МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу

Т. В. Боярищева, М. С. Герич, П. В. Слюсарчук,
А. М. Тегза

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ **З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ
ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ужгород 2023

Функції багатьох змінних: методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій / Уклад. Т. В. Боярищева, М. С. Герич, П. В. Слюсарчук, А.М. Тегза. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2023. 55 с.

У методичних вказівках коротко наведено формулювання основних теоретичних відомостей та проілюстровано розв'язання опорних задач математичного аналізу з тем: «Багатовимірний простір. Метрика. Послідовність точок в R^m. Збіжність послідовності. Функція багатьох змінних. Область визначення. Границя і неперервність функції багатьох змінних. Повторні границі», «Диференціальне числення функції багатьох змінних», «Похідна за напрямком і градієнт функції. Дотична площина і нормаль до поверхні», «Похідна складної функції. Похідна функції, заданої неявно», «Екстремум функції багатьох змінних. Умовний екстремум. Найбільше і найменше значення функції у замкненій обмеженій області». Також після кожної з тем наведено завдання для індивідуальних робіт студентів. Методичні вказівки розроблено для студентів факультету математики та цифрових технологій всіх спеціальностей.

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, проф. Тилищак О.А.,

канд. фіз-мат. наук., доц. Млавець Ю.Ю.

Рекомендовано до друку кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 16 червня 2023 року, протокол № 11.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 20 червня 2023 року, протокол № 10.

ЗМІСТ

Тема 1. Багатовимірний простір. Метрика. Послідовність точок в R^m. Збіжність послідовності. Функція багатьох змінних. Область визначення. Границя і неперервність функції багатьох змінних. Повторні границі.

Сукупність усіх впорядкованих наборів з m дійсних чисел називається m -вимірним простором. Елементи його, що позначаються як $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, можуть розглядатися як точки з n координатами, так і вектори з m компонентами. Відстань між елементами m-вимірного простору (ще називається метрикою в m –вимірному просторі) визначається як

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}.$$

Послідовність елементів $\{x^{(n)}\} \subset R^m$ називається збіжною до $x \in R^m$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in N\ \forall n > n_\varepsilon : \rho\left(x^{(n)}, x\right) < \varepsilon.$$

Відомо, що $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ тоді і тільки тоді, коли $\forall k = \overline{1, n}$

$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Нехай задано деяку множину $D \subset R^m$. Якщо кожній точці $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$ ставиться у відповідність по деякому закону дійсне число z , то кажуть, що на множині D задано функцію m змінних:

$z = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

При цьому множина D називається областю визначення функції $z = f(x)$.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right) \in R^m$.

Кажуть, що $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, де a – дійсне число, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0\ \forall x, \rho(x, x_0) < \delta : |f(x) - a| < \varepsilon .$$

Це означення може бути сформульоване і на мові послідовностей:

$$\forall \{x_n\} \subset R^m, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$$

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$$

Ця форма означення зручна при доведенні твердження про не існування границі. Формулювання означення на мові послідовностей наголошує на тому, що яким би не був шлях (напрямок і швидкість) прямування послідовності аргументів до граничної точки, відповідна послідовність значень функції (а це вже числова послідовність!) повинна щоразу збігатися до одного і того ж значення.

Розглянемо деяку перестановку перших m натуральних чисел і позначимо її $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Очевидно, таких перестановок існує $m!$. Границі

$$\lim_{x_{k_1} \to x_{k_1}^{(0)}} \lim_{x_{k_2} \to x_{k_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{k_m} \to x_{k_m}^{(0)}} f(x),$$

називаються повторними границями. Варто наголосити, що, якщо існує $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, то і всі повторні границі існують і дорівнюють тому самому значенню a. Обернене твердження, загалом кажучи, невірне.

Функція називається неперервною у точці $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right) \in R^m$, якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Властивості неперервної у точці функції багатьох змінних такі ж, як і для функції однієї змінної (властивості, пов'язані з арифметичними операціями над неперервними функціями, неперервність суперпозиції функцій, лема про збереження знаку тощо).

Розв'язання типових задач.

1. Знайти область визначення функції $f(x,y) = arcsin\frac{y-1}{x}$.

   Відомо, що аргумент функції $arcsint$ повинен міститися в межах проміжку $[-1,\ 1]$. Тобто необхідно розв'язати подвійну нерівність

   $$-1 \le \frac{y-1}{x} \le 1.$$

   Розв'язуючи її, отримаємо:

   $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ -x \le y-1 \le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \le y-1 \le -x; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ -x+1 \le y \le x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x+1 \le y \le -x+1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Область визначення функції зображено на рис. 1.

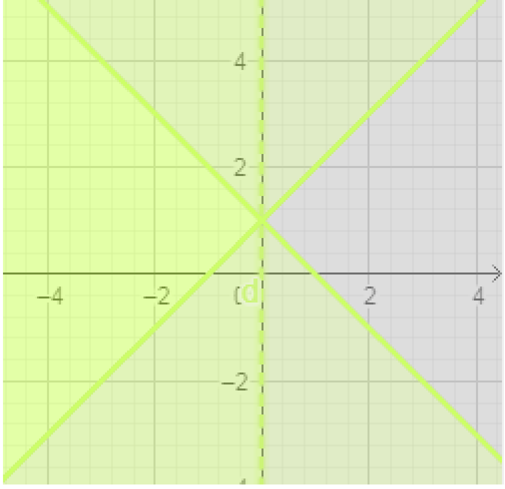


Рис.1

Варто відмітити, що прямі $y = \pm x + 1$, що обмежують область визначення, теж включаються в неї, за винятком точки (0, 1) (чому?)

2. Знайти область визначення функції $z = ln(y^2 - 4x + 8)$.

Оскільки аргумент логарифмічної функції повинен бути строго додатним, то повинна виконуватись нерівність

$$y^2 - 4x + 8 > 0$$

Тобто

$$4x < y^2 - 8,$$

$$x < \frac{y^2}{4} - 2.$$

Область визначення функції зображено на рис.2. І, на відміну від попередньої задачі, лінія, що обмежує область визначення, цій області не належить.

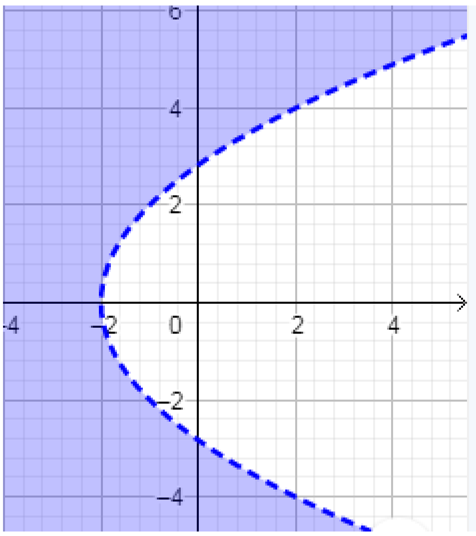


Рис.2

3. Обчислити

а) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

При довільному способі наближення аргументу до граничної точки

$x^2+y^2 \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0$. Тому варто зробити заміну змінної: $x^2+y^2=t,\ t \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0$.

Границя набуде вигляду:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{\left(\sqrt{t+1}-1\right)\left(\sqrt{t+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{t+1-1} = \lim_{t\to 0}\left(\sqrt{t+1}+1\right) = 2.$$

б) $\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{2x-7y}{xy}$

Використаємо арифметичні властивості границь: границя суми функцій дорівнює сумі границь окремих доданків. Отримаємо:

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{2x}{xy} - \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{7y}{xy} = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{2}{y} - \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{7}{x}$$

Кожен із доданків тепер є функцією однієї змінної, і поведінка іншої змінної не впливає на значення границі. Крім того, кожна з одержаних границь існує і є скінченним числом. Тобто одержуємо:

$$\lim_{y\to \infty}\frac{2}{y} - \lim_{x\to \infty}\frac{7}{x} = 0.$$

4. Знайти обидві повторні границі функції в точці.

а) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y},\ (x,y)\to(0{,}0)$.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Повторна границя, взята в іншому порядку:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-y}{0+y} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Варто відмітити, що різні значення повторних границь в одній і тій же точці означають, що подвійної границі не існує.

б) $f(x,y) = \log_x(x+y),\ (x,y)\to(1,0)$.

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}\log_x(x+y) = \lim_{x\to 1}\log_x x = \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

Повторна границя, взята в іншому порядку:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\log_x(x+y)$$

Безпосередньо підставити граничне значення змінної x неможливо, бо функція $f(x,y)$ у ньому не є визначеною. Перетворимо логарифмічну функцію згідно відомих тотожних перетворень.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\frac{ln(x+y)}{lnx} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\frac{ln\left(x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)}{lnx} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\frac{lnx + ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{lnx}$$
$$= \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{lnx}\right) = \infty.$$

Тобто, як і в попередньому випадку, подвійної границі не існує.

5. Чи існує подвійна границя функції $f(x,y)$ у граничній точці?

а) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Розглянемо послідовність точок в R^2 $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)$, де k – довільний дійсний параметр. Очевидно, $\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$.

При цьому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Оскільки результат залежить від значення параметру k (тобто від способу вибору послідовності), то подвійної границі не існує.

Зауваження 1. Вибір послідовності точок, що прямує до граничної, має наглядну геометричну інтерпретацію. Збіжність $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(x_0,y_0)$ виглядає як механічний рух точки (x_n,y_n) по певній конкретній траєкторії до граничної точки (x_0,y_0). Вибір послідовностей, зроблений вище, означає, що (x,y) прямує до граничного значення по прямій $y = kx$ (рис.3).

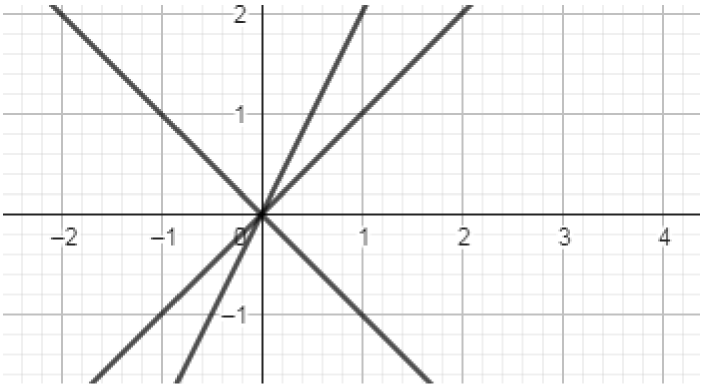


Рис.3

Зауваження 2. Важливо розуміти, що навіть якби ми отримали однакові значення, це ще не гарантувало б існування подвійної границі. Адже змінні можуть прямувати до граничної точки по будь-якій (не лише прямолінійній) траєкторії, і дослідити поведінку функції при кожній із них неможливо.

