МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

М.М. Маляр

МОДЕЛІ І МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ОБМЕЖЕНО-РАЦІОНАЛЬНОГО ВИБОРУ

Монографія

Ужгород

2016

УДК 519.81
ББК 22.18
М 21

Рецензенти:
проф., доктор техн. наук Ю.П. Зайченко;
п.н.с., доктор фіз.-мат. наук Н.В. Семенова.

Науковий редактор: проф., доктор техн. наук Волошин О.Ф.

Рекомендовано до друку Вченими радами факультету кібернетики Київського національного університету ім. Т. Шевченка(протокол № 2 від 13 жовтня 2015р.) та математичного факультету ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (протокол № 3 від 21 жовтня 2015р.)

Маляр М.М.
Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору : Монографія. – Ужгород: РА "АУТДОР-ШАРК" , 2016. – 222 с.

Монографія присвячена розвитку, розробці та використанню моделей і методів багатокритеріального вибору.

Розглядаються питання, пов'язані з вибором рішень при наявності багатьох критеріїв для задач на скінченній множині альтернатив та задач векторного лінійного програмування. Розвиваються оригінальні загальні підходи до розв'язання багатокритеріальних задач вибору використовуючи модель обмеженої раціональності та модель суперечливості критеріїв із застосуванням апарату нечітких множин.

Призначена для спеціалістів у області прийняття рішень, системного аналізу, математичного моделювання. Для аспірантів і студентів старших курсів відповідних спеціальностей.

УДК 519.81

ББК 22.18

ISBN 978-617-7132-47-8

“ …. здатність вибирати – є дорогоцінна властивість розуму”

Т. Уайлдер

ВСТУП

Світ прийняття рішень пов'язаний з емоціями і розумом, тому при виборі людина апелює до суспільних цінностей, до загальних відчуттів, до релігійних переконань, до логіки, до оцінок очікуваних наслідків, до правових норм, до економічних законів, до етичних норм тощо.

Рішення, які приймаються як на рівні держав, так і на особистому рівні, оцінюються по тому, наскільки вдало, своєчасно і далекоглядно вони прийняті. Такі рішення, як правило, приймаються в умовах невизначеності, конфлікту і протидії. Тому виникає потреба у розробці методик кваліфікаційного аналізу, які дозволять правильно передбачити і оцінити наслідки багатьох рішень. Основою такого кваліфікаційного аналізу є знання і практичний досвід людини по прийняттю рішень.

Прийняття рішень – це особливий вид людської діяльності, який направлений на вибір способу досягнення поставленої цілі. В одному стародавньому прислів'ї говориться: «Єдина реальна проблема в житті полягає в тому, що потрібно вирішити, що робити далі». Прийняття рішення – це вибір, якого не вдається уникнути нікому і сама відмова від вибору є також вибір.

Все наше життя є сукупністю рішень, які ми приймаємо в діловій і особистій сферах. Сьогодні багато робиться в області дослідження проблем прийняття рішень, розроблено і описано багато різноманітних підходів, моделей, методів і алгоритмів для розв’язання різних класів задач прийняття рішень[1,7,13,17,20,24-28,39,40,43,103,105-107,109,117,119,121-124,126,130-134, 137,138,142,150,151].

У наш час людині на допомогу прийшла комп’ютерна техніка з її програмним інтерфейсом. Побудова і використання інтелектуальних систем у різних сферах людської діяльності є більше нормою, ніж виключенням, що дозволяє автоматизувати рутинну роботу людини, що «думає» при вирішенні різноманітних проблем. Але дані засоби є хорошим інструментом в умілих руках. Це і є передумовою необхідності застосування математики при здійсненні вибору.

Математичні моделі і методи, в даний момент часу, допомагають приймати як «оптимальні», так і «розумні» або «задовольняючі» рішення у складних, суперечливих і не до кінця визначених обставинах. Розумний вибір звичайно залежить від вдачі, але застосування системного аналізу і спеціальних методів, багатокритеріального аналізу варіантів суттєво підвищує його шанс на успіх. Застосування такого підходу і розробка таких методів дозволить людині виробляти правильну політику вибору та знаходити компроміс між бажаним і можливим.

На сьогоднішній день змінилось коло задач, які людина повинна розв'язувати у різних сферах своєї діяльності. Раніше люди могли приймати рішення, орієнтуючись на один-два, максимум 3-5, головних фактори, не враховуючи багато інших. Зараз ситуація змінилась, більшість задач є багатокритеріальними, в яких необхідно враховувати велику кількість факторів. У таких задачах людині приходиться оцінювати багато різних сил, впливів, інтересів і наслідків, які характеризують варіанти рішень. При реалізації задачі вибору виникає необхідність враховувати велику кількість суперечливих вимог, неоднозначність оцінки ситуації, помилки у виборі пріоритетів і, відповідно, оцінювати варіанти рішень по багатьох критеріях. В більшості випадків людина не може формально представити даний процес, хоча свою поведінку вважає раціональною, яка приносить їй найбільшу користь чи вигоду. І справа не в тому, що вона погано розуміє те, що робить, а в тому, що невизначеність і нечіткість лежать в самій природі прийняття рішень.

Розв'язання сучасних проблем в економіці, екології, політиці неможливе без застосування моделей, які описують суб'єктивне сприйняття людиною навколишньої дійсності. До таких моделей відносяться багатокритеріальні моделі, структура яких визначається як набір найбільш суттєвих властивостей (критеріїв) та зв’язків між ними. Клас проблем, який описується такими моделями, є найбільш поширеним на практиці, а їх вирішення найбільш складними у житті людей. Характерною особливістю багатьох практичних задач дослідження є їх велика розмірність, що веде за собою складність обробки інформації при знаходженні розв’язку. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними.

Класичні моделі прийняття рішень забезпечують хороший результат за наявності наступних умов: проблеми зрозумілі, цілі ясні, критерії і їх значимість узгоджені, альтернативи відомі, наслідки реалізації рішень передбачувані, особи, що приймають рішення мають всю необхідну інформацію. Як правило, у реальній практиці, такі умови практично не існують і прийняття оптимального рішення можливе дуже рідко, що обмежує можливості використання даної моделі.

Дослідження прийняття рішень у реальному світі показують, що не всі альтернативи відомі, інформація не про всі наслідки доступна, не всі переваги враховуються одночасно, а часто, і існуюча інформація не використовується повністю. Як правило, людина не володіє повною несуперечливою системою переваг і враховує лише частину своїх цілей. Інформація також обмежена відносно альтернативних варіантів і оцінок. Фактично, замість пошуку найкращого (оптимального) варіанту дій, індивід шукає варіант, який йому представляється (здається) досить хорошим.

Правила прийняття рішень, якими люди керуються на практиці, все більше наближаються до застосування концепції обмеженої раціональності, основний зміст якої полягає в тому, що людина є раціональною тільки за намірами, тобто люди намагаються бути раціональними, але їх пізнавальні здібності і доступна їм інформація обмежені. Інакше кажучи, людина має благі наміри і докладає максимальні зусилля, щоб бути раціональною, але її пізнавальні здібності і доступність інформації обмежені, що призводить до прийняття не раціональних рішень. Тому на практиці часто доцільно використовувати модель обмеженої раціональності, яка дозволяє приймати неоптимальне, а задовольняюче рішення, яке буде вважатись «досить хорошим».

Модель обмеженої раціональності запропонував і розвинув Нобелівський лауреат Герберт Саймон [127-129,148,149], котрий у своїх дослідженнях показав, що діяльність індивідів лежить у межах допустимої раціональності і припустимості. Він критикував модель «економічної людини», яка приймає у будь-яких ситуаціях оптимальне рішення, оскільки дана модель далека від реальності. Тому Г. Саймоном було введено модель «адміністративної людини», коли приймають рішення на основі спрощених представлень про реальність. Одним із основних елементів даної моделі є використання евристичного підходу для пошуку задовольняючого рішення.

За останні роки концепція обмеженої раціональності ввійшла у число найбільш розповсюджених теорій раціонального вибору, отримала широке визнання та застосування і зайняла домінуюче положення у багатьох теоріях індивідуального прийняття рішень. Дана концепція застосовувалась і застосовується в дослідженнях прийняття рішень у політиці, економіці, військовій справі, освіті та інших сферах.

В даній монографії, розглядаються моделі і методи побудови евристичних правил для багатокритеріальних задач вибору на скінченній множині альтернатив та задач векторного лінійного програмування через модель обмеженої раціональності та модель суперечливості критеріїв з використанням апарату нечітких множин.

Автор виражає щиросердечну подяку науковому редактору – професору, доктору технічних наук Волошину Олексію Федоровичу та рецензентам – професору, доктору технічних наук Зайченку Ю.П. та провідному науковому співробітнику, доктору фізико-математичних наук Семеновій Н.В.

Монографія присвячується моїм онукам: Володимиру, Миколі та Владиславі.

Розділ 1.

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ: ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ, ПРИНЦИПИ ТА ЗАДАЧІ

1.1. Вступ до теорії прийняття рішень

Засновником науки «Теорія прийняття рішень» можна вважати (інколи вважають) Жозефа Луї Лагранжа, який розв'язував задачу, зміст якої полягав в наступному: «скільки землі повинен брати землекоп на лопату, щоб його продуктивність була найбільшою». Наведемо основні поняття, які приводяться у літературі [1, 13, 25, 27, 28, 39, 40, 103, 109, 113, 115, 117, 122-123].

Теорія прийняття рішень(ТПР) – комплексна наукова дисципліна, що народилась та розвивалась в тенетах «Дослідження операцій» і направлена на розробку методів і засобів обґрунтованого вибору найкращого із наявних варіантів рішень. Основна парадигма ТПР – це системний підхід та системний аналіз.

Об'єктом дослідження ТПР є ситуація прийняття рішення, або так звана проблемна ситуація.

Предметом дослідження ТПР виступають загальні закономірності вироблення рішень у проблемних ситуаціях, а також закономірності, які властиві процесу моделювання основних елементів проблемної ситуації.

Практично всі наукові дослідження спираються на системний підхід і системний аналіз.

Системний підхід – це методологія дослідження об'єкта або процесу, на основі його цілісного сприйняття як множини елементів у сукупності їх відношень і взаємозв'язків між ними.

Системний аналіз – наукова методологія, яка займається проблемою прийняття рішень в умовах аналізу великої кількості інформації різної природи і базується на концепції систем.

Виходячи з основних принципів системного підходу, суспільство в загальному, можна змоделювати як простір, який складається із рішень і заповнений рішеннями. Частина цих рішень зафіксована за допомогою регламентуючої документації. Таким чином, приймаючи рішення, індивідуум знаходиться не у пустому просторі, а у просторі колись кимось прийнятих рішень. Тобто, він по неволі враховує попередню регламентацію. Це означає, що фактично старі рішення обумовлюють подальші.

Систематизуючи суспільство, можна сказати, що воно складається із організацій, організації із груп, групи із індивідів.

Під організацією будемо розуміти спільноту людей, які об’єднані загальними цілями і використовують загальні матеріальні і фінансові засоби для виробництва матеріальних та інформаційних продуктів і послуг.

Схематична модель (структура) представлена на рисунку 1.1.

З позиції системного аналізу можна вважати: будь-яка організація створена для вирішення проблемної ситуації деякої предметної області виходячи із певних цілей, які можуть бути самими різними при одному і тому ж предметі і умовах.

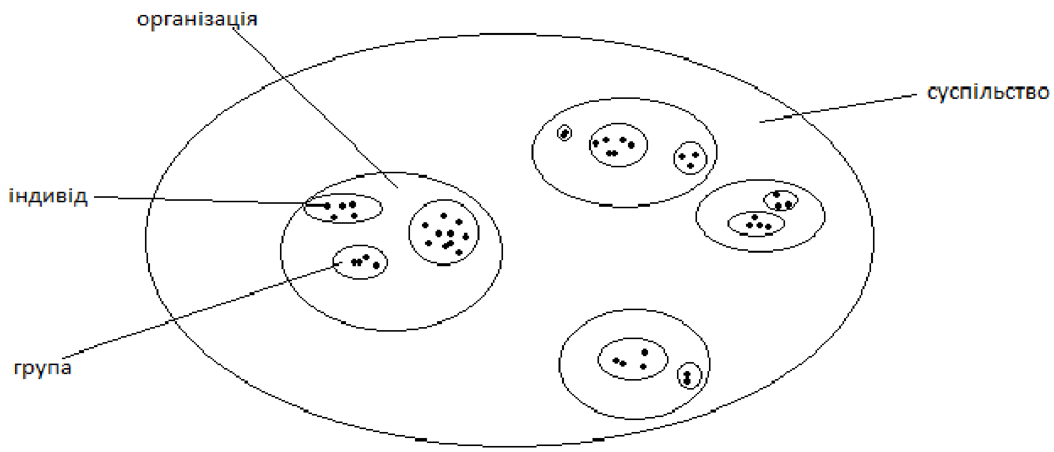


Рисунок 1.1. Структурна модель суспільства

Прийняття рішення людиною відбувається у всіх сферах її діяльності. Але у тих випадках, коли вирішення проблеми базується на законах фізики, хімії, механіки та інших фундаментальних знаннях, або коли задача може бути поставлена в термінах конкретного класу прикладних задач, для яких розроблено відповідний математичний апарат, застосовувати теорію прийняття рішень немає необхідності. Потреба у застосуванні цієї теорії виникає у тих випадках, коли задача настільки ускладнюється, що для її постановки і вирішення неможливо визначити підходящий апарат формалізації і даний процес потребує залучення спеціалістів з різних областей знань. У таких випадках виникає необхідність розробки спеціальних підходів, прийомів, методів, які б дозволяли визначити область проблемної ситуації і виявити фактори, які впливають на її вирішення, або поставити задачу таким чином, щоб рішення було прийнято.

1.2. Концепція прийняття рішень

На даний момент часу, в основі сучасної теорії прийняття рішень лежить комплексна концепція прийняття рішень, суть якої полягає у врахуванні всіх суттєвих аспектів проблемної ситуації і раціональної інтеграції як логічного мислення, так матеріальних і технічних засобів. Іншими словами, концепція прийняття рішення полягає в тому, що спочатку особа, що приймає рішення(ОПР), при необхідності і спеціалісти по проблемах прийняття рішень, змістовно аналізують проблемну ситуацію, що виникла і на основі своєї логіки і інтуїції формулюється ціль, досягнення якої, на їх думку, розв'яже проблему. Детальне представлення цілі і власних переваг дозволяє сформулювати способи її досягнення. Кінцевим результатом є обґрунтований вибір, що є на думку ОПР найкращим.

Застосування різних математичних підходів починається після формулювання цілі і закінчується пошуком оптимального рішення. Оптимальним вважається такий варіант, який забезпечує найкраще значення критерію або компромісне (узгоджене) значення всіх критеріїв (якщо їх декілька).

Як бачимо, в даній концепції провідна роль в процесі прийняття рішення відводиться суб'єкту, тобто ОПР, а математичні і технічні засоби розглядаються як допоміжний інструмент.

Наведемо основні напрямки, в яких ведуться дослідження у теорії прийняття рішень.

1. Математичний напрямок, який займається застосуванням різного математичного апарату для побудови та аналізу моделей вибору для багатокритеріальних моделей та моделей колективного вибору.
2. Нормативний підхід, який забезпечує суб'єкту, що приймає рішення, підтримку як у самому процесі, так і при розробці правила раціонального вибору.
3. Дескриптивний напрямок – це область психології, що описує і аналізує поведінку суб'єкта під час прийняття рішення.

1.3. Методологічні засади та засоби прийняття рішень

Прийняття рішень – це особливий вид людської діяльності, який направлений на вибір способу досягнення поставленої цілі. У всі часи людської історії прийняття рішень було однією з важливих сторін суспільної діяльності. Історія зберегла багато прикладів, які описують прийняті рішення великими полководцями, політиками, державними діячами, диктаторами і т.д. У всіх цих рішеннях – успішних і неуспішних, вдалих і недуже вдалих – відображається суперечлива природа людського розуму, його інтуїція, раціональний розрахунок, емоційний стан, логічне мислення. Таким чином, момент прийняття кінцевого рішення є складний психофізичний акт, який частіше за все не може бути пояснений з позиції строгих наукових теорій, оскільки людина у своїй поведінці буває ірраціональна, нелогічна, непередбачувана і може діяти навіть проти своїх власних позицій. Тому прийняття рішень розглядають як творчий акт вибору одного варіанту із декількох можливих, керуючись при цьому як кількісними і якісними оцінками, так і евристичними задатками людини приймати рішення.

Прийняття рішень базується не тільки на кількісних та якісних характеристиках, формалізованих методах, але і на фактах, які важко піддаються, або взагалі не піддаються формалізації, вимірюванню, кількісній оцінці, і відносяться до областей психології, соціології, етики, моралі, культури і т.д.

З формальної точки зору прийняття рішень представляє собою процеси перетворення, зберігання, переробки і передачі інформації.

Питаннями підготовки і прийняттям рішень на сьогоднішній день займаються різні науки, але найбільш активно за останні триста років займались математики і економісти. Представники різних наукових напрямів, виходячи із специфіки, намагались дати свої трактування поняттю «прийняття рішень». Так, математики розглядають прийняття рішень з позиції рекомендованих ними методів і алгоритмів; соціологи – з точки зору процесів, що протікають у суспільстві; психологи стараються «заглянути в душу людині», визначаючи мотиви прийняття того чи іншого рішення; економічна складова присутня практично в кожному рішенні – це питання раціонального розподілу і використання ресурсів, підвищення економічної ефективності діяльності тощо; юристи розглядають прийняття рішень з точки зору права, закону.

Поняття прийняття рішень можна трактувати таким чином: як процес, що протікає в часі і здійснюється в декілька етапів, як акт вибору найкращого варіанту рішення і як результат вибору, тоді це представляє собою інструкції до дій(план роботи, варіант проекту і т.д.)

1.4. Процес прийняття рішень

Будь-яка свідома людська діяльність реалізується за допомогою одного і того ж «технологічного» процесу – процесу прийняття рішень. Процес прийняття рішень є складовою частиною більш загального процесу – процесу вирішення проблеми. Проблему можна розглядати як стан, який не задовольняє людину. Тобто, розпізнавання та вирішення проблеми є постійним заняттям людей. Проблемна ситуація - це проблема при конкретних умовах. Вирішення складних проблем потребує застосування системного підходу, що уособлює наукову стратегію досягнення бажаного результату.

Виходячи з позиції системного аналізу, процес вирішення проблеми може бути представлений у загальному вигляді за допомогою наступних кроків:

1. Підготовчого – формулювання проблеми:
- усвідомлення та вивчення проблемної ситуації(аналіз ситуації);
- формулювання цілей;
- визначення обмежень на ресурси;
- формулювання альтернативи;
2. Вибору – прийняття рішення:
- формулювання критеріїв оцінювання результатів(альтернатив);
- оцінювання альтернатив та їх упорядкування;
- вибір та затвердження рішень;
3. Реалізація рішення:
- встановлення послідовності, термінів та способів виконання рішення;
- визначення виконавців та доведення до них рішень;
- забезпечення виконавців необхідними ресурсами;
4. Контролю та аналізу ефективності:
- організація контролю за виконанням рішення;
- облік, контроль і аналіз виконання рішення та його результатів;
- оцінювання ефективності результатів виконання рішення(при необхідності з подальшим переосмисленням проблемної ситуації).

Оскільки прийняття рішень відбувається у часі, тому вводиться поняття процес прийняття рішень, який складається із послідовних етапів і процедур направлених на усунення проблемної ситуації. Процес прийняття рішень, як правило, представляється у вигляді деяких ітераційних процедур, які в значній мірі використовують як чисто математичні, так і евристичні підходи. Сам процес прийняття рішень виражається в отриманні, переробці і передачі інформації, починаючи з виникнення проблемної ситуації і закінчуючи вибором рішення, тобто дії по вирішенню проблемної ситуації.

Багато авторів розглядають різні етапи прийняття рішень, але всі вони можуть бути зведені до наступних аналітичних процедур: діагноз проблеми;

формулювання обмежень (визначення множин альтернатив і критеріїв, тимчасові обмеження); оцінка і вибір альтернатив.

Розглянемо основні етапи різних рівнів абстрактного описання процесу прийняття рішень, яке проводиться на лінгвістичному рівні і використовує різні евристики (рисунок 1.2). Приведені етапи є деякими узагальненнями підходів і поглядів на процес прийняття рішення, які наведені, наприклад у роботах [13, 25, 103, 122, 126] .

У залежності від конкретних умов, в яких розглядається проблемна ситуація, процес прийняття рішень може бути більш деталізований. Охарактеризуємо кожний з цих етапів.

1. Отримання інформації. Для прийняття рішень необхідні різні директивні та нормативні матеріали, статистичні дані та інші. Інформація може бути отримана шляхом спостережень, або результатом спеціально організованого пошуку(експертизи) і за допомогою збору необхідних даних.

2. Аналіз інформації. Аналіз інформації проводиться в цілях відбору і впорядкування початкових даних і включає в себе ланцюг спеціальних операцій. Перш за все – це оцінка достовірності отриманих даних і виявлення можливих помилок; фільтрація даних; перевірка на узгоджуваність; отримання похідних даних; узагальнення і представлення даних у зручному вигляді для подальшого використання.

3. Виявлення проблемної ситуації та її змістовна постановка. Аналіз інформації дозволяє поставити множину проблем. Тому потрібно(необхідно) виявити саме ту ситуацію, ту сукупність умов, які породжують проблему, що розглядається. Таким чином, проводиться спряження ситуації і проблеми для визначення проблемної ситуації. Необхідно пам'ятати, як прийнято говорити, правильно сформулювати проблему – наполовину вирішити її.

4. Формулювання цілей. На даному кроці за допомогою аналізу і узагальнення багаточисленних потоків інформації індивід висуває глобальні цілі, які впорядковує за ступенем важливості, термінах реалізації тощо. Далі глобальні цілі деталізуються у підцілі і т.д. Всю виявлену сукупність цілей

рекомендується вписати в спеціальне дерево цілей, яке фіксує їх ієрархію, внутрішні зв'язки та підпорядкованість. Необхідно пам'ятати, що неправильний вибір цілей веде до неправильної постановки проблемної ситуації і що ціль – це антипод проблеми.

5. Визначення обмежень на ресурси. На даному кроці необхідно провести оцінку часу, за який потрібно вирішити проблему, визначити обмеження на всі засоби, які мають і можуть бути задіяні для вирішення проблеми. Це можуть бути ресурси технічні, фінансові, інформаційні та інші.

6. Формалізація задачі та побудова моделі. На цьому етапі на основі змістовної постановки задачі виконується її формалізація і розробляється модель задачі. Під моделлю будемо розуміти зручне представлення проблемної ситуації для її аналізу і синтезу. Тип моделі визначається питаннями, на які необхідно отримати відповіді за допомогою даної моделі і залежить від того об'єкту, за допомогою якого моделюється ситуація: процесу, системи, задачі або інших.

7. Формулювання альтернатив. В ідеалі необхідно виявити всі можливі альтернативні шляхи вирішення проблеми. Універсальних методів розробки альтернатив не існує. Лише в деяких випадках модель задає або необхідні і достатні умови для отримання всіх варіантів, або допустиму множину варіантів рішення. У загальному випадку ситуація настільки складна, що, щоб описати множину альтернатив, необхідно використовувати досвід, інтуїцію та знання багатьох людей.

Етапи 4-7 можна розглядати як ідентифікацію проблеми, тобто це її визначення або встановлення діагнозу – повного і правильного. Етапи, які належать до «Вибору», будуть описані в наступних розділах.

Як бачимо, прийняття рішень представляє собою складний процес, що містить ряд етапів, для описання яких на різних рівнях використовуються певні визначені поняття і конструкції.

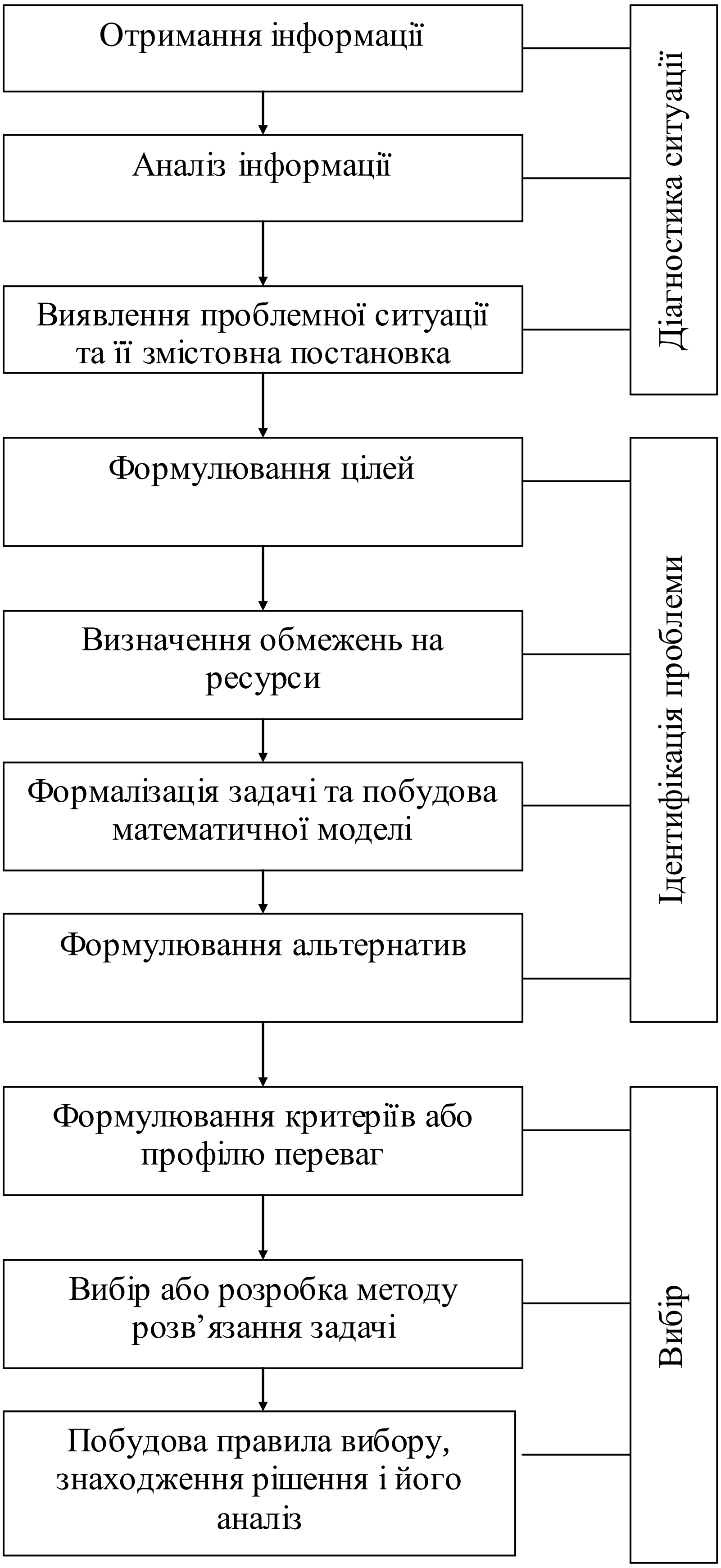


Рисунок 1.2. Етапи прийняття рішень.

