac{3}{4}}\right)' - \left(6\cdot(x-2)^{-2}\right)' = \frac{3}{4}\left(3x^2-2x+1\right)^{-\frac{1}{4}}\left(3x^2-2x+1\right)' - 6\cdot\left((x-2)^{-2}\right)' =$$

$$= \frac{3}{4}\left(3x^2-2x+1\right)^{-\frac{1}{4}}(6x-2) - 6(-2)(x-2)^{-3} =$$

$$== \frac{3}{4}\cdot\frac{2(3x-1)}{\sqrt[4]{3x^2-2x1}} + \frac{12}{(x-2)^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3x-1}{\sqrt[4]{3x^2-2x+1}} + \frac{12}{(x-2)^3};$$

з) $y = arccos\sqrt{x}\cdot tg^6(3x+1)$.

$$y' = \left(arccos\sqrt{x}\cdot tg^6(3x+1)\right)'$$

$$= \left(arccos\sqrt{x}\right)'\cdot tg^6(3x+1) + arccos\sqrt{x}\cdot(tg^6(3x+1))'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot tg^6(3x+1) + arccos\sqrt{x}\cdot 6tg^5(3x+1)$$

$$\cdot\,(tg(3x+1))' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot tg^6(3x+1) + arccos\sqrt{x}\cdot 6tg^5(3x+1)$$

$$\cdot\frac{1}{cos^2(3x+1)}\cdot(3x+1)'$$

$$= -\frac{tg^6(3x+1)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{6arccos\sqrt{x}\cdot tg^5(3x+1)}{cos^2(3x+1)}\cdot 3 =$$

$$= -\frac{tg^6(3x+1)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{18arccos\sqrt{x}\cdot tg^5(3x+1)}{cos^2(3x+1)};$$

и) $y = \frac{\sqrt{3x^2-5x+3}}{2e^{3x}}$.

$$y' = \left(\frac{\sqrt{3x^2-5x+3}}{2e^{3x}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{3x^2-5x+3}\right)'\cdot 2e^{3x} - \sqrt{3x^2-5x+3}\cdot(2e^{3x})'}{(2e^{3x})^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{3x^2-5x+3}}\cdot(3x^2-5x+3)'\cdot 2e^{3x} - \sqrt{3x^2-5x+3}\cdot 2\cdot(e^{3x})'}{4e^{6x}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{3x^2-5x+3}}\cdot(6x-5)\cdot 2e^{3x} - \sqrt{3x^2-5x+3}\cdot 2\cdot e^{3x}\cdot(3x)'}{4e^{6x}} = \frac{\frac{(6x-5)\cdot e^{3x}}{\sqrt{3x^2-5x+3}} - 6\sqrt{3x^2-5x+3}\cdot e^{3x}}{4e^{6x}}.$$

Завдання 6. Знайти диференціал функції:

а) $y = ln^3 5x \cdot arctg8x^2$; б) $y = sh^3 2x \cdot e^{-5x^2}$.

Розв'язання.

а) ?????

$y' = (ln^6 5x \cdot arctg8x^2)' = (ln^6 5x)' \cdot arctg8x^2 + ln^6 5x \cdot (arctg8x^2)' =$
$6\, ln^5 5x \cdot (ln5x)' \cdot arctg8x^2 + ln^6 5x \cdot \frac{1}{1+(8x^2)^2} \cdot (8x^2)' = 6\, ln^5 5x \cdot \frac{1}{5x} \cdot (5x)' \cdot$
$arctg8x^2 + ln^6 5x \cdot \frac{1}{1+(8x^2)^2} \cdot 8 \cdot 2x = \cdot \frac{30\, ln^5 5x}{5x} \cdot arctg8x^2 + \frac{16x\, ln^6 5x}{1+(8x^2)^2}$;

б) ???? диференц

$y' = \left(sh^3 2x \cdot e^{-5x^2}\right)' = (sh^3 2x)' \cdot e^{-5x^2} + sh^3 2x \cdot \left(e^{-5x^2}\right)' = 3sh^2 2x \cdot$
$(sh2x)' \cdot e^{-5x^2} + sh^3 2x \cdot e^{-5x^2} \cdot (-5x^2)' = 3\, sh^2\, 2x \cdot ch2x \cdot (2x)' \cdot e^{-5x^2} +$
$sh^3 2x \cdot e^{-5x^2} \cdot (-5) \cdot 2x = 6\, sh^2\, 2x \cdot ch2x \cdot e^{-5x^2} - 10x sh^3 2x \cdot e^{-5x^2}$.

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 2

1. Знайти похідну даних функцій $y = f(x)$:

№ варіанту	***Функція*** $y = f(x)$
1.	*а)* $y = 4x^7 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{2x}$; *е)* $y = x^2 \cdot cos7x$; *б)* $y = \frac{x + e^{3x+2}}{1 + cos3x}$; *ж)* $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$; *в)* $y = (x+2) \cdot e^{-x^2}$; *з)* $y = ln^5 sin\, x$; *г)* $y = sin(3x^7 + 1) + 8x$; *и)* $y = arcsin\, e^{4x}$; *д)* $y = 2^{tg\, x} + 3^{cos4x}$; *к)* $y = arctg(ln^5 sin\, x)$.
2.	*а)* $y = 9x^2 + \frac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x}$; *е)* $y = x \cdot arctg3x$; *б)* $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$; *ж)* $y = \frac{9 - x^2}{9 + x^2}$; *в)* $y = e^{sin5x} \cdot lnx$; *з)* $y = 3\, sin^2 x \cdot cos\, 2x$; *г)* $y = ln\, sin\,(2x + 5)$; *и)* $y = e^{-x^2} + x^2 + \frac{3}{x}$; *д)* $y = 0{,}9^{cos^2 x}$; *к)* $y = 2^{tg\, x} + 3^{cos4x}$.

3.	а) $y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} - \sqrt[5]{x}$; е) $y = x\sqrt{1+x^2}$; б) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; ж) $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$; в) $y = (\ln x + 1)^2 \cdot \cos 2x$; з) $y = \sin^2 2x + \cos x$; г) $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$; и) $y = \ln tg\, 5x$; д) $y = 5^{tg\, x} + 3^{\sin x}$; к) $y = \sin x\sqrt{1+x^2}$.
4.	а) $y = 3x^7 - \frac{1}{x^7} - \sqrt[7]{3x}$; е) $y = \frac{5+\sin 5x}{4-\cos 2x}$; б) $y = \sqrt{3-4x+5x^2} + 4x \cdot \ln x$; ж) $y = (x^2+1) \cdot arctg\, 4x$; в) $y = \arcsin(3x^2+2)$; з) $y = (2x+5) \cdot e^{-x^5}$; г) $y = \frac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x}$; и) $y = \ln\sqrt{x+1}$; д) $y = 3^{\sin^2 x}$; к) $y = arctg\sqrt{1-4x}$.
5.	а) $y = 4x^9 - \frac{4}{x^9} - \sqrt[9]{4x}$; е) $y = e^x \cdot \cos x$; б) $y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}}$; ж) $y = 3x^2 \cdot \ln x^3$; в) $y = arctg\,\frac{2x}{1-x^2}$; з) $y = \frac{3+\sin 2x}{9-e^{2x}}$; г) $y = x \cdot \arccos\sqrt{4-x^2}$; и) $y = (2x + 2\cos x) \cdot e^{-x}$; д) $y = 0{,}2^{ctg^2 x}$; к) $y = \arcsin(3x^2+2)$.
6.	а) $y = 15x^3 - \frac{15}{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$; е) $y = e^{\sin 4x+8}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; ж) $y = \frac{x}{x-1} - \ln 4x$; в) $y = \frac{\cos 3x+4}{\sin 3x-4}$; з) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = tg^2\sqrt{x+5} + 8x + 7$; и) $y = \cos^{100} x + \sin 100x$; д) $y = (x + x^2) \cdot 3^x$; к) $y = 3^{\arccos 3x}$.
7.	а) $y = 3x^{11} + \frac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3}$; е) $y = (1-x^2) \cdot \cos 2x$; б) $y = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$; ж) $y = \sqrt[3]{x + x\sqrt{x}}$; в) $y = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$; з) $y = e^{-x} \cdot \sin 2x$; г) $y = arctg(\ln x) + \ln(\sin x)$; и) $y = \ln^5(x^2-1)$;

	д) $y = 2\cdot\cos(4x+x^2)$; к) $y=\sin^4 x$.
8.	а) $y = 7x-\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^3}$; е) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; ж) $y = \ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; в) $y = 3x\cdot\arcsin 2x$; з) $y = (x^2+2x+2)\cdot e^{-x}$; г) $y = \sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; и) $y = \sin(x+6)-x\cdot\cos 4x$; д) $y = 3^{ctg\,x}+8^{\cos 4x}$; к) $y = (x^2)^{\frac{1}{x}}$.
9.	а) $y = 6x^7+\dfrac{7}{x^6}+\sqrt[6]{x^5}$; е) $y = \ln(x^2+5)$; б) $y = \sqrt[3]{2-x^2\cdot\sqrt{x}}$; ж) $y = x^5\cdot e^{-x}$; в) $y = \dfrac{x^6}{6x^5-1}$; з) $y = arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = \ln^3\sin(3x+3)$; и) $y = \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; д) $y = 2^{tg3x}$; к) $y = \dfrac{\sin x}{3\cos^2 x}$.
10.	а) $y = 12x^{14}+\dfrac{14}{x^2}-\sqrt[12]{x}$; е) $y = 8x\cdot e^{-x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2+3x}$; ж) $y = (3x+1)^5\cdot\cos 3x$; в) $y = \dfrac{x}{x^2+2}$; з) $y = \dfrac{\sin x}{3\cos^2 x}$; г) $y = \ln(2x^3+3x^2)$; и) $y = arctg^2\, e^x$; д) $y = 5^{\frac{x}{x+1}}$; к) $y = 3^{\ln^2 x}$.
11.	а) $y = x^{15}+\dfrac{15}{x^2}-\sqrt{x}$; е) $y = \cos(10x+x^3)$; б) $y = (5x+x^3)\cdot\ln x^2$; ж) $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$; в) $y = \dfrac{x\cdot\cos x}{1-\sin x}+2\sin 4x+4$; з) $y = \dfrac{7-\cos 3x}{5+\sin 5x}$; г) $y = \arccos\dfrac{1}{2x^2}$; и) $y = \ln(4+\sin 4x)$; д) $y = 0{,}7^{arctg\,x}$; к) $y = 5^{\sin\sqrt{x}}$.
12.	а) $y = 3x^5-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{x}$; е) $y = \ln tg(2x+1)$; б) $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; ж) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$;

	в) $y = (x+1)^2 \cdot \cos 5x$;	*з)* $y = 2^{3x} + 7x^7 + e^{-x^2}$;
	г) $y = \mathrm{arctg}(e^{2x}+3)$;	*и)* $y = 0{,}7^{\mathrm{ctg}^2 x}$;
	д) $y = \sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$;	*к)* $y = 4^{\arcsin x}$.
13.	*а)* $y = 2x^5 + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x}$;	*е)* $y = (3x+2) \cdot \sin 3x$;
	б) $y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2}$;	*ж)* $y = \ln^2 \mathrm{tg}\, 2x$;
	в) $y = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$;	*з)* $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$;
	г) $y = x \cdot \arccos x - \sqrt{2-x^3}$;	*и)* $y = \arcsin(e^{7x})$;
	д) $y = 7^{\ln^2 x}$;	*к)* $y = (\sin 2x)^7$.
14.	*а)* $y = 2x^7 - \frac{1}{7x^7} - \sqrt[7]{2x}$;	*е)* $y = \mathrm{arctg}\, x^2 + 7x^6 + 2$;
	б) $y = \frac{x^2}{x^3-1}$;	*ж)* $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
	в) $y = (3-\sin^2 x)^3$;	*з)* $y = x^2 \cdot \ln(x^2+1)$;
	г) $y = \frac{1+\cos 2x}{x^3} + \sin(3x+9)$;	*и)* $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 5\sqrt[5]{x^3+1}$;
	д) $y = e^{\sqrt{2x}} + 3$;	*к)* $y = 4^{\sin x}$.
15.	*а)* $y = x^7 + \frac{7}{x^3} - \sqrt[3]{7x}$;	*е)* $y = e^x \cdot \sin 2x$;
	б) $y = \frac{\sin x}{1+\ln \sin x}$;	*ж)* $y = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$;
	в) $y = (5+x^3)^2 \cdot e^{-x}$;	*з)* $y = \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$;
	г) $y = 2\sqrt{4x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2+5}}$;	*и)* $y = \cos(3^x)$;
	д) $y = 7^{\sqrt{\cos x}}$;	*к)* $y = (\sqrt[3]{\arcsin x})^4$.
16.	*а)* $y = x^5 + \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{5x}$;	*е)* $y = (x^2+6) \cdot \ln 3x$;
	б) $y = \frac{2\sin 5x}{1-\cos 3x}$;	*ж)* $y = \frac{x^2}{1-x} + \frac{9x+8}{x^3}$;
	в) $y = \arcsin(\cos x^2) + x^2$;	*з)* $y = e^{3x} \cdot \cos 3x$;
	г) $y = 2\mathrm{tg}^3(x^3+2)$;	*и)* $y = \mathrm{arctg}^2 \frac{1}{x}$;
	д) $y = 2^{\sin 3x}$;	*к)* $y = \ln\left(\ln^2 \sqrt{\sin x}\right)$.

17.	*а)* $y = 7x^2 + \frac{x^5}{5} - \sqrt[5]{x}$; *е)* $y = \sin^2 6x + 3x^2$; *б)* $y = \ln ctg^3 x$; *ж)* $y = \sqrt{3x} \cdot \arcsin x^2$; *в)* $y = \frac{x^7}{x^5 - 2}$; *з)* $y = \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{4x}}$; *г)* $y = arctg(tg^2 x + 2)$; *и)* $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$; *д)* $y = 2^{\frac{x}{1+x}} + 7^{\cos 2x}$; *к)* $y = 4^{\sin\sqrt{x}}$.
18.	*а)* $y = 3x^5 - \frac{5}{x^5} + \sqrt[5]{5x + 2}$; *е)* $y = \frac{5x + \sin 4x}{\cos 2x - 4}$; *б)* $y = \arcsin(3x^3 + 4)$; *ж)* $y = \ln\cos(5x^3 + 4)$; *в)* $y = (x + 8) \cdot arctg\, 4x^3$; *з)* $y = (ctg\, 3x + 1)^5$; *г)* $y = \frac{2x^3 + 3x^2}{3x}$; *и)* $y = 5^{\sin 2x}$; *д)* $y = 4x \cdot (1 - 3\ln x)$; *к)* $y = 4^{\ln\sqrt{x}}$.
19.	*а)* $y = x^7 - \frac{x^6}{6} + \sqrt[6]{x}$; *е)* $y = 2\ln ctg\frac{x}{2}$; *б)* $y = \sqrt{x} - arctg\sqrt{x}$; *ж)* $y = \frac{x}{6(x+1)}$; *в)* $y = 3x \cdot \sin^3 x - \cos^3 x$; *з)* $y = \arcsin(e^{-4x})$; *г)* $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$; *и)* $y = 5^{\frac{1-x}{1+x}} + 3^{\cos 4x}$; *д)* $y = \ln^2 \sin 3x$; *к)* $y = 5^{e^x}$.
20.	*а)* $y = x^5 - \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x}$; *е)* $y = \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{2 + 6x}{x^3}$; *б)* $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$; *ж)* $y = \ln^2 arctg\, x$; *в)* $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 5^{\cos 4x}$; *з)* $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln(tg\frac{x}{2})$; *г)* $y = arctg(7\sin 3x)$; *и)* $y = 7^{\cos x}$; *д)* $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$; *к)* $y = \frac{x^2}{1 + x^3}$.
21.	*а)* $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + 3$; *е)* $y = e^{-x^2}$; *б)* $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$; *ж)* $y = 3\, tg^6 x + 7$; *в)* $y = \sin^4 x + x^2 \cdot \cos^2 x$; *з)* $y = 4x \cdot arctg(2x + 9)$;

	г) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; и) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$; д) $y = 5^{\cos x^2}$; к) $y = 6^{\arccos x}$.
22.	а) $y = 5x^{10} + \frac{5}{x^{10}} + \sqrt[10]{5x}$; е) $y = \sin x \cdot \cos(7x+5)$; б) $y = \sqrt{1+\cos^2 x^2}$; ж) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$; в) $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$; з) $y = \ln \sin(3x+5)$; г) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; и) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; д) $y = 5^{\sin x^3}$; к) $y = 7^{\ln x}$.
23.	а) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + 1$; е) $y = \operatorname{tg}(x^2 + \cos x)$; б) $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$; ж) $y = \sqrt{\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$; в) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} x$; з) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$; г) $y = (x^2 - x^3) \cdot e^{-x}$; и) $y = 3x^3 + \ln^3 x$; д) $y = 15^{\ln^2 x}$; к) $y = 6^{\operatorname{arctg} x}$.
24.	а) $y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 2$; е) $y = \sqrt{1+x^2} + 5^{\cos 3x}$; б) $y = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; ж) $y = \ln^2 \sin x$; в) $y = x^3 \cdot (x - 5\cos x)^2$ з) $y = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2}$; г) $y = \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$; и) $y = (1+9x) \cdot e^{-x^2}$; д) $y = 5^{\sin 3x}$; к) $y = 5^{\cos 7x}$.
25.	а) $y = 4x^2 - \frac{3}{2x^2} + \sqrt[3]{x}$; е) $y = \ln(2x-3)$; б) $y = \frac{2+e^{3x}}{9-e^{-4x}} \cdot x^2$; ж) $y = \frac{3+\sin 4x}{8-\cos 3x}$; в) $y = \operatorname{arctg}(x^2+e^{3x})$; з) $y = (2x^3+5)^4 \cdot x^3$; г) $y = \ln \operatorname{tg}(5x+1)$; и) $y = \sin 5x + \cos 3x^3$; д) $y = 3^{\ln 3x}$; к) $y = 7^{\frac{2}{x}}$.
26.	а) $y = 5x - \frac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x}$; е) $y = \cos^2 x - 2\ln\cos x$;

	б) $y = arctg\,\frac{1+x}{1-x}$; ж) $y = \frac{1}{(1+\sin 4x)^3}$; в) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$; з) $y = \arcsin^2\frac{1}{x}$; г) $y = x^2\cdot ctg2x$; и) $y = 7^{-x^2}$; д) $y = \cos^2 5x + 7x$; к) $y = (\cos x)^5$.
27.	а) $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$; е) $y = \frac{1+2\cos 3x}{1-\cos 2x}$; б) $y = tg\,(x^2+3)$; ж) $y = (0{,}9)^{\sqrt{x}}$; в) $y = x^{\cos^2 x}$; з) $y = \sin^3\frac{x}{3} + \cos x$; г) $y = \ln tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$; и) $y = 0{,}7^{x^5}$; д) $y = x^2\cdot\arcsin(9x+2)$; к) $y = x\sqrt{x}\cdot(3\ln x - 2)$.
28.	а) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \sqrt[3]{x}$; е) $y = arctg\sqrt{4x^2-1}$; б) $y = \frac{2}{2x^2} + 2$; ж) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; в) $y = (x+5)^7\cdot\sin 3x$; з) $y = (x+1)\cdot\arccos(x^2+1)$; г) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; и) $y = \ln\frac{x^5}{x^5-2}$; д) $y = 52^{ctg\,x}$; к) $y = (tg\,x)^7$.
29.	а) $y = 12x^7 - \frac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2}$; е) $y = e^{ctg\,3x}$; б) $y = x^2\cdot\arccos\frac{x}{2} - 4x$; ж) $y = \sqrt[4]{1+\cos x^4}$; в) $y = \frac{x^5}{x^4+2}$; з) $y = \frac{4+\cos 3x}{\sin(5x+3)}$; г) $y = arctg^2 x + 6x^2$; и) $y = (x^3+x^2)\cdot e^{-x}$; д) $y = 5^{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + 7^{\cos 4x}$; к) $y = 5^{\arcsin^2 x}$.
30.	а) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + 3$; е) $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos 2x}\right)^2$; б) $y = 3x\cdot\sin 5x + 8$; ж) $y = x\cdot(\cos\ln x + \sin\ln x)$; в) $y = (3+\sin x)^2\cdot x$; з) $y = 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{3}})$; г) $y = \frac{3x+2}{x^2-2x+5}$; и) $y = 0{,}92^{(x^3)}$;

	д) $y = \arcsin\sqrt[3]{x}$; *к)* $y = 6^{tg^2 x}$.