Зауваження 3. Розглянуті раніше повторні границі можуть розглядатися як результат такого ж механічного прямування до граничної точки. При цьому траєкторією наближення є ламана, ланки якої паралельні координатним осям. (рис.4)

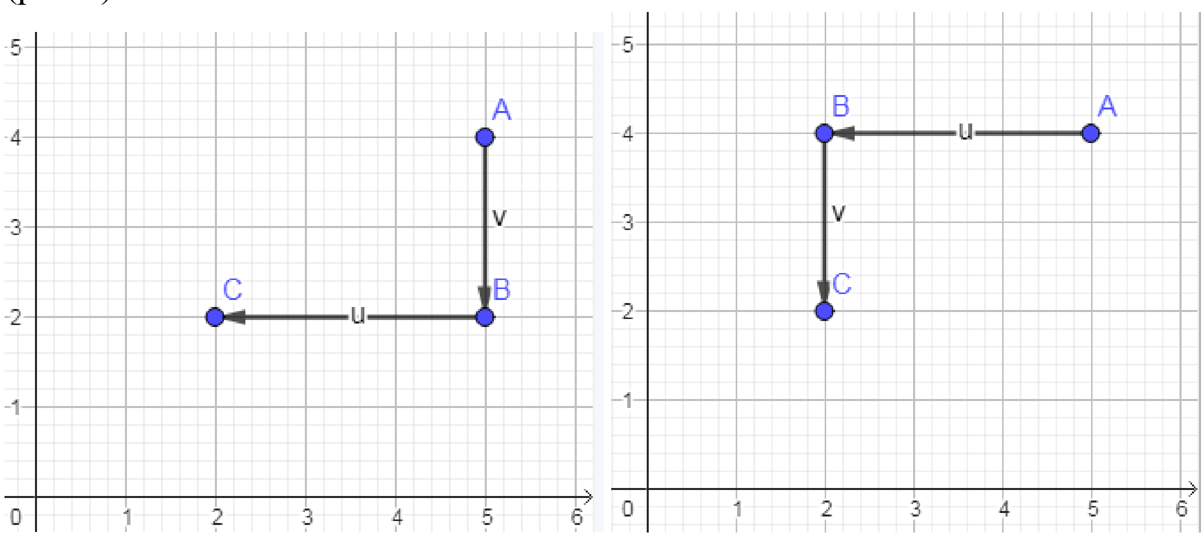


Рис.4.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to+\infty}} (x^2 - lny)$

Використати властивості границі функції (границя різниці функцій дорівнює різниці границь) неможливо, бо вона призводить до невизначеності $(\infty - \infty)$. Тому належним підбором способу прямування незалежних змінних до своїх граничних значень можна досягти різних значень границі.

Наприклад, нехай $x_n = \sqrt{n + a}\,,\ \ y_n = e^n$. Очевидно, що при $n \to \infty$

$x_n \to \infty, y_n \to \infty$. При цьому параметр a може набувати довільного додатного дійсного значення.

Підставимо підібрані значення у вираз для границі.

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}(x^2 - lny) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n+a}\right)^2 - lne^n\right) = \lim_{n\to\infty}(n + a - n) = a.$$

Тобто, як і в попередній задачі, значення границі залежить від параметра a, або ж від траєкторії прямування змінних до граничного значення. А це означає, що подвійної границі не існує.

6. Дослідити на неперервність у точці задану функцію.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ \quad 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Згідно означення неперервної у точці функції, для дослідження неперервності насамперед треба довести (або спростувати) існування подвійної границі цієї функції у заданій точці.

Покажемо, що подвійної границі не існує. Для цього знайдемо обидві повторні границі.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0}1 = 1.$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Оскільки повторні границі різні, то і подвійної не існує. А тому і неперервності у даній точці немає теж.

Задачі для самостійного розв'язання

1.Знайти і зобразити графічно область визначення функції.

1.1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9};$

1.2. $z = ln(x^2 - y);$

1.3. $z = lnxy;$

1.4. $z = x + arccosy;$

1.5. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2};$

1.6. $z = arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$;

1.7. $z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{9 - y^2}$;

1.8. $z = \sqrt{ysinx}$;

1.9. $z = ln(x^2 - y^2)$;

1.10. $z = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y}}$;

1.11. $z = \sqrt{sin(x^2 + y^2)}$;

1.12. $z = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y}$;

1.13. $z = ln(x^2 - 4y)$;

1.14. $z = \frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}$;

1.15. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} - \frac{1}{y}$;

1.16. $z = ln(2x^2 - y)$;

1.17. $z = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}$;

1.18. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

1.19. $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$;

1.20. $z = \frac{x^2 y}{2x + y^2}$;

1.21. $z = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{4+y}}$;

1.22. $z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$;

1.23. $z = \frac{1}{ln(x+y)}$;

1.24. $z = ln(x^2 + 3y)$;

1.25. $z = \sqrt{x + y} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

2. Знайти повторні границі функції $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0).

2.1. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$, $(x_0, y_0) = (-\infty, \infty)$.

2.2. $f(x, y) = \frac{x^{y^2}}{1 + x^{y^2}}$, $(x_0, y_0) = (\infty, 0)$.

2.3. $f(x, y) = sin\frac{\pi x}{2x + y}$, $(x_0, y_0) = (\infty, \infty)$.

2.4. $f(x, y) = \frac{1}{xy} tg\frac{xy}{1 + xy}$, $(x_0, y_0) = (0, \infty)$.

2.5. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

2.6. $f(x, y) = \frac{x^2 sin\frac{1}{x} + y}{x + y}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

2.7. $f(x,y) = arctg\left(\left|\frac{x}{y}\right| - \left|\frac{y}{x}\right|\right), \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.8. $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.9. $f(x,y) = \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.10. $f(x,y) = \frac{x}{y-x}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.11. $f(x,y) = \frac{sin(x+y)}{2x+3y}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.12. $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.13. $f(x,y) = \frac{cosx-cosy}{x^2+y^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.14. $f(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}, \ (x_0, y_0) = (\infty, -\infty).$

2.15. $f(x,y) = \frac{y^x}{1+y^x}, \ (x_0, y_0) = (0, \infty).$

2.16. $f(x,y) = cos\frac{\pi y}{3y-x}, \ (x_0, y_0) = (-\infty, \infty).$

2.17. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x+y}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.18. $f(x,y) = (x+y)sin\frac{1}{xy}, \ (x_0, y_0) = (\infty, \infty).$

2.19. $f(x,y) = arctg\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right), \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.20. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.21. $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(xy)^2+(x+y)^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.22. $f(x,y) = \frac{x^2}{y-x^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.23. $f(x,y) = \frac{sin(x+y)}{x-2y}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.24. $f(x,y) = \frac{x^2-2xy+5y^2}{7x^2+3xy+y^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

2.25. $f(x,y) = \frac{cosx+cosy}{2x^2+y^2}, \ (x_0, y_0) = (0,0).$

3. Знайти подвійні границі або показати, що їх не існує.

3.1. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}.$

3.2. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{(xy)^2}.$

3.3. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{sin2xy}{x^2+y^2}.$

3.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{sinxy}{ln(1+y)}$.

3.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{ln(xy+1)}{x^2+y^2}$.

3.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

3.7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(xy)^2}{x^3+y^3}$.

3.8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{tg(xy)}{arcsinx}$.

3.9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$.

3.10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+(xy)^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3.11. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (lnx-y^2)$.

3.12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}$.

3.13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(xy)^2}{1-cos(x^2+y^2)}$.

3.14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} tg(xy)ln(x^2+y^2)$.

3.15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

3.16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{ln(1+x+y)}{sin(x+y)}$.

3.17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{arctgxy}{yln(1+xy)}$.

3.18. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{e^{x-y}}{xy^2}$.

3.19. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{arctg(x^2-y^2)}{x^2+2x-xy-2y}$.

3.20. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to \frac{\pi}{2}}} x^{tgy}$.

3.21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{ln(1+x+y)}{arcsin\sqrt{x+y}}$.

3.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \big(sin(x+y)\big)^{tgy}$.

3.23. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

3.24. $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

3.25. $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{arcsinxy}{ln(1+x)}$.

4. Дослідити функцію на неперервність у точці.

4.1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.2. $f(x,y) = \begin{cases} xye^{\frac{1}{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{sinxsiny}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^4+y^4}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{arcsinxy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.7. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{sin(|x|+|y|)}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.8. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.9. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}, (x,y) \neq (1,1), \\ 0, \quad (x,y) = (1,1). \end{cases}$

4.10. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{tg(|x|+|y|)}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.11. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{cos\frac{\pi x}{2}cos\frac{\pi y}{2}}{(x-1)^2+(y-1)^2}, (x,y) \neq (1,1), \\ 0, \quad (x,y) = (1,1). \end{cases}$

4.12. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4.13. $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2e^{\frac{1}{x^4+y^4}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$$4.14. f(x,y)=\begin{cases}\frac{sin2xsin3y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.15. f(x,y)=\begin{cases}\frac{(xy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.16. f(x,y)=\begin{cases}\frac{(xy)^2}{x^3+y^3}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.17. f(x,y)=\begin{cases}\frac{arcsin2xy}{9x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.18. f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{sin(x^2+y^2)}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.19. f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.20. f(x,y)=\begin{cases}\frac{2(x+1)(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}, (x,y)\neq(-1,-1),\\ 0,\quad (x,y)=(-1,-1).\end{cases}$$

$$4.21. f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.22. f(x,y)=\begin{cases}\frac{sinx-siny}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.23. f(x,y)=\begin{cases}\frac{sin^2xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.24. f(x,y)=\begin{cases}\frac{ln(1+xy^2)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$4.25. f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 0,\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Тема 2. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Нехай функція $z=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ – функція, визначена в деякому околі точки x_0 m -вимірного простору. Надамо змінній x_k приросту Δx_k так, щоб прирощене значення $x_k+\Delta x_k$ змінної містилося в межах вищезгаданого околу.

Величина $\Delta_{x_k} f = f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m)$ називається приростом функції, що відповідає даному приросту аргументу. Границя відношення цього приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається частинною похідною функції f за змінною x_k:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

На практиці частинні похідні обчислюють за правилами диференціювання функції однієї змінної. При цьому інші змінні розглядаються як деякі фіксовані параметри.

Числове значення частинної похідної у даній точці характеризує швидкість зміни функції у даній точці в напрямі координатної осі, що визначає дану змінну, а також характер цієї зміни (зростання чи спадання).

Повний диференціал функції багатьох змінних обчислюється за формулою

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Похідні вищих порядків визначаються як частинні похідні від похідних порядку, меншого на одиницю:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right).$$

Диференціал вищого порядку:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n f$$

Важливо розуміти, що доданки в дужках не мають самостійного сенсу – це символічні позначення. Для того, щоб обчислити диференціал потрібного порядку для конкретної функції, необхідно формально виконати піднесення до степеня за формулою бінома Ньютона. Далі, знову формально, виконується дія «множення» в чисельнику на множник f, в результаті чого кожен отриманий доданок являтиме собою частинну похідну певного порядку від функції f. Лише тепер обчислюються потрібні похідні і підставляються в отриману розгорнуту формулу.

Формула Тейлора для функції багатьох змінних.

Нехай функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має у точці $M_0 \in R^m$ неперервні частинні похідні по всіх змінних до $n+1$ порядку включно. Тоді вона допускає таке представлення:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) =$$

$$= f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(M_0) + r_n(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

де $r_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – залишковий член формули Тейлора, що може бути записаний у різних формах, та в будь-якому випадку

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = o(\rho^n),$$

де $\rho = \rho(M_0,\ M), M(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Залишковий член у формі Лагранжа $(0 < \theta < 1)$.

$$r_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f\left(x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1, x_2^{(0)} + \theta\Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \theta\Delta x_m\right).$$

Розв'язання типових задач

1. Користуючись означенням, знайти частинні похідні по всіх змінних даної функції

   а) $f(x, y) = \frac{sin2x}{y}$.