Суть концептуального моделювання процесу прийняття рішень полягає у побудові моделі орієнтованої на розуміння людиною проблеми. Дана проблемна галузь має властиву їй систему понять знайому тільки відповідним професіоналам:

1. Дослідник (суб'єкт прийняття рішень):
   - особа, що приймає рішення;
   - особа, що формує рішення.
2. Система (об'єкт прийняття рішень).
3. Ціль.
4. Ресурси (обмеження).
5. Альтернативи.
6. Критерії (переваги, показники).
7. Модель.

Топологічну схему процесу прийняття рішень можна відобразити у вигляді, представленому на рисунку 1.3.

Рисунок 1.3. Топологічна схема процесу прийняття рішень.

1.5. Інформаційне забезпечення

Прийняття рішень має інформаційну природу, тобто при його здійснені обробляється велика кількість інформаційних потоків. З формальної точки зору, прийняття рішення представляє собою процес перетворення інформації про стан проблемної ситуації у деякі кількісні показники, які дозволяють направляти діяльність людини. Фактично процес прийняття рішення – це процес передачі, зберігання і переробки інформації, тобто інтелектуальна інформаційна технологія.

Інтелектуальні інформаційні технології формуються при створенні інформаційних систем і інформаційних технологій для різних предметних областей, що можуть виражатись у вигляді систем штучного інтелекту, систем (підтримки) прийняття рішень, інформаційно-аналітичних систем, експертних систем, які підвищують ефективність прийняття рішень в умовах, пов'язаних з виникненням проблемних ситуацій[110,111].

Різноманіття визначень інформаційних систем(ІС), що зустрічаються в різних джерелах, говорить про те, що не сформоване цілковите, задовольняюче всіх дослідників, її визначення. Приведемо одне із визначень інформаційної системи, що на нашу думку найбільш точно виражає її сутність.

Інформаційна система – взаємозв'язана сукупність засобів, методів і персоналу, які використовуються для збереження, обробки і видачі інформації в інтересах досягнення поставленої цілі.

По суті, інформаційна система повинна забезпечувати збір, збереження, обробку, пошук, видачу інформації, яка необхідна в процесі прийняття рішень для задач із будь-якої області.

Одним із різновидів інформаційних систем є система підтримки прийняття рішень.

Система підтримки прийняття рішень – сукупність організаційних, методичних, програмно-технічних, інформаційно-логічних і технологічних забезпечень прийняття рішень для досягнення поставлених цілей.

Оскільки прийняття рішення тісно переплітається з інформаційними технологіями, то на всіх етапах його моделювання завжди лежать такі базові поняття, як дані, інформація, знання, моніторинг, аналіз, прогнозування (передбачення), управління.

Зміст цих понять трактується неоднозначно. Тому ми наведемо їх визначення наступним чином.

Дані – синтаксичні сигнали, образи, які актуалізовані за допомогою деякого джерела, тобто це величини, які мають свій синтаксис і можуть зберігатись на деякому носієві або каналі передачі.

Інформація – це дані, в які вкладається зміст в залежності від потреби їх використання і які відповідають певному синтаксису і семантиці.

Знання – це сукупність інформації, про властивості об’єктів, закономірності процесів і явищ, а також правил використання цієї інформації для прийняття рішень для досягнення деякої цілі.

Схематично це можна відобразити наступним чином:

Інформація = Дані + Зміст,

Знання = Інформація + Ціль,

тоді

Знання = Дані + Зміст + Ціль.

Задачі обробки даних, інформації і знань мають свою визначену ієрархічну структуру (рисунок 1.4).

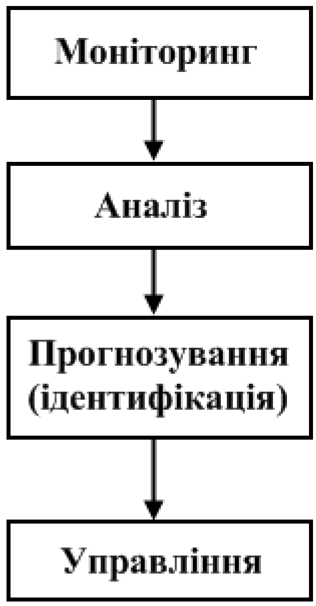


Рисунок 1.4.Стуктура обробки інформації.

Суть інформаційного моніторингу полягає у структуризації, накопиченні і розповсюдженні інформації. Тобто, моніторинг – систематичний збір і обробка інформації про об’єкт дослідження за рядом ключових показників, яка може бути використана для покращення процесу прийняття рішення.

Аналіз (генерація інформації) – це виявлення змісту у даних, тобто знаходження в них причинно-наслідкових зв’язків.

Прогнозування – це використання змісту інформації даної предметної області для передбачування об’єкта в умовах дії визначених факторів.

Управління (генерація знань) – перетворення інформації про стан об’єкта в командну інформацію від суб’єкта, тобто використання знань для прийняття рішень. Фактично управління – це вища форма обробки і використання інформації.

Важливою частиною процесу прийняття рішень являється підготовка інформації. Інформацію, яка надходить, не завжди можна використовувати для прийняття рішень. Тому спочатку її слід вважати даними або відомостями. Для того, щоб дані стали інформацією для прийняття рішень, необхідно вкласти в них зміст, тобто трансформувати.

На сьогоднішній день відомі такі функції трансформації:

- трансмісія – це передача інформації від одного пункту до іншого. Фактично інформація часто не доходить до адресанта, тобто втрачається;
- акумулювання – збереження даних у такому вигляді, щоб вони були доступні у будь-який час;
- агрегація – поділ всієї інформації на тематичні блоки, виділення найважливіших даних;
- аналіз – це логічний процес, в результаті якого виявляються зв’язки між різними явищами.

Виявлення взаємозалежностей служить для встановлення зв’язків між явищами, подіями і фактами.

Факт можна розглядати як квант змісту.

Зміст представляє собою “різницю потенціалів” між суміжними рівнями мислення (пізнання).

Мислення – процес, який складається з ряду взаємозв’язаних за змістом думок.

Думка є операція виявлення змісту із фактів.

Люди, які приймають рішення застосовують різні стратегії та схеми для того щоб справитись з труднощами, які пов’язані з обмеженнями їх здібностей у обробці інформації. Природою закладено певні біологічні обмеження на здібності людини при обробці інформації. До таких інформаційних обмежень належать обмеження на ресурси уваги, пам’яті, розуміння та спілкування.

1. Проблема уваги пов’язана з тим, що людина не може утримувати одночасно у полі зору багато(велику множину) об’єктів.

2. Проблема пам’яті обумовлена як здатністю зберігання інформації так і пошуком необхідної інформації у «сховищах даних».

3. Проблема розуміння випливає із того, що людина не здатна встановити причинно-наслідкові зв’язки між подіями і часто робить неправильні висновки із наявної інформації або є нездатною об’єднати різні частини цієї інформації, щоб надати їй зв’язаної інтерпретації.

4. Проблема спілкування полягає у обміні інформацією. На це впливають такі фактори, як мовний бар’єр, різні культури, різні покоління, професіоналізм спеціальностей тощо.

1.6. Психологічні аспекти прийняття рішень

Прийняття рішень – це вольовий акт, який веде до реалізації поставлених цілей на основі перетворення вхідної інформації. Прийняття рішень з одного боку можна розглядати як особливу форму розумової діяльності, з іншого боку, як один із етапів розумової діяльності при розв’язуванні конкретної задачі. При розробці і виборі рішення людина повинна мати у наявності інформацію про проблемну ситуацію. Основним постачальником і споживачем інформації є людина. Людський мозок отримує, обробляє і зберігає інформацію.

Прийняття рішень забезпечується діяльністю інтелекту, який складається в основному із сумісної роботи пам'яті, уваги і мислення[112].

Пам'ять лежить в основі будь-якого психічного явища. Тому вона дозволяє суб'єкту зв'язувати інформацію про минуле, сьогодення і майбутнє.

В залежності від часу зберігання інформації розрізняють декілька видів пам'яті:

- миттєву або сенсорну;
- короткочасну;
- оперативну;
- довготривалу.

На думку психологів, прийняття рішень зв'язано найбільше з оперативною пам'яттю, яка дозволяє утримувати для нього матеріал (інформацію). Оперативна пам'ять тісно зв'язана з довготривалою у відношенні циркуляції інформації, тобто з однієї сторони вона використовує частину інформації, яка зберігається в довгостроковій пам'яті, а з іншої – постійно її поповнює новою інформацією.

Як відомо з досліджень, проведених психологом Дж. Міллером [104], оперативна пам'ять може зберігати лише обмежену кількість інформації: не більше 7 ± 2 одиниці матеріалу, який називається чанками (від англ. слова chunk). Цей факт на основі експериментальних даних був опублікований у 1956 році та отримав назву закону Дж. Міллера.

Увага - також є компонентою інтелекту, яку розуміють, як зосередженість дій суб'єкта в даний момент часу на деякому предметі, події, образі і т. д. Увага – це динамічна сторона свідомості, яка необхідна для виконання визначеного акту діяльності індивідом. Концентрація уваги дозволяє особі, що приймає рішення, швидше і якісніше приймати рішення.

Процес, який забезпечує організацію і переробку інформації в пізнавальній діяльності людини, у психології називається мисленням. Мислення – це аналіз, синтез і узагальнення умов і вимог як до самої задачі так і до способів її розв'язання. При прийнятті рішення, ключовим кроком мислення є формування загальної схеми розв'язання проблеми і вибір одного із варіантів.

У психології розрізняють різні види мислення. Наприклад, наглядно-образне, словесно-образне, словесно-логічне і т. д. Крім того, розрізняють в деякому розумінні протилежні пари типів мислення. Наприклад, теоретичне і практичне, логічне та інтуїтивне, реалістичне та ауїстичне і т. д.

Поява проблемної ситуації перед людиною активізує мислення, як процес пошуку виходу із створеної ситуації.

1.7. Задачі прийняття рішень

1.7.1. Базові категорії понять, їх сутність та взаємозв'язок

Системний підхід – це методологія дослідження об'єкта або процесу, на основі його цілісного сприйняття як множини елементів у сукупності їх відношень і взаємозв'язків між ними.

Система – це об'єкт або процес, в якому елементи-учасники зв'язані деякими зв'язками і відношеннями.

Підсистема – частина системи з деякими зв'язками та деякими відношеннями і сама може являтись системою.

Наприклад, наука – система, яка забезпечує отримання, перевірку, фіксацію, актуалізацію знань суспільства. Підсистеми: математика, інформатика, фізика, хімія, економіка і т.д.

Стан системи – фіксація сукупності доступних системі ресурсів (матеріальних, енергетичних, інформаційних, людських і т.п.), які визначають її відношення до очікуваного результату або його образу.

Ціль(мета) – це образ не існуючого, але бажаного стану системи. Наприклад, основні соціально-економічні цілі суспільства: економічний ріст, повна трудова зайнятість населення, економічна ефективність виробництва, ріст валового продукту, стабільність цін і т.д.

Описання(специфікація) системи – це ідентифікація її визначаючих елементів і підсистем, їх взаємозв'язків, цілей, ресурсів, тобто описання допустимих станів системи.

Структура системи – це сукупність зв'язків і відношень між об'єктами, тобто це - порядок на множині об'єктів. Наприклад, державний устрій країни, університет, факультет. Базові топології структур систем: лінійна, ієрархічна (деревовидна), мережева, матрична. Прикладом лінійної структури можуть бути станції метро на одній гілці(не кільцевій) в одному напрямі. Ієрархічна структура: ректор – декани – завідувачі кафедрами. Мережеву структуру мають системи, де можливе розпаралелювання. Наприклад, навчальний процес у семестрі. Приклад матричної структури – оцінка знань студентів по дисциплінах. На основі базових топологій, за допомогою коректних об'єднань і вкладень, створюються нові структури систем.

Ситуація – сукупність умов, які виникають під впливом внутрішніх і зовнішніх дій.

Проблема – описання ситуації на змістовному рівні, в якому визначені ціль, результати, ресурси і стратегія досягнення цілі. Проблема – це різниця між дійсним і нормативним станами функціонування, як розглядуваного об'єкту, та і будь-якого його елемента.

Проблемна ситуація – це ситуація, яка перешкоджає нормальному функціонуванню розглядуваного об'єкта в цілому або його окремим елементам і визначає причини виникнення проблеми.

Діагностика проблеми – збір інформації про стан і особливості функціонування об'єкту і його елементів для виявлення проблемної ситуації.

Апаратна реалізація – це моделювання проблемної ситуації і способи роботи з даними моделями.

Практичне застосування – це предметні області і сфери людської діяльності.

Предметна область – частина реального світу, яка розглядається в межах визначеної області дослідження або області діяльності певного об'єкту.

Задача – деяка множина суджень(засад), описання цілей, або описання стратегій досягнення цілі.

Вирішити задачу – це означає визначити чітко ресурси і шляхи досягнення вказаної цілі при початкових умовах.

Рішення задачі – описання або представлення стану системи, при якому досягається вказана ціль. Рішенням задачі називають і сам процес знаходження цього стану.

Якщо вхідні судження, цілі, умови задачі, розв'язки або, можливо і саме вирішення проблеми, погано, недостатньо, частково описані, то такі задачі називаються погано формалізованими.

Невизначеність – це стан розуму приймаючого рішення суб'єкта або рівень його знань про конкретну ситуацію. Тобто, невизначеність являється не атрибутом проблемної ситуації, а знаннями суб'єкта про неї.

Поняття інформації – одне із основних і ключових понять не лише у системному аналізі, а і в інших галузях: математиці, інформатиці, економіці, політиці і т.д. Ми будемо розглядати дане поняття, виходячи із системного розуміння даної категорії. Розрізняють три типи інформації по відношенню до системи і про систему: вхідна, вихідна і внутрішня. Вхідна інформація – це та, яку система отримує з навколишнього середовища. Інформація, яку система видає навколишньому середовищу називається вихідною. Внутрішня – це внутрішньосистемна інформація, яка зберігається, переробляється, використовується в середині системи і актуалізується лише підсистемами системи.

Основні форми отримання і використання інформації.

Аналіз – розбиття системи на підсистеми з ціллю визначення їх взаємозв'язків.

Синтез – об'єднання підсистем у систему з ціллю визначення їх взаємозв'язків.

Декомпозиція – розбиття системи на підсистеми із збереженням їх взаємозв'язків з оточенням.

Композиція – об’єднання підсистем у систему із збереженням їх взаємозв’язків з оточенням.

Індукція – отримання знань про систему через знання про підсистеми.

Дедукція – отримання знань про підсистеми через знання про систему.

Формалізація – отримання знань про систему за допомогою мов штучного походження(знаків, формул і т.п.).

Евристика – це результат розумової діяльності людини поза формальними правилами, який має ясно виражений творчий характер. У більшості випадків, евристика – прийом, що дає змогу зменшувати кількість варіантів, які переглядають, розв’язуючи задачу.

Модель – це умовний образ (спрощене зображення) реального об’єкту (процесу), який створюється для більш глибокого вивчення дійсності. Побудова моделі – це системна задача, яка потребує аналізу і синтезу вхідних даних, гіпотез, теорій, знань спеціалістів. Системний підхід дозволяє не тільки побудувати модель реальної системи, але і використати дану модель для оцінки системи.

Моделювання – отримання інформації про об’єкт за допомогою моделі. Моделювання – це універсальний спосіб отримання, описання і використання знань про систему.

Актуалізація – отримання інформації за допомогою активації, ініціалізації змісту, тобто перевід системи із статичного(неактивованого) стану у динамічний(активований) стан із збереженням всіх взаємозв’язків і відношень з навколишнім середовищем.

Візуалізація – отримання інформації за допомогою наочного або візуального представлення стану актуалізованої системи.

Процес пізнання представляє собою ієрархічну структуру актуалізації інформації, в якій знання на кожному наступному рівні ієрархії є інтегральним результатом актуалізації знань попереднього рівня.

Наведена система понять і визначень використовується у літературних джерелах [1, 7, 13,17, 20, 24-28, 39. 40, 103. 109, 113, 122, 126,138].

1.7.2. Класифікація задач прийняття рішень

Задачу прийняття рішень(ЗПР) у найбільш загальному вигляді можна представити наступною системною моделлю:

$$\left\{S,\, t,\, Q \middle| C, B,\, A,\, A^*\right\}.$$

Відомими являються:

S – проблемна ситуація;

t – час для прийняття рішення;

Q – ресурси, які необхідні для прийняття рішення;

і невідомими:

C – множина цілей, які потрібно досягти при вирішенні проблеми;

B – множина обмежень на ресурси;

A – множина альтернативних варіантів вирішення проблемної ситуації;

A^* – оптимальне рішення.

Таким чином, знаючи проблемну ситуацію, час, який відведено на її вирішення та необхідні ресурси людина, що приймає рішення повинна визначити ціль або множину цілей вирішення проблемної ситуації, обмеження на ресурси, сформувати множину альтернативних рішень і виходячи з цього всього обрати оптимальне рішення.

Застосування універсального методологічного засобу системного аналізу до задач прийняття рішень дозволяє виділити п’ять логічних елементів. До них відносяться:

- цілі, ряд цілей, або система цілей;
- альтернативні засоби (або системи альтернатив), за допомогою яких може бути досягнута ціль;
- витрати ресурсів або обмеження для кожної системи;
- математичні і логічні моделі, які вказують на взаємозв’язок між системами цілей, альтернатив, ресурсів та навколишнього середовища;

– критерії або система критеріїв вибору переважаючої альтернативи, або спосіб за допомогою якого складають цілі і витрати.

Як бачимо із загальної постановки задачі прийняття рішень першим завданням, яке потрібно вирішувати є задача формулювання множини цілей або цілі для вирішення проблемної ситуації. Наступне завдання – це визначити множину обмежень для ресурсів, які будуть використані для вирішення проблемної ситуації. Далі потрібно сформулювати множину альтернативних варіантів рішень – це завдання є дуже складним і потребує залучення спеціалістів відповідної предметної області. Коли множина цілей визначена і множина альтернатив сформована, виникає завдання оцінки альтернатив для досягнення відповідних цілей. На цій фазі визначаються множина критеріїв, які описують відповідну ціль і за якими можна зробити оцінку кожної альтернативи, а також шкали значень, які можуть приймати оцінки по цих критеріях.

Наступною фазою є задача вибору оптимального варіанту рішення.
Структурна схема розв'язання задачі прийняття рішення представлена на рисунку 1.5.

На основі аналізу різних підходів[13, 25, 103, 137], наведемо ознаки, за якими можна провести класифікацію задач прийняття рішень:

1. Зв'язок між альтернативами і наслідками:
   - детермінований – вибір в умовах визначеності;
   - недетермінований – вибір в умовах невизначеності, ризику, нечіткості.
2. Експеримент для отримання інформації:
   - вибір за апріорними даними;
   - вибір за апостеріорними даними.
3. Кількість цілей:
   - однокритеріальні;
   - багатокритеріальні;
   - безкритеріальні (колективні рішення голосуванням).

Рисунок 1.5. Структурна схема розв'язання ЗПР

4. Кількість осіб, що приймають рішення:
   - задачі індивідуального вибору;
   - задачі колективного вибору.
5. Ступінь структуризації проблеми:
   - добре структуровані;
   - слабо структуровані;
   - неструктуровані.
6. За ступенем узгодження цілей:
   - кооперативний вибір;
   - компромісний вибір;
   - коаліційний вибір;
   - конфліктний вибір.

1.8. Моделі та їх аналіз

Під моделлю (modulus (лат.) – зразок, норма, міра) розуміють таку мислено представлену або матеріально реалізовану систему, яка в процесі пізнання, аналізу замінює реальний об'єкт (систему), зберігає деякі найбільш важливі для дослідження його риси, причому її вивчення дає зовсім нову інформацію про цей об'єкт.

Модель в загальному розумінні є створюваний з ціллю отримання і (або) зберігання інформації спеціальний об'єкт (у формі мисленого образу, описання знаковими засобами або матеріальної системи), який відображає властивості, характеристики і зв'язки об'єкта-оригінала довільної природи, властиві для задачі, яка розв'язується об'єктом.

Типи моделей:

- вербальні (словесні, описові);
- натуральні (макетування, фізичні моделі, масштабні моделі);
- знакові (основи класичної математики, хімічні і ядерні формули, графіки, схеми, креслення, топографічні карти).

Ділення моделей на типи є умовним так як існують змішані моделі, тобто не існує моделей без описової частини знаків і символів.

Всі типи моделей перед їх застосуванням необхідно наповнити інформацію. Так, для математичної моделі – це числові значення змінних величин, коефіцієнтів, параметрів, конкретні види функцій і операторів. Модель, яка наповнена інформацію вважають конкретною, інакше – теоретичною, абстрактною, системною. Процес наповнення моделі інформацією є не завжди простим, але є дуже важливим і відповідальним.

Найбільший інтерес представляють загальні моделі з достатньо високим рівнем абстракції. Такі моделі можуть самостійно вивчатися, аналізуватись та застосовуватись. Особливо широко розповсюджено і відомо дослідження та застосування абстрактних математичних моделей. Наприклад, моделі у виді наборів формул, систем лінійних і нелінійних, алгебраїчних рівнянь та нерівностей, диференціальних рівнянь, дискретних переходів, описання ігрових ситуацій і т. д. Можна говорити про ряд загальних моделей в хімії, фізиці, біології, економіці, воєнній справі[42, 134].

Методи, які базуються на розробці і використанні моделей, називають моделюванням. З філософської точки зору моделювання повинно починатися з наявності реально існуючих об'єктів моделювання. Тому аналіз процесу моделювання базується на наступних основних положеннях:

1. Модель являється відображенням реально існуючого об'єкту.
2. У моделі представленні лише основні, найбільш властиві для дослідження сторони об'єкту, що вивчається.
3. Модель завжди пропонує участь суб'єктові в її створенні, конструюванні, виборі.

Розвиток методів моделювання визначає розвиток будь-якої науки і має велике практичне значення. Їх необхідність обумовлена складністю, а часом і неможливістю прямого вивчення реального об'єкту чи процесу.

Практичну значимість моделювання можна виразити наступним чином:

– Моделі більш зручні для дослідження як самі об'єкти, деякі об'єкти можна вивчити лише по моделях.
– Моделювання являється інструментом, за допомогою якого можна глибоко вивчити реальність і найбільш властиві (суттєві) фактори об'єкта, що вивчається.

Методи моделювання і моделі можна класифікувати за ступенем детальності моделей, по характеру ознак, по сфері застосування і т.д.

Математичні моделі

Важливим видом знакових моделей являються математичні, які базуються на факті, що різні об'єкти і явища, що вивчаються можуть описуватись однаковими математичними формулами, рівняннями, нерівностями, перетворення яких відбувається на основі правил логіки і математики.

Математична модель задачі – це спеціальна логічна конструкція, яка цілеспрямовано описує в термінах математичної теорії об'єктивний процес або явище, які лежать в основі конкретної задачі. Процеси розв'язання такої моделі являються своєрідним аналогом мислячого процесу спеціаліста, який приймає рішення.

Оптимізація – це вибір кращого варіанту розв'язку. Не завжди оптимальне рішення є правильним. При оптимізації потрібно перебрати велику кількість варіантів за допустимий час. Тому, особливе значення тут мають розробка критеріїв ефективного пошуку оптимуму, звуження області пошуку до мінімального набору варіантів.

Математична модель системи – це сукупність математичних формул, таблиць, графіків, які встановлюють залежність між станом системи, зовнішніми взаємодіями, керуванням системою та часом. Іншими словами математична модель описує еволюцію системи в залежності від перерахованих факторів.

В залежності від виду математичних залежностей, які описують математичні моделі, характеру оптимізаційної задачі і виду цільової функції, можна розділити ці моделі на деякі групи:

- задачі (моделі), в яких множина альтернатив задана континуально, а критерії у вигляді цільових функцій аналітичного виду;
- задачі (моделі), в яких множина альтернатив задана дискретно, а критерії ефективності у вигляді оцінок.