ТЕМА 3. ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРИЧНО

Основні теоретичні відомості до теми 3

<table>
<tr><th colspan="2">3.1. Логарифмічне диференціювання</th></tr>
<tr><th>Логарифмічне диференціювання</th><th>Алгоритм</th></tr>
<tr><td>Правило логарифмічного диференціювання: похідну від натурального логарифму функції називають логарифмічною похідною цієї функції.</td><td>$y = f(x) > 0,$
$ln y = ln f(x),$
$(ln y)' = \left(ln f(x)\right)',$
$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(ln f(x)\right)',$
$y' = y \cdot \left(ln f(x)\right)',$
$y' = f(x) \cdot \left(ln f(x)\right)'$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 1. Логарифмічне диференціювання спрощує знаходження похідної:
1) степенево-показникової функції $y = (u(x))^{v(x)}, u(x) > 0, u(x) \neq 1;$
2) функції, що має велику кількість множників;
3) функції, що подані у вигляді частки, де чисельник і знаменник в свою чергу має велику кількість множників.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 2. Знаходження похідної степенево-показникової функції $y = (u(x))^{v(x)}, u(x) > 0, u(x) \neq 1$ можна здійснити іншим шляхом, а саме через зведення степенево-показникової функції до складної показникової, використовуючи основну логарифмічну тотожність: $y = (u(x))^{v(x)} = e^{ln(u(x))^{v(x)}} = e^{v(x) ln u(x)}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">3.2. Диференціювання неявних функцій</th></tr>
<tr><th>Неявно задана функція</th><th>Алгоритм диференціювання неявних функцій</th></tr>
<tr><td>Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.</td><td>В рівнянні $F(x, y) = 0$ під змінною y будемо розуміти функцію $y(x)$, тоді це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x: $F(x, y(x)) = 0, \forall x \in X$. Продиференціюємо цю тотожність за змінною x, вважаючи, що y є функцією x, після чого дістаємо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y. Розв'язуємо отримане рівняння відносно y', після чого знаходимо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно: $y'_x = g(x, y)$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">3.3. Диференціювання функцій, заданих параметрично</th></tr>
<tr><th>Параметрично задана функція</th><th>Похідна функції, яка задана параметрично</th></tr>
</table>

Нехай функцію $y=f(x)$ задано параметрично $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} t\in T.$ Похідна y'_x також задається параметрично.	$y'_x=y'_t\cdot t'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$

Розв'язування типових задач до теми 3

Завдання 1. Знайти похідну степенево-показникової функції:

а) $y=(sinx)^{x^3-2}$; б) $y=(th5x)^{ln(2x+7)}$.

Розв'язання. а) Оскільки дана функція степенево-показникова, то для знаходження похідної y' використаємо логарифмічне диференціювання. Для цього прологарифмуємо рівняння функції і отримаємо:

$$lny=ln(sinx)^{x^3-2},$$

спочатку використаємо властивість логарифма

$$lny=(x^3-2)\cdot ln(sinx),$$

після чого продиференціюємо останню рівність та отримуємо:

$$(lny)'=\left((x^3-2)\cdot ln(sinx)\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(x^3-2)'\cdot ln(sinx)+(x^3-2)\cdot\left(ln(sinx)\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=3x^2\cdot ln(sinx)+(x^3-2)\cdot\frac{1}{sinx}(sinx)',$$

$$y'=y\cdot\left(3x^2\cdot ln(sinx)+(x^3-2)\cdot\frac{1}{sinx}cosx\right),$$

$$y'=(sinx)^{x^3-2}\cdot\left(3x^2\cdot ln(sinx)+(x^3-2)\cdot\frac{cosx}{sinx}\right).$$

б) Знайдемо похідну методом логарифмічного диференціювання: $y=(th5x)^{ln(2x+7)}$. А для цього прологарифмуємо дану функцію: $lny=ln(th5x)^{ln(2x+7)}$, а потім використаємо властивість логарифма $lny=ln(2x+7)\cdot ln(th5x)$, після чого продиференціюємо ліву і праву частини останньої рівності:

$$(lny)'=\left(ln(2x+7)\cdot ln(th5x)\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(ln(2x+7)\right)'\cdot ln(th5x)+ln(2x+7)\cdot\left(ln(th5x)\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2x+7}(2x+7)'\cdot ln(th5x)+ln(2x+7)\cdot\frac{1}{th5x}\cdot(th5x)',$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{2x+7}\cdot ln(th5x)+\frac{ln(2x+7)}{th5x}\cdot\frac{5}{ch^2 5x},$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{2}{2x+7}\cdot ln(th5x)+\frac{ln(2x+7)}{th5x}\cdot\frac{5}{ch^2 5x}\right),$$

$$y'=(th5x)^{ln(2x+7)}\cdot\left(\frac{2ln(th5x)}{2x+7}+\frac{5ln(2x+7)}{th5xch^2 5x}\right).$$

Завдання 2. Знайти похідну функції $y=\frac{\sqrt[5]{(x-3)^3}\cdot(3x+5)^4}{(x-2)^6(x+7)^5}$ методом логарифмічного диференціювання.

Розв'язання. Застосуємо метод логарифмічного диференціювання до функції $y=\frac{\sqrt[5]{(x-3)^3}\cdot(3x+5)^4}{(x-2)^6(x+7)^5}$. Для цього прологарифмуємо дану функцію

$$lny=ln\frac{\sqrt[5]{(x-3)^3}\cdot(3x+5)^4}{(x-2)^6(x+7)^5},$$

послідовно застосуємо до правої частини останьої рівності властивості логарифма і отримаємо:

$$lny=\frac{3}{5}ln(x-3)+4ln(3x+5)-6ln(x-2)-5ln(x+7),$$

Після цього продиференціюємо обидві частини останньої рівності

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{3}{5(x-3)}+\frac{4}{3x+5}\cdot 3-\frac{6}{x-2}-\frac{5}{x+7},$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{3}{5(x-3)}+\frac{12}{3x+5}-\frac{6}{x-2}-\frac{5}{x+7}\right),$$

$$y'=\frac{\sqrt[5]{(x-3)^3}\cdot(3x+5)^4}{(x-2)^6(x+7)^5}\cdot\left(\frac{3}{5(x-3)}+\frac{12}{3x+5}-\frac{6}{x-2}-\frac{5}{x+7}\right).$$

Завдання 3. Знайти похідну степенево-показникової функції методом зведення до складної показникової функції $y=(sinx)^{x^3-2}$.

Розв'язання. Запишемо степенево-показникову функцію у вигляді показникової, для цього використаємо основну логарифмічну тотожність:

$$y=(sinx)^{x^3-2}=e^{ln(sinx)^{x^3-2}}=e^{(x^3-2)\ln(sinx)}.$$

Далі знайдемо похідну функції: $y'=\left((sinx)^{x^3-2}\right)'=\left(e^{(x^3-2)\ln(sinx)}\right)'=$ $e^{(x^3-2)\ln(sinx)}\cdot\left((x^3-2)\ln(sinx)\right)'=e^{(x^3-2)\ln(sinx)}\cdot((x^3-2)'\ln(sinx)+$ $(x^3-2)(\ln(sinx))')=e^{(x^3-2)\ln(sinx)}\cdot\left(3x^2\ln(sinx)+(x^3-2)\frac{1}{sinx}\cdot\right.$ $\left.cosx\right)=(sinx)^{x^3-2}\cdot(3x^2\ln(sinx)+(x^3-2)ctgx).$

Завдання 4. Для функцій, заданих параметрично, знайти похідну:

а) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^2 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$; б) $\begin{cases} x = t\,cost - 2\,sint, \\ y = t\,sint + 2\,cost, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$.

Розв'язання.

а) Послідовно знаходимо похідні: $x'_t = 3t^2 + 3$, $y'_t = 6t + 5$, а потім отримані похідні підставляємо у формулу наведену в пункті 3.3: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{6t+5}{3t^2+3}$;

б) Так як $x'_t = cost - t\,sint - 2cost = -t\,sint - cost$,

$$y'_t = sint + t\,cost - 2\,sint = t\,cost - sint,$$

то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t\,cost - sint}{-t\,sint - cost} = \dfrac{sint - t\,cost}{cost + t\,sint}$.

Завдання 5. Знайти похідну y'_x функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ у точці, що відповідає значенню параметра $t = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Для застосування формули із п.3.3 знайдемо похідні x'_t та y'_t: $x'_t = -\sin t$, $y'_t = \cos t$. Тоді, за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{cost}{-sint} = -ctgt$. При значенні параметра $t = \frac{\pi}{4}$, $y'_x = -ctg\frac{\pi}{4} = -1$.

Завдання 6. Знайти похідну y'_x функції, що задана неявно:

а) $5x + 3y - 7 = 0$; б) $x^3 + y^3 - 7xy = 0$; в) $arctgy - y + x = 0$.

Розв'язання. а) Нехай x – аргумент, а $y = y(x)$ – функція залежна від аргументу x, що задана неявно. Продиференціюємо по x обидві частини рівняння: $(5x + 3y - 7)' = 0'$;

$$5 + 3y' - 0 = 0.$$

Далі розв'яжемо рівняння відносно y':

$$3y' = -5, y' = -\frac{5}{3}.$$

б) Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x: $(x^3 + y^3 - 7xy)' = 0'$;

$$3x^2 + 3y^2y' - 7(y + xy') = 0.$$

(за правилом диференціювання складної функції $(y^3)' = 3y^2y'$).

Розв'яжемо одержане рівняння відносно y':

$$3x^2 + 3y^2y' - 7y - 7xy' = 0,$$

$$3y^2y' - 7xy' = 7y - 3x^2,$$

$$(3y^2 - 7x)y' = 7y - 3x^2,$$

$$y' = \frac{7y - 3x^2}{(3y^2 - 7x)}.$$

в) Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x:

$$\frac{1}{1+y^2}y' - y' + 1 = 0,$$

(за правилом диференціювання складної функції $(arctgy)' = \frac{1}{1+y^2}y'$).
Розв'язуємо отримане рівняння відносно y':

$$\frac{1}{1+y^2}y' - y' = -1, \quad \left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right)y' = -1, \quad \left(\frac{-y^2}{1+y^2}\right)y' = -1,$$

$$y' = -1 : \left(\frac{-y^2}{1+y^2}\right), \quad y' = \frac{1+y^2}{y^2}.$$

Завдання 7. Знайти значення $\frac{dy}{dx}$ у точці $M(1;-1)$ для функції, заданої неявно рівнянням $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 3 = 0$.

Розв'язання. Диференціюючи по x обидві частини даного рівняння та вважаючи при цьому, що y є функцією від x, одержуємо:

$$3x^2 - 4xy^2 - 2x^2 2yy' + 5 + y' = 0,$$

звідки отримуємо як розв'язок рівняння відносно y': $y' = \dfrac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2y}$.

Знаходимо значення похідної $\frac{dy}{dx}$ у точці $M(1;-1)$:

$$y'(M) = y'(1;-1) = \frac{4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1^2 - 5}{1 - 4 \cdot 1^2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{5}.$$

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 3

1. Знайти похідну вказаних функцій $y = f(x)$ методом логарифмічного диференціювання:

№ варіанту	Степенево-показникова функція	Складна функція

1.	$y = (th3x)^{arcsin\,5x}$	$y = \dfrac{\sqrt{2x+5}\cdot(x-4)^3}{(2x-4)^3\cdot\sqrt[3]{x+7}}$
2.	$y = (cos5x)^{\sqrt{tg\,5x}}$	$y = \dfrac{\sqrt{6x+5}\cdot(3x-4)^4}{(5x-4)^4\cdot\sqrt[6]{2x+7}}$
3.	$y = (sin3x)^{\sqrt{ctg\,5x}}$	$y = \dfrac{\sqrt{7x+5}\cdot(5x-4)^7}{(7x-4)^6\cdot\sqrt[7]{3x+1}}$
4.	$y = (th3x)^{lnx}$	$y = \dfrac{\sqrt{x-5}\cdot(6x-4)^5}{(3x-4)^4\cdot\sqrt[5]{3x-7}}$
5.	$y = (sh3x)^{arctgx}$	$y = \dfrac{\sqrt{7x+1}\cdot(10x-4)^3}{(7x-4)^4\cdot\sqrt[5]{2x+1}}$
6.	$y = (\cos(x+2))^{arcsin\,5x}$	$y = \dfrac{(5x-4)^3\cdot(x-7)^5}{(6x+4)^4\cdot\sqrt[4]{2x+7}}$
7.	$y = (\sin(x+2))^{ln7x}$	$y = \dfrac{(7x+3)^5\cdot(3x+4)^6}{(x+4)^5\cdot\sqrt[7]{2x-1}}$
8.	$y = (3x+5)^{lnx}$	$y = \dfrac{\sqrt{2x-5}\cdot(x+9)^3}{(7x+1)^3\cdot\sqrt[7]{5x+3}}$
9.	$y = \left(\sqrt{sin4x}\right)^{lnx}$	$y = \dfrac{\sqrt{5x+4}\cdot(7x+11)^5}{(3x+4)^2\cdot\sqrt[8]{3x+1}}$
10.	$y = (\cos(x+7))^{sin\,5x}$	$y = \dfrac{(15x+1)^4\cdot(7x+2)^4}{(x+10)^7\cdot\sqrt[6]{7x+1}}$
11.	$y = (\sin(x+7))^{cos7x}$	$y = \dfrac{(x+2)^6\cdot(5x+6)^5}{(3x+4)^3\cdot\sqrt[4]{5x+7}}$
12.	$y = (x^3+5x)^{ln7x}$	$y = \dfrac{(17x+6)^4\cdot(2x-10)^8}{(4-11x)^7\cdot\sqrt[6]{12x-11}}$
13.	$y = (x^3+7x)^{\sqrt{x}}$	$y = \dfrac{(5x+1)^4\cdot(2x-3)^3}{(x+4)^2\cdot\sqrt[7]{2x+7}}$
14.	$y = \left(\sqrt{sin4x}\right)^{\sqrt{3x+5}}$	$y = \dfrac{\sqrt{(5-7x)^4}\cdot(6-10x)^3}{(9x-4)^{14}\cdot\sqrt[9]{1-3x}}$
15.	$y = (\cos x)^{ln\,5x}$	$y = \dfrac{(10-17x)^5\cdot(x-10)^4}{(5-10x)^2\cdot\sqrt[3]{2x-11}}$
16.	$y = (ln(5x+7))^{ch9x}$	$y = \dfrac{(x-10)^8\cdot(9x-1)^4}{(10x+3)^5\cdot\sqrt[10]{x-17}}$
17.	$y = (ln(x+2))^{shx}$	$y = \dfrac{\sqrt{(7x+5)^6}\cdot(10x-4)^5}{(3x+7)^4\cdot\sqrt[5]{3x+1}}$
18.	$y = (3x+5)^{lnx}$	$y = \dfrac{(7x-2)^9\cdot\sqrt{(4x-3)^2}}{(9x+3)^5\cdot\sqrt[6]{4x-1}}$
19.	$y = (lnx^2)^{e^{2x}}$	$y = \dfrac{\sqrt{(5-2x)^{10}}\cdot(7-4x)^3}{(11-2x)^5\cdot\sqrt[7]{2-6x}}$
20.	$y = \left(ln(x^2+3x)\right)^{e^x}$	$y = \dfrac{(x-12)^6\cdot\sqrt{(x-3)^3}}{(3x+3)^7\cdot\sqrt[4]{x-17}}$
21.	$y = (\ln x)^{\sqrt{2x+3}}$	$y = \dfrac{(14-7x)^3\cdot(6x+10)^3}{(15-5x)^7\cdot\sqrt[4]{5x-1}}$

22.	$y=(ln(x+2))^{cos\sqrt{x}}$	$y=\dfrac{\sqrt{8x+8}\cdot(8x+1)^3}{(x+10)^7\cdot\sqrt[9]{(10x+4)^5}}$
23.	$y=(x+2)^{sin\sqrt{x}}$	$y=\dfrac{\sqrt{(2x+2)^7}\cdot(12x-14)^6}{(5x-8)^3\cdot\sqrt[8]{9x+3}}$
24.	$y=(log_2 3x)^{tg4x}$	$y=\dfrac{\sqrt{(5-12x)^9}\cdot(6-5x)^4}{(2x+6)^3\cdot\sqrt[4]{12-4x}}$
25.	$y=(ctg5x)^{log_5 4x}$	$y=\dfrac{(5x-12)^3\cdot\sqrt{(7x-3)^3}}{\sqrt{(x-1)^7}\cdot\sqrt[5]{7x+9}}$
26.	$y=(log_7 3x)^{cos4x}$	$y=\dfrac{\sqrt{x+8}\cdot(5x+19)^4}{(3x-4)^6\cdot\sqrt[10]{(11x+7)^7}}$
27.	$y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg^2x}$	$y=\dfrac{\sqrt{(5-10x)^7}\cdot(16-13x)^5}{(12x-4)^{10}\cdot\sqrt[5]{1-9x}}$
28.	$y=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\sqrt{cosx}}$	$y=\dfrac{\sqrt{(10x+2)^5}\cdot(11x+4)^{10}}{(x-8)^2\cdot\sqrt[8]{7x-11}}$
29.	$y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{ln^2x}$	$y=\dfrac{(4x-12)^5\cdot\sqrt{(10x+5)^6}}{\sqrt{(6x-1)^3}\cdot\sqrt[9]{2x+5}}$
30.	$y=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\arcsin x}$	$y=\dfrac{\sqrt{13x+8}\cdot(7x-4)^6}{(2x-4)^5\cdot\sqrt[6]{(2x+7)^7}}$