   Це функція двох змінних, тому згідно умови треба знайти дві частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$. Згідно означення,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{sin\left(2(x+\Delta x)\right)}{y} - \frac{sin2x}{y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(2x + 2\Delta x) - sin2x}{y\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sin\left(\frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2}\right)cos\left(\frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2}\right)}{y\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sin\Delta x cos(2x+\Delta x)}{y\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2cos(2x+\Delta x)}{y} = \frac{2cos2x}{y}.$$

Тут використано властивості границі від добутку функцій, відомі тригонометричні тотожності, а також перша чудова границя.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{sin2x}{y+\Delta y} - \frac{sin2x}{y}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{sin2x\big(y-(y+\Delta y)\big)}{\Delta y(y+\Delta y)y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{sin2x(-\Delta y)}{\Delta y(y+\Delta y)y} = -\lim_{\Delta y \to 0} \frac{sin2x}{(y+\Delta y)y} = -\frac{sin2x}{y^2}.$$

б) $f(x,y) = ln(x^2-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln((x+\Delta x)^2 - y) - ln(x^2-y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-y}{x^2-y}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1+\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{x^2-y}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1+\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{x^2-y}\right)\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{x^2-y}}{\Delta x\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{x^2-y}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1+\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{x^2-y}\right)}{\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{x^2-y}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x(x^2-y)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x+\Delta x}{x^2-y} = \frac{2x}{x^2-y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln\big(x^2-(y+\Delta y)\big) - ln(x^2-y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln\left(\frac{x^2-y-\Delta y}{x^2-y}\right)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln\left(1-\frac{\Delta y}{x^2-y}\right)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln\left(1-\frac{\Delta y}{x^2-y}\right)\left(-\frac{\Delta y}{x^2-y}\right)}{\left(-\frac{\Delta y}{x^2-y}\right)\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln\left(1-\frac{\Delta y}{x^2-y}\right)}{-\frac{\Delta y}{x^2-y}} \lim_{\Delta y \to 0}\left(-\frac{\Delta y}{\Delta y(x^2-y)}\right) = -\frac{1}{x^2-y}.$$

При обчисленні обох границь використано арифметичні властивості границь, а також наслідок із другої чудової границі.

2. Обчислити частинні похідні по всіх змінних.

   а) $z = e^{\frac{x}{y}-3xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}-3xy}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}-3xy\right) = e^{\frac{x}{y}-3xy}\left(\frac{1}{y}-3y\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}-3xy}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}-3xy\right) = e^{\frac{x}{y}-3xy}\left(-\frac{x}{y^2}-3x\right).$$

   б) $z = arcsin\frac{1}{xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{xy}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{xy}{\sqrt{x^2y^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2y} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2y^2-1}}.$$

   Оскільки у аналітичному записі функції змінні x та y містяться симетрично (тобто їх взаємне перейменування не змінить функцію), то і частинна похідна по іншій змінній може бути отримана перейменуванням змінних у знайденій раніше похідній.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y\sqrt{x^2y^2-1}}.$$

3. Обчислити диференціал третього порядку для функції $f(x,y) = sin^2x + cos^2y$.

Символьний запис формули для обчислення диференціала третього порядку для функції двох змінних:

$$d^3f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f$$

Щоб одержати розгорнуту формулу, виконаємо формальні арифметичні дії: піднесення до степеня та множення.

$$d^3f = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right)f =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Тепер треба обчислити частинні похідні третього порядку для функції $f(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2sinxcosx = sin2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2cosy(-siny) = -sin2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2cos2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2cos2y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -4sin2x, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 4sin2y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Залишається підставити знайдені частинні похідні у формулу для диференціала:

$$d^3 f = -4sin2xdx^3 + 3\cdot 0dx^2dy + 3\cdot 0dxdy^2 + 4sin2ydy^3 =$$
$$= -4sin2xdx^3 + 4sin2ydy^3.$$

4. Записати формулу Тейлора для функції $z = e^{\frac{x}{y}}$ при $n = 2$ в околі точки $M_0(0,1)$.

Значення функції у точці M_0 : $z(0,1) = 1$.

Знайдемо всі частинні похідні до другого порядку включно і обчислимо їх значення у точці M_0.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right), \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y^2}, \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 + e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{2x}{y^3},$$
$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right), \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,1)} = -1.$$

Запишемо диференціали функції до другого порядку включно.

$$dz|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} dy = dx,$$

$$d^2z|_{M_0} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,1)} dxdy + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)} dy^2 = dx^2 - 2dxdy.$$

Отже, формула Тейлора другого порядку для функції $z = e^{\frac{x}{y}}$ у точці (0,1) має вигляд:

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + dx + dx^2 - 2dxdy + r_2(x, y).$$

Врахуємо також, що для незалежних змінних x та y в околі заданої точки

$$dx = x - x_0 = x, \qquad dy = y - y_0 = y - 1,$$

а також

$$r_2(x, y) = o\big(\rho^2(M, M_0)\big) = o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = o(x^2 + (y - 1)^2),$$

внаслідок чого формула Тейлора набуває вигляду:

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + x^2 - 2x(y - 1) + r_2(x, y) =$$
$$= 1 + 3x + x^2 - 2xy + o(x^2 + (y - 1)^2).$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти частинні похідні даних функцій за означенням.
   1.1. $z = x^y$.
   1.2. $z = ln(x^2 + y^2)$.
   1.3. $z = arctg\,\frac{x}{y}$.
   1.4. $z = e^{-\frac{x}{y}}$.
   1.5. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.
   1.6. $z = tg\,\frac{x^2}{y}$.
   1.7. $z = xsin(x + y)$.
   1.8. $z = y^{2x}$.
   1.9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   1.10. $z = sin(x - 2y)$.
   1.11. $z = 2^{3x - y^2}$.
   1.12. $z = \frac{cos3x}{y-2}$.
   1.13. $z = \sqrt{2x - y^3}$.

1.14. $z = \frac{x+2y}{2x-y}$.

1.15. $z = sin(3x + 2y)$.

1.16. $z = e^{x^2+5y}$.

1.17. $z = ln(4x - y^2)$.

1.18. $z = x^{3-y}$.

1.19. $z = \frac{lny}{sinx}$.

1.20. $z = sin3x\sqrt{1-y^2}$.

1.21. $z = \frac{\sqrt[3]{x}}{y}$.

1.22. $z = (x + y)^5$.

1.23. $z = \sqrt{x - y}$.

1.24. $z = \frac{1}{x^2+y}$.

1.25. $z = (2x - y)^4$.

2. Знайти всі частинні похідні заданих функцій.

2.1. а) $z = cos^2\left(\frac{x}{y}\right)$, б) $z = \frac{x^2-\sqrt{y}}{x^2+\sqrt{y}}$.

2.2. а) $z = sin^2\left(\frac{x}{y}\right)$, б) $z = ln^3\left(\frac{1}{x} - y\right)$.

2.3. а) $z = (y^4 + 2)^{x^2}$, б) $z = arcsinx\sqrt{y}$.

2.4. а) $z = (y - 4^x)^2$, б) $z = 5^{\sqrt{y}-2x}$.

2.5. а) $z = tg\,\frac{1}{xy^2}$, б) $z = \sqrt{y^3 + 6x^2}$.

2.6. а) $z = arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, б) $z = ln\,\frac{x}{\sqrt{y}}$.

2.7. а) $z = \frac{1}{\sqrt{x}-y^2}$, б) $z = tg^3\left(\frac{y}{x}\right)$.

2.8. а) $z = 2x^3\sqrt{y}$, б) $z = \frac{x^2-\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}}$.

2.9. а) $z = 2^{y^3-2x^3}$, б) $z = ctg^3(xy^2)$.

2.10. а) $z = ln^3\left(\frac{y}{x}\right)$, б) $z = arccos(\sqrt{x}y)$.

2.11. а) $z = x - 8^{\frac{y}{4}}$, б) $z = 2y\sqrt[3]{x} - \frac{y}{x^2}$.

2.12. а) $z = e^{3x^2}(1 + 2y) - x^3$, б) $z = xy^x$.

2.13. а) $z = sin(5xy^4)$, б) $z = \frac{2y^2-3}{\sqrt[3]{x}}$.

2.14. а) $z = ctg\left(5x^2 - \frac{2}{y}\right)$, б) $z = \frac{2x^4}{y^3} - \frac{\sqrt{y}}{x}$.

2.15. а) $z = tg\left(x + \frac{2y}{x^2}\right)$, б) $z = ln^2\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

2.16. а) $z = arccos(xy)$, б) $z = 14^{xy^2} + \sqrt{y}$.

2.17. а) $z = x^3 - \sqrt{xy} + y^3$, б) $z = \frac{1}{\cos(xy^3)}$.

2.18. а) $z = 2^{x^2-xy}$, б) $z = \frac{x^2+y}{x^2-y}$.

2.19. а) $z = ctg^3\left(\frac{x}{y^2}\right)$, б) $z = \frac{x-\sqrt[3]{y}}{x+\sqrt[3]{y}}$.

2.20. а) $z = ctg^3(x^2y)$, б) $z = arctg\sqrt{xy}$.

2.21. а) $z = (x-3)^{y^2}$, б) $z = cos\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$.

2.22. а) $z = \left(x^3 - \sqrt{xy} + y^2\right)^2$, б) $z = \frac{x+y^2}{x-y^2}$.

2.23. а) $z = \frac{1}{cos(xy^3)}$, б) $z = 5^{\sqrt{xy}}$.

2.24. а) $z = ctg^5\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$, б) $z = 2^{x^2-xy}$.

2.25. а) $z = arcctg\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, б) $z = ln\left(y - \sqrt{x}\right)$.

3. Обчислити диференціал $d^n f$ вказаного порядку від функції f

3.1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$, $n = 3$.

3.2. $f(x,y) = sin(x^2 + y^2)$, $n = 3$.

3.3. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $n = 2$.

3.4. $f(x,y) = ln\left(x + \sqrt{y}\right)$, $n = 2$.

3.5. $f(x,y) = cosxchy$, $n = 3$.

3.6. $f(x,y) = \ln(x+y)$, $n = 4$.

3.7. $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, $n = 2$.

3.8. $f(x,y) = y^{lnx}$, $n = 2$.

3.9. $f(x,y) = e^{2x-3y}$, $n = 4$.

3.10. $f(x,y) = 3^{x+y}$, $n = 3$.

3.11. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$, $n = 2$.

3.12. $f(x,y) = ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $n = 2$.

3.13. $f(x,y) = sinxshy$, $n = 3$.

3.14. $f(x,y) = cos(x^2 + y^2)$, $n = 3$.

3.15. $f(x,y) = arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $n = 2$.

3.16. $f(x,y) = arctg\frac{x+y}{1-xy}$, $n = 2$.

3.17. $f(x,y) = xlnxy$, $n = 3$.

3.18. $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $n = 3$.

3.19. $f(x,y) = e^{xy^2}$, $n = 2$.

3.20. $f(x,y) = arccos(xy),\ \ n = 2.$

3.21. $f(x,y) = e^x sh2y,\ \ n = 3.$

3.22. $f(x,y) = sin(2x^2 + 3y^2),\ \ n = 3.$

3.23. $f(x,y,z) = x^{yz},\ \ n = 2.$

3.24. $f(x,y) = e^{xe^y},\ \ n = 2.$

3.25. $f(x,y,z) = ln(x^2y^2z^2),\ \ n = 3.$

4. Записати формулу Тейлора для функції f вказаного порядку у заданій точці.