Основні терміни математичного моделювання:

- Компоненти системи – частини системи, які можуть бути виділені із неї і розглядатися окремо;
- Незалежні змінні – це величини (зовнішні), які не залежать від процесів, які проходять у системі і можуть змінюватися;
- Залежні змінні – значення цих змінних є результат (функція, наслідки) впливу на систему незалежних змінних;
- Керуючі змінні – значення яких можуть змінюватись дослідником;
- Ендогенні змінні – їх значення визначаються в ході діяльності компонент системи;

– Екзогенні змінні – визначаються або дослідником або із зовні, тобто діють на систему із зовні.

Моделі можна розділити на наступні види:

1) Функціональні моделі – виражають пряму залежність між ендогенними і екзогенними змінними;
2) Балансові моделі – виражають зв’язок між ендогенними змінними.
3) Оптимізаційні моделі – залежність системи рівнянь і нерівностей між ендогенними змінними, але ціль – знайти оптимальне рішення для деякого економічного показника;
4) Імітаційні моделі – відображають досить точно економічні явища і містять складні нелінійні, стохастичні залежності.

Принципи побудови математичних моделей

Більшість практичних моделей розробляються згідно деяких принципів, які можна описати наступним чином:

1. Якщо структура системи (проблеми, задачі) досить проста і зрозуміла після дослідження, то можна використати раніше розроблену для подібної проблеми (системи) готову модель;
2. Якщо структура об’єкту дослідження досить очевидна, але її математичне описання неясне, тоді береться модель подібної системи і у неї вводяться відповідні змінні.
3. Якщо структура об’єкту не очевидна, але її можна вивчити за допомогою аналізу даних функціонування об’єкту, на основі якого формується гіпотеза будови структури об’єкту, дана гіпотеза провіряється, використовуючи експериментальні дані.
4. Якщо описові дані відсутні, або їх неможливо отримати, а проведення експериментів недопустимі (соціально-економічні задачі, воєнні тоді використовуються нові інформаційні підходи).

При побудові моделей виникають дві суперечливі вимоги:

– Розробити модель, на якій простіше всього отримати розв’язок задачі;
– Забезпечити максимально можливу точність розв’язку.

Для усунення даного протиріччя можна використати наступні підходи:

а) Виділення головних змінних (аналіз змінних);

б) Заміна природи змінних (замість змінних – константи, дискретних-неперервні і т. д.);

в) Заміна функціональних співвідношень між змінними (нелінійні на лінійні);

г) Модифікація обмежень (їх вид).

Методи знаходження розв'язків на моделі

Можливі (відомі) два методи отримання оптимального (або близького до нього) розв'язку за допомогою математичних моделей:

1. Аналітичний. Аналітичні розв'язки отримуються в абстрактному вигляді (математичний аналіз, матрична алгебра і для більшості задач і т. д.), тобто в загальному вигляді, що часто є неможливим. У такому випадку, якщо це можливо, то підстановка конкретних чисел замість символів виконується уже після того як отримано розв'язок.
2. Числовий. Числові методи розв'язання полягають у підборі різних числових значень керуючим змінним моделі і співставленню, отриманих результатів в результаті вибирається той набір числових значень, який дає найбільш вигідний розв'язок. Побудова таких процедур варіює від простого методу проб та помилок до складних інтерпретацій.

Основні властивості моделей[42]:

1. Лінійність або нелінійність. Це залежність між вхідними і вихідними параметрами. Лінійність може вважатися як натуральною так і "штучною" (вводиться з ціллю спрощення) властивістю моделі.
2. Неперервність або дискретність. Вона виражається в структурі множин (сукупностей), яким належать параметри стану системи. Важливою характеристикою дискретної моделі являється скінченність або нескінченність числа станів системи. Дискретність моделі також може бути як натуральною так і штучною внесеною особливістю. Наприклад,

бальна оцінка і заміна неперервної математичної функції на її набір значень у фіксованих точках.
3. Детермінованість або стохастичність. Якщо серед параметрів є випадкові, то така модель називається ймовірністю (випадкова, стохастична).
4. Стаціонарність і нестаціонарність. Залежить від часу. Статичні і динамічні моделі.

1.9. Структурування проблем за рівнями їх складності

Спроби застосування різних методів моделювання, а також моделей пов'язано з великими розбіжностями у природі проблем, що вивчаються. У зв'язку з цим, вперше, Г. Саймоном була запропонована класифікація проблем [148, 149]. Згідно цієї класифікації проблеми можна розбити на наступні класи:

1. Добре структуровані, або кількісно сформульовані. Це проблеми, в яких залежності вивчені настільки добре, що вони можуть бути виражені в числах або символах, які кінець кінців виражаються числовими оцінками.
2. Слабо структуровані, або змішані проблеми. Це проблеми, які містять як якісні, так і кількісні оцінки, але залежності між ними взагалі не можуть бути визначені на основі суб'єктивної інформації, що є у дослідника.
3. Неструктуровані, або якісно виражені проблеми (некількісні), містять лише описання або перелік основних ресурсів (параметрів), ознак, характеристик, але кількісні характеристики між ними невідомі і встановити практично неможливо.

У зв'язку з даною класифікацією можна вважати, що добре структуровані задачі відносяться до задач дослідження операцій, слабо структуровані – до задач прийняття рішень, а неструктуровані – штучного інтелекту.

Як бачимо, що від коректності постановки задачі, яка описує проблему, великою мірою залежить побудова (використання) тієї чи іншої моделі і отримання конструктивного розв'язку.

Труднощі, які виникають при розробці моделей в значній мірі зв'язані з рівнем складності проблеми, з чіткістю і точністю описань і формулювань, з ступенем структурованості і можливістю формалізації. В загальному випадку по складності проблеми діляться на рутинні, вибору, адаптовані і інноваційні.

Рутинні – це найменш складні проблеми. Для вирішення їх є наперед заготовлені розв'язки і єдиною трудністю при вирішенні таких проблем є розпізнавання ситуації, ідентифікація ситуації і відповідальність за вирішення.

Проблеми вибору являються проблемами другого рівня і вони характеризуються декількома альтернативними варіантами дій. При розв'язанні таких задач вимагається оцінка кожної з альтернатив по декількох критеріях і вибір напрямку дій, який забезпечує максимально привабливий, економічно-ефективний розв'язок. У таких задачах вимагається визначена ініціатива і свобода дій у межах заданих границь.

Адаптовані проблеми потребують розробки творчих рішень, які можуть бути зовсім новими. Мова йде про вирішення проблем, які існували раніше, але в іншій формі, в іншій ситуації, при інших умовах. Вирішення таких проблем залежить від ініціативи, активності і здібності побачити застосування провірених, старих можливостей.

Найбільш складними проблемами являються інноваційні. При вирішенні таких проблем необхідні підходи, які забезпечують деякі нововведення, тобто формування і реалізація нових раніше невідомих альтернатив. Найбільш сучасні проблеми такого рівня можуть вимагати для їх вирішення нових технологій, концепцій, інструментів або можливо нової галузі науки.

На сьогоднішній день існують два погляди, розуміння проблеми. Згідно першого – проблемою вважається ситуація, коли поставлені цілі не досягнуті або існує відхилення від заданого рівня. З іншого боку проблему можна розглядати як потенційну можливість підвищення якості, ефективності. Об'єднавши ці підходи до проблеми, будемо розуміти розбіжність між бажаним і реальним станом системи, процесу, ситуації.

Для того, щоб вирішити проблему, необхідно на першому кроці її правильно визначити і сформулювати. Як прийнято говорити, що правильно сформулювати проблему – це наполовину вирішити її. Тобто найважливішим етапом при розв'язуванні проблеми є її ідентифікація, яка включає в себе формулювання та побудову моделі.

Розпізнавання і вирішення проблем є постійне заняття людей. Вирішення проблеми ніколи не буває простою справою, тому людиною можуть бути використані наступні підходи [27, 103]:

– використання системного підходу до вирішення проблеми;
– підбір методів, які підходять до вирішення різних видів проблем;
– використання людей і ресурсів, які могли б допомогти у вирішенні проблеми.

Складовою частиною процесу вирішення проблеми являється процес прийняття рішень. У такому випадку, проблему можна розглядати як цілеспрямований стан, який не задовольняє людину, тобто існують два види стану – реальний (дійсний) і бажаний. Іншими словами, ціллю вирішення проблеми є досягнення бажаного стану досліджуваної ситуації. Сам процес прийняття рішень являє собою сукупність певних процедур (кроків), які направлені на відшукання розв'язків для конкретних задач або класу задач.

Приведемо найважливіші фактори, які впливають як на сам процес прийняття рішень так і на ситуацію вибору:

1) суб'єкт, що приймає рішення. Це може бути як одна людина так і група людей або колективний орган. У зв'язку з цим фактором розрізняються індивідуальні і колективні (групові) задачі вибору.
2) множина допустимих розв'язків (альтернатив). Ця множина повинна бути непуста. Множина допустимих розв'язків може бути дискретною або континуальною.
3) критерії ефективності, які можуть задаватися у вигляді оцінок, оцінюючих функціоналів, цільових функцій корисності. Критерії ефективності можуть бути задані у кількісній і якісній формі. Відносно критеріїв ефективності розрізняються однокритеріальні і багатокритеріальні задачі вибору.

4) правило вибору. Це принципи і методи вибору найкращої альтернативи з врахуванням вище перерахованих факторів процесу прийняття рішення. Кінцевим продуктом правила вибору може бути: як одна альтернатива так і деяка їх підмножина, або рекомендація до вирішення проблеми.

1.10. Типи розв'язків

Вирішення будь-якої проблеми залежить від її структуризації та формалізації. В залежності від ступеня структуризації проблемної ситуації та формалізації її моделі можна отримати результат різного вигляду. На кінцевий результат вирішення проблеми впливає багато суб'єктивних і об'єктивних факторів. Вплив цих факторів і приводить до визначення ознак, які впливають на топологію рішення. На сьогоднішній день розрізняються – оптимальні, ефективні, раціональні і задовольняючі розв'язки.

Оптимальний розв'язок, який базується на пошуку екстремуму, тобто розв'язок якому відповідає максимальне або мінімальне значення критерію вибору для індивідуального вибору або задовольняє принципу узгодження для колективного вибору. Як правило, це ситуації, які можна описати на мові критеріїв.

Ефективні розв'язки, як правило, зв'язані з моделюванням слабо структурованих проблем, тобто коли потрібно розв'язати задачу з багатьма суперечливими критеріями однакової важливості. Прикладом може служити модель "вартість – ефективність", або "вартість – вигода ".

Раціональний розв'язок з позиції теорії прийняття рішень трактується таким же чином, як у економіці. Раціональний розв'язок – це прийнятий кінцевий варіант суб'єктом, який на його думку, в найбільшій степені відповідає його системі переваг, або максимізує (мінімізує) його цільову функції. Прикладом може служити модель «економічна людина» та її розв'язок [21, 102]. Суть даної моделі полягає у наступному:

1. Економічна людина знаходиться в ситуації, коли вона не може одночасно задовольнити всі свої можливості, тобто кількість допустимих ресурсів обмежена і вона повинна робити вибір.
2. Фактори, які обумовлюють цей вибір, розділяються на дві протилежності: переваги і обмеження. Переваги характеризують суб'єктивні потреби, а обмеження – об'єктивні можливості. В економічній науці переваги вважаються більш стійкими ніж обмеження і розглядаються як постійні. Процес їх формування і вивчає реакцію індивіда на зміну обмежень.
3. Альтернативи завжди повинні бути порівнюваними.
4. Здійснюючи вибір, індивід керується власними перевагами, які базуються на своїх інтересах, що дозволяє давати оцінку своїм майбутнім вчинкам виключно на їх наслідках, а не по початковому задуму або обов'язку.
5. Інформація про всі доступні варіанти дій і їх наслідки, а також час, необхідний для прийняття рішень, являються ресурсними обмеженнями, а затрати на їх пошук – одним із вартісних обмежень.

У суспільних науках раціональна поведінка людини трактується як розумне, адекватне даній ситуації. Критерій раціональності являється інтуїтивним, змістовним, що дозволяє його віднести не тільки до засобів, а і до цілей поведінки. Якщо проблема вибору, при наявності повної інформації у вигляді моделі векторної оптимізації, то її розв'язок можна розглядати раціональним, тобто "кращим" з точки зору суб'єкта, що приймає рішення. "Кращий" розв'язок – це найбільш корисний розв'язок з позиції "раціональної" людини. У випадку, якщо проблема вибору розглядається в умовах неповної інформації, то раціональний розв'язок асоціюється з теорією очікуваної корисності Дж. Фон Неймана і О. Моргенштейна, що є універсальною парадигмою для таких розв'язків. Суть цієї теорії полягає у тому, що суб'єкту наперед відома корисність кожного наслідку і він може визначити ймовірність його появи. Тоді очікувана корисність визначається як сума корисностей всіх можливих наслідків, зважених по їх ймовірностях (для кожного варіанту).

На противагу оптимальному розв’язку Г. Саймоном було введено поняття задовольняючого розв’язку [127-129,148,149]. Дана ідея продиктована розв’язанням реальних проблем в організаціях і фірмах. Саме життя заставляє людей шукати задовольняючі розв’язки, тобто виникнення складних ситуацій, які характеризуються наступними чинниками: ситуація в організаціях (фірмах) може бути настільки складною, що її неможливо добре і швидко описати моделлю; критерії не до кінця визначені і їх багато, існує багато груп, які впливають на вибір; немає готових альтернатив, їх потрібно шукати самому; крім того не відомо чи у процесі пошуку варіантів можна максимізувати корисність; немає необхідної інформації про наслідки, функцію корисності, а інколи багато інформації для обмежених можливостей її обробки; багато невизначеної і нечіткої інформації і т.д. Тому із вище сказаного, особа, що приймає рішення, не може вибрати варіант, який би був оптимальним, або ефективним, або раціональним із наявного набору альтернатив. Суть теорії Г. Саймона полягає у тому, що пошук суб’єктом ведеться до першого задовольняючого варіанту, тобто у кожний момент у людини є деякі міркування про те, на що вона може розраховувати. Фактично теорія Г. Саймона базується на парадигмі, що із обмеження інформації випливає обмеженість раціональності. Вибір задовольняючого варіанту потребує від індивідуума на багато менше інформації і аналітики, як наприклад, в моделі очікуваної корисності (модель Неймана-Моргенштейна). Даний підхід не потребує порівняння варіантів між собою, а потребує лише інтуїтивне представлення, що даний варіант вище або нижче допустимого рівня абстрактного, але за те є універсальним і залишається єдиною альтернативою у максимізаційній моделі.

Розв’язок, який базується на судженнях – це розв’язок, який вибраний на основі логічності і послідовності суджень та здорового глузду. Інтуїтивний розв’язок визначається як несвідомий умовивід, тобто суб’єкт може не усвідомлювати деяку частину або весь процес вибору. Інтуїтивний розв’язок проблеми створює можливість творчого вибору, тобто знаходження нових, нестандартних розв'язків проблеми.

Узагальненою характеристикою будь-якого розв'язку є його ефективність, зміст якого включає ефект рішення, що визначає відношення ступеня досягнення цілей до витрат на їх досягнення. Розв'язок вважається тим ефективнішим, чим більша ступінь досягнення цілей або менші затрати на їх досягнення.

Розділ 2.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

2.1. Багатокритеріальні задачі прийняття рішень

Характерною особливістю задач прийняття рішень, які доводиться вирішувати на практиці, являється багатокритеріальність. Суть багатокритеріальності означає, що будь яке практичне вирішення проблеми приводить до появи альтернативних рішень, наслідки яких залежать від декількох вихідних характеристик, які впливають на кінцевий результат. Тому, при порівнянні альтернативних рішень потрібно враховувати внесок кожної із цих характеристик. Такі характеристики, як правило, називають або критеріями оцінювання ефективності альтернативних рішень або просто критеріями ефективності. Багатокритеріальність викликає труднощі розв'язання задачі вибору, особливо у тих випадках, коли одна альтернатива переважає іншу за однією групою критеріїв, але поступається їй за іншою.

Багатокритеріальний аналіз – структурний процес, який визначає множину критеріїв, за допомогою яких будуть оцінюватись альтернативні рішення і визначатись їх відносна важливість. Слово критерій походить від грецького, що означає мірило оцінки об'єкта (предмета, альтернативи). Критерій у теорії прийняття рішень розглядається як показник і як модель задання переваги. Показник вимірює властивості альтернативи і може приймати кількісні, якісні або бінарні значення. Наприклад, вага, ціна, якість, компетентність, належність і т. п. Критерій як модель задання переваги – це правило, алгоритм, логічне співставлення об'єктів, яке інтерпретується як принцип оптимальності. Кожен критерій має напрям переваги (min/max). Тобто, критерій – це якісне або кількісне, або мовне (в математичному описанні) представлення, яке при функціонуванні будь-якої системи самозадовольняється шляхом мінімізації або максимізації.

Відомим є той факт, що багатокритеріальна задача може бути представлена у вигляді ієрархічної системи, на нижньому рівні якої відбувається оцінка об’єкта за окремими властивостями, а на верхньому рівні отримується оцінка об’єкта в цілому за допомогою певної їх згортки[76].

Задача прийняття рішень буде вирішена, якщо будуть здійснені наступні три процедури – багатокритеріальний аналіз, генерація допустимої множини альтернатив і побудова правила вибору(принципу оптимальності).

Різні підходи, методи і алгоритми розв’язування багатокритеріальних задач вибору описані у роботах [1,7, 12, 15, 17, 20-28, 39, 40, 43, 103, 105 – 111, 113, 114, 117, 119, 121 – 124, 126, 130-133, 137, 138].

2.2. Ієрархія. Основні положення

Виходячи із принципів системного аналізу, процес прийняття рішень має ієрархічну будову, тобто наявність множини елементів різних рівнів із відповідним підпорядкуванням. Основною закономірністю таких систем являється ієрархічна структура їх загального розташування на багатьох рівнях[142].

Основними характеристиками систем із ієрархічною структурою можна вважати: послідовне вертикальне розміщення підсистем (вертикальна декомпозиція); права впливу підсистем верхнього рівня або пріоритетне право; залежність підсистем верхнього рівня від підсистем нижнього рівня через їх функціональне виконання.

Вертикальне підпорядкування означає, що будь-яка ієрархія представлена сукупністю взаємодіючих підсистем. Під ”системою” або ”підсистемою” можна розуміти і блоки переробки вхідної інформації у вихідну.

Право впливу означає, що на діяльність підсистеми будь-якого рівня безпосередньо і явно діють вищі рівні, частіше всього ближчий старший рівень. Ця дія носить обов‘язковий характер для підсистем нижчого рівня, оскільки через неї виражається пріоритет дій і цілей більш високих рівнів.

Взаємозалежність дій означає, що крім права впливу у вигляді наказів і команд, існує обернений зв‘язок знизу вгору між елементами системи. Успіх роботи верхнього рівня залежить і від сумарного ефекту роботи підсистем нижнього рівня .

Приведемо класифікацію видів ієрархії згідно М.Д. Месаровича [101]. Відомо, що класифікацію не потрібно розуміти як строгий поділ, а лише як відмінності структур, які не виключають можливості існування систем, що одночасно належать до декількох класів.

М.Д. Месарович вводить три поняття рівнів:

а. Рівень ”страт” – описання та абстрагування;

б. Рівень ”шар” – складність;

в. Рівень ”ешелон” – організація.

Зупинимося на їх короткому описанню. Рівень ”страт” задається сукупністю моделей, кожна з яких на абстрактному рівні описує поведінку системи в цілому.

Рівень ”шар” полягає в декомпозиції складної проблеми прийняття рішень на послідовність більш простих підпроблем за таким правилом, щоб розв‘язок всіх підпроблем дозволяв розв‘язати початкову проблему.

За рівнем ”ешелон” система розбивається на чітко виділені взаємодіючі підсистеми, а кожна підсистема теж може розглядатися як окрема система зі своїми оберненими зв‘язками, тобто задаватися у вигляді деревоподібної структури.

Введення поняття рівнів використовується при описанні ієрархічних систем. Застосування будь-якого поняття має свою область використання. Наприклад, концепція ”страт” може бути використана для моделювання цілей (задач, процесів, станів) прийняття рішень; концепція ”шар” – для вертикальної декомпозиції задач, цілей, критеріїв прийняття рішень; концепція ”ешелон” вказує на взаємозв‘язки між елементами прийняття рішень.

На практиці часто зустрічаються випадки, коли багатошарова ієрархія вкладена в багато ешелонну систему, тобто кожний приймаючий рішення елемент використовує багатошаровий підхід для вирішення власних проблем – локальних проблем.

Найбільш типовою і простою структурою ієрархії є дворівнева, яка має лише один вище стоячий координуючий елемент і ***n*** підлеглих йому нижче стоячих елементів (рисунок 2.1). Така структура дозволяє будувати будь-які багаторівневі ієрархії з дворівневими підсистемами, як із окремих модулів.

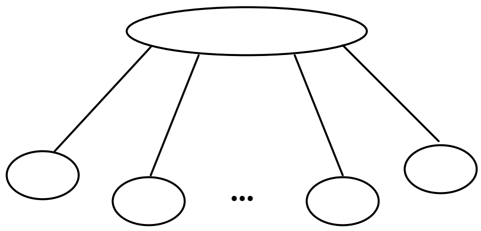


Рисунок 2.1. Дворівнева ієрархічна структура

2.3. Прийняття рішень, як система ієрархічної структури

Використаємо вище наведені поняття рівнів ієрархії для загальної задачі прийняття рішень (процесу прийняття рішень).

Застосувавши концепцію ”страт”, загальну задачу прийняття рішень можна стратифіковано(у вигляді рівнів) описати наступним чином:

- вивчення проблеми – пошук інформації і постановка задачі;
- побудова множини альтернатив та їх наслідків;
- задача вибору.

Кожен із цих рівнів є надзвичайно складною задачею, але якщо перші два можна вважати досить формальними (абстрактними), то третій рівень ”Задача вибору” пов‘язаний з математичними труднощами розв‘язання задач, що при цьому виникають.

Дамо коротку характеристику даним рівням. Страта ”Вивчення проблеми” включає в себе вирішення проблем пошуку інформації. На цьому рівні збирається вся доступна інформація на момент прийняття рішення, тобто фактичні дані, думки експертів, будуються математичні моделі, проводяться соціологічні дослідження, визначаються погляди на проблему зі сторони активних груп, які впливають на її розв‘язування, визначаються мета (ціль) та засоби її досягнення, формується множина критеріїв і т.д. На основі цих даних формулюється постановка задачі.

Страта ”Побудова множини альтернатив” визначає, що можна, а чого не можна робити в даній ситуації, тобто визначаються варіанти рішень (альтернативи) та їх можливі наслідки і взаємозв‘язки між ними. На даний момент часу відомі три типи залежностей між альтернативами та їх наслідками [103].

Найпростіший тип залежності – це функціональний (детермінований), коли кожній альтернативі відповідає єдиний наслідок. Такі задачі прийняття рішень називаються задачами в умовах визначеності.

Якщо між альтернативами і наслідками не існує функціональної залежності, тобто вибрана альтернатива може призвести до множини наслідків (такий тип залежності називається недетермінованим), то такі задачі прийняття рішень називаються задачами в умовах невизначеності. Невизначеність в основному є проявом природи, але може бути впливом інших ОПР, що мають свої цілі. Тоді така задача називається задачею в умовах конфлікту.

Існують випадки, коли множини альтернатив і наслідків та зв‘язок між ними описуються нечітко. Такі задачі називаються в умовах нечіткої інформації. Нечіткість, як правило, є проявом суб‘єктивності експертів, аналітиків, ОПР, які формулюють задачу прийняття рішень.

Найбільш цікавою є страта ”Задача вибору. Прийняття рішення”. Науковий аналіз проблеми починається з моменту, коли множини альтернатив і критеріїв відомі. Таким чином, даний рівень включає в себе порівняння альтернатив і вибір найкращого варіанта (варіантів) розв‘язку. На цьому рівні повинні бути розв‘язані задачі визначення принципу оптимальності та структурування множини критеріїв і альтернатив, що включає в себе: стратифікацію, кластеризацію, впорядкування, виділення кращої.

Розглянемо більш детально рівень ”Задача вибору” оскільки від правильного його розв‘язання буде залежати кінцевий результат поставленої проблеми (мети).

Задача вибору фактично може бути представлена у вигляді ієрархічної моделі наступного вигляду(рисунок 2.2.)[80].

Рисунок 2.2. Ієрархічна модель задачі вибору

Кожний верхній рівень накладає вимоги і обмеження на функціонування моделей нижніх рівнів. Моделі нижніх рівнів у свою чергу визначають границі функціональних можливостей для моделей верхніх рівнів.

Для рівнів ”Цілі” і ”Критерії” можна застосувати багатоешелонну організацію, тобто ці два рівні можна представити у вигляді деревовидної ієрархічної структури з оберненими зв‘язками.

2.4. Ієрархія цілей і критеріїв

2.4.1. Цілі та їх особливості

У повсякденному житті людина постійно зустрічається із ситуаціями, які пов’язані з необхідністю цілеспрямованого вибору деякого варіанту поведінки, поступку, акту дій тощо із множини можливих варіантів даної конкретної ситуації.

Вибір являється дією, яка придає всій діяльності людини цілеспрямованість. Фактично, вибір реалізовує підпорядкування всієї діяльності визначеній певним чином цілі або сукупності цілей.

Ціль випливає із виникнення проблеми. Ціль – це суб'єктивний образ (абстрактна модель) неіснуючого, але бажаного стану середовища, яке б вирішувало проблему. З іншої сторони, ціль – це стан, до якого прямує зміна об'єкту. Ціль у теорії прийняття рішень визначається надзвичайно різними способами. Аналізуючи різні джерела, наведемо деякі визначення цілі.