2. Для функцій, заданих параметрично, знайти похідну:

№ варіанту	***Функція***	***№ варіанту***	***Функція***	***№ варіанту***	***Функція***
1.	$\begin{cases}x=\arcsin(t^2-1),\\ y=\arccos t^2.\end{cases}$	**2.**	$\begin{cases}x=\cos 2t,\\ y=t-\sin t.\end{cases}$	**3.**	$\begin{cases}x=\arcsin\sqrt{t},\\ y=\sqrt{1-t}.\end{cases}$
4.	$\begin{cases}x=\arccos\sqrt{t},\\ y=\sqrt{t^2-t}.\end{cases}$	**5.**	$\begin{cases}x=\arccos\sqrt{t},\\ y=\sqrt{t^2-1}.\end{cases}$	**6.**	$\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=4\sin^2 t.\end{cases}$
7.	$\begin{cases}x=\cos 3t,\\ y=t-\sin 3t.\end{cases}$	**8.**	$\begin{cases}x=2t-t^3,\\ y=2t^2.\end{cases}$	**9.**	$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$
10.	$\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$	**11.**	$\begin{cases}x=\ln t,\\ y=t+\ln t.\end{cases}$	**12.**	$\begin{cases}x=t+\cos t,\\ y=t-\sin t.\end{cases}$
13.	$\begin{cases}x=t^4+1,\\ y=t^2+t.\end{cases}$	**14.**	$\begin{cases}x=\ln 2t,\\ y=t+t^2.\end{cases}$	**15.**	$\begin{cases}x=t+\ln\cos 2t,\\ y=t-\ln\sin 2t.\end{cases}$
16.	$\begin{cases}x=t-sin\,t,\\ y=1+cos\,t.\end{cases}$	**17.**	$\begin{cases}x=e^t(t-\cos t),\\ y=e^t(\sin t-1).\end{cases}$	**18.**	$\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y=\sqrt{1-t^2}.\end{cases}$

19.	$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$	**20.**	$\begin{cases} x = e^t \cos 2t, \\ y = e^t \sin 2t. \end{cases}$	**21.**	$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$
22.	$\begin{cases} x = t^5 - t^3 + 1, \\ y = 4t^4 + t. \end{cases}$	**23.**	$\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos 3t. \end{cases}$	**24.**	$\begin{cases} x = e^t (t+1), \\ y = e^t (t-1). \end{cases}$
25.	$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$	**26.**	$\begin{cases} x = t^2 - \sin 2t, \\ y = t - \cos 2t. \end{cases}$	**27.**	$\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^4 + 2t. \end{cases}$
28.	$\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$	**29.**	$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 + \cos 2t. \end{cases}$	**30.**	$\begin{cases} x = 5\sin t - \sin 5t, \\ y = 5\cos t + \cos 5t. \end{cases}$

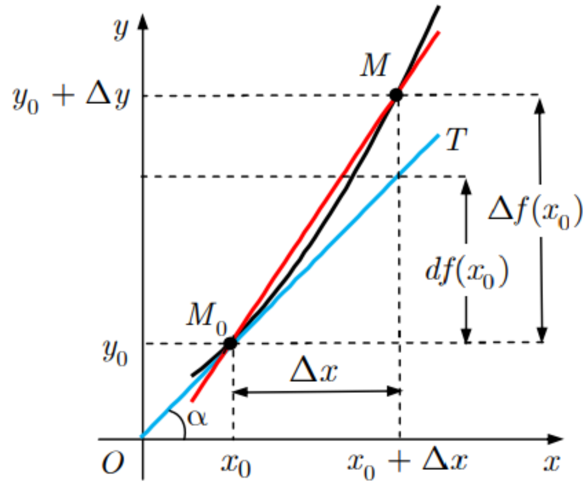
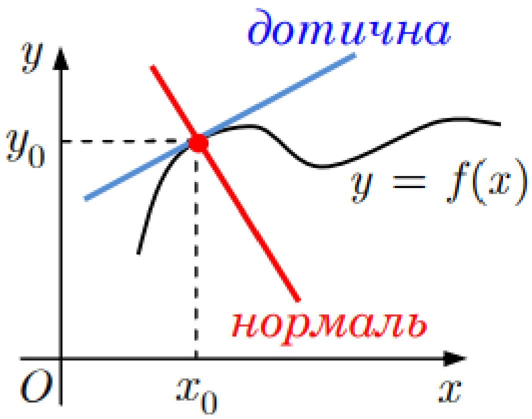
3. Знайти значення $\frac{dy}{dx}$ у точці $M(x_0; y_0)$ для функцій, заданих неявно.

№ варіанту	*Функція задана неявно*	$M(x_0; y_0)$
1.	$5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$	$M\ (0;\ 1)$
2.	$x^3 - 2x^2 + y^2 = 0$	$M\ (1;\ 1)$
3.	$x^2 + xy + y^2 = 7$	$M\ (-1;\ -2)$
4.	$2x^3 - xy + y - 2 = 0$	$M\ (1;\ 5)$
5.	$x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$	$M\ (-2;1)$
6.	$3x^2 - xy + y - 3 = 0$	$M\ (1;\ -2)$
7.	$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 13 = 0$	$M\ (1;\ -1)$
8.	$3x^2 - 5y^2 - 6x - 20y + 25 = 0$	$M\ (2;\ 1)$
9.	$4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0$	$M\ (0;\ 1)$
10.	$x^3 - 2x^2 y^2 + 5x + y - 5 = 0$	$M\ (1;\ 1)$
11.	$2x^2 - 9y^2 + 4x + 18y + 11 = 0$	$M\ (2;\ -1)$
12.	$x^3 - xy + y + 7 = 0$	$M\ (-1;\ -3)$
13.	$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$	$M\ (3;\ 2)$

14.	$x^4 - y^2 - y - 1 = 0$	$M\,(1;\,0)$
15.	$x^3 + 2xy^2 + y + 11 = 0$	$M\,(-1;\,-2)$
16.	$x^3 + x^2y + y^2 - 13 = 0$	$M\,(1;\,3)$
17.	$x^3 + 5xy + y^3 - 7 = 0$	$M\,(1;\,1)$
18.	$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$	$M\,(1;\,1)$
19.	$3x^2 - xy + y^3 - x = 0$	$M\,(0;\,2)$
20.	$x^6 + y^6 - 2xy = 0$	$M\,(1;\,1)$
21.	$x^2 + x^2y - y^2 - y = 0$	$M\,(1;\,1)$
22.	$x^4 - 6x^2y^2 + 9y^2 - 5x^2 + 15y^2 + 4 = 0$	$M\,(2;\,1)$
23.	$7x^2 + xy - y^3 + 3 = 0$	$M\,(1;\,-2)$
24.	$x^2y^2 + xy + x^2 - 7 = 0$	$M\,(1;\,2)$
25.	$2x^5 + y^5 - 2xy + 26 = 0$	$M\,(1;\,-2)$
26.	$x^5 + y^5 - 2xy = 0$	$M\,(1;\,1)$
27.	$3x^2 - xy + y^2 + x - 34 = 0$	$M\,(-2;\,4)$
28.	$x^2 + 2xy^2 + 3y^4 - 6 = 0$	$M\,(1;\,-1)$
29.	$x^2 - x^2y + y^2 = 13$	$M\,(-1;\,-3)$
30.	$x^2y^2 - 4y^3 - x = 4$	$M\,(0;\,-1)$

ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ І ДИФЕРЕНЦІАЛА. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ

Основні теоретичні відомості до теми 4

4.1. Дотична до кривої	
Дотична до кривої	***Графічна ілюстрація***
Дотичною до кривої в точці M_0 називають пряму M_0T, що є граничним положенням січної M_0M, коли точка M наближається по кривій до точки M_0.	 Рис. 4.1.
4.2. Нормаль до кривої	
Нормаль до кривої	***Графічна ілюстрація***
Нормаллю до кривої називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику.	
4.3. Геометричний зміст похідної і диференціала в точці	
Геометричний зміст похідної	***Геометричний зміст диференціала***
Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто $k = f'(x_0) = tg\alpha,$ де α — кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі Ox.	Диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції в цій точці.
4.4. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції	

Рівняння дотичної	***Рівняння нормалі***
Якщо похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 скінченна, тобто $f'(x_0) < \infty$, тоді рівняння дотичної має вигляд	Якщо похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 не дорівнює 0, тобто $f'(x_0) \neq 0$, тоді рівняння нормалі має вигляд
$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$
Якщо похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 нескінченна, тобто $f'(x_0) = \infty$, тоді рівняння дотичної має вигляд	Якщо похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює 0, тобто $f'(x_0) = 0$, тоді рівняння нормалі має вигляд
$x = x_0$	$x = x_0$

4.5. Кут між двома кривими

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину називають кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.

Формула кута між двома прямими	***Умова паралельності прямих***	***Умова перпендикулярності прямих***
$tg\theta = \left\lvert\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right\rvert$	$k_1 = k_2$	$k_1 \cdot k_2 = -1$

Зауваження 1. k_1 *і* k_2 *— кутові коефіцієнти двох прямих, які мають відповідно рівняння* $y = k_1 x + b_1$ *і* $y = k_2 x + b_2$.

Зауваження 2. Для визначення кута $tg\theta$, *обираємо знак “плюс”, який відповідає гострому куту* θ, *а знак “мінус” – тупому.*

4.6. Механічний зміст похідної

Швидкість матеріальної точки $v(t)$ в момент часу t — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t: $v(t) = S'(t)$.
Прискорення матеріальної точки $a(t)$ в момент часу t — це похідна від швидкості $v(t)$ за часом t: $a(t) = v'(t)$.

4.7. Фізичний зміст похідної

Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу.

4.8. Застосування диференціала до наближених обчислень

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, тоді формула для наближених обчислень значень функції $y = f(x)$ в точці $x_0 + \Delta x$ має вигляд:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Зауваження 3. Особливості застосування останньої формули:
1) по вигляду виразу, який необхідно обчислити підбираємо функцію $f(x)$ *і точку* x???
2) значення $f(x_0)$ *відомо точно і повинно шукатись дуже просто;*
3) приріст аргументу може бути як $\Delta x > 0$, *так і* $\Delta x < 0$, *але* Δx *обов'язково має бути малим.*

Розв'язування типових задач до теми 4

Завдання 1. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$, якщо дотична паралельна до прямої $y = 2x + 4$. Зробити рисунок.

Розв'язання. За умовою, дотична до параболи і дана пряма з рівнянням $y = 2x + 4$ паралельні; отже, їх кутові коефіцієнти, згідно умови наведеної у п. 4.5 рівні. Із даної прямої $k_1 = 2$, а кутовий коефіцієнт дотичної $k_2 = f'(x_0) = 2x_0 - 4$, оскільки $k_1 = k_2$, то отримаємо $2x_0 - 4 = 2 \Rightarrow 2x_0 = 6 \Rightarrow x_0 = 3$. Отже, $x_0 = 3$ – абсциса точки дотику M_0 дотичної до параболи $y = x^2 - 4x + 3$. Знайдемо ординату точки дотику: $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$, а $f'(x_0) = 2$. Отже, рівняння дотичної згідно формули наведеної у п. 4.4 має вигляд:

$$y = 2(x - 3) + 0 \Rightarrow y = 2x - 6.$$

Графік функції $y = x^2 - 4x + 3$ – парабола. Вершиною параболи є точка з координатами $(2; -1)$. Вітки параболи напрямлені вгору $(a = 1 > 0)$. Знайдемо точки перетину з осями координат:

1) з віссю Ox: $y = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 3$,
2) з віссю Oy: $x = 0$, тоді $y = 3$.

Виконаний малюнок див. рис.4.1:

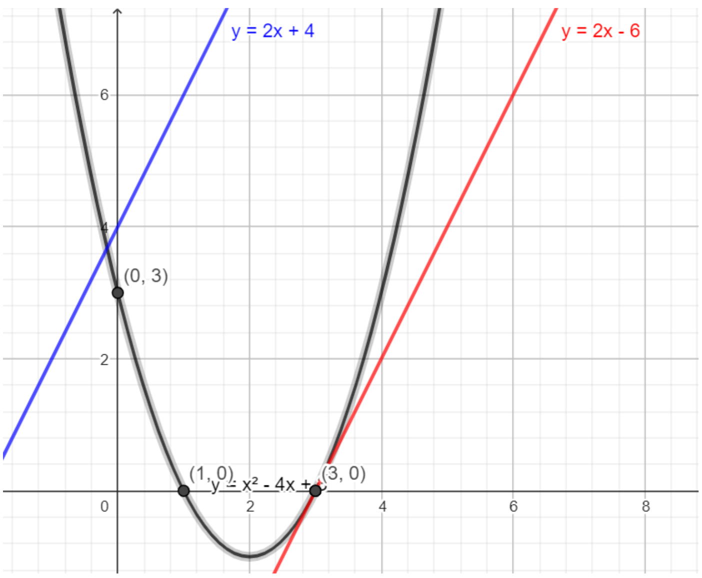


Рис. 4.1. Малюнок до завдання 1

Завдання 2. Написати рівняння дотичної та нормалі у точці $M_0(2;\ 2)$ до кривої $\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{2t} + \frac{3}{2t^2}. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку обчислимо значення параметра t, яке відповідає точці $M_0(2;\ 2)$. Для цього підставимо координати точки $M_0(2;\ 2)$ у параметричне рівняння кривої замість відповідно координат x та y.

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}, \\ 2 = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -\dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{2t^2}, \\ 2 = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2t^2}. \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2t^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{t^2} = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1.$$

Точці $(2;\ 2)$ кривої відповідає значення параметра $t = 1$, оскільки параметр $t = -\ 1$ — сторонній корінь.

Знайдемо похідну функції, що задає рівняння кривої, оскільки функція задана параметрично, то:

$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t^3}}{-\dfrac{1}{2t^2} - \dfrac{3}{t^3}} \Rightarrow y'_x(1) = \frac{-1-2}{-\dfrac{1}{2} - 3} = \frac{-3}{-\dfrac{7}{2}} = \frac{6}{7}.$$

Запишемо рівняння дотичної (див. п. 4.4):

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = 2 + \frac{6}{7}(x-2) \Rightarrow y = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7}.$$

Запишемо рівняння нормалі (див. п. 4.4):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \Rightarrow y = 2 - \frac{7}{6}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{7}{6}x + \frac{13}{3}.$$

Завдання 3. Знайти величину кута між дотичними, проведеними до кривої $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ в точках перетину кривої з віссю Ox. Зробити рисунок.

Розв'язання. Спочатку знайдемо точки перетину кривої із віссю Ox (прямою $y = 0$) як розв'язок наступної системи:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точки перетину кривої із віссю Ox: $A(1; 0), B(3; 0)$.

Знаходимо, згідно геометричного змісту похідної, кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x)$. Для цього нам потрібно знайти похідну функції (кривої) заданої неявно. Таким чином,

$$(x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3)' = (0)' \Rightarrow 2x + 2yy' - 4 + 4y' = 0 \Rightarrow 2yy' + 4y' = -2x + 4 \Rightarrow 2(y+2)y' = -2(x-2) \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y+2}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до даної кривої в точці A: $k_1 = y'(A) = \frac{2-1}{0+2} = \frac{1}{2}$. Аналогічно знаходимо кутовий коефіцієнт k_2 дотичної в точці В: $k_2 = y'(B) = \frac{2-3}{0+2} = -\frac{1}{2}$. Кут θ шукаємо за формулою наведеною в пункті 4.5: $tg\,\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, отже $tg\,\theta = \frac{4}{3}$, звідки $\theta = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ$.

Перш ніж зробити рисунок перетворимо початкове рівняння кривої $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ до вигляду $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$, що визначає коло із центром у точці $O(2;-2)$ та радіусом $R = \sqrt{5}$ (див. рис. 4.2).

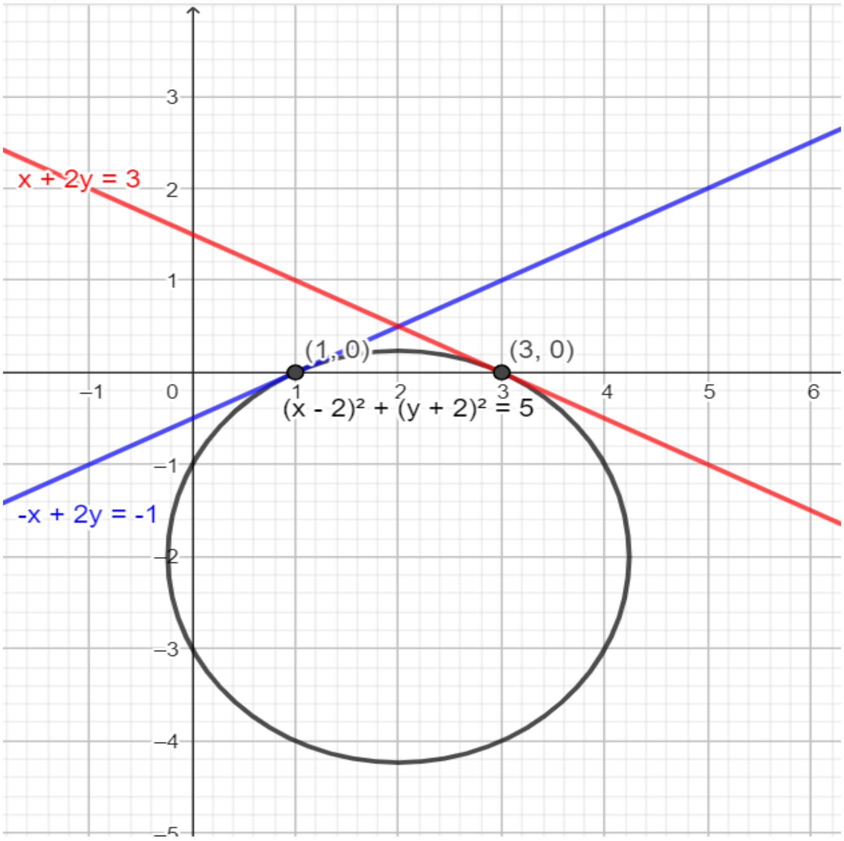


Рис. 4.2. Малюнок до завдання 3

Завдання 4. На кривій $y = 5x^2 - 2x + 12$ знайти точку, дотична в якій перпендикулярна прямій $x + 8y = 2$.

Розв'язання. Згідно умови перпендикулярності двох прямих (заданої прямої і дотичної, див. п.4.5): $k_{\text{дот.}} \cdot k_2 = -1$.

Оскільки, кутовий коефіцієнт дотичної (згідно геометричного змісту похідної, див. п. 4.3) в довільній точці дорівнює $k_{\text{дот.}} = f'(x_0) = (5x^2 - 2x + 12)'|_{x=x_0} = (10x - 2)|_{x=x_0} = 10x_0 - 2$, а для того щоб знайти кутовий коефіцієнт прямої $x + 8y = 2$ приведемо рівняння до наступного вигляду: $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$, отже, $k_2 = -\frac{1}{8}$.