4.1. $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy,\ n = 3,\ M_0(-2{,}1).$

4.2. $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy},\ n = 2,\ M_0(0{,}0).$

4.3. $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4,\ n = 2,$ $M_0(-2{,}1).$

4.4. $f(x,y) = arctg\frac{x-y}{1+xy},\ n = 2,\ M_0(0{,}0).$

4.5. $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5,\ n = 3,\ M_0(1,-2).$

4.6. $f(x,y) = ln(1-x)ln(1-y),\ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.7. $f(x,y) = ln\frac{1-x-y+xy}{1-x-y},\ n = 2,\ M_0(0{,}0).$

4.8. $f(x,y) = \frac{x}{y},\ n = 3,\ M_0(1{,}1).$

4.9. $f(x,y) = sin(x^2 + y^2),\ n = 2,\ M_0(0{,}0).$

4.10. $f(x,y) = x^y,\ n = 3,\ M_0(1{,}1).$

4.11. $f(x,y) = e^{x^2}cosy,\ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.12. $f(x,y) = sinxsiny,\ n = 2,\ M_0\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$

4.13. $f(x,y) = chxcosy,\ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.14. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.15. $f(x,y) = ln(1 + x + y),\ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.16. $f(x,y) = sinxshy,\ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.17. $f(x,y) = e^{x+y},\ n = 3,\ M_0(-1{,}1).$

4.18. $f(x,y) = sin(2x^2 + 3y^2),\ \ n = 3,\ M_0(0{,}0).$

4.19. $f(x,y) = xlnxy,\ \ n = 3,\ M_0(1{,}1).$

4.20. $f(x,y) = ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ n = 2,\ M_0(0{,}1).$

4.21. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ n = 2,\ M_0(3{,}4).$

4.22. $f(x,y) = ln\left(x + \sqrt{y}\right),\ \ n = 2,\ M_0(0{,}1).$

4.23. $f(x,y) = cos(x^2 + y^2),\ \ n = 2,\ M_0(0{,}0).$

4.24. $f(x,y) = 3^{x+y},\ \ n = 3,\ M_0(1{,}1).$

4.25. $f(x,y) = y^{lnx},\ \ n = 2,\ M_0(1{,}1).$

Тема 3. Похідна за напрямком і градієнт функції. Дотична площина і нормаль до поверхні

Похідна за напрямком характеризує зміну функції у напрямку, заданому за допомогою напрямних косинусів: $\vec{l} = (cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma)$:
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}cos\gamma.$$

Якщо досліджується функція двох змінних, то формула набуває вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}cos\beta.$$

Градієнтом функції називається вектор

$$gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Він вказує напрямок, у якому функція змінюється найшвидше. З допомогою градієнта формула для обчислення похідної за напрямком може бути записана у вигляді скалярного добутку векторів:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = gradf \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

Рівняння площини, що є дотичною до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$, що належить даній поверхні:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M (y - y_0),$$

а нормаль у цій же точці

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Розв’язання типових задач

1. Знайти похідну функції $z = arctgxy$ в точці (1, 1) в напрямку бісектриси першого координатного кута.

Потрібний напрямок задається, наприклад, вектором $\overrightarrow{AB}$, де $A(0,0), B(1,1)$. $\overrightarrow{AB} = (1,1)$. Для подання напрямку за допомогою напрямних косинусів скористаємось формулою

$(cos\alpha, cos\beta) = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, тобто нормуємо даний вектор.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Таким чином, $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, і $cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тепер знайдемо значення частинних похідних функції у точці (1, 1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Залишається обчислити значення похідної за напрямом

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

2. Знайти градієнт функції $z = arcsin\frac{x}{x+y}$ у точці (1, 1).

   Частинні похідні функції z у точці (1, 1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{x+y-x}{(x+y)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}} = \frac{y}{(x+y)^2\frac{\sqrt{x^2+2xy+y^2-x^2}}{x+y}} =$$

$$= \frac{y}{(x+y)\sqrt{2xy+y^2}}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{(x+y)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}} = -\frac{x}{(x+y)^2\frac{\sqrt{x^2+2xy+y^2-x^2}}{x+y}} =$$

$$= -\frac{x}{(x+y)\sqrt{2xy+y^2}}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Таким чином, $gradz|_{(1,1)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

3. Записати рівняння дотичної та нормалі до поверхні $z = ln(x^2+y^2)$ у точці M(1, 0, 0).

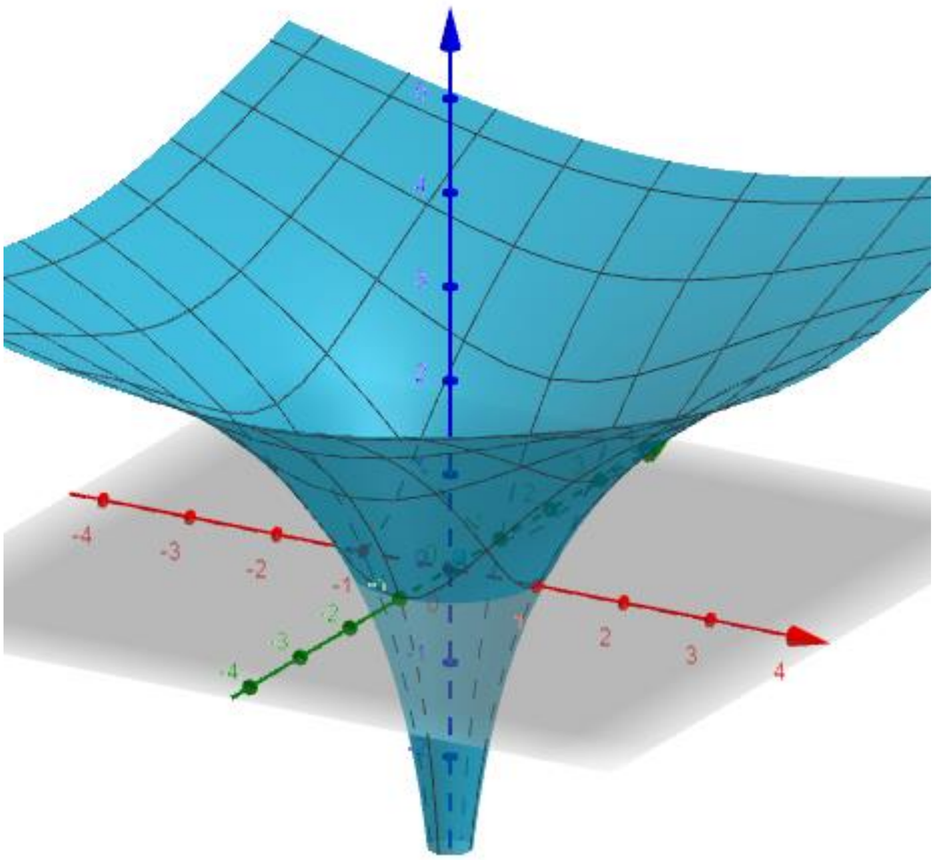


Рис.5

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 0.$$

Рівняння дотичної площини:

$$z = x - 1,$$

нормалі:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}.$$

Некоректності формального запису рівняння нормалі можна уникнути, записавши рівняння прямої не у векторній формі, а в параметричній:

$$\begin{cases} x = 2t + 2, \\ y = 0, \\ z = -t. \end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Обчислити похідну функції $z = f(x, y)$ у точці A в напрямку вектора $\vec{s}$.
   1.1. $z = x^2 + xy + y^2$, $A(1,1)$, $\vec{s} = (2,1)$.
   1.2. $z = x^3 - xy^2 - y^3$, $A(2,1)$, $\vec{s} = (-3,1)$.
   1.3. $z = ln(5x^2 + 3y^2)$, $A(1,1)$, $\vec{s} = (3,2)$.
   1.4. $z = 5x^2 + 6xy$, $A(2,1)$, $\vec{s} = (1,2)$.
   1.5. $z = arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $A(1,2)$, $\vec{s} = (5,12)$.
   1.6. $z = arctg(xy^2)$, $A(2,3)$, $\vec{s} = (4,-3)$.
   1.7. $z = ln(3x^2 + 4y^2)$, $A(1,3)$, $\vec{s} = (2,-1)$.
   1.8. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, $A(1,2)$, $\vec{s} = (4,-3)$.
   1.9. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$, $A(1,1)$, $\vec{s} = (2,1)$.
   1.10. $z = xy + y + 1$, $A(1,-3)$, $\vec{s} = (4,3)$.
   1.11. $z = x^2 + 6xy + y^2$, $A(4,-12)$, $\vec{s} = (3,-5)$.
   1.12. $z = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$, $A(2,-12)$, $\vec{s} = (3,-5)$.
   1.13. $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $A(4,3)$, $\vec{s} = (2,5)$.
   1.14. $z = xy^2$, $A(1,-2)$, $\vec{s} = (3,-2)$.
   1.15. $z = x^2 + xy + y^3$, $A(1,3)$, $\vec{s} = (-1,1)$.
   1.16. $z = x^2y + y - 1$, $A(1,2)$, $\vec{s} = (3,4)$.
   1.17. $z = ln(5x^2 + 4y^2)$, $A(1,1)$, $\vec{s} = (2,-1)$.
   1.18. $z = x^2 - y^2 + xy$, $A(2,2)$, $\vec{s} = (-2,1)$.
   1.19. $z = 2xy + 3y - 7$, $A(1,1)$, $\vec{s} = (2,-1)$.
   1.20. $z = x^2 + 2y - xy + 1$, $A(-2,2)$, $\vec{s} = (3,1)$.
   1.21. $z = 1 - xy - x + y^2$, $A(2,2)$, $\vec{s} = (0,4)$.
   1.22. $z = x^2y - 2 + x^2 + y$, $A(1,0)$, $\vec{s} = (2,-1)$.
   1.23. $z = ln(3x^2 + y^2)$, $A(1,1)$, $\vec{s} = (2,-1)$.
   1.24. $z = x - x^2y + xy$, $A(1,-2)$, $\vec{s} = (2,4)$.
   1.25. $z = x^3 + xy^2 + y^2$, $A(2,1)$, $\vec{s} = (2,2)$.
2. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ у точці A.
   2.1. $z = x^2 + 2y$, $A(2,2)$.
   2.2. $z = ln(5x^3 + y^2)$, $A(2,1)$.
   2.3. $z = 4x^2 + 5xy$, $A(1,2)$.
   2.4. $z = arctg(xy)$, $A(3,2)$.