Ціль – це результат, на досягнення якого направлені всі зусилля.

Ціль – це початковий етап розробки рішення.

Ціль визначає вибір варіанта рішення.

Ціль – основа контролю за виконанням рішення.

Ціль визначає критерії оцінки ефективності рішень.

Ціль без рішення є безкорисна.

Ціль – це бажаний стан або результат діяльності системи.

Класифікувати цілі можна за такими ознаками:

1. Рівень стабільності (стабілізація, розвиток);
2. Степінь впливу (стратегічні (довгострокові), тактичні (середньострокові), оперативні (поточні));
3. За змістом (соціальні, економічні, технічні, політичні, воєнні і т.д.);
4. За функціональністю (фінансові, виробничі, кадрові, маркетингові, забезпечуючі та інші);
5. За рівнем управління (державні, регіональні, на рівні організації, всередині організацій);
6. За функціями керування (планові, організаційні, мотиваційні, контрольні);
7. За ступенем важливості (життєвоважливі, альтернативні);
8. За ступенем секретності (відкриті, закриті);
9. За суттю (сумісні, несумісні, суперечливі).

Визначаючий принцип системного аналізу – це цілеспрямованість. Тобто, ціль повинна бути: досяжною, відповідати реальній ситуації і мати відповідні ресурси; ясною і стійкою, а не невизначеною і аморфною; не повинна конкурувати з іншими цілями.

Особливості цілей диктують і способи їх досягнення. В залежності від характеру цілі будується відповідно і тип рішення і спосіб його досягнення. Фактично рішення – це механізм реалізації цілей.

По характеру цілей можна розрізняти рішення:

- прості, для них тип рішення «робити – це робити», способи їх реалізації – підкидання монети, анкетне опитування, оцінка кількісних показників;
- помірковано складні, тип рішення – два варіанти, способи реалізації: 10-бальна рейтингова система, таблиця Біфранкліна, аналітично-цифровий метод;
- складні, рішення з багатьма варіантами, реалізація – це співставлення варіантів на основі оцінки цілей і ймовірності їх досягнення.

Як відомо, задача прийняття рішень (ЗПР) формально може бути сформульована у термінах ціль – засоби – результат та їх взаємозв‘язки.

Категорія ціль може визначатися по різному. Наприклад, у роботі Кінні і Райфа [28], ціль вказує загальний напрямок руху для досягнення кращого результату або ціль – це ідеальне представлення бажаного результату стану або результату діяльності.

Як показано в роботі [137], в деяких випадках для ОПР поняття головної цілі ближче ніж поняття критерію. Таким чином, опишемо підхід, який описаний у роботі [137] для середовища цілей. Суть даного підходу полягає в тому, що головна ціль розбивається на підцілі, які в свою чергу теж можуть розбиватися на свої підцілі і т.д. Тобто, застосовано прийом побудови ієрархії цілей, який полягає у декомпозиції головної цілі на підцілі. На наступному кроці побудови ієрархії цілей виникає проблема розв‘язання багатьох складних задач:

— визначення черговості досягнення допоміжних цілей для досягнення головної;

— існування порогових цілей, тобто підцілей, які впливають на головну ціль лише при умові їх повного досягнення, коли будь-який проміжний результат не задовольняє головну ціль;

— суперечливість підцілей, тобто коли досягнення однієї підцілі негативно впливає на досягнення іншої. Такі приклади часто зустрічаються при розв‘язанні соціально-економічних проблем. Таким чином, в ієрархії цілей існують як стимулюючі, так і пригнічуючі (негативні) прямі і обернені зв‘язки;

— проблема наявності декількох типів цілей, які відрізняються умовами їх досягнення. Тут виникає задача визначення коефіцієнтів впливу різних типів цілей.

— на кінець, в ієрархії можуть бути цілі, досягнення яких відбувається різними способами, тобто існують різні альтернативні групи підцілей.

Ієрархію цілей будують експерти і вона задається орієнтованим графом, вершини якого є цілями, а дуги відображають вплив досягнення одних цілей на досягнення інших. Оскільки одна і та ж підціль позитивно впливає на досягнення одних підцілей і негативно – на досягнення інших, то граф ієрархії є односторонньо зв‘язним і у загальному випадку є мережею, тому для нього не існує вершин одного рівня.

Для розв‘язування задачі вибору фактично необхідно занурити систему цілей у середовище критеріального простору і подіяти на множину альтернатив для отримання їх критеріальних оцінок. Виконання даної процедури дозволяє отримати дворівневу ієрархічну систему прийняття рішень, де у вершині знаходиться головна ціль, а на другому рівні – підцілі, які і забезпечують досягнення головної цілі[76]. Головна ціль може описуватись множиною критеріїв, які можуть і мають право переходити у множину підцілей не обов‘язково всією множиною, а її частинами. Кожна підціль може описуватись також і своєю множиною критеріїв. Тому є можливість створення (побудови) універсальної множини критеріїв для оцінки варіантів (альтернатив) прийняття рішення.

2.4.2. Взаємозв'язок цілей і критеріїв

Для вирішення проблемної ситуації недостатньо сформулювати лише цілі, а необхідно сформувати систему критеріїв, за допомогою яких можна оцінити степінь досягнення цілі.

При здійсненні акту вибору необхідно мати вираз, який зв'язує ціль із засобами її досягнення. Тобто, кожній цілі повинен відповідати критерій або сукупність критеріїв, за допомогою яких може бути оцінена степінь її досягнення. У різних сферах діяльності використовуються різні назви, наприклад, критерій функціонування, критерій ефективності, цільова або критеріальна функція, функція цілі і т.д., але вибору не існує, якщо немає з чого вибирати, тобто повинна бути відома множина альтернативних варіантів.

Для того, щоб система цілей була вимірюваною, необхідно, щоб існував набір критеріїв і кожному критерію існувала відповідна шкала, яка дозволяє визначити степінь досягнення кожної цілі.

Як показує практика, критерій з одної сторони повинен дозволяти адекватно відображати степінь досягнення цілі, а з іншого боку – бути вимірним, тобто це може бути кількісний, або якісний, або булевий показник. Наприклад, кількісні – фінансові затрати, прибуток, термін виконання, трудомісткість і т.д.; якісні – рівень престижу, рівень конкурентоздатності, дизайн і т.д., булеві – відповідальність вимогам, часу, терміну і т.п.

Формування ієрархії (дерева) критеріїв найбільш доцільно паралельно з формуванням дерева цілей, що забезпечує більш точне визначення цілей усунення проблеми.

В основному будь-яке рішення оцінюється за допомогою багатьох критеріїв.

Ряд авторів [1, 13, 28, 43, 105, 117, 137] розділяють критерій і показник. Вони відмічають, що критерій – це єдиний признак, на основі якого проводиться оцінка об'єкту, а під показником розуміють локальну міру, яка кількісно виражає степінь досягнення цілі. Інші автори [103, 113, 122, 123] говорять про загальні (інтегральні) та часткові критерії.

Критерії та їх характеристики

Критерій – це математична модель, яка відображає відчуття, бажання, стимул, мотив, суть та інші змінні (прості та узагальнені) стану об‘єкта. Як показано в роботі [137], лише в деяких випадках для ОПР поняття головної цілі ближче, ніж поняття критерію. В більшості випадків, наприклад, в економічних системах, показником повноти досягнення цілі є сукупність критеріїв (показників). Тому, вибір сукупності показників-критеріїв ефективності є заключним етапом у формулюванні цілей для задач вибору. Схематично це можна відобразити так, як показано на рисунку 2.3. Серед показників можна виділити наступні: економічні, технічні, правові, екологічні, соціальні, юридичні, психологічні і т.д. Деякі з цих показників дозволяють оцінити ціль по суті, тобто виявити її найбільш суттєві сторони. Такі показники будемо називати критеріями ефективності.

Поряд з терміном «критерій» використовуються такі терміни як «фактор», «показник», «індикатор», «частковий критерій» і т.д.

Як показує практика, ні показники, ні критерії не сприймаються ОПР безпосередньо. Ознака, за якою безпосередньо оцінюється ступінь вираженості показника або критерію, називається індикатором. Будь-який критерій або показник, в залежності від своєї складності, можуть оцінюватися за декількома і рідше за одним-двома індикаторами (підкритеріями).

Таким чином, тріада – критерій, показник, індикатор – повинні розроблятися (використовуватися) при оцінці будь-якого об‘єкту, процесу, явища навколишнього середовища, тому що не існує іншого способу оцінки в навколишньому світі. Якщо ми цього не помічаємо, то критерії, показники, індикатори є настільки звичними, що вони існують (усвідомлюються) на рівні безсвідомого. Звідси випливає, що можна розглядати систему критеріїв, елементами якої є критерії, показники і індикатори, як систему, що носить ієрархічний характер і має відповідно ієрархічну структуру.

Виходячи з вище сказаного, оцінка досягнення цілі може бути представлена у вигляді трирівневого критеріального дерева (рисунок 2.3).

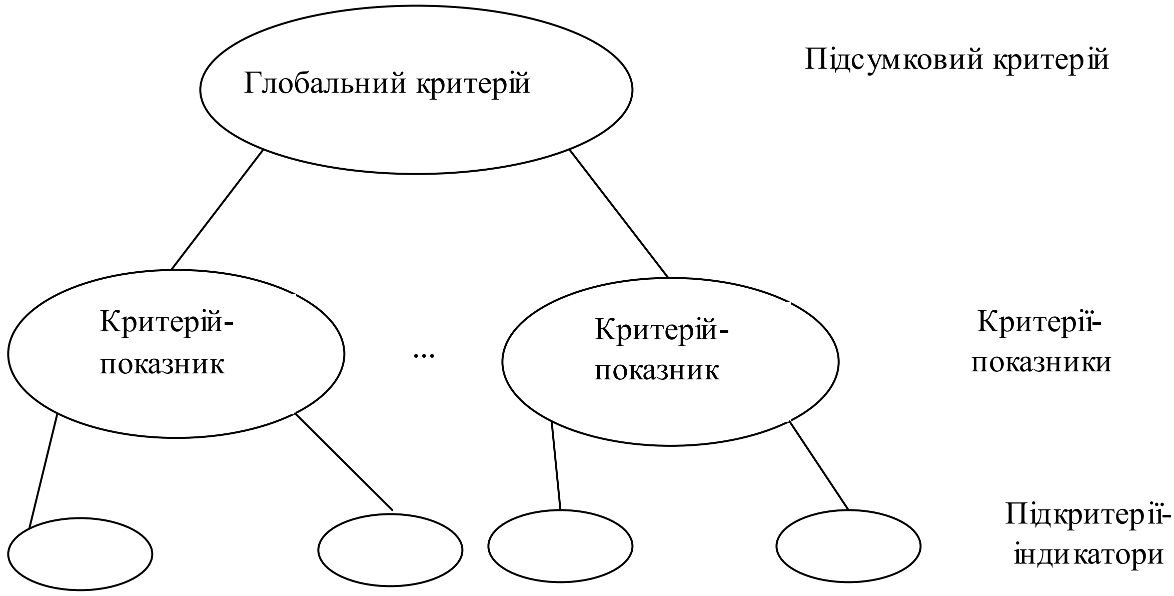


Рисунок 2.3. Трирівнева схема критеріального дерева.

Глобальний критерій – це головний критерій як вершина критеріального дерева, який підпорядковує собі всі інші критерії. Глобальний критерій – це фактор, який дозволяє визначити успішну діяльність, наприклад, бути здоровим.

Критерії-показники – це величини, які можуть вимірюватись якісно або кількісно. Критерії-індикатори є більш конкретними оцінками, наприклад, розмір, якість, об‘єм, кількість тощо. Критерії-показники і підкритерії-індикатори можуть самі служити глобальним критерієм.

Система критеріїв – це багаторівнева конструкція зі взаємодіючих елементів, об‘єднаних у підсистеми декількох рівнів для досягнення єдиної цілі функціонування системи в цілому.

За статусом критерії можна класифікувати:

- глобальний – узагальнений критерій оптимальності;
- локальний – використовується при оцінці діяльності окремих елементів системи і підпорядковується глобальному;

- інтегральний – критерій оптимальності, який представляє собою комбінацію локальних (частинних) критеріїв у вигляді їх суми або добутку;
- оптимальний – критерій, за яким функціонування системи вважається найкращим;
- економічний – критерій (показник), який характеризує якість прийнятого рішення і використовується для порівняння і оцінки ефективності;
- критерій для прийняття рішення – норма, значення показника, за яким можна порівнювати альтернативні варіанти.

Шкали вимірювання критеріїв

Ступінь або рівень вимірюваності критерію залежить в значній мірі від вимірюваності цілі, яку він описує або вимірюваності результату, який очікується. Від типу цілі залежить і її вимірюваність. Наприклад, економічні цілі в принципі вимірювані, цілі, які включають психологічні цінності, менше піддаються вимірюванню, а цілі, які базуються на етичних принципах, майже зовсім неможливо виміряти. Тому в природі розрізняють три класи шкал: класифікаційна (номінальна); кумулятивна (кардинальна); стратифікаційна (ординальна).

- Номінальна шкала – це класифікація з фіксованим номіналом родової якості;

- Кардинальна шкала характеризує кумулятивність і адитивність вимірювання;

- Ординальна шкала характеризує властивості через інтенсивності.

Кардинальний і ординальний класи шкал є числовими.

Шкалою вимірювання називається прийнятий порядок визначення і позначення всіх можливих проявів значень конкретної властивості величини. Слово шкала походить від латинського *skala*, що означає упорядкована система(драбина) чисел або інших елементів, прийнятих для оцінки об’єктів(альтернатив).

У відповідності до логічної структури вимірювання важливості використовує три групи аксіом: тотожність, ранговий порядок і адитивність. В залежності від того, які з цих трьох властивостей присутні або відсутні і в яких комбінаціях зустрічаються для вимірювання критеріальних оцінок, розрізняють чотири основних типи шкал: назв, порядку, інтервалів (різниць), відношень.

Дамо їх коротку характеристику.

Шкала назв (ідентифікація альтернатив). Клас найпростіших шкал, які відображають якісні властивості. Їх елементи характеризуються тільки відношеннями еквівалентності (тотожності) і подібності проявлення властивості. Такі шкали не мають нуля і одиниць вимірювання, на них не можна проводити арифметичних операцій. Вимірювання в шкалі назв – це результат якісного аналізу. Наприклад, визначення групи крові, сорту зернових, застосованої отрути тощо.

Шкала порядку (визначення порядку переваг). Дана шкала задовольняє аксіомам рангового порядку. Елементи, які розміщенні на шкалі, повинні бути порівнювані і транзитивні за деякою загальною ознакою. Порівняння елементів на цій шкалі відповідають відношенням ”більше-менше”, ”краще-гірше”, ”сильніший-слабший”, ”складніший-простіший” тощо. Дані шкали є нелінійними і не мають одиниць виміру. Вимірювання в шкалі порядку є найнедосконалішим і найменш інформаційними. Для полегшення вимірювань на шкалі порядку на практиці застосовуються деякі опорні точки в якості ”реперних”. Такі шкали називаються реперними. Наприклад, за реперними шкалами вимірюються інтенсивність землетрусу, сила вітру за шкалою Бофорта, твердість мінералів, сила морської хвилі тощо. Недоліками цих шкал є невизначеність інтервалів між реперними точками. Вимірювальна інформація отримана в шкалі порядку непридатна для математичної обробки.

Шкала інтервалів показує ступені близькості альтернатив в шкалі порядку. Якщо множина елементів впорядкована за допомогою множини дійсних чисел, то говорять, що виміри здійснені в шкалі інтервалів. Шкала інтервалів – це шкала без визначення точки відліку, тобто їй не притаманна властивість адитивності. Інтервали між кожними сусідніми елементами в даній шкалі показують інтенсивність (силу) переваги одного елементу в порівнянні з іншими і можуть бути як рівномірними, так і нерівномірними. Прикладами шкали інтервалів є вимірювання часу за принципом обертання Землі навколо Сонця (роки), Землі навколо осі (доба, години, хвилини, секунди). У зв‘язку з тим, що в даній шкалі невизначено початок підрахунку, для неї можливі адитивні операції (додавання і віднімання) і невизначені мультиплікативні (множення і ділення).

Шкала відношень. Якщо в якості однієї з реперних точок існує значення вимірності, яке прирівняне до нуля, то в такій шкалі можна відрахувати абсолютне значення величини і визначити у скільки разів одна величина більша від іншої. Шкала відношень є найдосконалішою і найбільш інформативною. В ній визначені всі арифметичні операції. Прикладами шкал відношення є температурна шкала Кельвіна, шкала курсів валют, шкала відстаней, шкала ваг тощо.

2.5. Нормований критеріальний простір

2.5.1. Основні поняття і визначення

Для вирішення проблемної ситуації недостатньо сформулювати лише цілі, а необхідно сформувати систему критеріїв, за допомогою яких можна оцінити степінь досягнення цілі.

Як показує практика, критерій з однієї сторони повинен саме дозволяти адекватно відображати степінь досягнення цілі, а з іншого боку – бути вимірним, тобто це може бути кількісний або якісний показник.

Критерій – це мірило, яке дає можливість оцінювати те, про що йде мова або зміст у будь-якій системі. Критерій у системі організовує потік змісту. Зміна критерію означає зміну і змісту структури самої системи у відповідності з новим змістом. За змістом критерії діляться на незалежні і залежні. Залежними критеріями вважаються ті критерії, при яких оцінка по одному із них визначає оцінку по іншому критерію. Наприклад, критерії елітна квартира і ціна.

Залежність між критеріями приводить до появи цілісних образів альтернатив, які несуть визначений мислимий зміст.

За суттю розрізняються статичні і динамічні критерії. Статичний критерій формально може бути виражений однією або декількома величинами, які відображають бажаний стан за вибраними параметрами у вигляді констант або градієнта руху. Динамічний критерій більш складний за природою, оскільки він задає тенденцію розвитку системи. Однією з властивостей динамічного критерію є те, що він представляється у вигляді вектора, компоненти якого є кількісні параметри, які відображають якісний стан системи в кожний момент економічного часу її руху відносно деякого еталонного стану. Для обробки динамічного критерію можна застосовувати різний математичний апарат[51,52]. Наприклад, моделі рангової кореляції, адаптивні поліноміальні моделі, комбіновані моделі селективного та гібридного типу, які описані у роботах [8,9, 20, 22, 100, 118, 139].

Багатостолітній досвід показує, що вирішення будь-якої проблемної ситуації пов’язано з використанням декількох критеріїв для прийняття правильного рішення. Це означає, що при виборі найкращої альтернативи застосовуються оцінки за багатьма критеріями.

Важливою компонентою задачі вибору є простір критеріїв або критеріальний простір. Під простором критеріїв будемо розуміти сукупність критеріїв, за якими оцінюється ефективність альтернатив (наслідків), тобто критеріальний простір – це простір критеріальних оцінок альтернатив. Якщо даний простір складається з однієї скалярної характеристики, то задача вибору є тривіальною. Але як правило, при розв’язуванні складних соціально-економічних, технічних, політичних, військових та інших проблем, звичайно, приходиться розглядати декілька взаємозв’язаних показників ефективності, які в свою чергу виражені в кількісній або якісній формі, вимірюються в різних шкалах і мають різну важливість. Тому, проводити співставлення(порівняння) альтернатив(наслідків) у такому багатокритеріальному аморфному просторі є неможливим. Вирішення даного питання полягає у нормуванні критеріального простору.

Припустимо, що відомі допустима множина альтернативних рішень A і довільна непорожня множина $K=\{K_1,K_2,\ldots,K_m\}$, елементи якої ми будемо називати критеріями, за якими можна отримати оцінку будь-якої альтернативи $a\in A$. Нехай на даній множині *K* задані дві операції, які будемо називати згорткою (*Z*)

$$\forall u,v\in K,\, Z(u,v)\in K$$

і нормалізацією (*N*)

$$\forall u\in K,\, N(u)\in K\,.$$

Означення 2.1. Множина *K* разом із операціями згортки і нормалізації називається критеріальним простором.

Критеріальний простір – це простір критеріальних оцінок альтернатив.

Означення 2.2. Під згорткою *Z*(*,*) будемо розуміти модель синтезу часткових критеріїв у єдину агреговану оцінку, за допомогою якої можна оцінити будь-яку альтернативу із допустимої множини.

Згортка – це модель агрегованої оцінки.

Означення 2.3. Під нормалізацією *N*(*) будемо розуміти модель перетворення критеріїв до порівняльного виду. Наприклад, до безрозмірного вигляду.

Нормалізація, по суті, зводиться до деякої зміни критеріального простору, тобто вибору зручного і «справедливого» масштабу.

Нормалізація – це спосіб зміни оцінки.

Фактично прийняття рішення за багатьма критеріями характеризується трьома факторами:

- моделлю нормалізації критеріїв;
- моделлю згортки критеріїв;
- моделлю відношення пріоритетів критеріїв.

Приведемо основні операції, які дозволяють провести нормалізацію критеріального простору.

2.5.2. Нормалізація критеріїв ефективності

Під нормалізацією критеріїв розуміють перехід до однаково направлених переваг, вираження їх значень в однакових абсолютних величинах або перехід до безрозмірних шкал. Для таких перетворень можна використовувати наступні відомі підходи:

1.1. Зміна направленості цілі (заміна “max” на “min” або “min” на “max”). Нехай K_i – це початкове значення критерію, тоді нормалізоване значення $\overline{K_i}$ можна отримати як $\overline{K_i} = -K_i$ або $\overline{K_i} = \dfrac{1}{K_i}$. Даний спосіб використовується для переходу до одної направленості критеріїв.

1.2. Приведення до додатних значень за оцінками: $\overline{K}_i = \left| \max\limits_{a \in A} K_i - \min\limits_{a \in A} K_i \right| - K_l$.

1.3. Нормалізація по заданому значенню: $\overline{K_i} = \dfrac{K_i}{K_i^*}$, де K_i^* – задана величина критерію (еталонна, ідеальна, задовільна). Тут реалізовується підхід до безрозмірної шкали.

1.4. Відносна нормалізація: $\overline{K_i} = \dfrac{K_i}{\max\limits_{a \in A} K_i}$ або $\overline{K_i} = \dfrac{K_i}{\min\limits_{a \in A} K_i}$. Частинний випадок нормалізації по заданому значенню.

1.5. Порівняльна нормалізація: $\overline{K_i} = K_i - \min\limits_{x \in A} K_i$ або $\overline{K_i} = \max\limits_{x \in X} K_i - K_i$. Даний підхід суміщає найменше або найбільше значення критерію з нулем і всі значення критеріїв стають невід’ємними, і проходить зміна направленості критерію, тобто кращим значенням стає менше.

1.6. Природна нормалізація: $\overline{K_i} = \dfrac{K_i}{\max\limits_{a \in A} K_i - \min\limits_{a \in A} K_i}$.

1.7. Повна нормалізація: $\overline{K_i} = \dfrac{K_i - \min\limits_{\in aA} K_i}{\max\limits_{a \in A} K_i - \min\limits_{a \in A} K_i}$. Даний підхід об'єднує порівняльну та природну нормалізацію і відображає значення критеріїв на відрізок від нуля до одиниці.

1.8. Нормалізація Севіджа: $\overline{K_i} = \dfrac{\max\limits_{a \in A} K_i - K_i}{\max\limits_{a \in A} K_i - \min\limits_{a \in A} K_i}$. Відображає перехід від самих значень критеріїв до їх втрат. Найкращим значенням вважається найменше.

1.9. Інтегральна нормалізація: $\overline{K_i} = \dfrac{K_i}{\int\limits_{a \in A} K_i da}$. Часто використовується у задачах, коли множина X задана дискретно, тобто $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, тоді: $\overline{K_i} = \dfrac{K_i}{\sum\limits_{a_j \in A} K_i(a_j)}$.

2.5.3. Згортки критеріїв і цільових функцій

Під критерієм можна розуміти функцію, яка вимірює цінність або якість деяких об'єктів.

Означення 2.4. Відображення $K : X \to R^+ = [0, \infty)$, яке співставляє кожній альтернативі $x \in X$ деяке невід'ємне число $K(x) \geq 0$, будемо називати критерієм якості (ефективності), або критеріальною оцінкою.

Якщо нам відомі критерії ефективності на множині X, то це означає, що задано відношення порядку, тобто для $\forall\, x, y \in X$ перевага $x \succ y \Leftrightarrow K(x) > K(y)$ або еквівалентність $x \approx y \Leftrightarrow K(x) = K(y)$.

Розглянемо згортки критеріїв[1, 13, 17, 18, 25, 40, 43, 103, 109, 113, 117, 122, 123], які найбільш часто зустрічаються у різних прикладних задачах.

<u>Лінійна згортка</u>. Даний вигляд згортки на практиці ще називають валовим показником. В основному (загальному) лінійна згортка визначається наступним чином:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i K_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\ \ \alpha_i \geq 0\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Коефіцієнти $\{\alpha_i\}$ називаються вагами і можуть служити для приведення часткових критеріїв до однакової шкали. Інколи вимагається нормування вагових коефіцієнтів $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, хоча ці вимоги не обов'язкові, так як завжди можна їх досягти еквівалентним перетворенням $\alpha_i^{'} = \dfrac{\alpha_i}{c}$, де $c=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Основними позитивними рисами такої згортки вважаються її простота і її властивість збереження звичайного порядку для будь-якої системи вагових коефіцієнтів $\{\alpha_i\}$.