Складемо рівняння: $(10x_0 - 2) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -1$. Розв'язуючи його, знаходимо абсцису шуканої точки: $x_0 = 1$. Оскільки шукана точка лежить на заданій кривій $y = 5x^2 - 2x + 12$, то її ордината знаходиться як $y = f(1) = 5 - 2 + 1 = 4$. Отже, $\mathrm{M}(1;\ 4)$ — шукана точка.

Завдання 5. Обчислити наближено значення наступних функцій:

а) $\sqrt[6]{1{,}08}$; б) $arctg1{,}05$; в) $4{,}98^4$.

Розв'язання. а) Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[6]{x}$, при $x \in [0, +\infty)$. Скористаємось формулою наближених обчислень (див. п. 4.8), але перед цим покладемо $x_0 = 1, \Delta x = 0{,}08$, а тоді $x_0 + \Delta x = 1{,}08$.

Тоді згідно формули наближеного обчислення отримаємо:

$\sqrt[6]{1{,}08} = f(1 + 0{,}08) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}08$.

Знайдемо $f(1) = \sqrt[6]{1} = 1$,

$f'(x) = \left(\sqrt[6]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}, f'(1) = \frac{1}{6\sqrt[6]{1^5}} = \frac{1}{6}$,

Тоді $\sqrt[6]{1{,}08} = f(1{,}08) \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{100} = 1 + \frac{4}{300} = 1 + \frac{1}{75} = 1\frac{1}{75}$;

б) Розглянемо функцію $f(x) = arctgx$, при $x \in (-\infty; +\infty)$. Скористаємось формулою наближених обчислень (див. п. 4.8), але перед цим покладемо $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}05$, а тоді $x_0 + \Delta x = 1{,}05$.

Тоді згідно формули наближеного обчислення отримаємо:

$arctg1{,}05 = f(1 + 0{,}05) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}05.$

Знайдемо $f(1) = arctg1 = \frac{\pi}{4}$,

$f'(x) = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$,

Тоді $arctg1{,}05 = f(1{,}05) \approx \frac{\pi}{4} + 0{,}5 \cdot 0{,}05 \approx \frac{3{,}14}{4} + 0{,}025 = 0{,}785 + 0{,}025 = 0{,}81$;

в) Отже, також підберемо функцію $f(x) = x^3$, при $x \in (-\infty; +\infty)$. Покладемо $x_0 = 5$, $\Delta x = -0{,}02$, а тоді $x_0 + \Delta x = 4{,}98$.

Тоді згідно формули наближеного обчислення отримаємо:

$4{,}98^3 = f(5 + (-0{,}02)) \approx f(5) + f'(5) \cdot (-0{,}02).$

Знайдемо $f(5) = 5^3 = 125$, $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, $f'(5) = 3 \cdot 5^2 = 75$,

Тоді $4{,}98^3 = f(4{,}98) \approx 125 + 75 \cdot (-0{,}02) \approx 125 - 1{,}5 = 123{,}5$.

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 4

1. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить паралельно прямій $y = kx + b$. Зробити рисунок.

№ варіанту	$y = f(x)$	$y = kx + b$	***№ варіанту***	$y = f(x)$	$y = kx + b$
1.	$y = x^2 - 6x + 8$,	$y = 6x + 1$	**2.**	$y = -x^2 - 2x + 3$,	$y = -2x - 2$
3.	$y = x^2 - 6x + 8$,	$y = 2x + 3$	**4.**	$y = x^2 - 2x - 3$,	$y = -4x + 2$
5.	$y = x^2 - 2x - 3$,	$y = 6x + 3$	**6.**	$y = x^2 + 2x - 3$,	$y = 2x - 2$
7.	$y = x^2 + 8x - 9$,	$y = 2x + 1$	**8.**	$y = x^2 - 4x + 3$,	$y = 2x + 4$
9.	$y = x^2 - 5x + 4$,	$y = -x - 2$	**10.**	$y = x^2 + 2x - 3$,	$y = 4x - 1$
11.	$y = -x^2 - 2x + 3$,	$y = -6x + 4$	**12.**	$y = x^2 + 8x - 9$,	$y = 4x$
13.	$y = x^2 - 5x + 4$,	$y = x + 3$	**14.**	$y = x^2 - 2x - 3$,	$y = 4x - 1$
15.	$y = x^2 - 6x + 8$,	$y = -4x + 2$	**16.**	$y = -x^2 - 2x + 3$,	$y = 4x - 3$
17.	$y = x^2 + x$,	$y = x - 3$	**18.**	$y = -x^2 - 2x + 3$,	$y = 2x + 1$

19.	$y = x^2 + 8x - 9$,	$y = 6x$	**20.**	$y = x^2 - 8x - 9$,	$y = -6x$
21.	$y = -x^2 + 4x$,	$y = 2x$	**22.**	$y = x^2 - 5x + 4$,	$y = -3x - 1$
23.	$y = x^2 + 8x - 9$,	$y = -2x + 1$	**24.**	$y = x^2 - 4x + 3$,	$y = 4x + 4$
25.	$y = x^2 - 2x - 3$,	$y = 2x + 2$	**26.**	$y = x^2 + 2x - 3$,	$y = -4x + 2$
27.	$y = x^2 - 6x + 8$,	$y = 4x + 1$	**28.**	$y = x^2 - 5x + 4$,	$y = 3x + 1$
29.	$y = x^2 - 4x + 3$,	$y = 6x - 6$	**30.**	$y = x^2 - 4x + 3$,	$y = -4x - 4$

2. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

№ варіанту	$y = f(x)$	x_0	***№ варіанту***	$y = f(x)$	x_0
1.	$y = x^3 - 2x$	$x_0 = 1$	**2.**	$y = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$	$x_0 = 0$
3.	$y = sin^2 x$	$x_0 = \frac{\pi}{6}$	**4.**	$y = cos^2 x$	$x_0 = \frac{\pi}{3}$
5.	$y = e^{x^2 + 3x}$	$x_0 = 0$	**6.**	$y = lg(3x^2 + 2x + 1)$	$x_0 = 0$
7.	$y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$	$x_0 = 1$	**8.**	$y = \frac{x}{1 + x^2}$	$x_0 = -2$
9.	$y = 2x + \frac{1}{x}$	$x_0 = 1$	**10.**	$y = \frac{x^2 + 3}{x - 4}$	$x_0 = 2$
11.	$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$	$x_0 = 3$	**12.**	$y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$	$x_0 = 2$
13.	$y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$	$x_0 = 4$	**14.**	$y = \sqrt[3]{x^2} - 20$	$x_0 = -8$
15.	$y = 8\sqrt[4]{x} - 70$	$x_0 = 16$	**16.**	$y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$	$x_0 = 4$
17.	$y = \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$	$x_0 = 9$	**18.**	$y = \frac{x^2}{1 + x^2}$	$x_0 = -3$
19.	$y = \frac{5x - x^2}{3 - 2x}$	$x_0 = -1$	**20.**	$y = \frac{x^3}{2 + x^2}$	$x_0 = 1$
21.	$y = 5x + \frac{1}{x^2}$	$x_0 = 2$	**22.**	$y = \frac{5x + 6}{x^2}$	$x_0 = -1$
23.	$y = \frac{3x + 1}{5 + x^2}$	$x_0 = -1$	**24.**	$y = \frac{x^2}{1 + x}$	$x_0 = -2$
25.	$y = \frac{x^2 - 4}{x}$	$x_0 = 1$	**26.**	$y = x^2 + 2\sqrt{x} + 4$	$x_0 = 1$
27.	$y = \sqrt[4]{x^3} - 3$	$x_0 = 1$	**28.**	$y = 3\sqrt[3]{x} - 2$	$x_0 = 27$
29.	$y = x^2 + 4\sqrt{x} - 4$	$x_0 = 4$	**30.**	$y = \sqrt[3]{x} + 2$	$x_0 = 27$

3. Знайти величину кута між дотичними, проведеними в точках перетину кривої $F(x; y) = 0$ з віссю Ox. Зробити рисунок.

№ варіанту	$F(x;y) = 0$	**№ варіанту**	$F(x;y) = 0$
1.	$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0.$	**2.**	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$
3.	$x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0.$	**4.**	$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 8 = 0.$
5.	$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0.$	**6.**	$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0.$
7.	$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 8 = 0.$	**8.**	$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0.$
9.	$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0.$	**10.**	$x^2 + 6x + y^2 - 2y + 1 = 0.$
11.	$x^2 + 10x + y^2 - 6y + 16 = 0.$	**12.**	$x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0.$
13.	$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0.$	**14.**	$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0.$
15.	$x^2 + y^2 + 10x + 6y + 16 = 0.$	**16.**	$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0.$
17.	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$	**18.**	$x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0.$
19.	$x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0.$	**20.**	$x^2 - 6x + y^2 - 6y + 8 = 0.$
21.	$x^2 + y^2 - 14x + 40 = 0.$	**22.**	$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0.$
23.	$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 8 = 0.$	**24.**	$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0.$
25.	$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 3 = 0.$	**26.**	$x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 = 0.$
27.	$x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0.$	**28.**	$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0.$
29.	$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 3 = 0.$	**30.**	$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0.$

4. Обчислити наближено значення наступних виразів:

№ варіанту	**Вираз**	**№ варіанту**	**Вираз**	**№ варіанту**	**Вираз**
1.	$\sqrt[6]{66}$	**2.**	$arcsin 0{,}7$	**3.**	$\sqrt[3]{26{,}7}$
4.	$arctg 0{,}94$	**5.**	$\sqrt[5]{32{,}04}$	**6.**	$e^{0,3}$
7.	$\sqrt{8{,}78}$	**8.**	$lg 9{,}97$	**9.**	$\sqrt[5]{31{,}9}$
10.	$arcsin 0{,}52$	**11.**	$\sqrt[3]{64{,}02}$	**12.**	$\sqrt[3]{64{,}06}$
13.	$(2{,}02)^3 + (2{,}02)^2$	**14.**	$e^{0,04}$	**15.**	$\sqrt[3]{124{,}96}$

16.	$\sqrt[3]{125{,}06}$	**17.**	$\dfrac{2{,}9}{\sqrt{(2{,}9)^2+16}}$	**18.**	$arctg\sqrt{1{,}01}$
19.	$\sqrt{\dfrac{4-3{,}02}{1+3{,}02}}$	**20.**	$arctg\sqrt{1{,}03}$	**21.**	$\sqrt[4]{80{,}8}$
22.	$arcctg1{,}05$	**23.**	$arctg1{,}08$	**24.**	$\sqrt[7]{128{,}05}$
25.	$\sqrt{9{,}04}$	**26.**	$\sqrt{16{,}08}$	**27.**	$arctg1{,}05$
28.	$3{,}96^4$	**29.**	$\sqrt[5]{243{,}04}$	**30.**	$4{,}95^3$

ТЕМА 5. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Основні теоретичні відомості до теми 5

<table>
<tr><th colspan="2">5.1. Похідні вищих порядків</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Позначення</th></tr>
<tr><td>$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$,
$f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$,
$f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$,
$f^{(5)}(x) = \left(f^{(4)}(x)\right)'$,
……….
$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', n \in \mathbb{N}$</td><td>$y'', y''', y^{(4)}, \dots , y^{(n)}, \dots;$

$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots , f^{(n)}(x), \dots;$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots , \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$</td></tr>
<tr><th colspan="2">5.2. Диференціали вищих порядків</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Формули для практичного обчислення</th></tr>
<tr><td>$d^2f(x) = d(d(f(x)))$,
$d^3f(x) = d\left(d^2f(x)\right)$,
$d^4f(x) = d\left(d^3f(x)\right)$,
$d^5f(x) = d\left(d^4f(x)\right)$,
……….
$d^nf(x) = d\left(d^{n-1}f(x)\right), n \in \mathbb{N}$</td><td>$d^2f(x) = f''(x)dx^2$,
$d^3f(x) = f'''(x)dx^3$,
$d^4f(x) = f^{(4)}(x)dx^4$,
$d^5f(x) = f^{(5)}(x)dx^5$,
……….
$d^nf(x) = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><th colspan="2">5.3. Формула Лейбніца</th></tr>
<tr><td colspan="2">$(u(x)\cdot v(x))' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x)\, , u^{(0)}(x) = u(x), v^{(0)}(x) = u(x)$</td></tr>
<tr><th colspan="2">5.4. Похідні вищих порядків для функцій, які задані параметрично або неявно</th></tr>
<tr><th>Параметрично задана функція</th><th>Похідна вищого порядку функції, яка задана параметрично</th></tr>
<tr><td>Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$</td><td>$y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$</td></tr>
<tr><th>Функція, яка задана неявно</th><th>Похідна вищого порядку функції, яка задана неявно</th></tr>
<tr><td>Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.</td><td>В рівнянні $F(x, y) = 0$ під змінною y будемо розуміти функцію $y(x)$, тоді це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x: $F(x, y(x)) = 0, \forall x \in X$. Продиференціюємо цю тотожність за змінною x, вважаючи, що y є функцією x, після чого дістаємо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та</td></tr>
</table>

	y. Розв'язуємо отримане рівняння відносно y', після чого знаходимо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно: $y'_x = g(x, y)$. Отриману рівність диференціюємо за змінною x і отримаємо рівність $y'' = g(x, y, y')$, куди підставляємо замість $y'_x = g(x, y)$, і так далі.
5.5. Похідні вищих порядків деяких елементарних функцій	
5.5.1. $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, n \le m, \\ 0, \ n > m \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}$	
5.5.2. $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$	
5.5.3. $(a^x)^{(n)} = a^x (lna)^n, \ (e^x)^{(n)} = e^x$	
5.5.4. $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, n \le m, \\ 0, \ n > m \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}??????$	
5.5.5. $(log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n lna}$	
5.5.6. $(lnx)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	
5.5.7. $(sin\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$	
5.5.8. $(cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$	

Розв'язування типових задач до теми 5

Завдання 1. Знайти $y'''(x_0)$, якщо $y = x\cos x - \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо похідні:

$$y' = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x;$$

$$y'' = (y')' = (-x\sin x)' = -\sin x - x\cos x;$$

$$y''' = (y'')' = (-\sin x - x\cos x)' = -\cos x - \cos x + x\sin x = -2\cos x + x\sin x;$$

Обчислимо значення похідної в точці: $y'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Завдання 2. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо:

$$y' = \left(x^5 - 7x^2 + x - 1\right)' = 5x^4 - 14x + 1;$$

$$y'' = (y')' = (5x^4 - 14x + 1)' = 20x^3 - 14;$$

$$y''' = (y'')' = (20x^3 - 14)' = -60x^2;$$

$$y^{(4)} = (y''')' = (-60x^2)' = -120x.$$

Завдання 3. Знайти п'яту похідну функції $y = sin^2 x$

Розв'язання. Щоб знайти п'яту похідну від заданої функції потрібно знайти послідовно перші чотири похідні.

$$y' = (sin^2 x)' = 2 sinx cos x = sin2x; \quad y'' = (y')' = (sin 2x)' = 2 cos 2x;$$

$$y''' = (y'')' = (2 cos 2x)' = -4 sin 2x; \quad y^{(4)} = (y''')' = (-4 sin 2x)' = -8 cos 2x;$$

$$y^{(5)} = (y^{(4)})' = (-8 cos 2x)' = 16 sin 2x.$$

Завдання 4. Знайти четверту похідну функції $y = \sqrt{x+5}$

Розв'язання. Щоб знайти четверту похідну від заданої функції потрібно знайти послідовно перші три похідні.

$$y' = (\sqrt{x+5})' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = \frac{1}{2} \cdot (x+5)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2} \cdot (x+5)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x+5)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(x+5)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot (x+5)^{-\frac{5}{2}};$$

$$y^{(4)} = (y''')' = \left(\frac{3}{8} \cdot (x+5)^{-\frac{5}{2}}\right)' = \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)(x+5)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}.$$

Завдання 5. Знайти похідну n-го порядку, якщо $y = e^{5x}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо декілька перших похідних даної функції:

$$y' = (e^{5x})' = 5e^{5x}; \; y'' = (y')' = (5e^{5x})' = 5 \cdot (e^{5x})' = 5 \cdot 5 \cdot e^{5x} = 5^2 e^{5x};$$

$$y''' = (y'')' = (5^2 e^{5x})' = 5^2 \cdot 5 \cdot e^{5x} = 5^3 e^{5x}; \; y^{(4)} = (y''')' = (5^3 e^{5x})' = 5^3 \cdot 5 \cdot e^{5x} = 5^4 e^{5x};$$

$$y^{(5)}=\left(y^{(4)}\right)'=\left(5^4e^{5x}\right)'=5^4\cdot 5\cdot e^{5x}=5^5e^{5x};$$

………………………..

Припустимо, що $y^{(n-1)}=5^{n-1}e^{5x}$, тоді доведемо формулу для похідної n-го порядку методом математичної індукції

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=\left(5^{n-1}e^{5x}\right)'=5^{n-1}\cdot 5\cdot e^{5x}=5^ne^{5x}.$$

Завдання 6. Записати формулу для похідної n - го порядку, якщо $y=x\cdot 3^x$. Після чого знайти $y^{(100)}$.

Розв'язання. Використаємо формулу Лейбніца (див. п.5.3). Виберемо в ролі $v=x,$ $u=3^x.$ Тоді маємо:

$v=x, v'=1, v''=0, v^{(n)}=0, при\ n\ge 2;$

$u=3^x, u'=3^x ln3, u''=\left(3^x ln3\right)'=ln3\cdot 3^x ln3=3^x ln^2 3,$

$u'''=\left(3^x ln^2 3\right)'=ln^2 3\cdot 3^x ln3=3^x ln^3 3, u^{(4)}=\left(3^x ln^3 3\right)'=ln^3 3\cdot 3^x ln3=3^x ln^4 3,$

$тоді \quad u^{(n)}=3^x ln^n 3, при\ n\ge 0.$

Тоді за формулою Лейбніца:

$$y^{(n)}=\left(x\cdot 3^x\right)^{(n)}=C_n^0\cdot 3^x ln^n 3\cdot x+C_n^1\cdot 3^x\left(ln3\right)^{n-1}\cdot 1+C_n^2\cdot 3^x\left(ln3\right)^{n-2}\cdot 0=$$
$$=1\cdot 3^x ln^n 3\cdot x+n\cdot 3^x\left(ln3\right)^{n-1}\cdot 1.$$

А тепер знайдемо соту похідну $y^{(100)}$ шляхом підстановки у попередню формулу $n=100$:

$$y^{(100)}=3^x ln^{100} 3\cdot x+100\cdot 3^x\left(ln3\right)^{99}\cdot 1=3^x ln^{100} 3\cdot x+100\cdot 3^x\left(ln3\right)^{99}.$$

Завдання 7. Записати формулу для похідної n - го порядку, якщо $y=\left(x^3+5x^2-10x+4\right)ln\,x.$ Після чого знайти $y^{(39)}$.