2.5. $z = arcsin\frac{x^2}{y}$, $A(1,2)$.
2.6. $z = \ln(4x^2 + 3y^2)$, $A(3,1)$.
2.7. $z = 3x^5 - 2x^2y$, $A(2,-1)$.
2.8. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$, $A(2,1)$.
2.9. $z = x^2y - y$, $A(-3,1)$.
2.10. $z = x^2 + xy + y^3$, $A(-5,3)$.
2.11. $z = x^2 + 6xy + y$, $A(4,-11)$.
2.12. $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $A(3,4)$.
2.13. $z = x^2y^3$, $A(1,-2)$.
2.14. $z = x^2 + xy^2 + x^3$, $A(1,3)$.
2.15. $z = xy^2 + x - 1$, $A(1,3)$.
2.16. $z = 5x^2 + 4y^3$, $A(1,1)$.
2.17. $z = x^3 - y + x^2y$, $A(2,2)$.
2.18. $z = xy^3 + 3xy + 2$, $A(1,1)$.
2.19. $z = 2x + y^2 - xy + 2$, $A(2,-2)$.
2.20. $z = 4x^2y + 5xy^2$, $A(1,1)$.
2.21. $z = x^3 + 2x^2 + 5xy + y^2$, $A(4,-12)$.
2.22. $z = x^2 + 2xy + y^2$, $A(1,1)$.
2.23. $z = x + x^2y - xy$, $A(2,-1)$.
2.24. $z = x^2 + xy^2 + y^3$, $A(1,1)$.
2.25. $z = xy^2 - xy + 3x$, $A(2,1)$.

3. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x,y)$ у точці M.
3.1. $z = x^2 + y^2$, $M(1,2,5)$.
3.2. $z = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$, $M(3,4,12)$.
3.3. $z = \sqrt{xy}$, $M(1,1,1)$.
3.4. $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $M\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.
3.5. $z = \frac{x^3}{2} + \frac{y^2}{x}$, $M(2,-4,12)$.
3.6. $z = y^2 + ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $M(1,1,1)$.
3.7. $z = \sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} - 1}$, $M(4,2,\sqrt{2})$.
3.8. $z = \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8}$, $M(3,-2,1)$.
3.9. $z = ln\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$, $M(1,1,0)$.

3.10. $z = \sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1}$, $M(5, -4, 1)$.

3.11. $z = \sqrt{3x^3y}$, $M(3, 1, 9)$.

3.12. $z = ln2(x^2 + y^2)$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

3.13. $z = sinxcosy$, $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

3.14. $z = e^{xcosy}$, $M\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$.

3.15. $z = \sqrt{6 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}y^2}$, $M\left(2, 1, \sqrt{\frac{11}{6}}\right)$.

3.16. $z = 2x^2 + 4y^2$, $M(2, 1, 12)$.

3.17. $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{17}}$, $M(-1, 4, 1)$.

3.18. $z = \sqrt[4]{(x-5)^2 + 2y^2 - 11}$, $M(3, 2, 1)$.

3.19. $z = \sqrt{41 - x^2y^2 - 2x}$, $M(2, -3, 1)$.

3.20. $z = y + ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $M(1, 1, 1)$.

3.21. $z = 5x^3 - 3y$, $M(1, 2, -1)$.

3.22. $z = 2x^2 - 4y^2$, $M(2, 1, 4)$.

3.23. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M(3, 4, -7)$.

3.24. $z = 4x - xy + y^2$, $M(1, 1, 3)$.

3.25. $z = \sqrt{x^2 - 2x + 6y - 4}$, $M(1, 1, 1)$.

Тема 4. Похідна складної функції. Похідна функції, заданої неявно

1. Нехай $z = f(x, y)$, причому $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$
2. Нехай $z = f(x, y)$, причому $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$. Тоді
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{dt}, \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{ds}.$$
3. Нехай $z = f(x, y)$, причому $y = y(x)$. Тоді
$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Усі наведені формули можна узагальнити на випадок функції трьох, чотирьох тощо змінних.

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявним чином, за допомогою рівняння $F(x, y) = 0$.

Нехай також виконуються умови:

$F(x, y), \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ -- неперервні функції; і $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в деякій точці, координати якої задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$. Тоді функція $y = f(x)$ має похідну в цій точці, і ця похідна обчислюється за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана неявно, за допомогою рівняння

$F(x, y, z) = 0$, причому $F(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ -- неперервні функції; і $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Розв'язання типових задач

1. $z = 6^{\sqrt{y}-x^3}, \quad y = x^3 + 5x - 1.$ Знайти $\frac{dz}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6^{\sqrt{y}-x^3} \cdot (-3x^2); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6^{\sqrt{y}-x^3} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right); \ \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5.$$

Таким чином,

$$\frac{dz}{dx} = 6^{\sqrt{y}-x^3} \cdot (-3x^2) + 6^{\sqrt{y}-x^3}\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)(3x^2+5) =$$

$$= -6^{\sqrt{y}-x^3}\left(3x^2 + \frac{3x^2+5}{2\sqrt{y}}\right).$$

2. $z = arctg\frac{x}{y}, \ x = e^{2t} + 1, \ y = e^{2t} - 1.$ Знайти $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \ ;$$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}, \ \frac{dy}{dt} = 2e^{2t}.$$

Зрештою,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2e^{2t} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}2e^{2t} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1-\frac{x}{y}\right) =$$

$$= \frac{2e^{2t}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y-x}{y} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{(e^{2t}+1)^2+(e^{2t}-1)^2}} \cdot \frac{e^{2t}-1-e^{2t}-1}{e^{2t}-1} =$$

$$= \frac{2e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+2e^{2t}+1+e^{4t}-2e^{2t}+1}} \cdot \frac{-2}{e^{2t}-1} = -\frac{4e^{2t}}{\sqrt{2e^{4t}+2}(e^{2t}-1)}.$$

3. $z = x^2 lny, \ x = \frac{s}{t}, y = t^2 + s^2.$ Знайти $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xlny, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{t},$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2t, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = 2s.$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2xlny\left(-\frac{s}{t^2}\right) + \frac{x^2}{y}\cdot 2t,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2xlny \cdot \frac{1}{t} + \frac{x^2}{y}\cdot 2s.$$

4. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.

1 спосіб. Скористаємось формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

де $F(x,y) = sin(xy) - e^{xy} - x^2y$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ycos(xy) - ye^{xy} - 2xy,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = xcos(xy) - xe^{xy} - x^2.$$

Таким чином,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ycos(xy) - ye^{xy} - 2xy}{xcos(xy) - xe^{xy} - x^2}.$$

2 спосіб. Продиференціюємо по x ліву і праву частину рівності, враховуючи при цьому, що $y = y(x)$:

$$\frac{d}{dx}(sin(xy) - e^{xy} - x^2y) = 0,$$

$$cos(xy)(y + xy') - e^{xy}(y + xy') - 2xy - x^2y' = 0.$$

Тут використано правило знаходження похідної складної функції, а також похідної від добутку функцій.

Отримали рівняння відносно невідомої величини $y' = \frac{dy}{dx}$. Розв’яжемо його.

$$xy'cos(xy) - xy'e^{xy} - x^2y' = -ycos(xy) + ye^{xy} + 2xy,$$

$$y'(xcos(xy) - xe^{xy} - x^2) = -ycos(xy) + ye^{xy} + 2xy,$$

$$y' = \frac{-ycos(xy) + ye^{xy} + 2xy}{xcos(xy) - xe^{xy} - x^2}.$$

Як бачимо, результати однакові.

5. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $yx^2 = e^y$

Для обчислення другої похідної скористаємось означенням:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

де змінна y розглядається як функція від змінної x.

Спочатку обчислимо першу похідну

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

де $F(x, y) = yx^2 - e^y$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - e^y.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 - e^y} = \frac{2xy}{e^y - x^2}.$$

Врахуємо, що, згідно умови, $e^y = yx^2$. Це означає, що можна дещо спростити отриману похідну.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{yx^2 - x^2} = \frac{2xy}{x^2(y-1)} = \frac{2y}{x(y-1)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2y}{xy-x}\right) = \frac{(2y)'(xy-x) - 2y(xy-x)'}{(xy-x)^2} =$$

$$= \frac{2\frac{dy}{dx}(xy-x) - 2y\left(y + x\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(xy-x)^2} =$$

$$= \frac{2\frac{2y}{x(y-1)}(xy-x) - 2y\left(y + x\cdot\frac{2y}{x(y-1)} - 1\right)}{(xy-x)^2} =$$

$$= \frac{4y - 2y^2 - \frac{4y^2}{y-1} + 2y}{(xy-x)^2} = \frac{(6y-2y^2)(y-1) - 4y^2}{x^2(y-1)^3} =$$

$$= \frac{2y(2y - y^2 - 3)}{x^2(y-1)^3}.$$

6. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$xcosy + ycosz + zcosx = 1.$$

Скористаємось формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

де $F(x, y, z) = xcosy + ycosz + zcosx - 1$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = cosy - zsinx, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = cosz - xsiny, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = cosx - ysinz.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{cosy - zsinx}{cosx - ysinz} = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{cosz - xsiny}{cosx - ysinz} = \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}.$$

Задачі для самостійного розв’язання

1. Обчислити похідну $\frac{dz}{dx}$, якщо
   1.1. $z = sin(t^2 - s),\ t = e^{2x},\ s = 2^x$.
   1.2. $z = sin(4s - 3ts),\ t = 4^{5+2x},\ s = 1 - x^2$.
   1.3. $z = \frac{y}{x^2+y^2},\ y = sin\sqrt{x}$.
   1.4. $z = cos\frac{xy}{x+y},\ y = 9^{x^2-15}$.
   1.5. $z = \frac{t^2+3}{s^2+2t},\ t = arcsin(1-x),\ s = arccos2x^2$.

1.6. $z=\sqrt{t+s},\ t=e^{arccos2x},\ s=e^{arcsin4x}$.

1.7. $z=cos(4t+5ts),\ t=5^{1-2x},\ s=x^2+3$.

1.8. $z=cos\frac{x+y}{y},\ y=2^x$.

1.9. $z=x-3y,\ y=\frac{1}{x^2-4}$.

1.10. $z=arccos\left(\frac{x}{y}\right),\ y=3^{\sqrt{x}}$.

1.11. $z=(t^2+s^4)^2,\ t=2^{x^2-4x},\ s=3^{x^3-5x}$.

1.12. $z=\frac{t}{\sqrt[3]{s}-2},\ t=(1-2^x)^2,\ s=3^{2x}$.

1.13. $z=ln\frac{x}{\sqrt{y}},\ y=arccos\sqrt{x}$.

1.14. $z=\left(\sqrt{t-s}-1\right)^3,\ t=e^{cos2x},\ s=e^{sin2x}$.

1.15. $z=\frac{x}{y^2-4},\ y=arctg\sqrt{x}$.

1.16. $z=arccos\frac{x}{y},\ y=3^{x^2+4x+2}$.

1.17. $z=\frac{1}{\sqrt{t}-\sqrt{s}},\ t=ln\frac{1}{\sqrt{x}},\ s=2^{4-x}$.

1.18. $z=ln\frac{x}{y^2-1},\ y=cos^2(1-4x)$.

1.19. $z=\frac{x}{x^2+y^2},\ y=sin\sqrt[3]{x}$.

1.20. $z=sin\frac{xy}{x+y},\ y=8^{x^3-5}$.

1.21. $z=\frac{t+3}{t^2+2s},\ t=arccos(1+x),\ s=arcsinx^2$.

1.22. $z=arccos\frac{y}{x},\ y=5^{\sqrt{x}}$.

1.23. $z=(t^2+s^3)^2,\ t=3^{x^3-3x},\ s=4^{x^2-4x}$.

1.24. $z=\frac{s}{\sqrt{t}-3},\ t=(1-2x)^2,\ s=4^{5x}$.

1.25. $z=t^2s-ts-\frac{t}{s},\ t=sin(1-3x),\ s=3x$.