Покажемо виконання цієї властивості. Нехай маємо дві альтернативи $x, y \in X$, які характеризуються цілим набором параметрів, тобто $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Також задано відношення порядку $x \geq y$, яке означає, що $\forall i : x_i \geq y_i$ і система вагових коефіцієнтів $\{\alpha_i\},\ \alpha_i > 0$. Тоді

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1 x_1 \geq \alpha_1 y_1 \\ & \alpha_2 x_2 \geq \alpha_2 y_2 \\ + & \quad . \ \ . \ \ . \\ & \alpha_n x_n \geq \alpha_n y_n \\ \hline \end{array}$$

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \geq F(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$$

Звідси випливає, що $x \geq y$ для $\forall$ набору $\{\alpha_i\}$.

Основним недоліком даної згортки можна вважати можливість компенсації малих (незадовільних) значень одних критеріїв за рахунок хороших значень інших.

Мультиплікативна згортка. Даний вид згортки зустрічається у двох видах:

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}\left(K_i(x)\right)^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$$

або

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i K_i(x)=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\ ,$$

де $\alpha_i>0$.

Слід відмітити, що даний інтегрований критерій має всі ті хороші і погані сторони, що і лінійна згортка. Це випливає з того, що якщо ми його про логарифмуємо, то отримаємо еквівалентний критерій.

$$\ln P(x)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln x_i$$

або

$$\ln P(x)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=c+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ .$$

Вся різниця між лінійною і мультиплікативною згорткою полягає в тому, що характеристики об'єктів вимірюються в логарифмічній шкалі (різних шкалах).

Згортка Гермейєра. Згортку, запропоновану Ю.Б. Гермейєром можна записати у вигляді:

$$G(x)=\min_i\left\{\frac{K_i(x)}{\alpha_i}\right\}=\min_i\left\{\frac{x_i}{\alpha_i}\right\},$$

де $\alpha_i>0$.

Зміст цієї згортки полягає в оцінці якості об'єкта по найгіршому значенню. Позитивною якістю даної згортки є те, що вона не компенсує незадовільні значення одних параметрів за рахунок інших. Але суттєвим недоліком даної згортки є те, що вона не зберігає звичайний порядок.

Згортка на основі ідеальної точки. Вигляд даної згортки наступний:

$$S(x)=-\rho\left(K^*(x),K(x)\right)=-\rho\left(x^*,x\right),$$

де $\rho(\bullet,\bullet)$ – деяка метрика в R^n, а $K^*(x)$ – це ідеальна точка по оцінках.

При побудові даної згортки можуть використовуватися різні метрики. Наприклад, метрика Мінковського

$$\rho\left(x^*,x\right)=(\sum_{i=1}^{n}\underset{i}{(x^*-x_i)}^p)^{1/p}.$$

Найбільш частіше використовується Чебишевська зважена метрика

$$\rho\left(x^*,x\right)=\max_i\left\{\alpha_i\left|x^*-x_i\right|\right\},\ \alpha_i>0.$$

У такому випадку вона близька по змісту до згортки Гермейєра.

<u>*Нелінійна згортка*</u>. Нелінійна схема компромісів запропонована А.М. Вороніним[17] може бути записана у вигляді:

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[1-K_i^0(x)\right]^{-1},$$

де $K_i^0(x)$ – нормалізований *i*-ий критерій.

Основні позитивні якості даного виду згортки полягають в тому, що вона поводиться у різних ситуаціях по-різному. Так наприклад, якщо деякий локальний критерій наближається до свого граничного значення (одиниці), тобто ситуація стає напруженою, тоді дана згортка виражає модель мінімакса. Якщо локальні критерії далекі від своїх граничних значень, тобто ситуація спокійна, то дана згортка еквівалентна моделі інтегральної оптимальності. На проміжних стадіях ситуації отримують різні степені часткового вирівнювання критеріїв.

2.5.4. Вимоги до критеріального простору

Під простором критеріїв або критеріальним простором будемо розуміти сукупність показників, за допомогою яких оцінюється результат (або наслідок), до якого приводить кожен альтернативний варіант рішення. Критеріальний простір повинен формуватися на основі показників, які характеризують властивості прийнятих рішень або їх наслідків і відповідають поставленим цілям.

Звичайно, що в якості критерію ефективності повинна вибиратися така характеристика чи показник, яку можна виразити кількісно, застосувавши точні наукові методи, вимірювання або обчислення. В якості критерію можуть бути прийнятними такі кількісні міри, які:

— визнаються ОПР як степінь досягнення підцілей поставленої цілі;

— являються загальними і вимірюваними для всієї множини допустимих альтернатив;

— характеризують загальну оцінку вибору і не можуть бути представлені у вигляді обмежень. Тобто, ОПР хоче отримати за ними найбільш переважаючі (кращі) оцінки.

Однак, як показує практика, при розв‘язанні складних соціально-економічних проблем, можливість вибору кількісного критерію ефективності має місце лише тоді, коли вибрані цілі вимірювані, тобто можуть бути виражені конкретною величиною.

Фактично, для слабо структурованих і неструктурованих проблем цілі не вимірювані, тобто задаються у якісному вираженні. Невимірювані критерії називаються якісними або некількісними критеріями.

Формування критеріального простору є багатокроковим і ітеграційним процесом, який виконується спеціалістами в конкретних предметних областях знань. Дана процедура не може бути повністю формалізованою, оскільки основна частина необхідної інформації може бути отримана лише від спеціалістів в області організації процесів прийняття рішень – ОПР і експертів. Підбір критеріїв повинен задовольняти ряду вимог і обмежень.

1. Повнота множини критеріїв. Множину критеріїв можна вважати повною, якщо на основі оцінок за ними існує ясне представлення про степінь досягнення головної цілі і використання будь-яких додаткових критеріїв не змінює результат рішення задачі, а відкидання хоча б одного з них, навпаки, приводить до зміни результату.

2. Раціональність. Кожен критерій повинен мати ясний і однозначний зміст, характеризувати визначений аспект наслідків, мати зрозуміле формулювання.

3. Декомпозиція. Можливість розбиття задачі оцінки на більш прості частини (підзадачі).

4. Надлишковість. Одну і ту ж властивість не повинні враховувати різні критерії.

5. Мінімальність. Множина критеріїв повинна бути як найвужчою.

6. Вимірність. За допомогою кожного критерію можна оцінити (кількісно або якісно) інтенсивність властивості, яка характеризує степінь досягнення відносної цілі.

Як показує досвід, при розв‘язуванні практичних задач, вимоги яких повинні задовольняти критерії, часто є суперечливими і не можуть виконуватись одночасно всі. Тому, побудова реального критеріального простору – це результат компромісів.

Оскільки, порівняння альтернатив можливе лише у тому випадку, якщо інтенсивність властивостей, які визначаються вибраними критеріями є вимірними, то виникає необхідність в побудові оціночних шкал для якісних критеріїв ефективності. При побудові оціночних шкал повинно бути враховано, яким чином інтенсивність відповідної властивості різна для альтернатив, і які відмінності в інтенсивності даної властивості впливають по відношенню до альтернативи.

Оцінки багатьох показників задаються в описовому вигляді, тому виникає необхідність у перевірці відповідності даного критерію і шкали. Дана перевірка полягає у тому, наскільки кожна оцінка шкали характеризує інтенсивність тієї властивості, яку описує даний критерій.

Для отримання оцінок за шкалами критеріїв можуть бути використані наступні підходи:

1. Фізичне вимірювання або обчислення. Даний підхід дозволяє отримати оцінку за допомогою технічного вимірювання або обчислення розрахунковим методом.

2. Експертиза. Отримання оцінок від експертів. Відомо, що експертні оцінки суб‘єктивні, тобто різні спеціалісти дадуть різні оцінки одному і тому ж варіантові, якщо навіть і користуються однією і тією ж шкалою. Тому на степінь об‘єктивності оцінки впливають як характер критерію, так і детальність шкали. Для того, щоб підвищити стійкість і надійність експертів, а також степінь довіри до оцінок отриманих від експертів, застосовують різні процедури узгодження, ціль яких – забезпечення глибокого розуміння задачі всіма спеціалістами, не нав‘язування їм чиєсь думки і представлення інформації.

2.6. Схема побудови ієрархії критеріального простору

Будемо вважати, що задана(відома) універсальна множина критеріїв, яка може постійно доповнюватись новою інформацією і корегуванням існуючої.

Розглянемо процес побудови критеріального простору для розв’язування будь-якої конкретної задачі вибору у вигляді ієрархічної структури.

Побудова ієрархії критеріїв може бути реалізована у два етапи. На першому етапі виконується процедура руху “зверху - вниз”, на другому – процедура руху у зворотному напрямку. Обидві процедури інтерактивні. Суть першої полягає в тому, що в діалоговому режимі з особами, які беруть участь у прийнятті рішень – це ОПР, аналітик, експерт, визначаються блоки(класи) показників, виділяються визначаючі критерії із універсальної множини та їх підкритерії та індикатори, будується критеріальне дерево.

На другому етапі із вибраних критеріїв утворюються групи критеріїв таким чином, щоб кожна альтернатива оцінювалась тільки за основними – значущими критеріями, не зачіпаючи критерії других груп(“чужі” кластери”).

Основна проблема, яка виникає при декомпозиції, тобто побудові дерева(ієрархії критеріїв) – це повнота. З однієї сторони дерево повинно бути досить повним для досягнення мети аналізу, а з другої – простим, оглядовим, зручним для використання. Степінь деталізації визначається метою аналізу. Розміри ”вшир” визначаються числом елементів на кожному рівні, а ”вглиб” – числом рівнів. При визначенні розмірів ”вглиб” важливим є те, наскільки зростає корисна інформація, необхідна для досягнення мети аналізу і наскільки вона точна.

Дерево повинно бути по можливості компактним з точки зору мети аналізу. Більш високий рівень володіє більшою степеню загальності по відношенню з більш низьким. Процес розбиття являється інтерактивною процедурою, на яку сильно впливають симпатії ОПР, її рівень інформованості, стиль мислення і т.д.

При виділенні елементів одного рівня потрібно дотримуватися наступних принципів:

- принцип суттєвості, тобто включаються критерії, які є суттєвими для даного рівня мети аналізу;
- принцип однорідності, тобто включаються критерії, які мають однакову важливість по відношенню до мети аналізу;
- принцип незалежності, тобто критерії одного рівня повинні бути взаємно незалежними.

Декомпозиція в основному повинна закінчуватись при досягненні елементарного рівня, коли немає змісту подальше розбиття, тобто коли можна оцінити числом, або указати якість з відповідної шкали.

Необхідно відмітити, що декомпозиційне дерево не являється однозначним і залежить від мети аналізу, а також ступені інформованості експерта(ОПР), тобто від рівня (кваліфікації) знань в даній предметній області.

У загальному декомпозицію можна виразити у вигляді наступних кроків(алгоритм):

1. Визначення об’єкту аналізу і його вивчення.

2. Визначення мети аналізу.

3. Побудова моделі ситуації та понять.

4. Перевірка елементів рівнів на однорідність, суттєвість, взаємонезалежність.

5. Перевірка числа рівнів на достатність.

6. Перевірка побудованої схеми на природність розв'язання поставленої задачі.

2.7. Система оцінок альтернативних рішень

Для побудови дерева оцінок можуть бути використані наступні рівні: цілі → критерії їх досягнення → групи властивостей → показники → індикатори величин і параметрів.

Структура системи оцінок, яка використовується при багатокритеріальному аналізі об'єктів, включає такі складові:

- множину критеріїв, які характеризують об'єкт;
- оцінки порівняльної важливості критеріїв;
- шкали для оцінки за критеріями;
- оцінну систему альтернативних рішень;
- формування принципу вибору.

Перелік критеріїв, які характеризують об'єкт

В залежності від задачі, яка повинна бути вирішена, для оцінки рішень застосовують різні класи критеріїв. Наприклад, політичні, економічні, технологічні, організаційні, соціальні, психологічні, екологічні, естетичні і т.д. У свою чергу дані класи розбиваються на підкласи і т. д. Тобто, використовується трирівнева схема: критерій – показник – індикатор.

Наприклад, технологічні критерії:

- технічні – надійність, міцність, природність;

- техніко-економічні – потужність, продуктивність, економічність затрат, інвестиції, експлуатаційні витрати, енергомісткість, основні фонди і т.д.

- соціальні – юридичні норми (секретність), людський фактор (відношення до людського достоїнства), політичні наслідки (захист країни, світу), життєвий рівень (чистий дохід), можливість підвищення кваліфікації, державна допомога, соціальні умови праці (клімат у колективі);

- психологічні – навики керівництва, персональні особливості поведінки у колективі (готовність до ризику, порядність, комунікабельність);

- естетичні – привабливість, доцільність, пізнаваність, реклама, дизайн, колір.

Визначення важливості критеріїв ефективності

Визначення важливості критеріїв пов’язано безпосередньо з правилом вибору. Розглянемо деякі способи описання відносної важливості критеріїв.

Ряд пріоритету. Ряд пріоритету $L = \{1, \ldots, m\}$ відображає упорядкування (ранжування) критеріїв по важливості. Ранжування може бути як строгим, так і нестрогим.

Вектор пріоритету. У векторі пріоритету $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})^T$, λ_i показує для упорядкованих по важливості критеріїв, у скільки разів критерій K_i більш важливий, як критерій K_{i+1}.

Ваговий вектор. У ваговому векторі $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$ α_i представляє відносну важливість *i*-го критерію K_i по відношенню до всіх інших критеріїв. Із даного визначення випливає зв'язок між елементами вектора пріоритету та ваговим вектором: $\alpha_i = \lambda_i \alpha_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$.

Зауваження. Приведені способи визначення важливості критеріїв можна застосувати тільки для незалежних критеріїв.

Вимоги до шкал оцінки критеріїв

Для вимірювання оцінок за критеріями використовуються чотири основних типи шкал – назв, порядку, інтервалів (різниць), відношень, які описані в розділі 2.4.2. Під оцінкою за критерієм будемо розуміти кількісні або якісні вимірювання відповідного показника. Особа, що приймає рішення повинна одночасно розуміти, що насправді і в якій шкалі вона оцінює. Щоб не створити ситуацію, коли один і той же показник оцінюється, виходячи з різних підходів. Наприклад, в залежності від цілі експертизи можна оцінити вартість об'єкту, очікувану інформацію, очікувану зміну курсу валют, степінь задоволеності досягнутого рівня за одним із показників: пріоритетність фінансування, кредитні ліміти, стійкість фірми, рейтинг банку і т.д.

Для оцінки кількісного показника повинно бути вказано відповідне числове значення або інтервал, в якому лежить значення оцінюючого показника.

Якщо виникає проблема оцінки об'єктів за критеріями, які носять суб'єктивний характер, тоді необхідно застосувати вербально-числові або лінгвістичні шкали. У склад таких шкал входять, як правило, змістовне описання градації шкали і відповідне числове значення.

Для оцінки критеріїв можуть бути застосовані різні види оцінювання. Приведемо найбільш використовувані.

Точні числа. Область застосування: технічні характеристики. Фізичні величини. Наприклад, густина матеріалів, маса, електрична потужність, час операції, ціна, габарити.

Наближені числа (інтервали). Область застосування: прогнози, планові показники, техніко-економічні оцінки, кошторисна вартість. Наприклад, використання електроенергії об'єктом за період, очікуваний ефект, економія витрат, об'єми перевезень і т.д.

Відносні числа. Область застосування: частини, долі, відсотки, відношення. Наприклад, виконання планів, співвідношення голів у футболі, захворюваність і т.д.

Очки, бали. Область застосування: спортивні змагання, оцінка якості, змагання, контроль успішності, громадська діяльність. Наприклад, фігурне катання, бокс, змагання між бригадами, шкільні оцінки, оцінки у вузі, показники якості, категорії цін і т.д.

Лінгвістичні (нечіткі) оцінки. Область застосування: погода, етичні, політичні, юридичні, гуманітарні оцінки. Наприклад, холодно, жарко, урівноважений, сумнівний, небезпечний і т.д.

Оцінна система альтернативних рішень

Практична реалізація багатьох процедур вироблення і прийняття рішень можлива лише з використанням оцінної системи. Оціночний процес являється прерогативою при прийнятті рішень. Правильна оцінка відповідає досягненню поставленої цілі.

Складність аналізу і обробки інформації суттєво збільшується, коли альтернативи оцінюються за декількома критеріями, тобто більш трудомістким становиться визначення їх порівняльної переваги. Для визначення порівняльної переваги необхідно знати, які критерії і в якій степені впливають на оцінку альтернативи, як за кількісними характеристиками так і за якісними оцінками.

Задача вибору є надзвичайно складною у зв'язку з проблемою порівняння об'єктів вибору. Оскільки самі об'єкти у багатьох випадках порівняти неможливо із-за їх різновидності, то порівнюються не самі об'єкти, а їх оцінки, отримані за допомогою відповідних показників (критеріїв).

Значну роль, а часто і вирішальну, у багатокритеріальному аналізі відіграє оцінна система, роль якої полягає у формуванні узагальненої оцінки для кожного альтернативного рішення. В загальному випадку кожен критерій (показник) представляється у вигляді деякої оціночної функції, яка приймає значення на деякій множині оцінок. Фактично оціночна функція відображає множину альтернатив у множину оцінок.

Формально це запишеться наступним чином:

$$F(K): A \to X ,$$

де F – оціночний функціонал, K – множина критеріїв, A – множина альтернатив, X – множина оцінок.

В подальших наших дослідженнях множину альтернатив будемо розглядати як множину її допустимих оцінок X, ця множина може бути як скінченою, тобто допустимі альтернативи можна перерахувати $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{x_i,\ i = \overline{1,n}\}$ так і неперервною заданою умовами-обмеженнями. Оскільки прийняття рішення здійснюється за декількома критеріями, тобто $K = \{K_1, K_2, ..., K_m\} = \{K_j,\ j = \overline{1,m}\}$, то оціночний функціонал $F(K)$ є вектором, а множина X є векторним простором, елементи якого належать евклідовому простору R^m.

Множина допустимих альтернатив генерується із множини альтернатив, враховуючи різні обмеження, на множину оцінок X і записується наступним чином:

$$X = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, ..., x_n) : (\forall i \in \overline{1,n}),\ a_i \le x_i \le b_i; \\ (\forall j \in \overline{1,m}),\ c_j \le K_j(x) \le\ d_j; \\ (\forall k \in \overline{1,l}),\ e_k \le \varphi_k(x) \le q_k. \end{matrix} \right\},$$

де $a_i \le x_i \le b_i$ – параметричні обмеження, $c_j \le K_j(x) \le d_j$ – критеріальні обмеження, $e_k \le \varphi_k(x) \le q_k$ – функціональні обмеження.

Найбільш поширеною у використанні оцінною системою можна вважати модель попарного порівняння.

Принципи оптимальності

На сьогоднішній день існує багато підході розв’язування багатокритеріальних задач, як на скінченій, так і неперервній множині альтернатив. Приведемо найбільш відомі [1, 13, 17, 18, 25, 40, 43, 103, 109, 113, 117,122, 123] і часто використовувані принципи, які ґрунтуються на поняттях кращої альтернативи, закладені у багатьох методах і алгоритмах.

Принцип Парето. Альтернатива $a' \in A$ домінує (краща) за Парето альтернативу $a'' \in A$, якщо $K_i(a') \ge K_i(a'')(\forall i = \overline{1,m})$ і хоча б для одного критерію з номером i' виконується строга нерівність, тобто $\exists i', K_{i'}(a') > K_{i'}(a'')$.

Ті допустимі альтернативи, для яких не існує домінуючих, утворюють множину Парето і називаються оптимальними по Парето. Принцип оптимальності Парето можна (потрібно) використовувати на початковій стадії вирішення задачі вибору з ціллю звуження множини допустимих альтернатив.

Принцип ідеальної точки. Суть даного принципу полягає в тому, що кращою вважається та альтернатива, яка в просторі критеріальних оцінок найближче за деякою метрикою до «ідеальної» точки.

Принцип антиідеальної точки. Згідно даного принципу кращою вважається альтернатива найбільш віддалена від «антиідеальної» точки в просторі критеріальних оцінок.

Принцип максміна. За даним принципом кожне рішення описується найменшою зваженою величиною за m критеріями. Альтернатива для якої існує найбільше значення серед цих мінімальних величин вважається найкращою.

2.8. Альтернативи. Методи пошуку і класифікація

Альтернативи (варіанти розв'язків) належать до категорії засобів, які призначені для досягнення поставленої цілі. Фактично той чи інший засіб досить часто представляє собою конкретний варіант розв'язку проблеми. Пошук альтернативних розв'язків проблеми починається з вибору певного шляху, який може бути виражений одним із варіантів (виходів):

- відмова від вирішення проблеми;
- пошук організації (іншої особи) для вирішення проблеми;
- звернення до попереднього досвіду (пошук експертів, підбір літератури);
- вибір конструктивних методів і способів розробки нових варіантів вирішення проблеми.

Оскільки рішення приймається на основі суб'єктивних переваг, то воно повинно бути погоджено з цілями і мотивами.

Множина допустимих альтернатив може бути визначена або сформована в залежності від ситуації, яка характеризується наступним чином:

- альтернативи задані;
- альтернативи „з'являться" тільки після вироблення правил прийняття рішень (ситуація типу конкурсів).

Але на практиці виникають ситуації, коли варіанти розв'язків або не задані, або відсутні, або не „з'являться". Розв'язання таких задач потребує підходів, які б дозволили сформувати або розробити їх тими чи іншими способами. Одним з таких способів може бути звернення до попереднього досвіду, тобто застосування для розв‘язання „сьогоднішньої" задачі відомі і апробовані підходи, які використовувались попередньо.

Методи, які базуються на зверненні до попереднього досвіду і можуть бути представлені у наступних варіантах.

1. Пошук відомих стереотипних варіантів розв‘язку. Для цього можуть бути використані: література, патенти, суміжні організації, типові рішення тощо.

2. Синтез рішень із відомих, типових, стереотипних компонентів (елементів).

3. Пошук рішень в іншій області – суміжній чи віддаленій.

4. Синтез рішень із елементів, кожен з яких побудований за асоціацією (комбінація способів 2 і 3).

5. Еволюційний пошук. Суть полягає у поступовому підвищенні якості базових варіантів за допомогою способів 1 – 4.

Опишемо підхід побудови принципово нового рішення. Даний підхід базується на творчому мисленні. У даному процесі застосовуються різні творчі акти: інтуїтивне просвітлення, результат індивідуальних та групових зусиль, метод проб та помилок, щасливий випадок. Фактично суб‘єкт використовує процес умовиводу і його складові частини (елементи, правила формування, посилання і правила перетворення), вистроює впорядковані і логічні послідовності, за допомогою яких абстрактно приходить до повного варіанта рішення. Оскільки творчий процес, зв‘язаний з перебільшенням і генерацією різноманіття, то спектр реальних варіантів повинен бути обмеженим рядом вимог, яким повинні задовольняти розроблювальні альтернативи. До таких вимог можна віднести:

— можливість використовувати за призначенням (для досягнення цілі);
— відповідність системі обмежень;
— реалізованість альтернативи;

— можливість оцінки степеня ризику при реалізації;

— прогнозованість наслідків при реалізації.

Формування множини допустимих альтернатив базується на різного роду інформації, яка отримана в наслідок діалогу між консультантом, ОПР і експертом.

Ця інформація (початкові дані) може бути представлена наступним чином:

— інформація про реальну ситуацію;

— інформація про обмеження;

— практичний досвід ОПР, консультантів та експертів.

Для побудови нових нестандартних варіантів рішень можуть бути використані такі підходи:

1. Морфологічний аналіз, декомпозиція проблеми.
2. Розробка альтернатив на основі ”колективної генерації ідей”.
3. Побудова дерева цілей.
4. Метод «мозкового штурму».
5. Імітаційне моделювання.
6. Експериментування – узагальнення методу ”проб і помилок”.

Види альтернатив

У якості альтернатив можуть розглядатись сутності і явища будь-якої природи. Наприклад, матеріальні, духовні, інформаційні, енергетичні, естетичні, економічні, політичні, правові і т. д. В загальному альтернативи будь-якої природи можна класифікувати на види відносно наступних ознак:

1. Реалізації:

- здійсненні;
- нездійсненні.

2. Використання:

- допустимі;
- безкорисні.

3. Взаємозалежності:

- залежні;
- незалежні.

4. Форми існування:

- існуючі;
- породжуючі.

5. Появи:

- штатні;
- нештатні;
- ймовірні.

6. Співставлення:

- однорідні;
- неоднорідні.

Приведемо дослідження множини альтернатив на однорідність[54].

Нехай задана скінченна множина альтернатив $A=\{\,a_1, a_2, ..., a_n\}$ і множина критеріїв $K=\{k_1, k_2, ..., k_m\}$, за допомогою яких множина альтернатив може бути оцінена.

Означення 2.5. Альтернативи a_i і a_j будемо називати однорідними, якщо вони оцінюються однією і тією ж множиною критеріїв. У протилежному разі – неоднорідними.

Означення 2.6. Множина альтернатив називається однорідною для задачі вибору, якщо всі альтернативи цієї множини є між собою попарно однорідними.

Теорема 2.1. ***Дві альтернативи є однорідними тоді і тільки тоді, якщо перетин множин критеріїв, за якими вони оцінюються, є та сама множина критеріїв.***

<<<u>Доведення. </u>Розглянемо дві альтернативи a_i і a_j. Нехай відповідно вони оцінюються множинами критеріїв K^i, K^j. Згідно означення 2.5 $K^i = K^j$(співпадають), тоді $K^i \bigcap K^j = K^i \bigcap K^i = K^i$.

Достатність. Припустимо, що $K^i \bigcap K^j = K^0$. Звідси випливає, що K^0 співпадає з множиною K^i або з множиною K^j . Якщо ці дві множини не співпадають, то з означення 2.5 випливає, що ці альтернативи неоднорідні.>>

Означення 2.7. Задачу вибору будемо вважати однорідною, якщо множина її допустимих альтернатив однорідна. У протилежному випадку задача вибору буде називатись неоднорідною. Для вирішення однорідних задач вибору існує велика кількість методів їх розв'язання.