Розв'язання. Використаємо формулу Лейбніца (див. п.5.3). Виберемо в ролі $v=x^3+5x^2-10x+4,$ $u=ln\,x.$ Тоді маємо:

$$v = x^3 + 5x^2 - 10x + 4,\ v' = 3x^2 + 10x - 10,$$
$$v'' = 6x + 10,\ v''' = 6, v^{(4)} = 0, v^{(n)} = 0,\ при\ n \geq 4;$$
$$u = ln\,x, u' = \frac{1}{x} = x^{-1}, u'' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, u''' = \left(-1 \cdot x^{-2}\right)' = (-1)\cdot(-2)x^{-3} = \frac{1 \cdot 2}{x^3},$$
$$u^{(4)} = \left((-1)\cdot(-2)x^{-3}\right)' = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)x^{-4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4},$$
$$u^{(5)} = \left((-1)\cdot(-2)\cdot(-3)x^{-4}\right)' = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)x^{-5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5},$$
$$тоді \quad u^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},\ при\ n \geq 1.$$

Тоді за формулою Лейбніца:

$$y^{(n)} = \left(\left(x^3 + 5x^2 - 10x + 4\right)ln\,x\right)^{(n)} = C_n^0 \cdot (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \cdot \left(x^3 + 5x^2 - 10x + 4\right) +$$
$$+ C_n^1 \cdot (-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \cdot \left(3x^2 + 10x - 10\right) + C_n^2 \cdot (-1)^{n-3}\frac{(n-3)!}{x^{n-2}} \cdot (6x + 10) +$$
$$+ C_n^3 \cdot (-1)^{n-4}\frac{(n-4)!}{x^{n-3}} \cdot 6 + C_n^4 \cdot (-1)^{n-5}\frac{(n-5)!}{x^{n-4}} \cdot 0.$$

А тепер знайдемо тридцять дев'яту похідну $y^{(39)}$ шляхом підстановки у попередню формулу $n = 39$:

$$y^{(39)} = \left(\left(x^3 + 5x^2 - 10x + 4\right)ln\,x\right)^{(39)} = C_{39}^0 \cdot (-1)^{38}\frac{(38)!}{x^{39}} \cdot \left(x^3 + 5x^2 - 10x + 4\right) +$$
$$+ C_{39}^1 \cdot (-1)^{37}\frac{(37)!}{x^{38}} \cdot \left(3x^2 + 10x - 10\right) + C_{39}^2 \cdot (-1)^{36}\frac{(36)!}{x^{37}} \cdot (6x + 10) +$$
$$+ C_{39}^3 \cdot (-1)^{35}\frac{(35)!}{x^{36}} \cdot 6 + C_{39}^4 \cdot (-1)^{34}\frac{(34)!}{x^{35}} \cdot 0 =$$
$$= \frac{(38)!}{x^{39}} \cdot \left(x^3 + 5x^2 - 10x + 4\right) - 39 \cdot \frac{(37)!}{x^{38}} \cdot \left(3x^2 + 10x - 10\right) + 19 \cdot 39\frac{(36)!}{x^{37}} \cdot (6x + 10) + -\frac{39!}{3! \cdot 36!} \cdot \frac{(35)!}{x^{36}} \cdot 6.$$

Завдання 8. Знайти диференціал 6-го порядку функції $y = cos10x$.

Розв'язання. Щоб знайти диференціал 6-го порядку використаємо означення диференціала вищого порядку: $d^6y = f^{(6)}(x)dx^6$. Отже, щоб знайти диференціал 6-го порядку потрібно знайти шосту похідну від заданої функції і помножити dx^6.

$y' = (cos10x)' = -10 sin10x; \;\; y'' = (y')' = (-10 sin10x)' = -10^2 cos10x;$

$y''' = (y'')' = (-10^2 cos10x)' = 10^3 sin10x; \; y^{(4)} = (y''')' = (10^3 sin10x)' = 10^4 cos10x;$

$y^{(5)} = \left(y^{(4)}\right)' = (10^4 cos10x)' = -10^5 sin10x;$

$y^{(6)} = \left(y^{(5)}\right)' = (-10^5 sin10x)' = -10^6 cos10x.$

Тоді $d^6 y = f^{(6)}(x)dx^6 = -10^6 cos10x \cdot dx^6.$

Завдання 9. Знайти y' і y'', якщо функція задана неявно: $y^2 = x^2 y - 5x$;

Розв'язання. Продиференціюємо ліву і праву частини рівності, маємо $2y \cdot y' = 2xy + x^2 y' - 5,$ звідки $y' = \dfrac{2xy-5}{2y-x^2}$.

Ще раз продиференціюємо попередню рівність:

$$(2y \cdot y')' = (2xy + x^2 y' - 5)',$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'',$$

Звідки знайдемо y'', як розв'язок рівняння:

$$y''(2y - x^2) = 2y + 4xy' - 2y'^2, \;\; y'' = \frac{2y + 4xy' - 2y'^2}{2y - x^2},$$

підставимо у отриманий розв'язок $y' = \dfrac{2xy-5}{2y-x^2}$ і отримаємо:

$$y'' = \frac{2y}{2y-x^2} + 4x\frac{2xy-5}{(2y-x^2)^2} - 2\frac{(2xy-5)^2}{(2y-x^2)^3}.$$

Завдання 10. Знайти y' і y'', якщо функція задана параметрично: $\begin{cases} x = t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 3. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки $\begin{cases} x'_t = 4t^3 - 2t, \\ y'_t = 3t^2. \end{cases}$ і $\begin{cases} x''_t = 12t^2 - 2, \\ y''_t = 6t. \end{cases}$

Тоді $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3t^2}{4t^3-2t} = \dfrac{3t}{4t^2-2}$, а за формулою (див. п. 5.4) маємо

$$y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t} = \frac{6t\left(4t^3-2t\right)-\left(12t^2-2\right)3t^2}{\left(4t^3-2t\right)^3} =$$

$$\frac{24t^4-12t^2-36t^4+6t^2}{(2t)^3\left(2t^2-1\right)^3} = \frac{-12t^4-6t^2}{8t^3\left(2t^2-1\right)^3} = -\frac{3\left(2t^2+1\right)}{4t\left(2t^2-1\right)^3}.$$

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 5

1. Для всіх варіантів спільна умова:
1) Знайти y' і y''.
2) Для заданої функції y і аргументу x_0 обчислити $y'''(x_0)$.
3) Вивести формулу для похідної n-го порядку функції $y = f(x)$ та знайти $d^{100}y$.

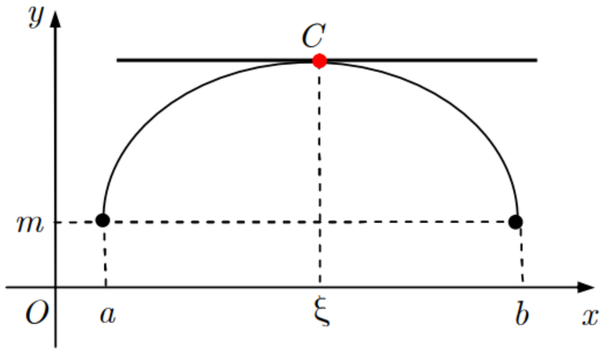
№ варіанту	*1а)*	*1б)*	*2)*	*3)*
1.	$y^2 = 6x$	$\begin{cases} x = (t+2)sin\,t, \\ y = 2t^3 \end{cases}$	$y = cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = ln\,x$
2.	$y^3 + 3y = 8x$	$\begin{cases} x = t\,sin\,t, \\ y = 2t^2 \end{cases}$	$y = cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = ln3x$
3.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\begin{cases} x = 3cos^2 t, \\ y = 2\,sin^2 t \end{cases}$	$y = arcctgx$, $x_0 = 1$	$y = \frac{2}{x}$
4.	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$	$\begin{cases} x = 5cos^2 t, \\ y = 7\,sin^3 t \end{cases}$	$y = ln\left(1+x^2\right)$, $x_0 = 0$	$y = 3^x$
5.	$y = x + tgy$	$\begin{cases} x = 4cos^3 t, \\ y = 5\,sin^3 t \end{cases}$	$y = ln(1+3x)$, $x_0 = 0$	$y = 4^{2x}$
6.	$y = 2x + arctgy$	$\begin{cases} x = cos^3 t, \\ y = 2\,sin^2 t \end{cases}$	$y = arctgx$, $x_0 = 1$	$y = \frac{3}{x}$

7.	$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$	$\begin{cases} x=\frac{1}{t+3}, \\ y=\left(\frac{t}{t+3}\right)^2 \end{cases}$	$y=e^x\cos x,$ $x_0=0$	$y=\sin 2x$
8.	$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}=1$	$\begin{cases} x=\frac{1}{t+5}, \\ y=\left(\frac{t}{t+5}\right). \end{cases}$	$y=e^x\sin x,$ $x_0=0$	$y=\sin 5x$
9.	$5x-2=y^2$	$\begin{cases} x=e^{6t}, \\ y=e^{-3t} \end{cases}$	$y=e^x\cos 3x,$ $x_0=0$	$y=\cos 6x$
10.	$5x^3-2y=y^3$	$\begin{cases} x=e^{8t}, \\ y=e^{-9t} \end{cases}$	$y=e^x\sin 5x,$ $x_0=0$	$y=\cos 3x$
11.	$3x+6y=arctgy$	$\begin{cases} x=\sqrt[3]{t}, \\ y=\sqrt[7]{t} \end{cases}$	$y=e^{-x}\cos x,$ $x_0=0$	$y=\frac{1}{(x+3)}$
12.	$5x+7y=tgy$	$\begin{cases} x=\sqrt[5]{t}, \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$	$y=e^{2x}\sin x,$ $x_0=0$	$y=\frac{1}{x+5}$
13.	$\sin y=x-y^2$	$\begin{cases} x=\frac{3t}{(1+t^2)}, \\ y=t^2(1+t) \end{cases}$	$y=2x\cos x,$ $x_0=\pi$	$y=e^{7x}$
14.	$\sin y=x-y^2$	$\begin{cases} x=\frac{t}{(1+t^2)}, \\ y=t(1+t) \end{cases}$	$y=2x\sin x,$ $x_0=\pi$	$y=e^{5x}$
15.	$5x-3y=\sin y$	$\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1}, \\ y=\frac{(t+1)}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$	$y=(2x+1)^5,$ $x_0=1$	$y=ln(x+2)$
16.	$7x-6y=\cos y$	$\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=2t^3-t^2 \end{cases}$	$y=(3x+1)^5,$ $x_0=1$	$y=ln(3x+1)$
17.	$2x-3y=tgy$	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\frac{(t+1)}{\sqrt{t^3-1}} \end{cases}$	$y=ln(2+x),$ $x_0=-1$	$y=\sqrt{x}$
18.	$x^2+5y=ctgy$	$\begin{cases} x=2t+t^3, \\ y=t^4-t \end{cases}$	$y=ln(5+x),$ $x_0=-4$	$y=e^{9x}$

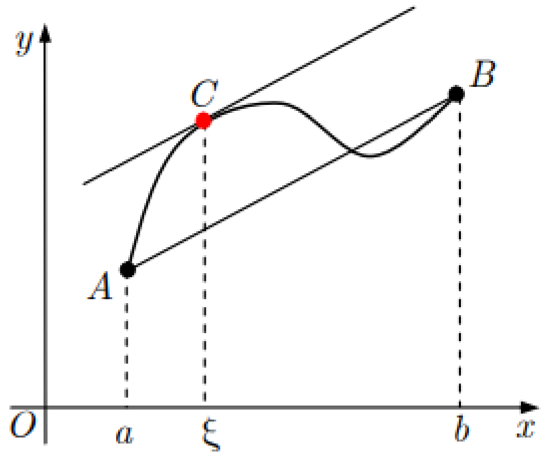
19.	$tgy = xy + 5$	$\begin{cases} x = \dfrac{lnt}{t}, \\ y = t\,lnt \end{cases}$	$y = \frac{1}{3}x^3e^x$, $x_0 = 0.$	$y = xe^{5x}$
20.	$arctgy = xy + 7$	$\begin{cases} x = \dfrac{ln^2 t}{t}, \\ y = t^2\,lnt \end{cases}$	$y = x^2e^{2x}$, $x_0 = 0$	$y = xe^{7x}$
21.	$e^y - y = 2x$	$\begin{cases} x = e^t\,cost, \\ y = e^t\,sint \end{cases}$	$y = arcsin\,x$, $x_0 = 0$	$y = \dfrac{1}{x-4}$
22.	$e^{3x} + y^2 = 2y$	$\begin{cases} x = e^{3t}\,cost, \\ y = e^{3t}\,sint \end{cases}$	$y = 2x^2\,sin\,x$, $x_0 = \pi$	$y = e^{-9x}$
23.	$e^{3y} + y^2 = 2x$	$\begin{cases} x = cos^2\,t, \\ y = sin^3\,t \end{cases}$	$y = x^4\,ln\,x$, $x_0 = 1$	$y = \dfrac{x+2}{x-4}$
24.	$x^2 + tgy = x - y + 3$	$\begin{cases} x = (t+2)lnt, \\ y = 11t^4 - 5t^2 \end{cases}$	$y = x^2\,sin\,x$, $x_0 = \pi$	$y = x^3\,ln\,x$
25.	$x^2 + x\,sin\,y = xy$	$\begin{cases} x = e^{3t}\,cost, \\ y = e^t\sqrt{t} \end{cases}$	$y = ln(3+x)$, $x_0 = -2$	$y = 5^{7x}$
26.	$y^3 + 3y = 8x$	$\begin{cases} x = t\,sint, \\ y = 2t^2 \end{cases}$	$y = cos^2\,x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = ln3x$
27.	$e^{5y} - yx = 2x^3$	$\begin{cases} x = t\,cos5t, \\ y = t\,sin3t \end{cases}$	$y = x^2\,sin5x$, $x_0 = 0$	$y = \dfrac{x+2}{x}$
28.	$x^2 + x\,sin\,y = xy$	$\begin{cases} x = 3t + cos^2\,t, \\ y = t^2\,lnt \end{cases}$	$y = x^4e^x$, $x_0 = 0$	$y = x^2lnx$
29.	$y^2 - 10yx = 8x + y$	$\begin{cases} x = \dfrac{lnt}{t}, \\ y = t + lnt \end{cases}$	$y = x^3e^{4x}$, $x_0 = 1$	$y = \ln(2+7x)$
30.	$y^2 - yx = 8x$	$\begin{cases} x = (t+2)cost, \\ y = t^5 - 5t^3 \end{cases}$	$y = sin^2\,x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = 2^{3x}$

ТЕМА 6. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Основні теоретичні відомості до теми 6

<table>
<tr><th colspan="2">6.1. Теорема Роля</th></tr>
<tr><th>Формулювання</th><th>Графічна інтерпретація</th></tr>
<tr><td>Якщо функція $f(x)$:
1) неперервна на відрізку $[a;b]$;
2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;
3) на кінцях відрізка $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a)=f(b)$, то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, така, що $f\,'(\xi)=0$, $\xi\in(a;b)$.</td><td>

На графіку функції існує точка С, дотична в якій паралельна осі Ox.</td></tr>
<tr><th colspan="2">6.2. Теорема Лагранжа</th></tr>
<tr><th>Формулювання</th><th>Графічна інтерпретація</th></tr>
<tr><td>Якщо функція $f(x)$:
1) неперервна на відрізку $[a;b]$,
2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,
то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, така, що

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \xi\in(a;b)$.</td><td>

На графіку функції існує точка C, дотична в якій паралельна січній AB.</td></tr>
<tr><th colspan="2">6.3. Теорема Коші</th></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо функції $f(x)$, $g(x)$:
1) неперервні на відрізку $[a;b]$,
2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,
3) похідна $g'(x)\neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,
то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, така, що
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \xi\in(a;b).$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">6.4. Правило Лопіталя</th></tr>
<tr><th>Правило 1 для невизначеності $\frac{0}{0}$</th><th>Правило 2 для невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$</th></tr>
<tr><td>Якщо функції $f(x)$, $g(x)$:</td><td>Якщо функції $f(x)$, $g(x)$:</td></tr>
</table>

1) визначені і диференційовні у виколотому околі точки x_0, 2) $g'(x) \neq 0$ в околі точки x_0, 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 4) існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то існує $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$	1) визначені і диференційовні у виколотому околі точки x_0, 2) $g'(x) \neq 0$ в околі точки x_0, 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, 4) існує $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то існує $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$
Зауваження 1. Правило Лопіталя можна застосовувати тільки для обчислення границі функції при невизначеносиі типу $\left[\frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty}\right]$*. При інших типах невизначеностей потрібно спочатку звести їх до невизначеності типу* $\left[\frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty}\right]$*, а потім застосовувати правило Лопіталя.*	
Зауваження 2. Правило Лопіталя можна застосовувати скільки завгодно разів при виконанні умови теорем і має місце наступна рівність: $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$	

6.5. Ідея зведення невизначеностей до застосування правила Лопіталя

Тип невизначеності	*Схема зведення*
$0 \cdot \infty$	Для обчислення границі від добутку функцій $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$, де $f(x)$ – нескінченно мала ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$), а $g(x)$ – нескінченно велика ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$), тобто якщо отримуємо невизначеність типу $[0\cdot\infty]$, необхідно перетворити добуток цих функцій до вигляду $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ (невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$) або до вигляду $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ (невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) і дальше можна застосувати правило Лопіталя.
$\infty - \infty$	Для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ необхідно звести різницю до спільного знаменника або домножити на спряжений вираз або на неповний квадрат, чи перетворити різницю $f(x)-g(x)$ до вигляду $f(x)\left(1`-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$. Потім розкрити невизначеність $\frac{g(x)}{f(x)}$ типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, то

	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\infty;$ якщо ж $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1,$ одержимо невизначеність $[\infty\cdot 0]$.
0^0, 1^∞, ∞^0	Застосовуючи основну логарифмічну тотожність до функції $y=f(x)^{g(x)}$, одержимо рівність $y=e^{ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)ln[f(x)]}$ і знаходимо границю в показнику $g(x)ln[f(x)]$, після чого знаходимо і границю. В усіх трьох випадках $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)ln[f(x)]$ є невизначеністю типу $0\cdot\infty$.

Розв'язування типових задач до теми 6

Завдання 1. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границю: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ln(x+1)}{tg\dfrac{\pi x}{2}}$.