2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial s}$ складної функції, якщо

2.1. $z=ln\left(\sqrt{x}-y^2\right),\ x=ts,\ y=t^2-s^2$.

2.2. $z=15^{arcsin(xy)},\ x=\frac{t^2}{s},\ y=\frac{1}{ts}$.

2.3. $z=\left(x+\sqrt{xy}\right)^3,\ x=\frac{s}{t^2+s^2},\ y=\frac{\sqrt{t}+\sqrt{s}}{t^2+s^2}$.

2.4. $z=arccosxy,\ x=\frac{1}{ts+15},\ y=\frac{t}{t+s}$.

2.5. $z=\frac{x}{5x+y^2},\ x=arccos\frac{t}{s},\ y=arcsin\frac{t}{s}$.

2.6. $z=\frac{\sqrt{y}}{x^2},\ x=ctgts,\ y=cos\frac{t}{s}$.

2.7. $z = \frac{y}{4x+y^2},\ x = sin\frac{t}{s},\ y = cos\frac{s}{t}.$

2.8. $z = ln\frac{x}{y^2},\ x = \frac{t}{\sqrt{s}},\ y = \frac{s}{t^2}.$

2.9. $z = \frac{x^2}{y},\ x = arctgts,\ y = arccos\frac{t}{s}.$

2.10. $z = \frac{x^3}{y-x},\ x = cos\frac{t}{s},\ y = sin\frac{t}{s}.$

2.11. $z = cosxy,\ x = \frac{1}{ts},\ y = \frac{t}{s}.$

2.12. $z = 5^{xy},\ x = \frac{t}{s},\ y = \frac{1}{\sqrt{ts}}.$

2.13. $z = \left(x - \sqrt{y}\right)^3,\ x = \frac{t^2}{s},\ y = \frac{s^2}{\sqrt{t}}.$

2.14. $z = arctg\frac{x}{y},\ x = t - 3s,\ y = t^2 - \frac{1}{s}.$

2.15. $z = \frac{x+y}{\sqrt{y}},\ x = \sqrt{1 + \frac{t}{s}},\ y = \frac{t}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}.$

2.16. $z = arcsin\sqrt{\frac{x}{y}},\ x = t^2 - \frac{1}{s},\ y = s - 3t.$

2.17. $z = tg(y - x^3),\ x = \frac{s^2}{\sqrt{t}},\ y = \frac{t}{s}.$

2.18. $z = \left(y + \sqrt{xy}\right)^2,\ x = \frac{t}{t^2+s^2},\ y = \frac{\sqrt{t}+\sqrt{s}}{t+s}.$

2.19. $z = arcsin(xy),\ x = \frac{1}{ts+3},\ y = \frac{s}{t+s}.$

2.20. $z = \frac{y}{x^2+2y},\ x = \frac{s^2}{t},\ y = tg\frac{t}{s}.$

2.21. $z = \frac{y^4}{x^2},\ x = arctgts,\ y = arccos\left(\frac{s}{t}\right).$

2.22. $z = \frac{y^3}{y-x},\ x = sin\frac{s}{t},\ y = cos\frac{t}{s}.$

2.23. $z = \sqrt{\frac{x}{y^2-1}},\ x = sints,\ y = cos(t - s).$

2.24. $z = 7^{\sqrt{x}-y^2},\ x = sints,\ y = costs.$

2.25. $z = x^3 - cos^2y,\ x = \frac{t}{\sqrt{s}},\ y = lnts.$

3. Обчислити $\frac{dy}{dx}$, якщо

3.1. $x^3y^2 - xy^5 + 5x + y = 0.$

3.2. $x^2y^3 + x^5y + x - 5y = 0.$

3.3. $xe^{2y} - ylnx = 0.$

3.4. $x^3e^{2y} + y^2lnx + 8 = 0.$

3.5. $x \cdot 3^y - xlny + 7 = 0.$

3.6. $1 + xy - ln(xy + xy^2) = 0.$

3.7. $1 - ln\sqrt{x^2 + y^2} = ln\frac{y}{x}$.

3.8. $1 - xy + ln\left(x\sqrt{y} + xy\right) = 0$.

3.9. $xe^{4y} - ylnx + xy = 16$.

3.10. $4 - ln\frac{y}{x} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.11. $x^3y^4 - 2xy^5 + 5xy = -y$.

3.12. $yarccosx + arcsiny = 0$.

3.13. $\frac{y}{x} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.14. $ln(e^{xy} + e^{-xy}) = x + y$.

3.15. $x^3y - 2y^2 - 3xy = 0$.

3.16. $x^5y^2 - x\sqrt{y} - 5x = 0$.

3.17. $1 + ln\sqrt{x^2 + y^2} = ln\frac{x}{y}$.

3.18. $xy^2 + 5x\sqrt{y} + 4xy^3 = 0$.

3.19. $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

3.20. $x + y = e^{x-y}$.

3.21. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

3.22. $ysinx - cos(x - y) = 0$.

3.23. $y^x = x^y$.

3.24. $arctg(x + y) - y = 0$.

3.25. $x - y + arctgy = 0$.

4. Обчислити частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

4.1. $z^3 + 3x^2z = 2xy$.

4.2. $zln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$.

4.3. $z^2 + 2y^2z = xy$.

4.4. $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$.

4.5. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

4.6. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

4.7. $5(x^3 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) = 72$.

4.8. $\frac{x}{z} = ln\frac{xy}{z^2}$.

4.9. $z^3 + 3xyz = 27$.

4.10. $e^z - xyz = 0$.

4.11. $xe^{xyz} - ylnx - xyz = 0$.

4.12. $yz = arctg(xz)$.

4.13. $x + y - z = cos(x + y - z)$.

4.14. $xcosy + ycosz + zcosx = 0$.

4.15. $4sin(x + y + z) = x + y + z.$

4.16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1.$

4.17. $ye^{3x} - xlny - xyz = 0.$

4.18. $xln(z - x) - \frac{xz}{y} = 0.$

4.19. $(x - 2)^2 + 2y^2 = z - 3.$

4.20. $xyz^2 - e^{xy-z} = 2.$

4.21. $3sin(x - y - z^2) + y + z^2 - x = 0.$

4.22. $x^4 - xyz^2 + ln\frac{x}{z} - 1 = 0.$

4.23. $xln(y - z) = \frac{2xz}{y}.$

4.24. $x^2z^2 - xy^3 + xz - y = 0.$

4.25. $e^{-(x^2+z^2)} = x^2 + y^2 + z^2.$

Тема 5. Екстремум функції багатьох змінних. Умовний екстремум. Найбільше і найменше значення функції у замкненій обмеженій області

Кажуть, що функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має у точці $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}\right)$ локальний максимум, якщо вона визначена у деякому околі цієї точки, і для всіх $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ із цього околу $f(M) < f(M_0)$.

Якщо при цих самих умовах виконується нерівність $f(M) > f(M_0)$, то дана функція має у точці M_0 локальний мінімум.

Необхідна умова екстремуму функції. Якщо функція має у точці M_0 локальний екстремум (максимум або мінімум), то всі її частинні похідні по всіх змінних дорівнюють нулю або не існують. Точка, в якій частинні похідні рівні нулю, називається стаціонарною. Якщо частинні похідні дорівнюють нулю або не існують – відповідна точка називається критичною.

Достатня умова екстремуму. Для того, щоб функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ мала у точці M_0 локальний екстремум, достатньо, щоб її другий диференціал у цій точці був знакосталим, причому, якщо $d^2z|_{M_0} > 0$, то в даній точці функція має локальний мінімум; а у випадку $d^2z|_{M_0} < 0$ – локальний максимум.

У випадку, коли розглядається функція двох змінних, достатня умова екстремуму функції у точці формулюється так.

Введемо позначення:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \qquad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y}\right|_{M_0}; \ \Delta = AC - B^2.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція не має екстремуму в даній точці.

Якщо $\Delta > 0$ – у цій точці є екстремум, причому , якщо $A < 0$, то це локальний максимум, а якщо $A > 0$ – локальний мінімум.

Якщо функція є неперервною на замкненій обмеженій області (на компакті), то вона досягає на цій множині свого максимального та мінімального значення. При цьому максимум та мінімум функції на компакті досягаються або в точках екстремуму, або ж на межі області.

Нехай функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ визначена в області $D \subset R^m$, і на незалежні змінні накладено умови (їх ще називають рівняннями зв'язку)

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \dots, F_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0,$$

причому кількість цих умов повинна бути меншою за кількість змінних (розмірність простору). Тоді екстремум функції при виконанні даних умов називається умовним екстремумом.

Знайти умовний екстремум можна двома способами.

1. Якщо рівняння зв'язку можуть бути явним і однозначним чином розв'язані відносно деяких змінних, то, підставивши ці розв'язки у вираз для функції z, одержимо функцію меншої кількості змінних $(m-k)$, для якої треба знайти звичайний, «безумовний» екстремум.
2. Метод Лагранжа.
   Будують функцію Лагранжа
$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k) =$$
$$= f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) + \dots + \lambda_k F_k(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Тут величини $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – деякі невідомі дійсні параметри. Зрештою, функцію Лагранжа досліджують на звичайний екстремум.

Розв'язання типових задач

1. Дослідити на екстремум функцію
   $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

Згідно необхідної умови екстремуму

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9, \\ (x-y)^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1, \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тобто функція може мати екстремум лише у точках $M_1(2;1), M_2(1;2), M_3(-1;-2), M_4(-2;-1)$.

Перевіримо виконання достатньої умови екстремуму. Для цього знайдемо величини A, B, C:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

$M_1(2;1)$: $A = 6x|_{M_1} = 24,\ B = 6y|_{M_1} = 6,\ C = 6x|_{M_1} = 12;$

$$\Delta = AC - B^2 = 24 \cdot 12 - 36 > 0.$$

Тобто у точці M_1 функція має екстремум. І, оскільки $A > 0$, то це локальний мінімум.

Аналогічно,

$M_2(1;2)$: $A = 6x^2|_{M_2} = 6,\ B = 6y|_{M_2} = 12,\ C = 6x|_{M_2} = 6;$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 144 < 0.$$

У цій точці екстремуму немає.

$M_3(-1;-2)$: $A = 6x^2|_{M_3} = 6,\ B = 6y|_{M_3} = -12,\ C = 6x|_{M_3} = -6;$

$$\Delta = AC - B^2 = -6 \cdot 6 - 144 < 0.$$

Тут теж немає екстремуму.

$M_4(-2;-1)$: $A = 6x^2|_{M_4} = 24,\ B = 6y|_{M_4} = -6,\ C = 6x|_{M_4} = -12;$

$$\Delta = AC - B^2 = 24 \cdot (-12) - 36 < 0.$$

Екстремуму немає.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

на множині, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y = -3$.