Багато практичних задач вибору є неоднорідними. Прикладом може служити підтримка різних проектів і програм Міжнародним фондом «Відродження»(МФВ). Для МФВ головна мета була сформульована в уставі як «Підтримка побудови в Україні відкритого суспільства». Як описано у роботі[137], що в 1994 році було розглянуто близько 300 проектів різних тематик, які у свою чергу були об'єднані у 13 програм. Кожен проект є унікальним по-своєму і оцінюється своєю множиною критеріїв.

Неоднорідна задача вибору виникає при колективному виборі. Кожен індивідуум може мати свою ціль і відповідно свою множину критеріїв для оцінки вирішення проблеми. Це також може бути зв'язано із професійним рівнем експертів, що залучаються для побудови оцінки множини альтернатив і т.д. Таким чином виникає проблема побудови методики вирішення неоднорідних задач вибору. Представимо один із способів побудови такої методики у вигляді наступного узагальненого алгоритму [54]:

1. Декомпозиція множини альтернатив на підмножини по відповідним критеріям.
2. Побудова узагальненої оцінки для всієї множини альтернатив.
3. Ранжування альтернатив відносно даної узагальненої оцінки.

Для знаходження узагальненої оцінки може бути використано метод описаний у роботах[66, 68, 96], який базується на ідеї задання «точки задоволення вимог» та побудови нечіткої множини відносно цієї точки.

Множина альтернатив відносно числа елементів може розглядатись як порожня, скінченна (дискретна), зліченна, континуальна (неперервна), замкнена, відкрита.

2.9. Структуризація множини критеріїв

Пропонується модель (схема) відбору альтернатив, в основі якої лежить процедура структуризації критеріальної множини[93]. Структуризація зводиться до побудови одного із типів структур або їх комбінації. Основними типами структур є класифікація, стратифікація і ранжування. Класифікація – розбиття за деякою ознакою множини на скінченне число підмножин. Стратифікація – розбиття множини на ряд рівнів (шарів), які впорядковані за пріоритетами. Ранжування – множина впорядковується і кожний елемент має свій номер в даному порядку. Якщо множина критеріїв, за допомогою яких проводиться оцінка альтернатив, відома і є скінченою множиною, тоді можна провести її структуризацію. У запропонованому підході структуризація проводиться наступним чином: множина критеріїв розбивається на класи, які стратифікуються на рівні, кожен рівень може стратифікуватися на підрівні і у кожному з них проводиться ранжування критеріїв. Схема відбору альтернатив полягає в тому, що множина альтернатив послідовно аналізується за допомогою відповідної структурованої множини критеріїв.

Виявлення структури на множині критеріїв робить процес прийняття рішень більш усвідомленим і ефективним. Особливість природного групування критеріїв надає можливість виділити плюси і мінуси альтернатив, їх позитивну якість і недоліки.

Розділ 3.

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ

3.1. Вибір: основні засади

Будь-яка людська діяльність має доцільний (цілеспрямований) характер. Тому у повсякденному і практичному житті будь-який вибір базується на основі життєвого досвіду, що спирається на здоровий глузд та інтуїцію. Але здорового глузду та інтуїції не завжди вистачає при розв'язуванні більш складних комплексних і наукових задач, що виникають в соціально-економічній діяльності людини. Таким чином, виникає проблема побудови моделі вибору, що супроводжується вирішенням наступної низки задач:

- формулювання і обґрунтування цілі;
- визначення множини критеріїв;
- повний перелік всіх можливих варіантів досягнення цілі;
- оцінка кожної альтернативи з точки зору її цінності або корисності;
- ймовірність її реалізації в дійсності;
- побудова моделі вибору(правила вибору/принципу оптимальності).

В кінцевому рахунку, за допомогою логічних міркувань, із всіх альтернатив вибирається та, яка найкращим чином відповідає цілі як по корисності, так і по імовірності реалізації – це і є раціональний вибір. Раціональний вибір описує індивідуальний спосіб вибору варіантів з оптимальною корисністю або вигодою.

Заключним актом прийняття рішень є вибір. Передумовами, які спричиняють необхідність робити вибір, являються з однієї сторони – обмеженість ресурсів, а з іншої – можливість їх використання для задоволення потреб. Тобто, вибір – це дії, що виконує людина для задоволення потреб (досягнення цілі), маючи альтернативні варіанти використання ресурсів, які є обмеженими.

Одним із важливих аспектів вибору є розмірність ситуації вибору, яка визначається як різновидністю потреб, так і допустимим набором ресурсів.

Таким чином, розмірність ситуації вибору характеризується як множиною потреб, що можуть бути задоволені за допомогою існуючого набору ресурсів, так і множиною ресурсів, які використовуються для задоволення даних потреб.

У сучасній науці по прийняттю рішень центральне місце займають багатокритеріальні задачі вибору. Основною особливістю таких задач є одночасний розгляд трьох просторів – простору альтернатив, простору критеріїв та простору цілей. Схематично це можна представити у наступному вигляді:

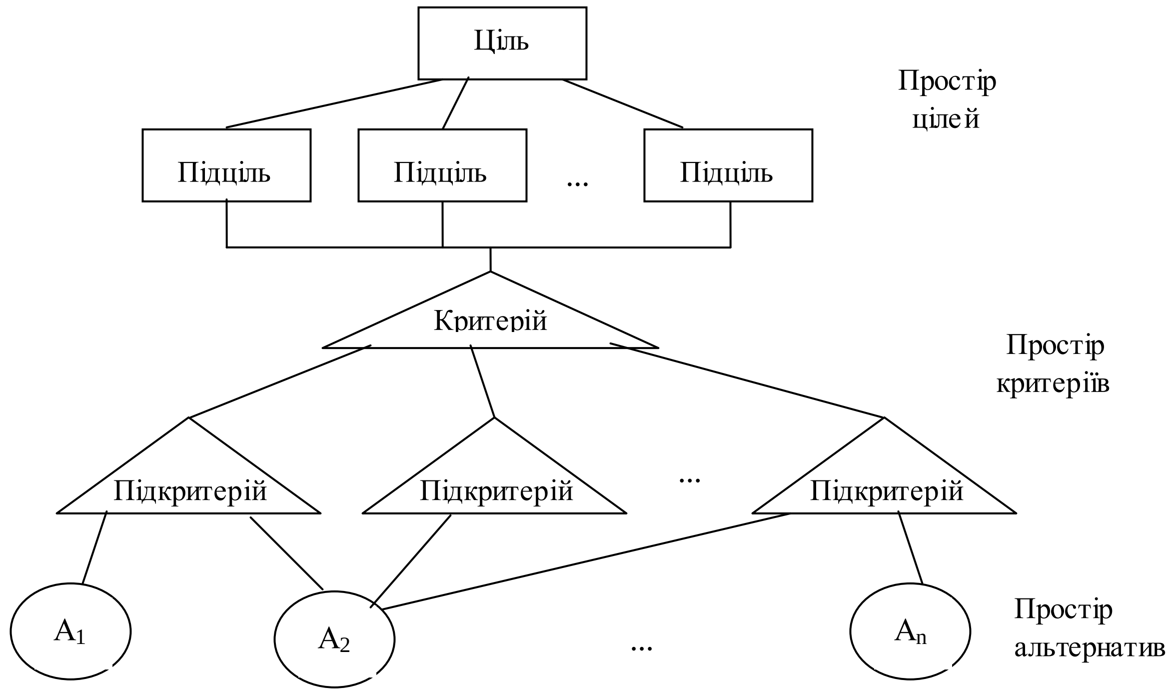


Рисунок 3.1. Схема взаємозв’язку цілей, критеріїв і альтернатив.

Вибір – це найбільш відповідальний і заключний етап у процесі прийняття рішення. На цьому етапі повинні бути виконані наступні кроки:

1. Постановка задачі. На цьому кроці вибір сформульовано у вигляді задачі прийняття рішення. Постановка задачі може бути сформульована у різних формах, що залежить від складності проблемної ситуації.
2. Формулювання критеріїв або(і) профілю переваг. Необхідною умовою прийняття рішень є існування деякого критерію оцінки альтернатив, або профілю їх переваг. Множина критеріїв будується на основі

побудованого дерева цілей. Кожна ціль може бути уніфікована за допомогою певної сукупності критеріїв, які у свою чергу можуть мати деревовидну ієрархічну структуру. Побудова такої структури буде описана далі. Перевага – це інтегральна оцінка якості рішення, яка базується на об'єктивному аналізі(знання, досвід, проведення експериментів та розрахунків) і суб'єктивному розумінні цінностей та ефективності рішення.

3. Побудова правила вибору. Суть цього правила полягає у побудові принципу і методу вибору найкращого рішення із врахуванням перерахованих вище факторів процесу прийняття рішень. Фактично, правило вибору – це критерій або модель прийняття рішень. Часто задача прийняття рішень настільки може бути складною, що вона не піддається формальному вирішенню ні одним із відомих методів. В такому випадку визначальну роль відіграють унікальні евристичні здатності людини. На цьому кроці застосовуються всі відомі методи та алгоритми прийняття рішення та їх комбінації або розробляються нові.

Задача вибору на сучасному етапі набуває все більш важливе значення. Це пов'язано з тим, що інтелектуальні можливості людини – її увага і досвід – є обмеженими.

Види та особливості вибору

Вимоги, які ставляться до процедури вибору, визначають і вигляд задачі прийняття рішень. На сьогоднішній день найбільш відомими(поширеними) вважаються наступні задачі вибору:

1. Відбір альтернатив(screning). Процес відсіювання(відбраковки) альтернатив із множини заданих/можливих, тобто формування допустимої множини або множини кращих альтернатив. Наприклад, відсіювання абітурієнтів, оцінка яких по ЗНО менша порогового значення.
2. Класифікація(кластеризація) простору альтернатив(sorting methods). Задачі розбиття альтернатив на класи(кластери) зустрічаються у повсякденному

житті. Наприклад, групи товарів розрізняються по якості, вузи класифікуються по рівнях акредитації, тестові завдання по рівню складності.

3. Упорядкування альтернатив(ranking). Існує багато задач, які потребують визначення порядку на множині альтернатив. Це в основному моделювання проблеми рейтингування. Наприклад, упорядкування покупок по ступені необхідності, визначення порядку виконання замовлень, надання пріоритетів напрямам розвитку країни.
4. Вибір найкращої альтернативи(choice problem). Дана задача вважається основною в прийнятті рішень. Наприклад, вибір вузу, спеціальності, професії, місця роботи, вибір найкращого варіанту бюджету. Вибір найкращого варіанту можна знаходити безпосередньо або шляхом вирішення вище описаних задач. Тобто, послідовним відбором до отримання єдиного варіанта, в тому числі і відбір серед найкращих у кожному класі або вибір найкращого із списку упорядкованих альтернатив, в тому числі і на основі наскрізного упорядкування відносно класів.

При моделюванні задачі вибору необхідно мати чітке уявлення про такі базові елементи:

- проблемна ситуація;
- наявні ресурси та обмеження;
- альтернативні варіанти рішень;
- критерії для оцінки альтернативних рішень;
- правило вибору.

Загальна постановка задачі вибору

Відомі

- множина альтернативних рішень вирішення проблемної ситуації ,
- множина критеріїв, яка описує ціль або цілі і дозволяє оцінити кожне альтернативне рішення.

Потрібно здійснити один із видів вибору на множини альтернативних рішень враховуючи оцінки за множиною критеріїв.

Системна модель задачі вибору може бути представлена наступним чином :

$$\{ V, K, O, A, P_V \mid R_V \} . \tag{3.1}$$

Відомими являються:

- V – вигляд задачі вибору,
- K – множина критеріїв,
- O – шкали оцінок,
- A – множина альтернатив,
- P_V – правило вибору.

Невідомим R_V – результат вибору. Результат вибору може бути:

- множини кращих(допустимих) альтернатив

$$R_v = \{ a \mid a \in A \wedge K(a) \in X, X - допустима\ множина\ оцінок \}$$

- альтернативи розбиті на класи

$$R_v = \{ (a, q) \mid a \in A, q - клас(назва) \},$$

- визначений порядок альтернатив

$$R_v = \{ (a, p) \mid a \in A, p - ранг(номер) \},$$

- вибір однієї або декількох оптимальних альтернатив

$$R_v = \left\{ a^* = \arg \underset{a \in A}{opt}\, P_v\big(K(a)\big) \right\}.$$

Математична модель задачі вибору

Відомо:

- існують альтернативи $a \in A$, що характеризуються m властивостями;
- кожній i-й властивості альтернативи $a \in A$ відповідає критеріальна оцінка $x_i = K_i(a), i = \overline{1, m}$;
- кожній альтернативі $a \in A$ відповідає в m вимірному критеріальному просторі розв'язок (точка) $x = (x_1, x_2, ..., x_m) = (K_1(a), K_2(a), ..., K_m(a)) \in R^m$;

- відображення множини альтернатив A у множину критеріальних оцінок X породжує підмножину розв'язків X_A, яка являється образом множини A: $A \xrightarrow{K} X_A \in R^m$;
- на множину розв'язків накладено наступні обмеження:

$X_P = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) : (\forall i = \overline{1,m}),\ a_i \le x_i \le b_i \right\}$ – параметричні;

$X_K = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) : (\forall i = \overline{1,m}),\ c_i \le K(x_i) \le d_i \right\}$ – критеріальні;

$X_F = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) : (\forall i = \overline{1,m}),\ a_i \le \varphi(x_i) \le q_i \right\}$ – функціональні.

- допустима множина розв'язків X_D визначається як перетин множин X_A, X_P, X_K, X_F : $X_D = X_A \cap X_P \cap X_K \cap X_F$.

У залежності від типу задачі прийняття рішень, ***знайти*** розв'язок у одному з наступних виглядів:

- множини кращих(допустимих) альтернатив $\{a \mid a \in A \wedge K(a) \in X_D \in R^m\}$;
- розбиття альтернатив на класи $\{(a,q) \mid a \in A, q - \textit{клас}(\textit{назва})\}$;
- упорядкування альтернатив $\{(a,p) \mid a \in A, p - \textit{ранг}(\textit{номер})\}$;
- оптимальних альтернатив $\left\{ a^* = \arg \underset{a \in A}{opt}\, P_v\big(K(a)\big) \right\}$.

3.2. Вибір і невизначеність

Все наше життя – це суцільний вибір. Наприклад, починаючи з найпростішого «підніматися вранці чи ні?» і до філософського «бути чи не бути?». Класичне визначення: вибір – це певна сукупність дій людини, яка спрямована на досягнення певної мети в умовах обмеженості ресурсів.

Складності нашого життя в сучасному світі залежать від рівня «невизначеності». Тому виникають запитання : «що собою представляє невизначеність?»; «в яких ситуаціях вона виникає?»; «яким чином вийти із неї з найменшими втратами?». Ці питання хвилюють науковий світ не тільки психологів, а і представників таких далеких один від одного професійних напрямків як соціологи, менеджери, медики, математики, економісти, фізики, хіміки, екологи, політики. З кожним днем ці питання все частіше обговорюють в сучасному світі.

Термін «невизначеність» вперше запропонував F.H. Knight[143] на початку ХХ століття. Зміст полягав у тому, що людина не знає або не може точно оцінити стан навколишнього середовища і результати, які протікають у даному середовищі в певному стані.

Невизначеність присутня завжди і у всьому, вона являється «королевою сучасності». Невизначеність – це той факт, з яким всі форми життя повинні боротись. Багато людей вважають, що «невизначеність» - це відсутність або недостатність інформації, а невизначеною слід вважати ситуацію, коли виникає необхідність вибору, або при недостатньому рівні інформації для прийняття правильного рішення, або навпаки – інформації настільки багато, що вона «не поміщається в голові». В основному одна і та ж інформація може пояснюватись по різному, або її взагалі неможливо категоризувати (структурувати) – тобто людина не готова для обробки такої інформації. Сюди ж відносяться ситуації, в яких присутні сумніви, суперечливість, ненадійність, незрозумілість за рахунок достовірності інформації. Невизначена ситуація як вакуум притягує до себе різні інші ситуації, які є не менш невизначеними.

Все своє життя людство робило спроби приручити «невизначеність». Наприклад, людина створила механізм «упорядкування» випадкового вибору – від примітивного «гадання» і гри в рулетку до розробки складних методів моделювання невизначеності – теорії катастроф. На сьогоднішній день цілі науково-дослідні лабораторії і інститути працюють над проблемою приручення «невизначеності».

Психологи вважають, що важкі ситуації не мають простих рішень[140, 144]. А це безумовно пов’язано, у свою чергу, з проблемою оцінки рішень за багатьма критеріями. Сама людина з такою ситуацією справитись не може. Тому, виникає необхідність у залученні, для вирішення проблемної ситуації, спеціалістів у вигляді експертів і консультантів, тобто «колективного розуму» і «інтуїції», які володіють як психологічними прийомами так і математичними методами і моделями переробки інформації. Наявність невизначеності, особливо у поєднанні з багатокритеріальністю, суттєво ускладнює прийняття рішень.

Як показує багаторічний досвід, проведений різними дослідниками, можна виділити наступні види інформаційних невизначеностей[73]:

1) об'єктивна невизначеність («природа»);
2) невизначеність із-за відсутності достатньої інформації;
3) невизначеність, яка породжена слабо структурованими проблемами;
4) стратегічна невизначеність, яка викликана залежністю від інших суб'єктів;
5) невизначеність, яка викликана нечіткістю як процесів і явищ, так і інформацією, яка їх описує;
6) перспективна невизначеність (поява непередбачуваних факторів);
7) ретроспективна невизначеність, яка викликана відсутністю інформації про поведінку об'єкта в минулому;
8) технічна невизначеність – неможливість наперед угадати (передбачити) результати прийнятих рішень, або ненадійність вхідних даних;
9) стохастична невизначеність – використання ймовірнісних величин і характеристик;
10) невизначеність цілей (критеріїв) і обмежень;
11) невизначеність умов, в яких приймається рішення;
12) обчислювальна невизначеність пов'язана з неточністю оцінок об'єкта або з неточністю моделей;
13) невизначеність, пов'язана з неповнотою інформації (пропуски даних) або недостовірність даних (помилки вимірів або оцінок), а також їх комбінація;
14) невизначеність, пов'язана з оцінкою альтернатив по багатьох критеріях.

Невизначеність можна класифікувати за наступними ознаками:

- за ступенем невизначеності – повна визначеність, імовірнісна, лінгвістична, інтервальна і повна;
- за характером невизначеності – параметрична, структурна, ситуаційна;

- за використанням отриманої інформації, яка піддається усуненню і яку усунути неможливо.

Інформаційна невизначеність виникає із декількох причин. По-перше, неможливість передбачення як самих процесів, так і зовнішніх впливів на них. По-друге, обмеженість людського пізнання. По-третє, неможливість передбачити взаємодію між суб'єктами, а також їх взаємодію. По-четверте, відсутність достатньої інформації для доцільності організаційних дій. Інформаційну невизначеність можна усунути двома шляхами: поглиблене вивчення існуючої інформації або доотримання бракуючої інформації[90].

Інформацію за вмістом в ній невизначеності можна розділити на такі групи.

1. Вхідна інформація – це наперед накопичена і підготовлена інформація, невизначеність якої характеризується неповнотою, недостовірністю і невідповідністю.
2. Оперативна інформація – поточна інформація, невизначеність якої залежить від вхідної інформації, а також від особливостей функціонування об'єкта.
3. Суб'єктивна інформація – це особиста інформація, невизначеність якої характеризується значеннями про об'єкт або явище і дефіцитом часу на розробку рішень.

На сьогоднішній день відомі(існують) наступні шляхи зменшення невизначеності: структуризація, характеризація та оптимізація.

Структуризація проблеми дозволяє визначити окремі її елементи, встановити взаємозв'язок між елементами, ієрархічну схему впливу підцілей, підпроблем, елементів, послідовність розв'язування задач.

При характеризації проблеми використовується гіпотеза про характерність ознак об'єкта прийняття рішення, тобто допускається, що можливе упорядкування значень кожного признаку для тієї або іншої властивості об'єкта. Дана гіпотеза дозволяє класифікувати елементи структуруючого об'єкту. Деяким обмеженням являється припущення про незалежність упорядкування значень одних ознак відносно інших.

Після структуризації і характеризації проблеми ПР стає можливість побудови оптимізаційної моделі, за допомогою якої здійснюється вибір найбільш привабливого варіанту.

Слаба структуризація проблеми прийняття рішень, наявність невизначеності і неповноти інформації роблять процес вироблення і вибору ефективного рішення досить складним.

З математичної точки зору невизначеність – це характеристика рішень, ймовірність яких невідома.

3.3. Підходи щодо моделювання задач вибору

3.3.1.Опис задачі вибору на мові бінарних відношень

Цей підхід є найбільш загальним і використовується в тому випадку, коли дати оцінку окремо взятій альтернативі часто складно або неможливо.

Суть даного підходу полягає в тому, що альтернатива розглядається не окремо, а в парі з іншою. Тому, має бути можливість сказати, яка з них більш приваблива. Таким чином, основні положення цього підходу зводяться до наступного:

а) окрема альтернатива не оцінюється, тобто критеріальна функція не вводиться;

б) для кожної пари альтернатив є можливість встановити, що одна з них переважає іншу, або вони рівнозначні, або непорівнювані;

в) відношення переваги для будь-якої пари альтернатив не залежить від інших альтернатив, які беруть участь у виборі.

Математично бінарне відношення задається підмножиною впорядкованих пар елементів.

На сьогоднішній день відомі чотири різні способи задання бінарних відношень.

Перший спосіб – це безпосереднє перерахування таких пар. Зрозуміло, що він прийнятний лише у випадку, якщо бінарне відношення є скінченним.

Другим зручним способом задання бінарного відношення на скінченній множині є матричний. Суть даного способу полягає в тому, що всі альтернативи нумеруються, а елементи матриці визначають бінарне відношення між ними. Для задання елементів матриці використовуються різні калібровки. Наприклад, турнірна, косометрична.

Третій спосіб задання бінарного відношення є за допомогою графа. Вершини графа – це елементи самої множини, а дуги між вершинами – це відношення.

Для визначення відношення для нескінченної множини альтернатив використовується спосіб зрізів, який є четвертим. Бінарне відношення визначається одним із своїх зрізів: нижнім або верхнім.

Даний підхід доцільно використовувати в тих практичних випадках, коли критеріальної функції не існує. Він являється більш загальним способом описання задач вибору, але і досить трудомістким.

3.3.2. Функції вибору – мова опису вибору

Деякі особливості задач вибору привели до побудови більш загального підходу описання вибору на мові функцій вибору. Особливостями таких задач, по-перше, є ситуації, коли переваги між двома альтернативами залежать від всіх інших альтернатив, по-друге, коли поняття переваг взагалі немає змісту.

Прикладом для першої ситуації є покупка чайника або кавоварки в залежності від наявності кавомолки.

Мова функції вибору являється більш загальною і потенційно може описати будь-який вибір.

<u>Приклади функцій вибору.</u> Наведемо приклади деяких функцій вибору, у яких множина альтернатив $X \subset R^n$, де R^n – n-вимірний критеріальний простір. Якщо множина альтернатив X оцінюється сукупністю критеріїв $K = \{ K_1, K_2, \ldots, K_n \}$, то функція вибору за Парето може бути визначена наступним чином[124, 131]:

$$C^P(x)=\left\{ x\in X \middle| \overline{\exists}\, y\in X : K(y)\geq K(x)\ i\ \exists\, j,\ K_j(y)>K_j(x) \right\}.$$

Це означає, що альтернатива $x\in X$ вибирається, якщо не існує іншої альтернатива $y\in X$, яка має оцінку в просторі критеріїв за всіма критеріями не меншу, ніж оцінка альтернативи $x\in X$, і хоча б за одним критерієм строго більшу.

Функція слабо ефективного вибору або оптимального за Слейтером може бути визначена таким чином: альтернатива $x\in X$ є слабо ефективною, якщо не існує іншої альтернативи $y\in X$, яка має оцінку в просторі критеріїв за всіма критеріями строго більшу, ніж оцінка альтернативи $x\in X$.

$$C^{SL}(x)=\left\{ x\in X \middle| \overline{\exists}\, y\in X : K(y)>K(x) \right\}.$$

З означення випливає, що $C^P(x)\subseteq C^{SL}(x)$.

Функцію оптимального вибору можна представити у наступному вигляді: $C^O(x)=\left\{ x\in X \middle| x^* = \arg \underset{x\in X}{extr} u(x) \right\}$, де $u: X\to R^1$ інтерпретується як функція корисності.

Якщо $x\in R^n; u(x)$ – опукла функція, тоді $C^O(x)\subseteq C^P(x)$.

3.3.3. Критеріальна мова опису вибору

Даний підхід використовується в тому випадку, якщо кожну окремо взяту альтернативу можна оцінити конкретним числом і тоді порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм чисел. Вважається, що для оцінки всіх альтернатив може бути задана функція, яка називається критерієм. Ця функція може виражатись як критерій якості, цільова функція, функція переваг, функція корисності і т.д.

Якщо множина альтернатив оцінюється одним критерієм, тоді задача вибору зводиться до однокритеріальної скалярної задачі оптимізації.

Але на практиці, частіше за все, оцінка будь-якого варіанта єдиним числом є неприйнятним спрощенням. Реальні задачі, в основному, приводять до необхідності оцінки альтернатив за декількома критеріями, які якісно розрізняються між собою і повинні відповідати певним обмеженням. Наприклад, оцінка компетентності випускника вузу [72, 85, 87].