Розв'язання. При $x\to -1$ одержуємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Отже, можна застосувати правило Лопіталя. Маємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{ln(x+1)}{tg\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{\left(ln(x+1)\right)'}{\left(tg\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to -1}\frac{1/(x+1)}{1\Big/\left(cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to -1}\frac{cos^2\frac{\pi x}{2}}{x+1}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to -1}\frac{\left(cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'}{(x+1)'}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to -1}\frac{2cos\frac{\pi x}{2}\left(-sin\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{1}=-\lim_{x\to -1}sin\pi x=0.$$

Завдання 2. Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{e^{5x}-1}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, яку розкриваємо за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{e^{5x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(arctg3x)'}{\left(e^{5x}-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+9x^2}}{5e^{5x}}=\frac{3}{5}.$$

Завдання 3. Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, яку розкриваємо за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{(x-sin x)'}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{(1-cos x)'}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{(sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cos x}=\frac{2}{1}=2$$

Завдання 4. Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3-\sqrt{9+x}}-\frac{1}{\sqrt{25+x}-5}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $[\infty-\infty]$. Перетворимо її до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ шляхом зведення до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3-\sqrt{9+x}}-\frac{1}{\sqrt{25+x}-5}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{25+x}-5-3+\sqrt{9+x}}{\left(3-\sqrt{9+x}\right)\left(\sqrt{25+x}-5\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{25+x}-5-3+\sqrt{9+x}\right)'}{\left[\left(3-\sqrt{9+x}\right)\left(\sqrt{25+x}-5\right)\right]'}==\lim_{x\to 0}\frac{1/\left(2\sqrt{25+x}\right)+1/\left(2\sqrt{9+x}\right)}{-\frac{1}{2\sqrt{9+x}}\left(\sqrt{25+x}-5\right)+\frac{1}{2\sqrt{25+x}}\left(3-\sqrt{9+x}\right)}=\infty.$$

Завдання 5. Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(sin x)^{tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв’язання. а) Маємо невизначеність 0^0. Використаємо основну логарифмічну тотожність до функції $y=(\sin x)^{tgx}$. Тоді

$$\lim_{x\to0}(\sin x)^{tgx}=\left[0^0\right]=\lim_{x\to0}e^{\ln(\sin x)^{tgx}}=\lim_{x\to0}e^{tgx\cdot\ln(\sin x)}=\left|\lim_{x\to0}a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to0}f(x)}\right|=e^{\lim\limits_{x\to0}tgx\cdot\ln(\sin x)}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}tgx\cdot\ln(\sin x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin x}{ctgx}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln\sin x)'}{(ctgx)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{\sin^2x}}=\\=-\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos x=0\end{array}\right|=e^0=1.$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Оскільки границя основи дорівнює нескінченності, а показника — 0, то отримаємо невизначеність $\left[\infty^0\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(x+2^x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(x+2^x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(x+2^x)}=[0\cdot\infty]=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}}=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x+2^x))'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x+2^x}\cdot(1+2^x\ln2)}{1}=\\=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2^x\ln2}{x+2^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+2^x\ln2)'}{(x+2^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x\ln^22}{1+2^x\ln2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\\=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2^x\ln^22)'}{(1+2^x\ln2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x\ln^32}{2^x\ln^22}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln2=\ln2\end{array}\right|=e^{\ln2}=2.$$

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 6

1. Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя.

№ варіанту	***Завдання а)***	***Завдання б)***
1.	*а)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-3x+2}\right)$.
2.	*а)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctg\,x}{x^3}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$.
3.	*а)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{2}{x}$.

4.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{1-4^x}$,	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.
5.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$,	б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.
6.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-5^x}{2^x-1}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0} xctgx$.
7.	а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,	б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot ctg(\pi(x-1))$.
8.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tgx}$,	б) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x}$.
9.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x}{\sin 4x}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x}}$.
10.	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}}$,	б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-\frac{x}{2}}$.
11.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2 x$.
12.	а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.
13.	а) $\lim\limits_{x\to 100}\dfrac{\sqrt{x}-10}{\sin(x-100)}$,	б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.
14.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right)$.
15.	а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$.
16.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$,	б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.
17.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin 3x}$,	б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$.
18.	а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-2}$,	б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-3x}$.
19.	а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.
20.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{3^x-4^x}$,	б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$.

21.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 4x}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)tg\dfrac{x}{2}$.
22.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{arctgx}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-ctg\dfrac{x}{3}\right)$.
23.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos x}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{5}{x}$.
24.	*а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin(x-1)}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.
25.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{5^x-4^x}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.
26.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln tgx}{\ln\sqrt{x}}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{4}{x^2-4x+3}\right)$.
27.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{1}{\sin x}$.
28.	*а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{\sqrt{x-2}}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.
29.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$.
30.	*а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$,	*б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctg\,x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

ТЕМА 7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА

Основні теоретичні відомості до теми 7

7.1. Многочлен Тейлора n-го порядку функції $f(x)$ за степенями $(x - x_0)$

$$\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

7.2. Формула Тейлора n-го порядку для функції $f(x)$ в околі точки x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

7.3. Формула Маклорена n-го порядку для функції $f(x)$ в околі точки $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$$

7.4. Залишковий член формули Тейлора

$$R_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$$

Форма Пеано	***Форма Лагранжа***
$R_n(x) = o((x - x_0)^n), x \to x_0$	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0; x)$

7.5. Теорема Тейлора

Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і n разів диференційовна в цьому ж околі, то має місце формула Тейлора в околі точки x_0 із залишковим членом у формі Пеано:

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0.$

7.6. Формула Маклорена для деяких елементарних функцій

7.6.1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ або $R_n(x) = e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \xi \in (0; x)$;

7.6.2. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$ або $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1},\ \xi \in (0; x)$

7.6.3. $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$ або $R_n(x) = (-1)^{n-1}cos\xi\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \xi \in (0; x)$

7.6.4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ або $R_n(x) = (-1)^{n+1} \cos\xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \xi \in (0; x)$
7.6.5. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$ або $R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(1+\xi)^{n-\alpha+1}(n+1)!} x^{n+1}, \xi \in 0; x)$

Розв’язування типових задач до теми 7

Завдання 1. Розкласти за формулою Тейлора функцію $y = e^{2x}$, в околі точки $x_0 = 0$.

Розв’язання. Знайдемо формулу Маклорена. Для цього знайдемо значення функції і її похідних в точці $x_0 = 0$:

$$y = e^{2x},\ f(0) = e^{2\cdot 0} = 1,$$

$$f'(x) = 2e^{2x},\ f'(0) = 2e^0 = 2,$$

$$f''(x) = 2^2 e^{2x},\ f''(0) = 2^2 e^0 = 2^2,$$

$$f'''(x) = 2^3 e^{2x},\ f'''(0) = 2^3 e^0 = 2^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x},\ f^{(n)}(0) = 2^n e^0 = 2^n.$$

Тоді запишемо формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{2^n}{n!}x^n + o(x^n),$$

Завдання 2. Розкласти за формулою Тейлора функцію $y = \frac{1}{x}$, в околі точки $x_0 = 1$.

Розв’язання. Знайдемо формулу Тейлора. Для цього знайдемо значення функції і її похідних в точці $x_0 = 1$:

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1},\ f(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f'(x)=\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-2},\ f'(1)=-1!,$$

$$f''(x)=\left(-1\cdot x^{-2}\right)'=1\cdot 2\cdot x^{-3}=2!\cdot x^{-3},\ f''(1)=1\cdot 2=2!,$$

$$f'''(x)=\left(1\cdot 2\cdot x^{-3}\right)'=-1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}=-3!\cdot x^{-4},\ f'''(0)=-3!,$$

$$f^{(4)}(x)=\left(-1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4}\right)'=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot x^{-5}=4!\cdot x^{-5},\quad f^{(4)}(1)=4!,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\cdot x^{-(n+1)},\quad f^{(n)}(1)=(-1)^n n!\cdot 1^{-(n+1)}=(-1)^n n!.$$

Тоді запишемо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Пеано

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right)=$$

$$=1-\frac{1!}{1!}(x-1)+\frac{2!}{2!}(x-1)^2-\frac{3!}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!}(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right)=$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right).$$

Завдання 3. Розкласти за формулою Тейлора функцію $y=lnx$ в околі точки $x_0=e$.

Розв'язання. Знайдемо формулу Тейлора. Для цього використаємо розклад у п.7.6 (а саме 7.6.2), але перед тим виконаємо заміну:

$$lnx=\begin{vmatrix} x-e=t, \\ x=t+e \end{vmatrix}=\ln(t+e)=ln\left(e\left(\frac{t}{e}+1\right)\right)=lne+ln\left(\frac{t}{e}+1\right)$$

$$=1+ln\left(1+\frac{t}{e}\right)=\begin{vmatrix} \text{Застосуємо формулу} \\ \text{7.6.2 до другого доданка} \end{vmatrix}$$

$$=1+\frac{t}{e}-\frac{1}{2}\frac{t^2}{e^2}+\frac{1}{3}\frac{t^3}{e^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{e^n}+o(t^n)$$

$$=\begin{vmatrix} \text{Повернемось до початкової} \\ \text{змінної, тобто підставимо замість} \\ t=x-e \end{vmatrix}=$$

$$=1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\frac{1}{3e^3}(x-e)^3-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{ne^n}(x-e)^n+o((x-e)^n),\text{при } x\to e.$$

Завдання 4. Розкласти за формулою Тейлора функцію $y=\sqrt[3]{x}$ в околі точки $x_0=1$.

Розв'язання. Знайдемо формулу Тейлора. Для цього використаємо розклад у п.7.6 (а саме 7.6.5), але попередньо виконаємо заміну та перетворимо ірраціональність в степінь:

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = \begin{vmatrix} x-1=t, \\ x=t+1 \end{vmatrix} = (1+t)^{\frac{1}{3}} = \begin{vmatrix} \text{Застосуємо формулу} \\ 7.6.5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}t^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}t^3 + \cdots$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}t^n + o(t^n)$$

$$= \begin{vmatrix} \text{Повернемось до початкової} \\ \text{змінної, тобто підставимо замість} \\ t = x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1\cdot 2}{2!\,3^2}(x-1)^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!\,3^3}(x-1)^3 - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot \cdots \cdot (3n-4)}{n!\,3^n}(x-1)^n + o((x-1)^n), \text{при } x \to 1.$$

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 7

1. Розкласти за формулою Маклорена функцію $y = f(x)$:

№ варіанту	$y = f(x)$	***№ варіанту***	$y = f(x)$	***№ варіанту***	$y = f(x)$
1.	$f(x) = e^{6x}$	**2.**	$f(x) = \frac{1}{x+5}$	**3.**	$f(x) = cos\frac{x}{7}$
4.	$f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$	**5.**	$f(x) = cos^2 9x$	**6.**	$f(x) = \ln(1+5x)$
7.	$f(x) = \frac{x+3}{x+10}$	**8.**	$f(x) = \sqrt{1+x^2}$	**9.**	$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
10.	$f(x) = \ln(3-6x)$	**11.**	$f(x) = e^{1-9x}$	**12.**	$f(x) = sin9x$
13.	$f(x) = ch^2 3x$	**14.**	$f(x) = \sqrt{1-7x}$	**15.**	$f(x) = sh^2 8x$
16.	$f(x) = cos\frac{x}{5}$	**17.**	$f(x) = \ln(1-\frac{x}{3})$	**18.**	$f(x) = \frac{x}{x+7}$
19.	$f(x) = ch7x$	**20.**	$f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$	**21.**	$f(x) = \sqrt{1-5x^2}$
22.	$f(x) = sh7x$	**23.**	$f(x) = cos6x$	**24.**	$f(x) = e^{5x-6}$
25.	$f(x) = e^{7-3x}$	**26.**	$f(x) = \ln(1+7x)$	**27.**	$f(x) = \ln(1-4x)$

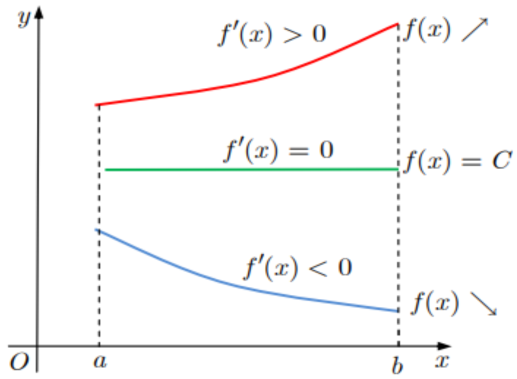
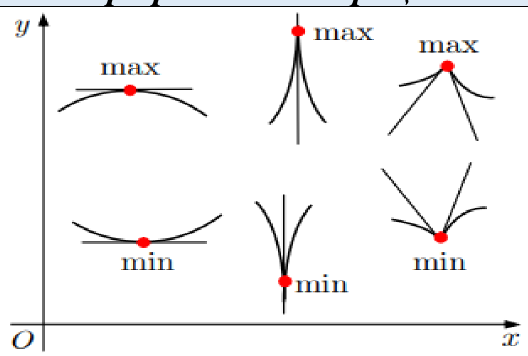
28.	$f(x) = \frac{1}{x-2}$	**29.**	$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$	**30.**	$f(x) = sin^2 9x$

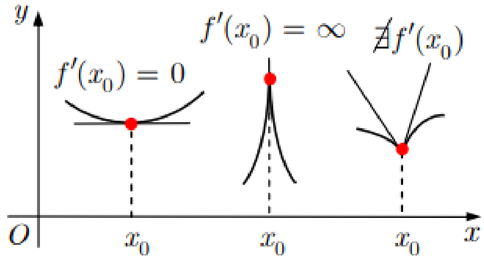
2. Розкласти за формулою Тейлора функцію $y = f(x)$ в околі точки x_0:

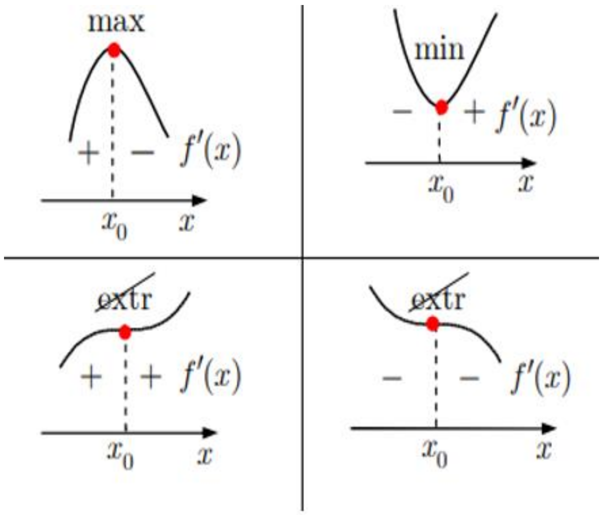
№ варіанту	$y = f(x)$	x_0	***№ варіанту***	$y = f(x)$	x_0
1.	$f(x) = e^{6x}$	$x_0 = 4$	**2.**	$f(x) = \frac{1}{x}$	$x_0 = 3$
3.	$f(x) = \frac{5}{x+2}$	$x_0 = 4$	**4.**	$f(x) = e^{8x}$	$x_0 = 2$
5.	$f(x) = \frac{x+3}{x+10}$	$x_0 = 1$	**6.**	$f(x) = e^{7-3x}$	$x_0 = 2$
7.	$f(x) = \ln(3-6x)$	$x_0 = 1$	**8.**	$f(x) = sin 9x$	$x_0 = 1$
9.	$f(x) = e^{-2x}$	$x_0 = -1$	**10.**	$f(x) = cos^2 x$	$x_0 = \frac{\pi}{4}$
11.	$f(x) = cos 2x$	$x_0 = \frac{\pi}{4}$	**12.**	$f(x) = sin 4x$	$x_0 = \frac{\pi}{2}$
13.	$f(x) = ch 7x$	$x_0 = 1$	**14.**	$f(x) = cos 4x$	$x_0 = \frac{\pi}{2}$
15.	$f(x) = sh 7x$	$x_0 = 1$	**16.**	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$x_0 = 8$
17.	$f(x) = cos 3x$	$x_0 = \pi$	**18.**	$f(x) = sin x$	$x_0 = \pi$
19.	$f(x) = sin 2x$	$x_0 = \frac{\pi}{4}$	**20.**	$f(x) = \ln(1+x)$	$x_0 = 4$
21.	$f(x) = sin x$	$x_0 = \frac{\pi}{2}$	**22.**	$f(x) = \ln(1+3x)$	$x_0 = -1$
23.	$f(x) = cos x$	$x_0 = \frac{\pi}{2}$	**24.**	$f(x) = sin^2 x$	$x_0 = \frac{\pi}{4}$
25.	$f(x) = \frac{1}{x+3}$	$x_0 = 3$	**26.**	$f(x) = \frac{1}{x+2}$	$x_0 = 5$
27.	$f(x) = \ln(1+2x)$	$x_0 = 2$	**28.**	$f(x) = \frac{1}{x+3}$	$x_0 = -2$
29.	$f(x) = \frac{x}{x+3}$	$x_0 = -3$	**30.**	$f(x) = \ln(3+x)$	$x_0 = 1$

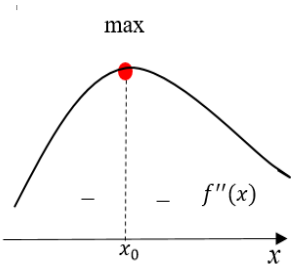
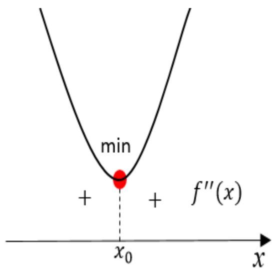
ТЕМА 8. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ І ТОЧКИ ЕКСТРЕМУМУ. ЕКСТРЕМУМИ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ.

Основні теоретичні відомості до теми 8

8.1. Критична точка 1-го порядку	
Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку*, якщо виконано одну з умов: 1) $f'(x_0)=0$; 2) $f'(x_0)=\infty$; 3) $\nexists\, f'(x_0)$.	
8.2. Достатня умова монотонності функції	
Формулювання умови	***Графічна ілюстрація***
Нехай функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді якщо $\forall x \in (a;b)$: 1) $f'(x)>0$, то функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a;b)$ ($f(x)\nearrow$); 2) $f'(x)=0$, то функція $f(x)$ стала на інтервалі $(a;b)$; 3) якщо $f'(x)<0$, то функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(a;b)$ ($f(x)\searrow$).	
8.3. Означення точки екстремуму та екстремуму функції в точці	
Точка максимуму і максимум функції	***Точка мінімуму і мінімум функції***
Якщо існує такий δ - окіл точки x_0, що для всіх $x \in U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}$ виконано нерівність $\Delta f(x_0) = f(x)-f(x_0)<0$, то точку x_0 називають точкою *строгого локального максимуму* функції $f(x)$, а значення $f(x_0)$ — *локальним максимумом* функції.	Якщо існує такий δ - окіл точки x_0, що для всіх $x \in U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}$ виконано нерівність $\Delta f(x_0) = f(x)-f(x_0)>0$, то точку x_0 називають точкою *строгого локального мінімуму* функції $f(x)$, а значення $f(x_0)$ — *локальним мінімумом* функції.
Термінологія	***Графічна ілюстрація***
Точки максимуму і мінімуму називають *точками екстремуму* функції, а максимуми та мінімуми функції — *екстремумами функції*.	