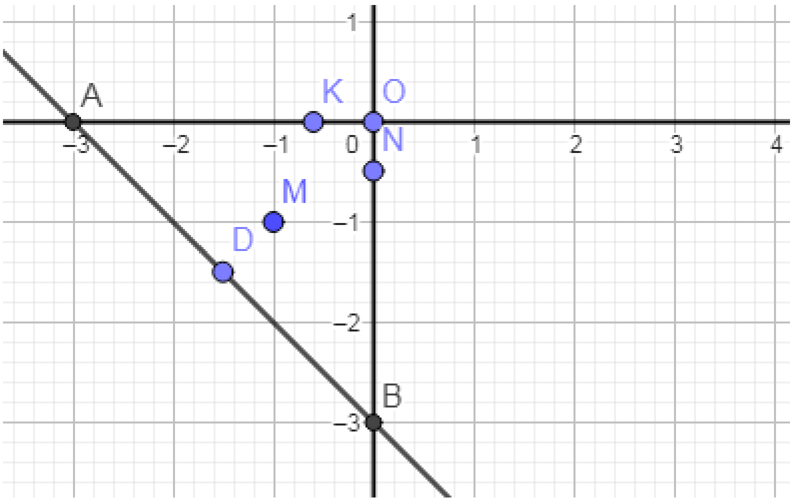


Рис. 5.

Знайдемо критичні точки функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Точка M(-1, -1) належить компакту, і

$z(M) = z(-1,-1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = -1.$

Дослідимо поведінку функції на межі області.

1. $AB: x + y = -3, y = -3 - x, \quad x \in [-3{,}0].$
   $z_{AB}(x,y) = x^2 + (-3 - x)^2 - x(-3 - x) + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6.$

$$z'_{AB} = 6x + 9 = 0, \qquad x = -1{,}5 \in [-3{,}0],$$
$$y = -3 - (-1{,}5) = -1{,}5.$$

Точка $D(-1{,}5;\ -1{,}5)$ належить компакту.

$$z(D) = z_{AB}(-1{,}5) = 3 \cdot (-1{,}5)^2 + 9 \cdot (-1{,}5) + 6 = -0{,}75.$$

$$z(A) = z_{AB}(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6.$$

$$z(B) = z_{AB}(0) = 0 + 9 \cdot 0 + 6 = 6.$$

2. $AO: y = 0, \quad x \in [-3{,}0].$
   $$z_{AO}(x,y) = x^2 + 0 - 0 + x - 0 = x^2 + x.$$

$$z'_{AO} = 2x + 1 = 0, \qquad x = -0{,}5 \in [-3{,}0], \qquad y = 0.$$

Точка $K(-0{,}5;\ 0)$ належить компакту.

$$z(K) = z_{A0}(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) = -0{,}25.$$
$$z(O) = z_{A0}(0) = 0.$$

3. $BO: x = 0, \quad y \in [-3{,}0]$.

$$z_{BO}(x, y) = y^2 + 0 - 0 + y = y^2 + y.$$
$$z'_{BO} = 2y + 1 = 0, \qquad y = -0{,}5 \in [-3{,}0], \qquad x = 0.$$

Точка $N(0; -0{,}5)$ належить компакту.

$$z(N) = z_{B0}(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) = -0{,}25.$$

Порівнявши значення функції у точках A, B, O, D, M, N, K, отримаємо:

$$\min_D z(x, y) = z(M) = -1, \max_D z(x, y) = z(A) = z(B) = 6.$$

3.Знайти умовний екстремум функції $u = x^2 + y^2 + z^2$, якщо $x + y + z = -1$.

Умова, при якій треба знайти екстремум, допускає однозначне представлення однієї змінної через інші:

$$z = -x - y - 1.$$

Тоді з урахуванням цієї умови функція набуде вигляду:

$$u_1 = u(x, y, -x - y - 1) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (-x - y - 1)^2 =$$
$$= x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1.$$

Тобто ми отримали вже функцію від двох змінних, яку треба дослідити на екстремум.

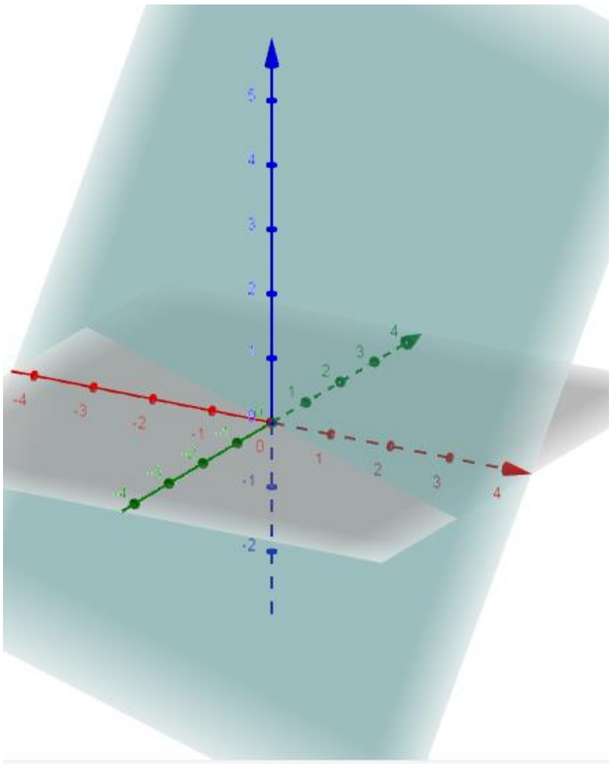
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 4x + 2y + 2 = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = 4y + 2x + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ 2y + x + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ y = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким чином, єдиною підозрілою на екстремум точкою для функції u_1 є $\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$. Перевіримо знакосталість другого диференціалу:

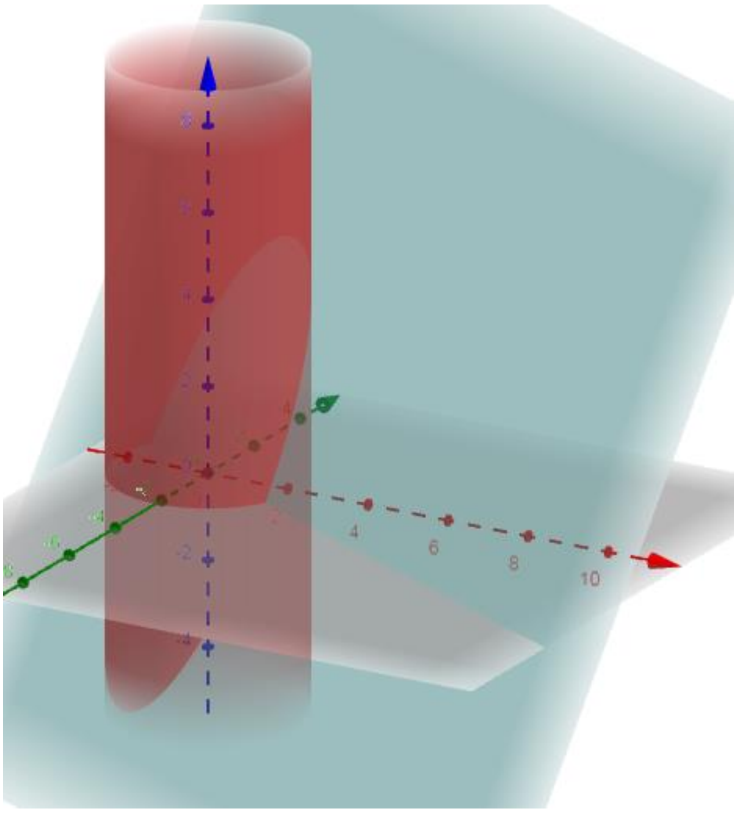
$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 4, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = 2$, тобто

$\Delta^2 u_1 = 4dx^2 + 4dxdy + 4dy^2 = (2dx + dy)^2 + 3dy^2$. Очевидно, $\Delta^2 u_1 > 0$, тобто у точці $\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ функція u_1 має локальний мінімум. А це, в свою чергу, означає, що u має тут умовний мінімум, і $u\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

4. Знайти умовний екстремум функції $z = x + 2y$ при умові $x^2 + y^2 = 5$.
   Зауваження 1. Функція $z = x + 2y$ є рівнянням площини у просторі. Очевидно, що екстремумів (звичайних, «безумовних») вона не має.



Натомість, умовний екстремум – це екстремальні точки лінії, яка утворюється при перетині згаданої площини і поверхні, що визначається рівнянням зв'язку. Як видно з рисунка, це – еліпс, і розв'язком задачі повинні бути дві точки: умовний максимум і умовний мінімум.



Зауваження 2. На відміну від попередньої задачі, з рівняння зв'язку неможливо однозначно виразити одну зі змінних через іншу: $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$. Більше того, підстановка навіть одного із двох можливих представлень у вираз для функції суттєво його ускладнить.

Тому використаємо метод множників Лагранжа. Утворимо функцію Лагранжа:

$$\Phi(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5),$$

і знайдемо для неї звичайний екстремум.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{1}{2}, \\ x = \mp 1, \\ y = \mp 2. \end{cases}$$

Отже, підозрілими на екстремум є точки $(1, 2)$, $(-1, -2)$. Розглянемо кожен випадок окремо.

$\lambda = \frac{1}{2}$, $(-1, -2)$. Дослідимо на знакосталість другий диференціал функції Лагранжа.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\lambda = 1, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2\lambda = 1, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \Delta^2 \Phi = \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2.$$

Очевидно, $\Delta^2 \Phi > 0$, тобто у точці $(-1, -2)$ функція Φ має локальний мінімум, а початкова функція – умовний мінімум, і $z(-1, -2) = -5$.

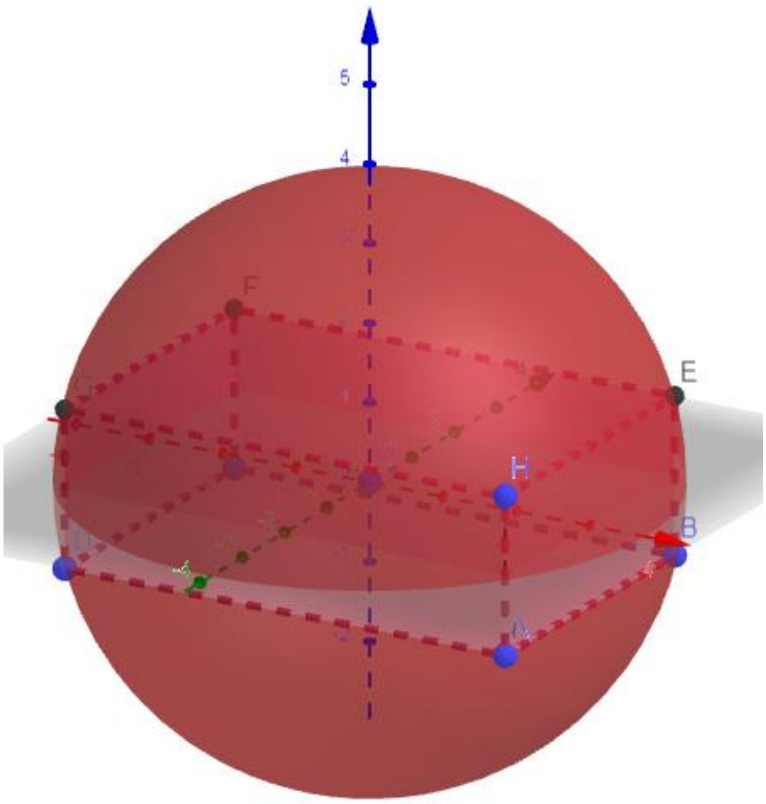
$\lambda = -\frac{1}{2}$, $(1, 2)$.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\lambda = -1, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2\lambda = -1, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \Delta^2 \Phi = -\mathrm{dx}^2 - \mathrm{dy}^2.$$

Очевидно, $\Delta^2 \Phi < 0$, тобто у точці $(1, 2)$ функція Φ має локальний максимум, а початкова функція – умовний максимум, $z(1, 2) = 5$.

5. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об’єму, що вписаний у сферу радіуса *R*.

Виберемо систему координат так, щоб грані шуканого паралелепіпеда були паралельні координатним площинам, а центр сфери співпадав з початком координат.



Таким чином, координатні площини розбивають паралелепіпед на вісім однакових частин. Позначимо координати вершини, що належить першому октанту, як $H(x, y, z)$.Тоді об'єм паралелепіпеда $V = 8xyz$. А оскільки точка H, як і всі інші вершини, повинна лежати на сфері радіуса R, то на змінні ще накладається умова $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Тобто знаходимо умовний екстремум функції $V(x, y, z)$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 8yz + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 8xz + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 8xy + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\lambda x}{4z}, \\ 8xz - 2\lambda \cdot \dfrac{\lambda x}{4z} = 0, \\ -8x \cdot \dfrac{\lambda x}{4z} + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\lambda x}{4z}, \\ x\left(8z - \dfrac{\lambda^2}{2z}\right) = 0, \\ 2\lambda\left(-\dfrac{x^2}{z} + z\right) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$$

З геометричного змісту задачі зрозуміло, що, зокрема, $x \neq 0$. Тоді з другого рівняння системи слідує, що $8z - \frac{\lambda^2}{2z} = 0$, тобто $z^2 = \frac{\lambda^2}{16}, z = \pm\frac{\lambda}{4}$.

З третього рівняння отримуємо $x^2 = z^2$, адже $\lambda \neq 0$, бо інакше з першого рівняння $y = 0$, а це суперечить геометричному змісту задачі.

Зрештою, з першого рівняння $y = \pm\frac{\lambda}{4}$. Підставимо координати знайденої точки у четверте рівняння:

$$\left(\pm\frac{\lambda}{4}\right)^2 + \left(\pm\frac{\lambda}{4}\right)^2 + \left(\pm\frac{\lambda}{4}\right)^2 = R^2,$$

$3\frac{\lambda^2}{16} = R^2,\ \lambda^2 = \frac{16R^2}{3}, \lambda = \pm\frac{4R}{\sqrt{3}}$.

Оскільки за побудовою всі змінні набувають додатних значень, то отримуємо єдину критичну точку $\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$. У ній функція $\Phi(x, y, z, \lambda)$ і досягає свого максимуму, а функція $V(x, y, z)$ має тут умовний максимум.

$$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{R}{\sqrt{3}}\frac{R}{\sqrt{3}}\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R^3}{9}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Дослідити на екстремум функцію $z = (x, y)$, якщо
   1.1. $z(x,y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.
   1.2. $z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
   1.3. $z(x,y) = x^3 + xy^2 + 6xy$.
   1.4. $z(x,y) = x\sqrt{y} + x^2 - y + 6x + 3$.
   1.5. $z(x,y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$.
   1.6. $z(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$.
   1.7. $z(x,y) = 2x^2 - (y-1)^2$.
   1.8. $z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
   1.9. $z(x,y) = x^3y^2(6 - x - y)$.
   1.10. $z(x,y) = 1 - \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$.
   1.11. $z(x,y) = (1 - x - y)xy$.
   1.12. $z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x - y$.
   1.13. $z(x,y) = x^3 + 3x + 4xy$.
   1.14. $z(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x$.
   1.15. $z(x,y) = 3x - x^2 - y^2$.
   1.16. $z(x,y) = (x-1)^2 + 4y^2$.
   1.17. $z(x,y) = (x-2)^2 - 2y^2$.
   1.18. $z(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$.
   1.19. $z(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
   1.20. $z(x,y) = x^2 - 4x - 2y^2 + 4$.
   1.21. $z(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.
   1.22. $z(x,y) = x^3 + xy^2 + 6xy$.
   1.23. $z(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
   1.24. $z(x,y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 8$.
   1.25. $z(x,y) = x^3 + y^2 - 3xy$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області , обмеженій заданими лініями:
   2.1. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
   2.2. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,\ D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$.
   2.3. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ D: x = 0, y = 0, x + y = 3$.
   2.4. $z = x^2 + 2xy - 10,\ D: y = 0, y = x^2 - 4$.
   2.5. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy,\ D: y = 8, y = 2x^2$.
   2.6. $z = x^3 + y^3 - 3xy,\ D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.

2.7. $z = 4 - 2x^2 - y^2,\ D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$.
2.8. $z = x^2 y(4 - x - y),\ D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$.
2.9. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,\ D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
2.10. $z = 3x + y - xy,\ D: x = 0, y = x, y = 4$.
2.11. $z = x^2 + xy - 2,\ D: y = 0, y = 4x^2 - 4$.
2.12. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,\ D: x = 0, x + y = 1, y = 0$.
2.13. $z = x^2 - 3y^2 - xy,\ D: x = 2,\ y = 0, x - y = 5$.
2.14. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,\ D: x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0$.
2.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1,\ D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$.
2.16. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x,\ D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.
2.17. $z = x^2 - y^2,\ D: x^2 + y^2 = 4$.
2.18. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y,\ D: x = 0, y = 0, x + y = 3$.
2.19. $z = xy^2,\ D: x^2 + y^2 = 1$.
2.20. $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - \frac{xy^2}{2},\ D: x = 0, y = 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.
2.21. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y + 4,\ D: x = 0, y = x, y = 4$.
2.22. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ D: x^2 + y^2 = 1$.
2.23. $z = x - 2y - 3,\ D: x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.
2.24. $z = xy^2(4 - x - y),\ D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$.
2.25. $z = 3 + \sqrt{10 - x^2 - y^2},\ D: x^2 + y^2 = 1$.

3. Знайти умовний екстремум функції
3.1. $z = x + 2y$ при $x + y^2 = 5$.
3.2. $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
3.3. $z = xy$ при $x + y = 1$.
3.4. $z = cos^2 x + cos^2 y$ при $y - x = \frac{\pi}{4}$.
3.5. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2$.
3.6. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ при $x^2 + y^2 = 25$.
3.7. $z = x^2 y^2$ при $2x + y = 1$.
3.8. $z = xy$ при $x - y = 0$.
3.9. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.
3.10. $u = xyz$ при $x + y + z = 4$.
3.11. $u = xyz$ при $xy + yz + zx = 5$.
3.12. $u = xy^2 z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$ $(x > 0, y > 0,\ z > 0)$.
3.13. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.
3.14. $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

3.15. $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 4)$ при $x^2 + y^2 = 1$.

3.16. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

3.17. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

3.18. $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3.19. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

3.20. $z = x^3 + y^3$ при $x + y = 2$.

3.21. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.22. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при $x + 2y + 3z = 0$.

3.23. $u = x^2 y^3 z^4$ при $2x + 3y + 4z = 1$.

3.24. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y^2 = 5$.

3.25. $z = sin^2 x + sin^2 y$ при $x - y = \frac{\pi}{4}$.

4. 4.1. Знайти трикутник із заданим периметром $2p$, який при обертанні навколо однієї зі своїх сторін утворює тіло найбільшого об'єму.

4.2.Знайти сторони прямокутного трикутника, який при заданій площі S має найменший периметр.

4.3.Знайти паралелепіпед із найбільшим об'ємом при заданій сумі $12a$ всіх його ребер.

4.4.Знайти прямокутний паралелепіпед з найбільшим об'ємом, який можна вписати в еліпсоїд з півосями a, b, c.

4.5.Перетин каналу має форму рівнобічної трапеції заданої площі S. Якими повинні бути його розміри, щоб поверхня каналу, що омивається водою, була найменшою?

4.6.Знайти правильну трикутну піраміду, об'єм якої V, таку, що має найменшу суму довжин ребер.

4.7.Вказати зовнішні розміри відкритого (без кришки) ящика, що має форму прямокутного паралелепіпеда з заданою товщиною стінок a і об'ємом V , щоб на нього було витрачено найменшу кількість матеріалу.

4.8.Знайти сторони прямокутного паралелепіпеда із заданою площею поверхні S, який має найбільший об'єм.

4.9.Навколо заданого еліпса з осями a, b описати трикутник з основою, що паралельна більшій осі b, площа якого була б найменшою.

4.10.При яких розмірах відкрита прямокутна ванна заданого об'єму V має найменшу площу поверхні?

4.11.Задане додатне число a розкласти на три доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

4.12.У півкулю з радіусом R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

4.13.Знайти прямокутний паралелепіпед з найменшою поверхнею за умови, що його об'єм дорівнює V.
4.14.На параболі $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ знайти точку, найменше віддалену від прямої $3x - 6y + 4 = 0$.
4.15.На площині $3x - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней від якої до точок $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$ була б найменшою.
4.16.Визначити розміри конуса з найбільшим об'ємом за умови, що його бічна поверхня дорівнює S.
4.17.Дано точки $A(4,0,4), B(4,4,4), C(4,4,0)$. На поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ знайти точку S так, щоб об'єм піраміди $SABC$ був найменшим.
4.18.Знайти виміри циліндра з найбільшим об'ємом за умови, що його повна поверхня дорівнює $S = 6\pi$ м^2.

4.19.На еліпсі $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точки, які найбільше і найменше віддалені від прямої $3x + y - 9 = 0$.

4.20.Дано точки $A(1,0,1), B(1,1,1), C(1,1,0)$. На поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ знайти точку S так, щоб об'єм піраміди $SABC$ був найбільшим.
4.21.З листа жерсті площею $2a^2$ треба виготовити закриту коробку в формі прямокутного паралелепіпеда, яка матиме найбільший об'єм. Знайти виміри коробки.
4.22.На еліпсоїді обертання $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ знайти точки, які були б найбільше чи найменше віддалені від площини $3x + 4y + 12z = 0$.

4.23.Знайти параметри конуса з найменшою площею бічної поверхні, при умові, що його об'єм дорівнює V.

4.24.Палатка має форму циліндра з насадженою на нього конічною верхівкою. Якими мають бути її лінійні розміри, щоб витрати матеріалу на її виготовлення при заданому об'ємі V були якомога меншими?

4.25. У сферу з радіусом R вписано правильну трикутну призму. При яких її вимірах призма матиме найбільший об’єм?

Список використаних джерел

1. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз. В 2-х частинах. – К.: Вища школа, 1992.
2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. У 2-х частинах. – К.: Либідь, 1993.
3. Сухорольський М. А., Каленюк П. І., Коломієць В. О., Гошко Л. В. Практикум та задачі з математичного аналізу. – К.: Освіта України, 2012.
4. Збірник задач з математичного аналізу. Ч.2/за ред. Ю. К. Рудавського. – Львів: Львівська політехніка, 2003.
5. Функції багатьох змінних [текст]: методичні вказівки і варіанти до виконання модульної роботи/ уклад.: Є. П. Кришко, Є. А. Макаренков, Н. Г. Наріус, Г. А. Папанов, В. І. Самарський. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2010.

Відповідальний за випуск: завідувачка кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу доктор фіз.-мат. наук, доц. Сливка-Тилищак Г. І.

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Боярищева Т. В., канд. фіз.-мат. наук Герич М. С., канд. фіз.-мат. наук, доц. Слюсарчук П. В., канд. фіз.-мат. наук, доц. Тегза А. М.

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, проф. Тилищак О. А.,

канд. фіз-мат. наук., доц. Млавець Ю.Ю.

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ
ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