Для розв'язання багатокритеріальних задач вибору можна застосувати наступні способи. Перший спосіб – це зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної. Суть даного способу полягає у побудові суперкритерія, використовуючи певну модель згортки. Приклади згорток наведені в розділі 2.5.3.

Основними недоліками цього способу є те, що суперкритерій не несе ніякого змісту. Ще одним моментом недоліку є те, що впорядкування точок в багатовимірному просторі є неоднозначним і повністю залежить і визначається видом упорядковуючої функції. У даному випадку суперкритерій грає роль цієї функції, і його навіть невелика зміна може привести до того, що оптимальна в новому розумінні альтернатива стане дуже сильно відрізнятись від старої.

Суть другого способу базується на тому факті, що часткові критерії є нерівнозначними між собою. Цей спосіб називається умовною оптимізацією. Ідея полягає у виборі головного, а всі інші критерії розглядаються як додаткові і переводяться у обмеження, або критерії впорядковуються за важливістю і здійснюють покрокову оптимізацію за кожним критерієм з використанням поступок.

Недоліком такого способу є обов'язкове знання відмінностей між критеріями та їх граничними значеннями. Фактично задача вибору зводиться до задачі умовного екстремуму основного критерію при умові, що додаткові критерії залишаються на своїх заданих рівнях.

Третій спосіб багатокритеріального вибору базується на ідеї, що завчасно відомі значення часткових критеріїв або їх граничні значення. Задача вибору зводиться до знаходження альтернативи з потрібними якостями або її відсутність. Суть оптимізації полягає у знаходженні траєкторії на множині альтернатив, яка наближає до оптимального варіанту.

3.3.4. Знаходження множини Парето

Розглянемо четвертий найбільш формалізований спосіб багатокритеріального вибору, який базується на ідеї про відмову виділення єдиної найкращої альтернативи, а знаходження паретівської множини альтернатив. Побудова даної множини полягає в тому, що до неї входять альтернативи, які вважаються непорівнянними, тобто якщо переваги хоча би по одному критерію не співпадають. При необхідності вибору єдиної альтернативи із множини Парето потрібно залучати додаткову інформацію, наприклад, експертну.

Нами розглянуті найбільш поширені і вивчені підходи описання задач вибору. На основі даних підходів розроблено і розробляється багато різних моделей, методів і алгоритмів розв'язання теоретичних і практичних задач вибору.

В подальших своїх дослідженнях автор використовує наступні мови опису вибору: критеріальну, нечітких множин та їх синтез. На основі цього підходу будуються нові моделі, методи і алгоритми розв'язання задачі вибору.

3.4. Задача вибору на скінченій множині альтернатив

Розглянемо модель задачі вибору (3.1) у вигляді сукупності моделей, яка включає модель початкових даних, модель умов задачі вибору, модель правила вибору і модель результату.

Представимо модель проблемної ситуації у вигляді моделі задачі вибору на скінченій множині альтернатив.

Більшість практичних задач прийняття рішень, як правило, в якості вхідної інформації використовують обмежену множину альтернативних варіантів, яку можна перерахувати. Потужність такої множини нараховує одиниці, десятки, а то і сотні елементів. Наприклад, кількість факультетів, спеціальностей, кафедр, чисельність професорсько-викладацького складу, контингент студентів у вищому навчальному закладі.

Дана множина альтернативних варіантів характеризується багатьма властивостями, на основі яких проводяться їх порівняння. Кількість таких властивостей, теж може обчислюватись одиницями, десятками і сотнями. Наприклад, престиж, привабливість спеціальності, кількість дисциплін, які читаються на факультеті. Властивості альтернативних варіантів вимірюються показниками, які формують критерії оцінювання альтернатив. Таким чином, при порівнянні альтернативних рішень, виникає багатокритеріальна задача вибору на скінченій множині альтернатив.

За ознакою неперервності, задачі прийняття рішень, а відповідно і задачі вибору, поділяються на дискретні (скінчення) та континуальні (неперервні). Розглянемо клас задач коли множина альтернатив є скінченою (дискретною) $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, а множина критеріїв – це множина критеріальних оцінок $K = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$, значення яких або обчислюється за моделями, або отримано в результаті вимірювання, або за допомогою експертних оцінок. Надалі, під альтернативою будемо розуміти її оцінку. Опишемо модель початкових даних для даного класу задач вибору у вигляді відношення «об'єкт–властивість», тобто відношення $H \subseteq K \times A$ (таблиця 3.1). Позначимо оцінки альтернатив як вектори $x^j \, (j = \overline{1,n})$, таким чином, що кожну альтернативу буде представлено у вигляді вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ з векторного простору R^m. Множина вектор оцінок X буде складатись із n оцінок альтернатив : $X = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$. В подальшому, під альтернативою будемо розуміти її оцінку, тобто будь-яка альтернатива $a \in A$ буде асоціюватися з відповідною оцінкою $x \in X$. Фактично, кожній альтернативі a_j буде відповідати вектор оцінок $x^j \in R^m \, (j = \overline{1,n})$. Таким чином, модель початкових(вхідних) даних для задачі вибору на скінченій множині можна задати у вигляді таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

	x^1	x^2	x^3	$\dots$	x^n
K_1	x_1^1	x_1^2	x_1^3	$\dots$	x_1^n
K_2	x_2^1	x_2^2	x_2^3	$\dots$	x_2^n
$\vdots$					
K_m	x_m^1	x_m^2	x_m^3	$\dots$	x_m^n

або матриці рішень

$$O=\begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{m1} & O_{m2} & \dots & O_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

де кожен стовбець матриці (3.2) є m-вимірний вектор оцінок відповідної альтернативи за всією множиною критеріїв, а кожен рядок є n-вимірний вектор оцінок по відповідному критерію всієї множини альтернатив X, O_{ij} – це оцінка j-альтернативи за i-критерієм ($O_{ij} = K_i(a_j) = x_i^j, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n};$).

Прийняття рішень за багатьма критеріями вносить у задачу вибору свою невизначеність, оскільки критерії, як правило, є суперечливими, тобто, покращення значення за одним із них веде до погіршення значення за іншим. Для усунення невизначеності, пов'язаної з багатокритеріальністю, необхідно вирішити ряд наступних питань(проблем):

- введення поняття найкращої альтернативи;
- вибір правила вибору (принцип оптимальності), яке забезпечить спосіб порівняння альтернатив в просторі критеріїв;
- розробка (використання) методів для пошуку компромісних рішень.

Методи багатокритеріального вибору

Приведемо найбільш відомі методи розв'язування задачі вибору на скінченій множині альтернатив.

Метод аналітичних ієрархій[126]. Даний метод використовує дерево критеріїв, в якому найбільш загальні критерії розбиваються на частинні, тобто будується ієрархічна структура критеріїв. Для кожної групи критеріїв визначається коефіцієнт важливості. Альтернативи попарно порівнюються між собою по кожному критерію. Результат оцінюється в бальній шкалі від 1 до 10. На основі таких порівнянь обчислюються коефіцієнти важливості критеріїв, оцінки альтернатив і знаходиться загальна оцінка, як зважена сума оцінок критеріїв.

Метод порогової непорівнянності ЕЛЕКТРА (ELECTRE – Elimination Et Choix Traduisant la Realite – виключення і вибір, що відображають реальність)[43]. Даний метод теж базується на повному попарному порівнянні альтернатив за критеріальними оцінками. Суть даного методу полягає в тому, що для кожної пари альтернатив визначаються (обчислюються) значення двох спеціальних індексів: згоди і незгоди. На основі цих індексів проводиться парне порівняння альтернатив за множиною критеріїв. Із множини не домінуючих альтернатив будується ядро, в яке входять еквівалентні або непорівнянні альтернативи. Змінюючи (задаючи) пороги для індексів згоди і незгоди, звужується ядро. Таким чином будується послідовність ядер, які визначають упорядкування альтернатив за якістю. Процес зупиняється на ядрі, яке достатньо обґрунтовано виділено з точки зору наявної інформації.

Діалогові методи[43]. Діалоговий підхід використовує інтерактивні людино-машинні процедури для пошуку кращих альтернатив на основі інформації про переваги від особи, що приймає рішення. В результаті діалогу здійснюється самонавчання на матеріалі реальної задачі, що дозволяє вибрати розумне компромісне рішення.

3.5. Декомпозиція задачі вибору

Важливою особливістю реальних задач вибору являється велика розмірність множини альтернатив, яка суттєво збільшує трудомісткість розв’язання даних задач. Багато практичних задач вибору, як правило, є неоднорідними, тобто альтеративні варіанти оцінюються за різними множинами критеріїв. Прикладом може служити задача підтримки різних проектів і програм Міжнародним фондом «Відродження»(МФВ). Для МФВ головна ціль була сформульована в уставі як «Підтримка побудови в Україні відкритого суспільства». Як описано у роботі [137], що в 1994 році було розглянуто близько 300 проектів різних тематик, які у свою чергу були об'єднані у 13 програм. Кожен проект є унікальним по-своєму і оцінюється своєю множиною критеріїв. Неоднорідна задача вибору виникає і при колективному виборі. Кожен індивідуум може мати свою ціль і відповідно свою множину критеріїв для оцінки вирішення проблеми. Це також може бути зв'язано із професійним рівнем експертів, що залучаються для побудови оцінки множини альтернатив тощо. Таким чином виникає проблема побудови методики вирішення неоднорідних задач вибору[83, 84].

Для вирішення даної проблеми доцільно використати декомпозиційний підхід, який дозволить зробити заміну початкової задачі вибору на ряд підзадач, описаний у роботах[49, 54, 76, 89]. Суть даного підходу полягає в тому, що множина альтернативних варіантів розбивається на підмножини однорідних альтернатив, а множина критеріїв, за якими проводиться їх оцінка, представляється у вигляді ієрархічної структури.

Розглянемо задачу вибору у загальній постановці. Нехай задана множина альтернатив $A = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$ і ідеальна множина критеріїв $K = \{ k_1, k_2, ..., k_m \}$, за допомогою яких ця множина альтернатив може бути оцінена. Необхідно вирішити одну із задач вибору: визначити множину найкращих альтернатив(множина може складатись із одної альтернативи) або проранжирувати їх у порядку привабливості.

Представимо даний підхід у вигляді наступного узагальненого алгоритму:

Крок 1. Декомпозиція множини альтернатив на підмножини, тобто виділення однорідних підмножин альтернатив. Аналізуючи проблемну ситуацію, множина альтернатив може бути представлена у вигляді наступної сукупності неперетинаючих підмножин $A^{(1)}, A^{(2)},...,A^{(l)}$, тобто $A = \{A^{(1)}, A^{(2)},...,A^{(l)}\}$. Відповідно кожній з цих підмножин альтернатив відповідає своя група критеріїв із ідеальної множини K, які позначимо $K^{(1)}, K^{(2)},...,K^{(l)}$. Перетин між цими групами може бути непорожня множина. Таким чином, ми можемо зробити декомпозицію неоднорідної задачі прийняття рішень на сукупність однорідних.

Крок 2. Побудова узагальненої оцінки корисності для кожної підмножини альтернатив на основі ієрархічної структури критеріїв.

Крок 3. Побудова узагальненої оцінки корисності для всієї множини альтернатив на основі узагальнених оцінок кожної підмножини.

Крок 4. Ранжирування альтернатив відносно даної узагальненої оцінки і визначення найкращих .

3.6. Задача вибору на основі нечітких моделей представлення знань

3.6.1. Основні положення теорії нечітких множин

Як видно з вище наведеного, задача вибору на скінченій множині описана в термінах оцінок альтернатив у просторі критеріїв, але щоб її розв'язувати, нами пропонується використати і апарат «нечітких множин», тобто синтезуємо ці дві мови [10, 11, 16, 47, 65, 66, 77, 92, 96].

У сучасних прикладних галузях виникає необхідність застосування ефективного математичного апарату для роботи з невизначеністю. Таким апаратом на сьогоднішній день може служити теорія нечітких множин[24, 26, 38]. Поняття нечіткості відноситься до класів, в яких розрізняються різні проміжкові градації ступеня належності між повною належністю і не належністю об'єктів до даного класу. Тобто, нечітка множина є клас об'єктів, в яких немає різкої межі між об'єктами, які входять в цей клас і тими, що у нього не входять. На сьогоднішній день опубліковано багато книг, монографій і статей [10, 11, 14, 16, 24, 26, 38, 48, 61, 65 – 68, 74, 75, 77, 92, 94, 96, 116, 119, 130, 151], які присвячені теорії нечітких множин і їх використанню у вигляді готових програмних продуктів для розв'язання задач нечіткого моделювання і управління.

В основі понять нечіткої множини лежать уявлення про те, що елементи, які входять в дану множину і мають спільну властивість, можуть володіти цією властивістю в неоднаковій мірі, а тому і належати цій множині з різною ступінню.

Один з найпростіших способів опису нечіткої множини – характеризація ступені належності елемента множині числом, наприклад із інтервалу [0;1].

Нехай X - деяка множина (в звичайному розумінні) елементів. Надалі будемо розглядати підмножини цієї множини.

Означення 3.1. *Нечіткою множиною* $A \subset X$ називається сукупність пар вигляду $\left(x,\ \mu_A(x) \right)$, де $x \in X$, а μ_A - функція $X \to [0;1]$, яка називається *функцією належності* нечіткої множини *A*. Значення $\mu_A(x)$ цієї функції для конкретного x називається *ступінню належності* цього елемента нечіткій множині A.

Означення 3.2. Нечітка множина називається порожньою, якщо її функція належності рівна нулю на всій множині X, тобто $\mu_{\varnothing}(x) = 0 \quad \forall x \in X$.

Означення 3.3. *Носієм нечіткої множини A* (позначається *supp A*) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина (в звичайному розумінні) вигляду $supp\, A = \{x \mid x \in X,\ \mu_A(x) > 0\}$.

Означення 3.4. Нечітка множина A називається *нормальною*, якщо виконується рівність $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x) = 1$.

В протилежному випадку нечітка множина називається *субнормальною*. Субнормальну множину можна нормалізувати, розділивши функцію належності $\mu(x)$ цієї множини на величину $\sup\limits_{x \in X} \mu(x)$.

Означення 3.5. *Декартовий добуток* $A_1 \times \cdots \times A_n$ нечітких множин A_i в X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ визначається як нечітка множина A в декартовому добутку $X = X_1 \times \cdots X_n$ з функцією належності вигляду

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X.$$

Означення 3.6. *Операції концентрації (CON) і розтягування (DIL)* нечіткої множини A визначаються наступним чином: CON $A = A^2$, DIL $A = A^{0,5}$, де $\mu_{A^\alpha}(x) = \mu_A^\alpha(x), \quad x \in X, \quad \alpha > 0$.

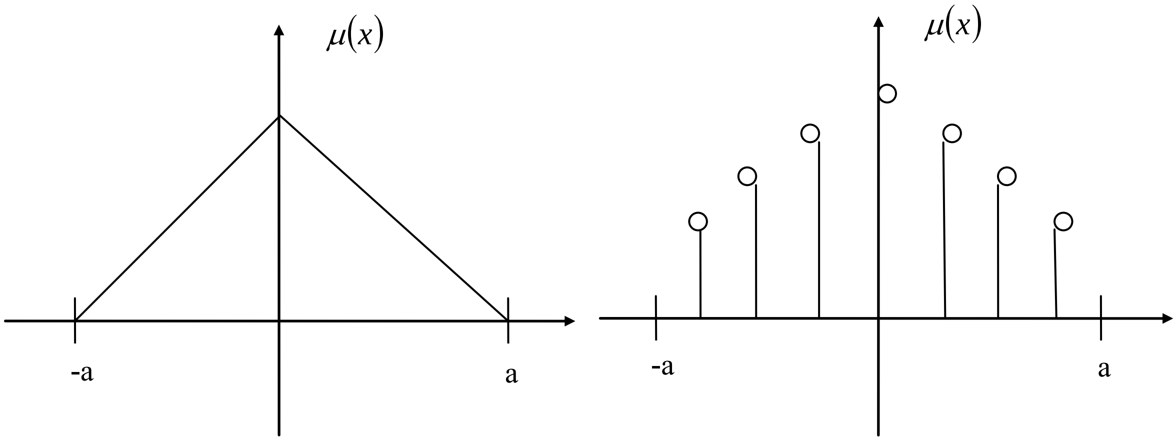
Застосування операції концентрації до заданої нечіткої множини означає зменшення "нечіткості" цієї множини. В конкретній задачі це може означати надходження нової інформації, яка дозволяє точніше описати дану нечітку множину. Аналогічно, операція розтягування може застосовуватися для моделювання ситуації, пов'язаної з втратою інформації.

Означення 3.7. *Множиною рівня* α нечіткої множини A в X називається множина в звичайному розумінні, утворена з елементів $x \in X$, ступені належності яких нечіткій множині A не менші числа α. Таким чином, якщо A_α - множина рівня α нечіткої множини A, то $A_\alpha = \{x \in X, \quad \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Функція належності $\mu_A(x)$ характеризує ступінь, з якою елемент x належить множині A.

Функція належності може задаватися наступним чином:

1. Графічно (для аналітичного випадку) і у вигляді діаграми (для дискретного випадку) (рис. 3.2).



а) графічно б) у вигляді діаграми

Рисунок 3.2. Задання функції належності.

2. Аналітично у вигляді формули.

3. Таблично. Даний вид використовується для дискретної функції належності.
4. Вектором ступенів належності $\mu_A(x)=\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\ldots,\mu_A(x_n)\}$.
5. У вигляді суми або інтегралу. У цьому випадку нечітка множина представлена у вигляді об'єднання пар $\mu_A(x)/x$, тобто $A=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ або $A=\int_x \frac{\mu_A(x)}{x}$.

В основному функція належності визначає порядок елементів для простих категорій і у вигляді згорток по простих категоріях для складних категорій.

3.6.2. Лінгвістичні змінні

Означення 3.8. Змінна називається лінгвістичною, якщо вона відображає якісні оцінки, тобто приймає значення з множини слів чи словосполучень деякої природної чи штучної мови.. Наприклад, швидкість, напруга, температура, зріст, вік, краса і т.д.

Лінгвістична змінна приймає значення, які виражені у словесній формі і називаються лінгвістичними значеннями. Наприклад, висока, низька, старий, молодий, приємний, неприємний і т.д. На практиці для задання лінгвістичних змінних використовуються не тільки лінгвістичні значення, але і нечіткі числа.

Означення 3.9. Нечітким числом називається нечітка множина, в якої функція належності є нормальною і опуклою.

Наприклад, біля нуля, в діапазоні між $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.

У практичних задачах використовуються змішані набори значень лінгвістичних змінних і нечітких чисел. Наприклад, температура мінусова, біля нуля, плюсова.

Означення 3.10. Множина всіх лінгвістичних значень, які використовуються для визначення лінгвістичної змінної, називається терм-множиною. Наприклад, незадовільно, задовільно, добре, відмінно.

Область значень лінгвістичної змінної – це множина всіх числових значень, які вона може приймати.

Дана область може бути неперервною і дискретною. Неперервна задається інтервалом або сегментом, а дискретна – скінченою множиною елементів.

Під потужністю області значень розуміють число оцінок, які вона містить.

Задання значень змінної словами, без використання чисел, для людини більш природно. Щодня ми приймаємо рішення на основі лінгвістичної інформації. Психологи встановили, що в людському мозку майже вся числова інформація вербально перекодовується та зберігається у вигляді лінгвістичних термів. Поняття лінгвістичної змінної відіграє важливу роль в нечіткому логічному виводі та в прийнятті рішень на основі наближених міркувань. Формально, ***лінгвістична змінна*** задається п’ятіркою (***x, T, U, G, M***), де ***x*** – ім’я змінної, ***T*** – терм-множина, кожний елемент якої (терм) представляється як нечітка множина на універсальній множині ***U, G*** – синтаксичні правила, часто у вигляді граматики, за допомогою яких утворюються назви термів, ***M*** – семантичні правила, що задають функції належності нечітких термів, утворених синтаксичними правилами ***G***.

Синтаксичні правила ***G***, породжують нові терми з використання квантифікаторів «не», «дуже», «більш-менш» і можуть задаватись у вигляді, приведеному на таблиці 1.

Таблиця 1. Правила розрахунку функцій належності

Квантифікатор	Функція належності ($u \in U$)
не ***t***	$1 - \mu_t(u)$
дуже ***t***	$(\mu_t(u))^2$
більш-менш ***t***	$\sqrt{\mu_t(u)}$

3.6.3. Нечітка інформація

На думку багатьох авторів, на сьогоднішній день, розрізняються два типи нечіткої інформації в залежності від області визначення нечітких множин.

Перший тип – це нечіткі величини. Під нечіткими величинами розуміють нечіткі множини, визначені на деякій числовій множині, яка називається числовою шкалою. Прикладом служать нечіткі числа і нечіткі інтервали.

Другий тип – це нечіткі множини, які визначені на нечисловій множині. У такому випадку про нечітку множину говорять як про множину нечітких об’єктів. Нечисловою множиною може служити множина правил і фактів для експертної системи, множина цілей і альтернатив для задач вибору, множина елементів деякого бінарного відношення між об’єктами і т.д.

В залежності від області застосування нечітких множин можна виділити три види семантики ступені належності:

- Схожість. Коли функція належності інтерпретується як степінь близькості до прототипу.
- Перевага. Інтерпретується як степінь переваги для вибору об’єктів.
- Відношення упорядкування. Інтерпретують функцію належності як набір бінарних відношень, що задають собою повне впорядкування.

У загальному випадку, задачу вибору можна сформулювати за допомогою нечіткої моделі: вибрати найкращу (ефективну) альтернативу із нечіткої множини $A_T = \{a, \mu_A(a)\}, a \in A$, де A_T – нечітка множина, A – множина альтернативних рішень, $\mu_A(a)$ – функція належності.

3.7. Раціональний вибір і «обмежена» раціональність

В математиці оптимальний розв’язок трактується як розв’язок, що забезпечує екстремум (максимум або мінімум) деякої цільової функції. У теорії прийняття рішень найкращий варіант вирішення проблемної ситуації прийнято називати оптимальним, якщо він забезпечує екстремум критерію вибору при індивідуальному виборі або задовольняє принципу згоди при груповому виборі.

Системний аналіз під оптимізацією розуміє встановлення найкращої відповідності між системою і її оточенням.

При вирішенні соціально-економічних та гуманітарних проблем суть раціональності розглядається, як певна форма цілеспрямованої діяльності та поведінки людей у найрізноманітніших суспільних умовах. Суттєвим є те, що при прийнятті будь-якого рішення потрібно враховувати різні суспільні обмеження, що висуває середовище. Таким чином, рішення проблеми називається раціональним (допустимим), якщо воно задовольняє визначеним обмеженням: ресурсним, правовим, етичним, моральним, екологічним і т.д.

Загальною характеристикою рішення є його ефективність, тобто віддача, рентабельність. Дана характеристика включає ступінь виконання поставлених задач відносно до затрат на їх досягнення. Під результативністю розуміють ступінь досягнення цілі або сукупності цілей.

На математичній мові раціональним вибором буде називатись такий вибір, який відповідає екстремальному значенню цільової функції на допустимій множині альтернатив. Раціональний вибір пов'язаний з логічними міркуваннями, оскільки він описує індивідуальний спосіб вибору варіантів з найбільшою корисністю або вигодою.

При побудові моделі раціонального вибору людина зіштовхується не просто з пізнанням і моделюванням тих або інших об'єктів, а і з вибором із множини можливих варіантів дій, поведінки або вирішення проблеми, які є протиріччям конкретної реальності. Таким чином, протиріччя, які виникають у процесі вибору, зв'язані як з виявленням раціональних і ірраціональних підходів так і з самим процесом вибору та оцінками можливих альтернатив вирішення проблемної ситуації.

Заслуговує уваги позиція Герберта Саймона, який вважає, що раціональний вибір не слід завжди зв'язувати з отриманням максимальної вигоди або корисності. «Підприємця, – пише він, – може зовсім не турбувати максимізація, він може просто бажати отримати той дохід, який вважає достатнім для себе» [129].

Герберт Саймон [148, 149] запропонував модель «адміністративної людини» замість моделі «економічної людини»[21]. У сучасній науковій літературі поняття «економічної людини» трактується як винахідлива, оцінююча, максимізуюча особа. Така модель вимагає, щоб індивід, відносно отримання корисності від економічних благ, вів себе повністю раціонально. Для цього потрібно виконання певних умов. Такими умовами можна вважати:

1) інформація, яка необхідна для прийняття рішення являється для індивідуума доступною;
2) індивідуум, у своїх вчинках у сфері економіки, є повністю егоїстом, тобто йому байдуже як міняється добробут інших людей у результаті його дій;
3) не існує ніяких зовнішніх обмежень отримати максимальну корисність.

Подібні припущення привели до того, що раціональність – це не все, що визначає поведінку економічної людини, оскільки вона не існує одноосібно відносно навколишніх предметів і таких же індивідів як вона. Це приводить до того, що необхідно розглядати і враховувати обмеження, з якими зустрічається людина у процесі прийняття рішень або здійсненні вибору.

Суть моделі «адміністративної людини» полягає в тому, що управлінець або адміністратор, спираючись на відому інформацію, ставить за мету знайти не екстремальний(оптимальний), а лише задовольняючий розв'язок проблеми. Така модель краще відповідає дійсності, оскільки особа, що приймає рішення, як правило, знаходиться в умовах суттєвої невизначеності і не має можливість врахувати випадкові та непередбачувані обставини. У такій ситуації, особа, що приймає рішення, не має можливості ухвалити оптимальне рішення, вимушена обмежитись пошуком лише раціонального, задовільного з її погляду рішенням. Згідно психологічних теорій спонукання до дій, щось міняти, приходить із за незадоволеності і пропадає після його задоволення. Умови задоволення, у свою чергу, залежать від рівня прагнень(спрямувань), які залежать від життєвого досвіду. Модель «адміністративної людини» ще називається моделлю обмеженої раціональності.