8.4. Необхідна умова існування екстремуму	
Теорема	***Графічна ілюстрація***
Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, диференційовна в цьому околі (можливо за виключенням самої точки x_0) і досягає в цій точці екстремуму, то точка x_0 є критичною точкою 1-го порядку (підозрілою на точку екстремуму).	

8.5. Перша достатня умова існування екстремуму	
Теорема	***Графічна ілюстрація***
Нехай x_0 — критична точка 1-го порядку і функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і диференційовна в цьому околі (можливо за виключенням самої точки x_0). Якщо в цьому околі: 1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму; 2) $f'(x) < 0$, для $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, для $x > x_0$, то функція досягає в точці x_0 мінімуму; 3) похідна не змінює знак переходячи через x_0, то в точці x_0 екстремуму немає.	

8.6. Друга достатня умова існування екстремуму	
Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна в точці x_0 та $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. Тоді: 1) якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму; 2) якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму.	

8.7. Третя достатня умова існування екстремуму
Якщо в стаціонарній точці x_0 функція $f(x)$ n-разів диференційовна, перша похідна відмінна від нуля, похідна $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ є похідною парного порядку, то точка x_0 є точкою екстремуму функції: точкою мінімуму, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$ і точкою максимуму, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$. Якщо ж перша відмінна від нуля похідна $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ є похідною непарного порядку, то точка x_0 не є точкою екстремуму функції.

8.8. Схема дослідження функції на монотонність і локальні екстремуми

1) Знаходять область визначення функції. 2) Знаходимо першу похідну функції $f'(x)$. 3) Серед внутрішніх точок області визначення знаходять критичні точки 1-го порядку функції $f(x)$. 4) Досліджують знак першої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки 1-го порядку розбивають область визначення функції. 5) Застосовуючи достатні умови монотонності й існування локального екстремуму робимо висновок про поведінку функції. 6) Обчислюють значення функції в точках екстремуму.
8.9. Схема дослідження функції на найбільше і найменше значення на відрізку $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$
1) Перевіряємо чи визначена функція на цьому відрізку. 2) Знаходимо першу похідну функції $f'(x)$. 3) Знаходимо критичні точки 1-го порядку функції $f(x)$. 4) Вибираємо ті критичні точки функції, що належать інтервалу $(a; b)$. 5) Обчислити значення функції у критичних точках, що належать інтервалу $(a; b)$ і на кінцях відрізку $[a; b]$, тобто в $x = a$ та $x = b$. 6) Вибрати серед цих значень найменше та найбільше.

Розв'язування типових задач до теми 8

Завдання 1. Знайти екстремуми і проміжки монотонності функції $f(x) = 10\sqrt[5]{(x-1)^3} - 6x + 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо завдання згідно схеми наведеної у пункті 8.8.

1) Знаходимо область визначення функції: $D(y): x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty;\, +\infty)$.

2) Знаходимо першу похідну функції:

$$f'(x) = 10 \cdot \frac{3}{5}(x-1)^{-\frac{2}{5}} - 6 = \frac{6}{\sqrt[5]{(x-1)^2}} - 6 = \frac{6 - 6\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}.$$

3) Знаходимо критичні точки 1-го порядку заданої функції:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6 - 6\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^2}} = 0 \Rightarrow 6 - 6\sqrt[5]{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \sqrt[5]{(x-1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1, \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

$f'(x)\ - \nexists$ при $\sqrt[5]{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Отже, маємо наступні критичні точки 1-го порядку: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

4) Критичні точки $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ розбивають область визначення функції на чотири інтервали $(-\infty;\ 0), (0;\ 1), (1;\ 2), (2;\ +\infty)$. Досліджуємо знак похідної $f'(x)$ на кожному з цих інтервалів. Враховуючи, що в кожному з цих інтервалів перша похідна зберігає знак, можемо в кожному з них розглянути будь яку точку. Наприклад, візьмемо в першому інтервалі точку $x = -1$, тоді $f'(-1) = \frac{6-6\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{4}} < 0$. В другому інтервалі беремо точку $x = 0{,}5$, тоді $f'(0{,}5) = \frac{6-6\sqrt[5]{\frac{1}{4}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{4}}} > 0$. В третьому інтервалі візьмемо $x = 1{,}5$, тоді $f'(1{,}5) = \frac{6-6\sqrt[5]{\frac{1}{4}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{4}}} > 0$. В четвертому інтервалі беремо $x = 4$, тоді $f'(4) = \frac{6-6\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{9}} < 0$ (замість цих точок можна в кожному з інтервалів взяти інші значення).

5) Відзначаємо все у наступній таблиці

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2, +\infty)$
Знак y′	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
Поведінка $y = f(x)$	спадає (↘)	min	зростає (↗)	$\nexists$ extr	зростає (↗)	min	спадає (↘)

Оскільки похідна $f'(x) > 0$ на інтервалах $(0; 1)$ та $(1; 2)$, то функція $f(x)$ зростає на кожному із цих інтервалів і неперервна в точці $x = 1$, то функція $f(x)$ зростає при $x \in (0;\ 2)$.

Так як похідна $f'(x) < 0$ на інтервалах $(-\infty;\ 0)$ та $(2;\ +\infty)$, то функція $f(x)$ спадає при $x \in (-\infty;\ 0)$ та $x \in (2;\ +\infty)$.

При переході зліва направо через критичну точку $x_1 = 0$ похідна змінює знак з «–» на «+», тому $x_1 = 0$ – точка мінімуму функції . При переході зліва направо через критичну точку $x_3 = 2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому $x_3 = 2$ – точка максимуму функції. При переході зліва направо через критичну точку $x_2 = 1$ похідна знак не змінює, тому $x_2 = 1$ не є точкою екстремуму. Отримали дві точки екстремуму функції: $x_1 = 0$ та $x_3 = 2$.

6) Знаходимо екстремуми функції:

$y_{min} = f(0) = 10\sqrt[5]{(0-1)^3} - 6 \cdot 0 + 1 = -10 - 0 + 1 = -9;$

$y_{max} = f(2) = 10\sqrt[5]{(2-1)^3} - 6 \cdot 2 + 1 = 10 - 12 + 1 = -1.$

Завдання 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 10\sqrt[5]{(x-1)^3} - 6x + 1$ на відрізку $[0{,}5; 33]$**.**

Розв'язання. Розв'яжемо завдання згідно схеми наведеної у пункті 8.9. Ми маємо ту ж функцію, що і у попередньому прикладі. Розв'яжемо завдання згідно схеми наведеної у пункті 8.9.

1) На заданому відрізку функція визначена.

2) Перша похідна функції має вигляд: $f'(x) = \frac{6-6\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}$.

3) Знаходимо критичні точки 1-го порядку заданої функції: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

4) При цьому $x_1 = 0 \notin [0.5;\ 33]$, $x_2 = 1 \in [0.5;\ 33]$, $x_3 = 2 \in [0{,}5;\ 33]$. Тому надалі розглядаємо тільки точки $x_2 = 1$ та $x_3 = 2$.

5) Обчислюємо значення функції в вибраних критичних точках $x_2 = 1$ та $x_3 = 2$ і на кінцях заданого відрізку $[0.5;\ 33]$, тобто в точках $x = 0.5$ та $x = 33$:

$$f(1) = 10\sqrt[5]{(1-1)^3} - 6 \cdot 0 + 1 = 0 - 6 + 1 = -5;$$

$$f(2) = 10\sqrt[5]{(2-1)^3} - 6 \cdot 2 + 1 = 10 - 12 + 1 = -1;$$

$$f(0{,}5) = 10\sqrt[5]{(0{,}5-1)^3} - 6 \cdot 0{,}5 + 1 = -10\sqrt[5]{0{,}125} - 2 \approx -8.598;$$

$$f(33) = 10\sqrt[5]{(33-1)^3} - 6 \cdot 33 + 1 = 80 - 198 + 1 = -117.$$

6) Вибираємо серед цих значень найменше і найбільше:

$f(33) = -117$ — найменше значення функції на відрізку $[0.5;\ 33]$,

$f(2) = -1$ — найбільше значення функції на відрізку $[0.5;\ 33]$.

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 8

1. Знайти проміжки монотонності вказаних функцій та дослідити функцію на екстремум:

№ варіанту	$\boldsymbol{y = f(x)}$	*№ варіанту*	$\boldsymbol{y = f(x)}$
1.	$y = 3x - x^3$	**2.**	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$
3.	$y = x^2(x-2)$	**4.**	$y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2) - 5$
5.	$y = 12x^2 - 8x^3 - 2$	**6.**	$y = (2x+1)^2(2x-1)^2$
7.	$y = (x+2)^2(x-2)^2$	**8.**	$y = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2) + 6x - 9$
9.	$y = \frac{4x}{4+x^2}$	**10.**	$y = \frac{x^4}{x^3-1}$
11.	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$	**12.**	$y = \frac{2x^2-6}{x-2}$
13.	$y = \frac{x}{9-x}$	**14.**	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$
15.	$y = (2x-1)^2(2x-3)^2$	**16.**	$y = 3x^2 - x^3 - 2$
17.	$y = 2x^3 - 3x^2 - 4$	**18.**	$y = xln^2x$
19.	$y = 16x^2(x-1)^2$	**20.**	$y = 2x^3 + 3x^2 - 5$
21.	$y = \frac{3x^4+1}{x^3}$	**22.**	$y = \frac{x}{9-x^2}$
23.	$y = 2 - 3x^2 - x^3$	**24.**	$y = (x+1)^2(x-1)^2$
25.	$y = 2 - 12x^2 - 8x^3$	**26.**	$y = x + \frac{4}{x^2}$
27.	$y = (x-3)^2(x-1)^2$	**28.**	$y = 6x - 8x^3$
29.	$y = 2\sqrt{x} - x$	**30.**	$y = x^2(x-3)^2$

2. Знайти найбільше та найменше значення функції на проміжку $[a, b]$:

№ варіанту	$\boldsymbol{y = f(x)}$	$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$	*№ варіанту*	$\boldsymbol{y = f(x)}$	$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$
1.	$y = \frac{3x}{1+x^2}$	$[0; 5]$	**2.**	$y = ln(x^2 - 2x + 2)$	$[0; 3]$
3.	$y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$	$[1; 4]$	**4.**	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$[-\frac{1}{2}; 0]$
5.	$y = x + 2\sqrt{x}$	$[0; 4]$	**6.**	$y = x^4 - 2x^2 + 5$	$[-2; 2]$
7.	$y = \sqrt{100 - x^2}$	$[-6; 8]$	**8.**	$y = 4 - x^2 + \frac{2}{x}$	$[-1; 2]$
9.	$y = 3x^2 - x^3$	$[-1; 3]$	**10.**	$y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2}$	$[-1; 2]$
11.	$y = 2x^3 - 9x^2 - 3$	$[-1; 4]$	**12.**	$y = (3-x)e^{-x}$	$[0; 5]$
13.	$y = \frac{x^2+8}{x-1}$	$[-3; 0]$	**14.**	$y = \frac{3-x^2}{x+3}$	$[-2; 1]$

15.	$y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$	$[-3; 3]$	**16.**	$y = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$	$[-3; 2]$
17.	$y = \sqrt{36-x^2}$	$[-7; 3]$	**18.**	$y = -x - \frac{9}{x}$	$[-6; -1]$
19.	$y = 4x - 2sin4x$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	**20.**	$y = x^4 - 4x^2 + 5$	$[-1; 3]$
21.	$y = \frac{4x}{1+x^2}$	$[-2; 4]$	**22.**	$y = (x-1)^2(x+5)^2$	$[-3; 2]$
23.	$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$	$[-4; -1]$	**24.**	$y = \sqrt{9+8x-x^2}$	$[0; 7]$
25.	$y = (x+1)^2 \cdot (x-2)^2$	$[-2; 4]$	**26.**	$y = x^2 + \frac{2}{x}$	$[0,5; 3]$
27.	$y = \sqrt{0,5x^2+3x+5}$	$[2; 4]$	**28.**	$y = \frac{x^2}{x-1}$	$[-4; 1]$
29.	$y = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$	$[-2; 2]$	**30.**	$y = \sqrt{25-x^2}$	$[-6; 4]$

ТЕМА 9. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА НАПРЯМ ОПУКЛОСТІ І ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ. АСИМПТОТИ. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

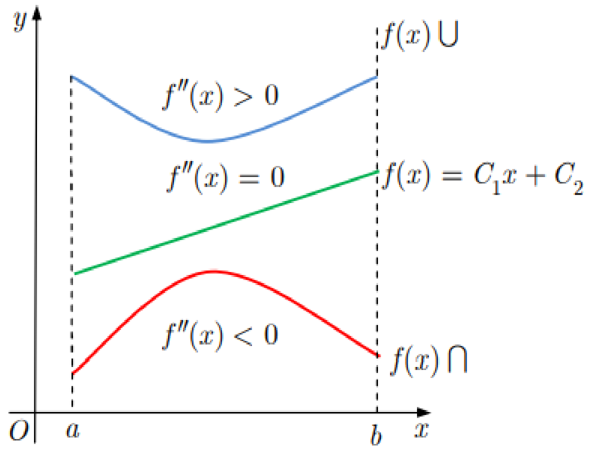
Основні теоретичні відомості до теми 9

9.1. Означення критичної точки 2-го порядку

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 2-го порядку*, якщо виконано одну з умов:

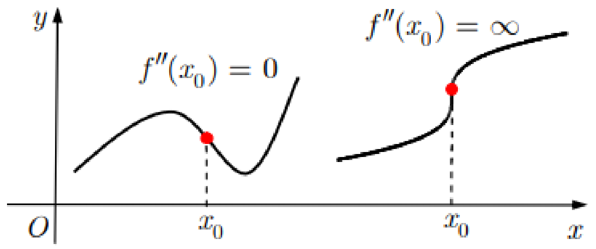
1) $f''(x_0) = 0$;
2) $f''(x_0) = \infty$;
3) $\nexists\, f''(x_0)$.

9.2. Достатня умова опуклості вниз (вверх)

Формулювання умови	***Графічна ілюстрація***
Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді якщо $\forall x \in (a;b)$: 1)$f''(x) > 0$, то функція $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ опукла вниз ($f(x) \cup$); 2) $f''(x) = 0$, то функція $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ лінійна; 3) якщо $f''(x) < 0$, то функція $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ опукла вверх ($f(x) \cap$).	

Означення точки перегину. Точка x_0 функції $f(x)$ називається *точкою перегину* якщо в цій точці функція неперервна і по різні сторони від цієї точки має протилежні опуклості.

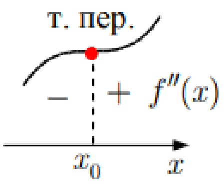
9.3. Необхідна умова існування точки перегину

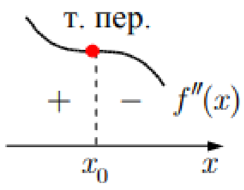
Теорема	***Графічна ілюстрація***
Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і точка x_0 — точка перегину функції $f(x)$, то точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку (підозрілою на точку перегину).	

9.4. Достатня умова існування точки перегину

Теорема	***Графічна ілюстрація***

Нехай функція $f(x)$ має другу похідну в деякому околі x_0, можливо за винятком самої точки x_0, а точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

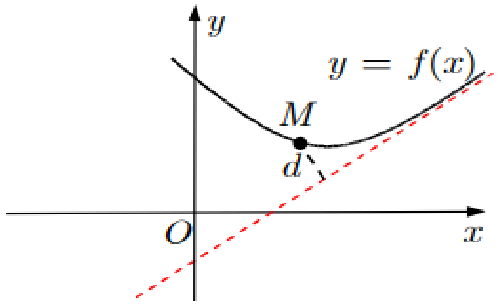




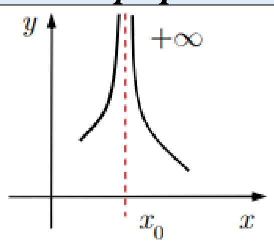
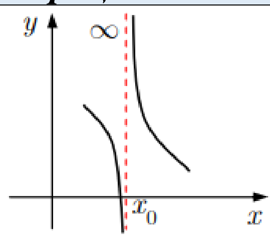
9.5. Схема дослідження функцій на напрям опуклості і точки перегину.

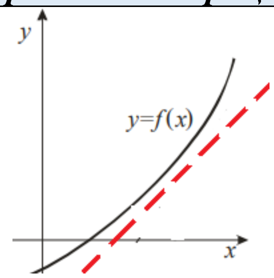
1) Знаходять область визначення функції.
2) Серед внутрішніх точок області визначення знаходять критичні точки 2-го порядку функції $f(x)$.
3) Досліджують знак другої похідної в кожному з інтервалів, на які критичні точки 2-го порядку розбивають область визначення функції.
4) Застосовуючи достатню умову опуклості й існування точки перегину, робимо висновок про поведінку функції.

9.6. Асимптота кривої

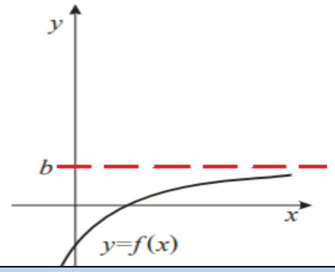
Означення	***Графічна ілюстрація***
Асимптотою кривої з нескінченною гілкою називають таку пряму, що віддаль d точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки від початку координат.	

9.7. Види асимптот

Вертикальна асимптота	***Графічна ілюстрація***
Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо принаймні одна із односторонніх границь функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює ∞, тобто $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty \vee \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$.	 

Похила асимптота	***Графічна ілюстрація***
Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують *скінченні* границі $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$ $$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$	

Горизонтальна асимптота	***Графічна ілюстрація***

Графік функції $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, тоді й лише тоді, коли існує *скінченна* границя $$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$	
9.8. Схема повного дослідження функції для побудови графіка	
1) знайти область визначення функції; 2) дослідити функцію на парність або непарність, періодичність; 3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат; 4) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву; 5) дослідити графік функції на наявність асимптот (вертикальні, похилі, горизонтальні); 6) знайти інтервали монотонності та точки екстремуму; 7) знайти інтервали опуклості вниз (вверх) та точки перегину; *8)* побудувати графік функції, користуючись результатами дослідження.	

Розв'язування типових задач до теми 9

Завдання 1. Провести повне дослідження функції $y = x^4 - 8x^2 + 16$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Дослідження функції та побудову графіка можна здійснити за схемою наведеною в пункті 9.8:

1) Дана функція є многочленом, тому вона визначена (існує) та неперервна на всій дійсній осі: $x \in \mathbb{R}$.

2) Функція $y = x^4 - 8x^2 + 16$ є парною, оскільки область визначення симетрична відносно початку координат і виконується умова

$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16 = f(x).$$

Отже, графік цієї функції є симетричним відносно осі ординат. Функція неперіодична.

3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

Спочатку знайдемо точки перетину з віссю $0y$, для цього розв'яжемо

систему рівнянь: $\begin{cases} x = 0, \\ y = f(0); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 16; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 16. \end{cases}$

Отже, $B(0; 16)$ ─ точка перетину графіка функції з віссю Oy.

Далі знайдемо точки перетину графіка функції з віссю $0x$, для цього розв'яжемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 0, \\ f(x) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x^4 - 8 \cdot x^2 + 16 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x_{1,2} = \pm 2. \end{cases}$$

Отже, $C(2;0), A(-2;0)$ — точка перетину графіка функції з віссю Ox. Але в цих точках графік не перетинає, а лише торкається осі Ox, тому що кожне з чисел $x_{1,2} = \pm 2$ є подвійним коренем даної функції, в чому легко переконатись, записавши її у вигляді: $y = (x+2)^2 (x-2)^2$.

4) Фукція є непервною на $x \in \mathbb{R}$, отже вона не має точок розриву.

5) Графік функції не має вертикальних асимптот, оскільки функція не має точок розриву.

Знайдемо похилі асимптоти графіка функції, для цього обчислимо наступну границю функції

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 8 \cdot x^2 + 16}{x} = \infty,$$

отже, графік даної функції похилих асимптот не має і в цьому випадку горизонтальних асимптот також немає.

6) Знайдемо інтервали монотонності функції та точки екстремуму. Для цього спочатку знайдемо критичні точки 1-го порядку. А саме, спочатку знайдемо першу похідну функції:

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2).$$

Знайдемо точки в яких $f'(x) = 0$, отримуємо $x_1 = -2;\ \ x_2 = 0;\ \ x_3 = 2.$

Після чого розіб'ємо область визначення функції на чотири інтервали: $(-\infty; -2), (-2; 0), (0; 2), (2, +\infty).$

Склавши таблицю, визначимо знак першої похідної на кожному з цих інтервалів та характер поведінки функції.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2, +\infty)$
Знак y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Поведінка $y=f(x)$	спадає (↘)	min	зростає (↗)	max	спадає (↘)	min	зростає (↗)

Отже, при $x_1=-2$ та $x_3=2$ функція має мінімум, а при $x_2=0$ — максимум, причому $f(-2)=f(2)=0;\quad f(0)\ =\ 16.$

7) Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції. Для цього шукаємо другу похідну

$$y''=\ (4x^3-16x)'=12x^2-16=12\left(x^2-\frac{4}{3}\right)=12\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Знайдемо критичні точки 2-го порядку, а для цього розв'яжемо рівняння $f''(x)=0$, яке має два корені $x_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, які поділяють числову вісь на проміжки: $\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Складемо таблицю, визначивши знак другої похідної на кожному з цих проміжків, знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину.

x	$\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$
Знак y''	$+$	0	$-$	0	$+$
Поведінка $y=f(x)$	угнута (∪)	точка перегину	опукла (∩)	точка перегину	угнута (∪)

Отже, при $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ та при $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ маємо точки перегину, причому

$$y=f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4-8\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+16=\frac{16}{9}-8\cdot\frac{4}{3}+16=7\frac{1}{9};$$

$$y=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4-8\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+16=\frac{16}{9}-8\cdot\frac{4}{3}+16=7\frac{1}{9}.$$

На основі отриманих даних будуємо графік функції y (див. рис. 10.1).

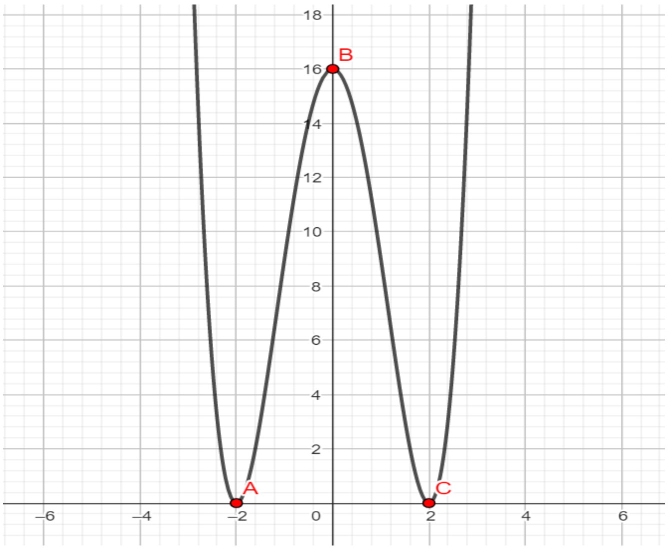


Рис. 9.1. Графік функції $y = x^4 - 8x^2 + 16$.

Завдання 2. Провести повне дослідження функції $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Задана функція існує при всіх значеннях аргументу, крім $x = 0$. Область визначення: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Відзначимо також, що $y \geq 0$ для всіх значень x.

2) Функція не є парною або непарною, а також не є періодичною.

3) З віссю $0y$ графік функції не перетинається, оскільки $x \neq 0$. Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю $0x$:

$$\begin{cases} y = 0, \\ f(x) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ 1 - \dfrac{1}{x} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{1}{x} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, $A(1; 0)$ — точка перетину графіка функції з віссю Ox. Але в цій точці графік не перетинає, а лише дотикається до осі Ox, тому що $y \geq 0$.

5) Функція має нескінченний розрив при $x = 0$, причому

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = +\infty.$$

При всіх інших значеннях аргументу x дана функція неперервна.

5) Оскільки $x = 0$ — точка розриву $\left(\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \infty\right)$, то $x = 0$ — рівняння вертикальної асимптоти. Для визначення рівняння похилої

асимптоти $y = kx + b$ скористаємося відомими формулами, які наведені в таблиці у пункті 9.7: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x} = 0.$

Дослідимо графік функції на існування горизонтальних асимптот:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 1.$$

Отже, пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції.

6) Знайдемо інтервали монотонності функції та точки екстремуму. Спочатку знайдемо критичні точки 1-го порядку. Для цього знайдемо першу похідну функції:

$$y' = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{2(x-1)}{x^3}.$$

Неважко бачити, що перша похідна дорівнює нулю $f'(x) = 0$ при $x_1 = 1$, а також точки в яких $\nexists f'(x)$, отримуємо $x = 0$. Але при $x = 0$ функція невизначена, отже ця точка не підлягає дослідженню екстремум, але вона бере участь при розбитті числової прямої на інтервали. Розіб'ємо область визначення на три інтервали: $(-\infty; 0), (0; 1), (1; +\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів та точки екстремуму.

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
Знак y'	$+$	$-$	0	$+$
Поведінка $y = f(x)$	зростає (↗)	спадає (↘)	min	зростає (↗)

Отже, при $x = 1$ функція має мінімум, $y_{min} = f(1) = \left(1 - \frac{1}{1}\right)^2 = 0.$

7) Знайдемо інтервали опуклості та точки перегину графіка функції. Друга похідна

$$y'' = \frac{2 \cdot x^3 - 2(x-1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2(x - 3x + 3)}{x^6} = \frac{2(-2x+3)}{x^4}.$$

З одержаного виразу видно, що друга похідна дорівнює нулю при $x = \frac{3}{2}$ і не існує при $x = 0$. Оскільки при $x = 0$ функція не існує, то ця точка не підлягає дослідженню на точку перегину, але бере участь в розбитті числової прямої на інтервали. Розіб'ємо область існування функції на інтервали: $(-\infty;0), \left(0;\frac{3}{2}\right), (\frac{3}{2};+\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак другої похідної на кожному з цих інтервалів та точки перегину.

x	$(-\infty;0)$	$\left(0;\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$
Знак y''	$+$	$+$	0	$+$
Поведінка $y=f(x)$	угнута $(\cup)$	угнута $(\cup)$	точка перегину	опукла $(\cap)$

Отже, при $x=\frac{3}{2}$ маємо точку перегину: $y=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

Таким чином, $B\left(\frac{3}{2};\frac{1}{9}\right)$ — точка перегину.

8) На основі отриманих даних будуємо графік функції (Рис. 9.2).

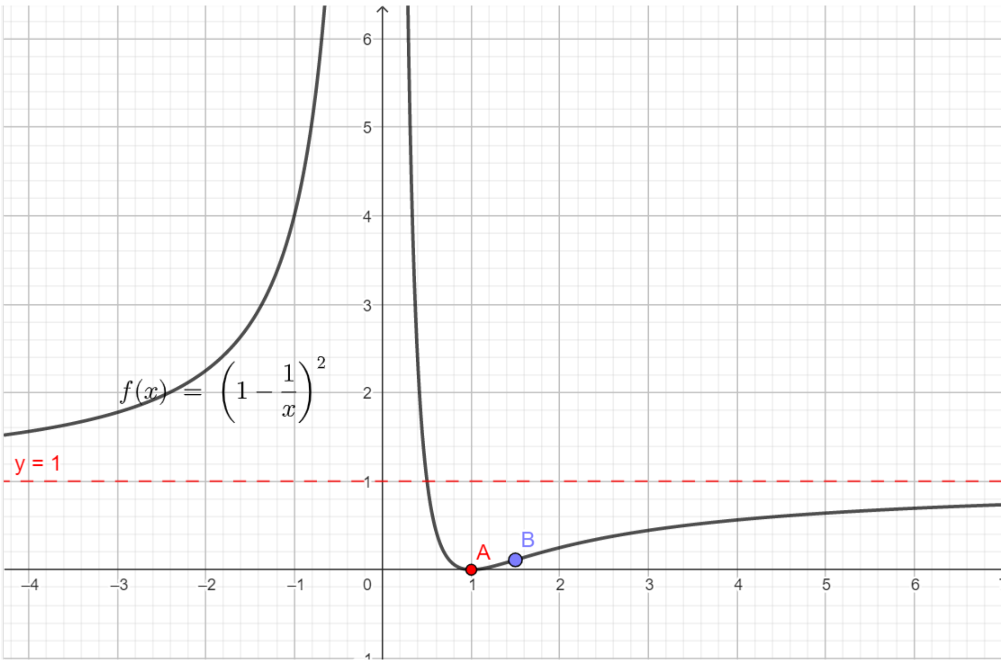


Рис. 9.2. Графік функції $y=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$.

Завдання 3. Дослідити функцію $y=ln(x^2-6x+10)$ методами диференціального числення та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення функції $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$, тому що квадратний тричлен, що знаходиться під знаком логарифма завжди приймає додатні значення, тобто: $x^2-6x+10>0$.

2) Функція не є парною або непарною, тому що

$f(-x) = ln((-x)^2 - 6(-x) + 10) = ln(x^2 + 6x + 10) \neq f(x).$

3) Точки перетину графіка функції з осями координат: $A(0; ln10), B(3; 0)$.

4) Функція є неперервною.

5) Вертикальних асимптот графік функції не має. Рівняння похилих асимптот шукаємо у вигляді $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ln(x^2-6x+10)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(ln(x^2-6x+10))'}{x'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x-6}{x^2-6x+10}}{1} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-6}{x^2-6x+10} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x-6} = 0.$$

Відмітимо, що при знаходженні границі двічі було застосовано правило Лопіталя. Оскільки, $k = 0$, то похилих асимптот немає. Дослідимо існування горизонтальних асимптот.

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (ln(x^2 - 6x + 10) - 0 \cdot x) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} ln(x^2 - 6x + 10) = +\infty.$$

Отже, графік функції горизонтальних асимптот не має.

6) Визначимо інтервали монотонності та точки екстремуму. Знаходимо першу похідну:

$$y' = (ln(x^2 - 6x + 10))' = \frac{2x-6}{x^2-6x+10}.$$

Для знаходження критичних точок 1-го порядку розв'яжемо рівняння $y' = 0$, тобто $2x - 6 = 0$, $x^2 - 6x + 10 \neq 0$, звідки $x = 3$ – критична точка першого порядку.

Критична точка $x = 3$ поділяє область визначення функції на два інтервали: $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$. Очевидно, що склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів та точки екстремуму.

x	$(-\infty; 3)$	3	$(3; +\infty)$
Знак y'	$-$	0	$+$

Поведінка $y = f(x)$	спадає (↘)	min	зростає (↗)

Отже, при $x = 3$ функція має мінімум, $y_{min} = f(3) = 0$.

7) Визначимо інтервали опуклості, точки перетину.

$$y'' = \frac{2\left(x^2-6x+10\right)-(2x-6)(2x-6)}{\left(x^2 6x+10\right)^2} = \frac{-2\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-6x+10\right)^2} = \frac{-2(x-2)(x-4)}{\left(x^2-6x+10\right)^2}.$$

Для знаходження критичних точок 2-го порядку розв'яжемо рівняння $y'' = 0$, тобто $(x-2)(x-4)=0$, $\left(x^2-6x+10\right)^2 \neq 0$, звідки $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ критичні точки 2-го роду, які поділяють область визначення функції на інтервалі, що вказані у наведеній нижче таблиці.

x	$(-\infty; 2)$	2	(2; 4)	4	$(4; \infty)$
Знак y''	$-$	0	+	0	$-$
Поведінка $y = f(x)$	опукла (∩)	точка перегину	угнута (∪)	точка перегину	опукла (∩)

Отже, графік функції має дві точки перегину $y(2) = \ln 2$, $y(4) = \ln 2$.

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $y = \ln\left(x^2-6x+10\right)$, який наведено на рисунку 9.3:

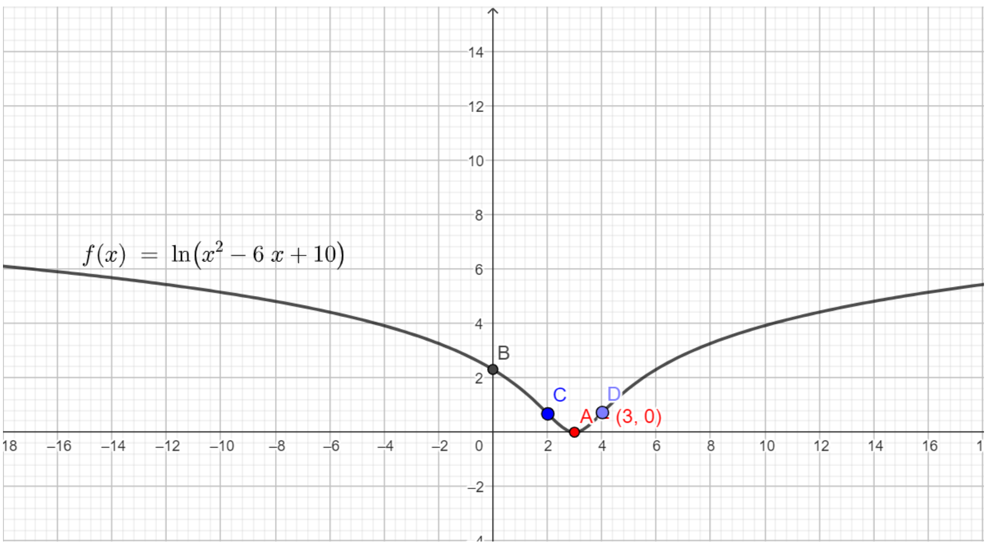


Рис.9.3. Графік функції $y = ln(x^2 - 6x + 10)$.

Завдання для індивідуальної роботи студентів до теми 9

1. Виконати повне дослідження функції та побудувати її графік.

№ варіанту	*Завдання а)*	*Завдання б)*
1.	*а)* $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$	*б)* $y = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 - 12x + 3$
2.	*а)* $y = \frac{5x}{4-x^2}$	*б)* $y = x^2 - 2lnx$
3.	*а)* $y = \frac{x^2-5}{x-3}$	*б)* $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 5$
4.	*а)* $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$	*б)* $y = x - ln(1 + x^2)$
5.	*а)* $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	*б)* $y = \frac{4x^3}{2} + 2x^2 - 8x + 3$
6.	*а)* $y = \frac{3x+6}{x^2-4}$	*б)* $y = xe^{\frac{1}{x}}$
7.	*а)* $y = \frac{x^3}{x^2+1}$	*б)* $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$
8.	*а)* $y = \frac{4x}{9-x^2}$	*б)* $y = ln\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)$
9.	*а)* $y = \frac{5x}{4-x^2}$	*б)* $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$
10.	*а)* $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$	*б)* $y = ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$
11.	*а)* $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$	*б)* $y = x^3 + x^2 - 5x + 4$
12.	*а)* $y = \frac{3x^2}{8-x^3}$	*б)* $y = \frac{lnx}{x-2}$
13.	*а)* $y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$	*б)* $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 3$
14.	*а)* $y = \frac{x^4}{x^3-1}$	*б)* $y = \frac{lnx}{x}$
15.	*а)* $y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$	*б)* $y = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + 8x + 3$
16.	*а)* $y = \frac{3x}{x^2-1}$	*б)* $y = e^{\frac{1}{2-x}}$
17.	*а)* $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$	*б)* $y = x^3 - 12x^2 + 21x + 5$
18.	*а)* $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$	*б)* $y = e^{\frac{1}{x-3}}$
19.	*а)* $y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$	*б)* $y = \frac{5x^3}{6} + \frac{5}{2}x^2 - 20x + 4$
20.	*а)* $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	*б)* $y = xln(x + 1)$
21.	*а)* $y = \frac{x^2}{x-1}$	*б)* $y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 20x + 3$
22.	*а)* $y = \frac{4-2x}{1-x^2}$	*б)* $y = xlnx$
23.	*а)* $y = \frac{x^5}{x^4-1}$	*б)* $y = 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 18x + 27$
24.	*а)* $y = \frac{x^2}{4x^2-1}$	*б)* $y = 2ln\frac{x}{x+1} - 1$
25.	*а)* $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$	*б)* $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3$
26.	*а)* $y = \frac{x^2-4x+3}{x+4}$	*б)* $y = (4 - x)e^{x-3}$
27.	*а)* $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$	*б)* $y = \frac{2}{3}x^3 + 7x^2 + 12x + 5$
28.	*а)* $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$	*б)* $y = (x + 3)e^{2x}$

29.	*а)* $y = (x^2 - 1)^3$	*б)* $y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
30.	*а)* $y = \frac{5x}{x^2 - 4x + 4}$	*б)* $y = (2x + 3)e^{-2x-2}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бохонов Ю.Є. Математичний аналіз. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Навч. посібн. для студ. спеціальності 122 «Компьютерні науки». Київ. КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 162 с.

2. Вища математика: Диференціальне числення функцій однієї змінної: Практикум [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра / Н. Л. Денисенко, Т. О. Єрьоміна, В. В. Могильова. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 159 с.

3. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1. К. : НАУ, 2013. 472 с.

4. Включити Дороговцева 93р.

5. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (I курс I семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 252 с.

6. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підручник : у 2.ч. Ч. 1. 3-е вид., випр. і доп. К. : Вища школа, 2005. 446 с.

7. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підручник : у 2 ч. Ч. 2. 3-е вид., випр. і доп. К. : Вища школа, 2005. 510 с.

Відповідальний за випуск: завідувачка кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу доктор фіз.-мат. наук, доц. Сливка-Тилищак Г.І.

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Боярищева Т. В., канд. фіз.-мат. наук Герич М. С., канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О. О., канд. фіз.-мат. наук, доц. Слюсарчук П. В.

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, проф. Тилищак О.А.,
канд. фіз-мат. наук., доц. Млавець Ю.Ю.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