Розглянемо модель обмеженої раціональності Саймона, яка описана в роботі Ф. Лютенса [44]. З точки зору Герберта Саймона[127–129], поведінка при прийнятті рішення може бути описана наступним чином:

1. При виборі альтернативи менеджери прагнуть задоволеності, а не ідеальності. Приклад критерія задоволеності: адекватний прибуток, доля ринку, справедлива ціна і т.д.

2. Менеджери вважають своєю основною задачею вибір альтернативи, яка задовольняє деяким критеріям, а не забезпечує максимальний результат.

Наведемо цитату Герберта Саймона, де він висловлюється про задачу вибору[129]:

«Выбор, который индивид совершит в той или иной ситуации, складывается из (1) его навыков, знаний, характера и особенностей личности в том виде, в каком они были сформированы всем предшествующим опытом, и (2) из конкретных воздействий, которым он подвергается в момент принятия решения. В большинстве случаев первое гораздо более важно для определения его поведения, чем второе».

Гербертом Саймоном названо причини, чому прийняття рішення не відповідає ідеалам раціональності:

- індивід не має достатньо часу і засобів, щоб зібрати всі необхідні дані і передбачити всі ймовірні стани;
- можливості мозку людини не дозволяють розглядати проблему зі всіх сторін.

У таких випадках, вибір задовольняючого рішення є найбільш ефективним, хоча відомо, що він не є оптимальним.

Обставини, які можуть накладати обмеження на раціональний вибір в реальному житті:

- непередбачувані події випадкового характеру, які можуть бути оцінені з певною імовірністю;

- пізнавальні можливості і інтелектуальні здібності самого індивідуума;
- політичні і організаційні умови прийняття рішення;
- уміння приймати правильні рішення приходить з часом і залежить від досвіду і вдосконалюється практикою.

Обмежена раціональність – це прагнення людини до максимального задоволення потреб(корисності) з врахуванням не лише внутрішніх, але і зовнішніх обмежень, починаючи зі збору інформації і закінчуючи прийняттям рішення та його виконанням. В число обмежених ресурсів попадають її інтелектуальні можливості, увага, здатність сприймати і обробляти інформацію, приймаючи відповідні рішення[41]. Суть обмеженої раціональності полягає в тому, що індивід не може втримати в полі зору всі показники (цілі) і узгодити їх оптимальним чином. Тому, для кожного із показників потрібно добитися не максимального рівня, а деякого визначеного цільового (на саймонівській мові – задовільного) рівня.

Простим прикладом є підприємство з своєю структурою підрозділів, кожний з яких має свою ціль і які неможливо об’єднати в єдину інтегровану ціль.

Як показано Г. Саймоном, що у складних ситуаціях слідування правилу задоволеності вигідніше, ніж спроба глобальної оптимізації. Притримуючись цієї теорії, можна припустити, що метою діяльності підприємства є не максимізація, а досягнення визначеного рівня прибутку, утримання певної долі ринку і відповідного об’єму продаж.

3.8. Моделювання задачі обмеженого раціонального вибору

Г. Саймон у своїй теорії висловив думку, що людина в економічній діяльності віддає перевагу одному із задовольняючих її варіантів, тобто «жорстка» максимізація відпадає, якщо знайдено достатньо хороші варіанти поведінки. Це пов’язано з тим, що будь-який господарюючий об’єкт в умовах нестачі часу, інформації або будучи недостатньо забезпечений ресурсами –

приймає цілеспрямовану стратегію свідомого обмеження власної раціональності при прийнятті рішення.

В реальних умовах, використання класичних моделей прийняття рішень, викликають труднощі через вплив багатьох факторів, таких як недолік і неповнота інформації про цілі, критерії та альтернативи, умови невизначеності критеріальних оцінок та їх шкал, неможливість чітко сформулювати принцип оптимальності(правило вибору). Все це приводить до застосування інших моделей, які враховують дані обмеження. Однією із таких моделей можна вважати модель обмеженої раціональності – модель «задоволення вимог» [66, 68, 69, 70, 96]. Дана модель передбачає виконання наступних дій: вибір цілі; визначення задовольняючих значень оцінок за критеріями; описання правила реалізації цілі або вибору; оцінки альтернативних варіантів за даним правилом вибору; упорядкування множини альтернатив відносно даних оцінок і заданої цілі, прийняття рішення.

Розглянемо задачу вибору за багатьма критеріями на скінченій множині альтернативних рішень(у вигляді описаному в розділі 3.4.). Тобто, модель початкових даних описана у вигляді матриці рішень(3.2)

$$O=\begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{m1} & O_{m2} & \dots & O_{mn} \end{pmatrix}.$$

Найбільш вживаною задачею багатокритеріального вибору можна вважати упорядкування скінченої множини альтернатив за багатьма критеріями, оскільки вона дозволяє знайти(визначити) одночасно кращі, середні або гірші альтернативи. Тому, у подальших наших дослідженнях, за модель виду задачі вибору виберемо задачу упорядкування скінченої множини альтернатив.

Не обмежуючи загальності, припустимо що всі альтернативи належать множині Парето, тобто є непорівнянними і найкраща оцінка – це максимальна. Якщо серед оцінок O_{ij} є недодатні , тоді за допомогою перетворення

$$O_{ij} = \left(1 + \left| \min_j O_{ij} \right|\right) + O_{ij} \quad , \tag{3.3}$$

всі оцінки O_{ij} будуть належати простору $\boldsymbol{R}_{++}$.. Якщо серед критеріїв є які необхідно мінімізувати, то за допомогою наступного перетворення цих оцінок

$$O_{ij} = \left(\max_j O_{ij} + \min_j O_{ij}\right) - O_{ij} \quad , \tag{3.4}$$

зводимо перевагу направленості критерію на максимум за всією множиною оцінок.

Надзвичайно важливу роль у багатокритеріальному аналізі відіграє оціночна система альтернативних рішень, оскільки вона формує узагальнену оцінку для порівняння альтернативних рішень. Розглянемо модель оціночної системи, яка описана у роботах [66, 68, 96]. Суть даного підходу полягає в тому, що оціночний функціонал для альтернативних рішень будується на основі поняття «задовольняючий розв'язок» та теорії нечітких множин.

Задання точки «задоволення вимог»

Введемо у розгляд m-вимірний вектор $T = (t_1,..., t_m)$ з простору R^m_{++}, компонентами якого будуть оцінки, які могли б задовольняти особу, що приймає рішення (ОПР) за відповідною множиною критеріїв. Назвемо вектор T точкою «задоволення вимог» ОПР.

Означення 3.11. Точкою «задоволення вимог» називається уявна альтернатива, в якої оцінки по всіх критеріях могли б задовольняти ОПР.

Точка «задоволення вимог» може бути як досяжною(реальною), так само і недосяжною (ідеальною).

Означення 3.12. Точка «задоволення вимог» $\boldsymbol{T}$ називається досяжною, якщо існує хоча б одна альтернатива з множини A, яка за оцінками не гірша за неї.

В якості точок «задоволення вимог» для поставленої задачі можна запропонувати множину точок $\boldsymbol{\{T^1,T^2,T^3,T^4,T^5,T^6\}}$ з координатами:

$$t_i^1 = \min_j O_{ij}\,;\; t_i^2 = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{O_{ij}}}\,;\; t_i^3 = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} O_{ij}}\,;\; t_i^4 = \frac{\sum_{j=1}^{n} O_{ij}}{n}\,;\; t_i^5 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} O_{ij}^{\,2}}{n}}\,;\; t_i^6 = \max_j O_{ij}\,. \quad (3.5)$$

Як відомо, між цими точками, координати яких визначені згідно приведених формул, існує субординація: $\boldsymbol{T^1 \le T^2 \le T^3 \le T^4 \le T^5 \le T^6}$. Кожна ОПР може задавати свою точку «задоволення вимог».

Побудова нечіткої множини

Відомо, що нечітка множина описується множиною самих елементів і ступенем належності їх цій множині. Виходячи із постановки задачі, візьмемо за множину елементів множину оцінок альтернатив *X*, а функцію належності позначимо через $\mu_A(x)$, тоді нечітка множина A_T запишеться наступним чином:

$$A_T = \{\, x, \mu_A(x)\},\; x \in X\,. \quad (3.6)$$

Оскільки, кожна альтернатива $x \in X$ представляє собою точку *m*-вимірного евклідового простору R^m, то на множині альтернатив A можемо визначити деяку нечітку множину A_T, наприклад, «альтернатив, оцінки яких близькі до точки задоволення вимог», оскільки $\mu_A(x)$ характеризує «ступінь належності» альтернативи $a \in A$ нечіткій множині A_T, тоді це буде функція належності твердження, наприклад, „точка ***x*** близька до точки ***T***”.

Таки чином, задачу вибору можна описати за допомогою розмитої моделі: вибрати найкращу (ефективну) альтернативу із нечіткої множини:

$$A_T = \{\, x, \mu_A(x)\},\; x \in X\,.$$

Питання побудови функції належності є одним із найважливіших питань у теорії розмитих множин. Опишемо підхід побудови функції належності $\mu_A(x)$. Припустимо, що нам відома матриця рішень(3.2) і задана точка «задоволення вимог» $T = (t_1, \ldots, t_m)$. Визначимо наступним чином множину величин:

$$z_{ij} = 1 - \left|\, t_i - O_{ij} \,\right| \Big/ \max\left\{ t_i - \min_j O_{ij} ; \max_j O_{ij} - t_i \right\},\; i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}. \quad (3.7)$$

Кожна така величина є відносною оцінкою близькості елемента матриці (3.2) до відповідного елемента точки «задоволення вимог». Оскільки кожна альтернатива $x \in X$ є точкою простору R^m_{++}, то визначена таким чином матриця $Z = (z_{ij})$ характеризує по стовпцях відносні оцінки близькості альтернативи x^j до точки «задоволення вимог» $\boldsymbol{T}$ по кожному конкретному критерію і знімає питання різних шкал оцінювання.

Наступним кроком є побудова функції належності, як функції згортки даних числових оцінок. Нами запропоновано застосування наступної групи згорток при рівно важливих критеріях ефективності.

$$\mu_A^2(x^j) = \frac{m'}{\sum_{i=1}^{m'} \frac{1}{z_{ij}}}; \ \mu_A^3(x^j) = \sqrt[m'_j]{\prod_{i=1}^{m'} z_{ij}}; \ \mu_A^4(x^j) = \frac{\sum_{i=1}^{m'} z_{ij}}{m'}; \ \mu_A^5(x^j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m'} (z_{ij})^2}{m'}}; \quad (3.8)$$

де m' – число додатних елементів у j-стовпці матриці Z, який відповідає j- й альтернативі. У запропонованих згортках враховуються лише додатні елементи матриці Z.

Як відомо, між цими функціями існує наступна субординація: $\mu_A^2(x) \le \mu_A^3(x) \le \mu_A^4(x) \le \mu_A^5(x)$, $\forall x \in X \subset R^{m'}_{++}$. Вибір відповідної функції належності залежить від характеру ОПР, її настрою, або сприйняття інтенсивності вимірювання.

Припустимо, що ОПР відомі або вона може задати вагові коефіцієнти кожному критерію ефективності $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Тоді можна визначити нормовані вагові коефіцієнти для кожного критерію ефективності відповідно $\alpha_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$, $i = 1, \ldots, m$, які відповідають умові $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Таким чином, можна побудувати функцію належності, як одну із запропонованих згорток, в залежності від психосоматичного настрою ОПР:

$$\mu_A^2(x^j)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{z_{ij}}};\ \mu_A^3(x^j)=\prod_{i=1}^{m}(z_{ij})^{\alpha_i};\ \mu_A^4(x^j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i z_{ij};\ \mu_A^5(x^j)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(z_{ij})^2}. \qquad (3.9)$$

Згортки (3.9) теж характеризують відповідно як песимістичну, обережну, середню, оптимістичну оцінки. З математичної точки зору це є відповідно середнє гармонійне з вагами, середнє геометричне з вагами, середнє зважене, середнє квадратичне з вагами, між якими існує наступна субординація: $\mu_A^2(x)\le\mu_A^3(x)\le\mu_A^4(x)\le\mu_A^5(x), \forall x\in X$.

При моделюванні задачі вибору, за допомогою нечітких множин, кожна ОПР може визначати свою нечітку множину. Наприклад, "не гірші за точку задоволення вимог", "на багато кращі за точку задоволення вимог" та інші. Опишемо деякі нечіткі множини використовуючи для знаходження нечіткої величини $z_{ij}, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}.$ кусково-лінійну модель.

Нечітка множина $A_1=\{$близько відносно точки «задоволення вимог»$\}$:

$$z_{ij}=1-\frac{|t_i-O_{ij}|}{\max\{t_i-\min\limits_j O_{ij};\max\limits_j O_{ij}-t_i\}};\quad i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}. \qquad (3.10)$$

Нечітка множина $A_2=\{$краще відносно точки «задоволення вимог»$\}$:

$$z_{ij}=\begin{cases}\dfrac{|t_i-O_{ij}|}{\max\limits_j O_{ij}-t_i}, \text{ якщо } O_{ij}>t_i;\\ 0, \text{ якщо } O_{ij}\le t_{i.}\end{cases}\qquad i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}. \qquad (3.11)$$

Нечітка множина $A_3=\{$гірше відносно точки «задоволення вимог»$\}$:

$$z_{ij}=\begin{cases}\dfrac{t_i-O_{ij}}{t_i-\min\limits_j O_{ij}}, \text{ якщо } O_{ij}<t_i;\\ 0, \text{ якщо } O_{ij}\ge t_{i.}\end{cases}\qquad i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}. \qquad (3.12)$$

Використовуючи операції заперечення, концентрації і розтягування, можна побудувати нові нечіткі множини:

$A_1'=\{$не близько відносно до точки «задоволення вимог»$\}$;

$A_1''=\{$дуже близько відносно до точки «задоволення вимог»$\}$;

$A_1'''=\{$більш-менш близько відносно до точки «задоволення вимог»$\}$;

$A_2' =$ {не краще відносно до точки «задоволення вимог»};

$A_2'' =$ {набагато краще відносно до точки «задоволення вимог»};

$A_2''' =$ {більш-менш краще відносно до точки «задоволення вимог»};

$A_3' =$ {не гірше відносно до точки «задоволення вимог»};

$A_3'' =$ {набагато гірше відносно до точки «задоволення вимог»};

$A_3''' =$ {більш-менш гірше відносно до точки «задоволення вимог»} і т.д.

Крім приведеної кусково-лінійної моделі (3.10), для визначення нечітких величин можуть бути застосовані і наступні моделі:

- Показникова(Пуассонівська):

$$z_{ij} = 1 - e^{-|t_i - O_{ij}| / \max\{ t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i \}}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \tag{3.13}$$

- Гаусівська:

$$z_{ij} = 1 - e^{-(t_i - O_{ij})^2 / \max\{ t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i \}}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \tag{3.14}$$

3.9. Методи та алгоритми багатокритеріального аналізу на скінченній множині альтернатив

3.9.1. Постановка задачі

Ціль системного аналізу – це підготувати підґрунтя для створення системи або вибору об’єкта з потрібними властивостями. Іншими словами, людиною здійснюється формальний або неформальний вибір на основі даних системного аналізу і відомостей про вимоги щодо якісних характеристик створюваної системи або розглядуваного об’єкту. Оскільки складні системи і об’єкти, як правило, характеризуються суперечливими властивостями, то і їх оцінка, і вибір потребує багатокритеріального аналізу.

Розглянемо постановку задачі багатокритеріального вибору на скінченій множині альтернативних рішень у вигляді, сформульованому в розділі 3.4.

Нехай нам ***дано***: ***n***-вимірний вектор об’єктів і ***m***-вимірний вектор критеріїв. ***Потрібно***: оцінити об’єкти по сукупності критеріїв(аналіз) і вибрати(синтез) оптимальне рішення. Фактично, будемо вважати, що модель початкових даних для даної задачі задана у вигляді відношення «об'єкт – властивість» (таблиця 3.1) або матриці рішень (3.2).

Надалі, за модель початкових даних для задачі вибору будемо вважати матрицю рішень

$$O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{m1} & O_{m2} & \dots & O_{mn} \end{pmatrix},$$

де $O_{ij} = K_i(a_j) = x_i^j \, (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};)$ – це оцінка j-альтернативи за i-критерієм.

Для розв'язання такої задачі прийняття рішень, пропонуються розроблені методи і алгоритми, які використовують теорію нечітких множин і нечітку логіку. Дані методи і алгоритми базуються на підході, узагальнена схема якого включає наступні етапи:

1. Фазифікація – зведення до нечіткості. Всі оцінки представляються у вигляді нечітких величин.

2. Нечітка оцінка. В залежності від неоднозначності оцінок альтернативних рішень і повноти вхідної інформації будуються моделі узгодження результатів або у вигляді ранжувань, або композиційних правил.

3. Дефазифікація – приведення до чіткості. Отримання чітких значень на основі узгодженої нечіткої множини.

3.9.2. Метод визначення узагальненої оцінки корисності

У роботах [6, 56, 67, 68, 77, 79, 96] описано підхід, який дозволяє визначати узагальнену оцінку через точку «задоволення вимог» і нечіткі множини.

Не втрачаючи загальності, припустимо, що для однорідної задачі прийняття рішень нам відома скінчена множина альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ з множиною відповідних їй векторних оцінок $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, отриманих за сукупністю критеріїв $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, тобто відома матриця рішень (3.2).

Виходячи з вище викладеного, опишемо метод визначення узагальненої оцінки корисності у вигляді наступного алгоритму:

Крок 1. Визначити точку «задоволення вимог» ***T*** і сформулювати нечітку критеріальну множину A_T відносно даної точки.

Крок 2. Вибір моделі обчислення величин z_{ij} матриці ***Z*** за однією з моделей (3.10) – (3.12).

Крок 3. Визначення функції належності нечіткої множини. Необхідно задати вагові коефіцієнти для критеріїв ефективності $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ та вибрати модель функції належності $\mu_A(x)$ за однією з формул (3.9).

Крок 4. Побудувати нечітку множину $A_T = \{\, x, \mu_A(x) \,\},\ x \in X$. Значення величин $\mu_A(x)$ і будуть виступати узагальненими оцінками.

3.9.3. Метод розв'язання ієрархічної задачі вибору з нечітко заданими даними

Постановка задачі. Нехай задано скінчену допустиму множину альтернатив $A = \{\, a_1, a_2, ..., a_n \,\} = \{\, a_j, j = \overline{1,n} \,\}$ і ціль, яка характеризується (оцінюється) множиною нерівнозначних критеріїв $K = \{K_1, K_2, ..., K_m\} = \{\, K_i, i = \overline{1,m} \,\}$, а також відомий ступень задоволення альтернативи a_j критерію K_i, який задається функцією належності $\mu_{K_i}(x_j) \to [0,1]$, тобто $\mu_{K_i}(a_j): A \times K \to [0,1]$. Кожний критерій K_i, який входить до множини K, у свою чергу характеризується підмножиною часткових критеріїв, тобто $K_i = \{k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_p}\} = \{\, k_{i_p}, p = \overline{1,P} \,\}$, які у свою чергу теж є нерівнозначними. Необхідно вирішити наступну задачу: отримати за результатами проведених оцінок упорядкований (ранжирований) список альтернативних варіантів A^*.

Загальна схема розв'язання задачі. Припустимо, що критеріальний простір має дворівневу ієрархічну структуру. Нехай

$\left\{ \mu_{k_{i_1}}(a_j), \mu_{k_{i_2}}(a_j),..., \mu_{k_{i_p}}(a_j) \right\} = \left\{ \mu_{k_{j_p}}(a_j), \, p=\overline{1,P}, \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n} \right\}$ – функції належності альтернативи a_j частковим критеріям $k_{i_1}, k_{i_2},..., k_{i_p}$ і відомі коефіцієнти відносної важливості цих критеріїв, тобто $\left\{ \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2},..., \alpha_{i_p} \right\} = \left\{ \alpha_{i_p}, \, p=\overline{1,P} \right\}$. Узагальнений алгоритм розв'язання можна записати наступним чином:

Крок 1. За допомогою агрегування часткових критеріїв (показників) нижчого рівня оцінюється кожний критерій верхнього рівня ієрархії, тобто на основі побудови згорток часткових критеріїв $k_{i_1}, k_{i_2},..., k_{i_p}$ визначається функція належності альтернативи a_j критерію $K_i \;\; (i=\overline{1,m})$: $\mu_{K_j}(a_j) = F\left(\alpha_{i_1},..., \alpha_{i_p}, \; \mu_{k_{i_1}},..., \mu_{k_{i_p}} \right)$. Схема визначення приведена рисунку 3.2. На рисунку 3.3 позначено k_{i_p} через $K_{ip} \;\; (i=\overline{i,m}; p=\overline{1,P})$.

Альтернативи Критерії			A					Згортка
			a_1	…	a_j	…	a_n	
K	K_1	K_{11} ⋮ K_{1p}	$\mu_{K_{11}}(a_1)$ ⋮ $\mu_{K_{1p}}(a_1)$	…	$\mu_{K_{11}}(a_j)$ ⋮ $\mu_{K_{1p}}(a_j)$	…	$\mu_{K_{11}}(a_n)$ ⋮ $\mu_{K_{1p}}(a_n)$	$\mu_{K_1}(a_j), \; j=\overline{1,n}$
	⋮	…	…	…	…	…	…	…
	K_m	K_{m1} ⋮ K_{mp}	$\mu_{K_{m1}}(a_1)$ ⋮ $\mu_{K_{mp}}(a_1)$	…	$\mu_{K_{m1}}(a_j)$ ⋮ $\mu_{K_{mp}}(a_j)$	…	$\mu_{K_{m1}}(a_n)$ ⋮ $\mu_{K_{mp}}(a_n)$	$\mu_{K_m}(a_j), \; j=\overline{1,n}$

Рисунок 3.3. Схема визначення функції належності альтернатив $a_j \; (j=\overline{1,n})$ критеріям $K_i \;\; (i=\overline{1,m})$

Крок 2. На основі отриманих результатів $\left\{ \mu_{K_i}(a_j),\ i=\overline{1,m} \right\}$ для всієї множини альтернатив $a_j \in A$ $(j=\overline{1,n})$ визначаємо функцію належності загальній цілі K, як згортку $\mu_K(a_j)=F(\alpha_1,...,\alpha_m,\mu_{K_1}(a_j),...,\mu_{K_m}(a_j))$. Схема визначення, приведена рисунку 3.4.

Крок 3. Будуємо множину A^* альтернатив, в якій упорядковані альтернативи у порядку зменшення значень функції належності $\mu_K(a_j)$.

Альтернат. / Критерії		A					Згортка
		a_1	…	a_i	…	a_n	
K	K_1 $\vdots$ K_i $\vdots$ K_m	$\mu_{K_1}(x_1)$ $\vdots$ $\mu_{K_i}(a_1)$ $\vdots$ $\mu_{K_m}(a_1)$		$\mu_{K_1}(a_j)$ $\vdots$ $\mu_{K_i}(a_j)$ $\vdots$ $\mu_{K_m}(a_j)$		$\mu_{K_1}(a_n)$ $\vdots$ $\mu_{K_j}(a_n)$ $\vdots$ $\mu_{K_m}(a_n)$	$\mu_K(a_j),\ j=\overline{1,n}$

Рисунок 3.4. Визначення функції належності альтернатив a_j $(j=\overline{1,n})$ загальній цілі.

3.9.4. Метод нечітких послідовних поступок

Розглянемо клас задач, коли критерії ефективності задаються у вигляді нечітких величин, заданих відображенням $\mu_i : A \times R^1 \to [0,1]$, де $A=\{ a_1,..., a_n \}$ – універсальна множина альтернатив, $\boldsymbol{R^1}$ – числова вісь на якій задані оцінки. У такому випадку $\mu_i(a)$, для кожного фіксованого $a \in A$, представляє собою нечітку величину оцінки альтернативи через функцію належності критерію ефективності. Приведемо алгоритми багатокритеріального вибору для даного класу задач, які описані у роботах [47, 94]. Припустимо, що відома допустима множина альтернативних рішень $A^D \subseteq A$.

Алгоритм Р1. Відома важливість кожного критерію ефективності.

Крок 0. Будуємо строге впорядкування критеріїв за важливістю і нумеруємо їх у порядку спадання важливості.

Крок і-ий($i=\overline{1,m}$***).*** Задаємо значення порогу рівня β_i і будуємо множину

$$A_i^D = \{\, a \mid a \in A_{i-1}^D,\ \mu_i(a) \ge \beta_i \,\},\ A_0^D \equiv A^D \ .$$

Якщо множина $A_i^D \equiv \text{О}$(порожня), то необхідно змінити значення порогу рівня β_i або повернутись на крок вище і змінити значення порогу β_{i-1}. Даний крок повторюється($i \le m$) до тих пір, поки множина A_i^D не містить таку кількість альтернатив, з якої можна зробити вибір.

На ***m-му кроці*** особа, що приймає рішення повинна або погодитись з множиною A_m^D, тоді алгоритм завершує роботу або повторно виконати алгоритм, змінивши при цьому або пріоритети критеріям, або значення порогів рівнів.

Алгоритм Р2. Критерії ефективності рівнозначні за важливістю.

Крок 0. Для кожного критерію задається значення порогу рівня $\beta_i\,(i=\overline{1,m})$.

Крок і-ий($i=\overline{1,m}$***).*** Розв’язується задача побудови множини

$$A_i^D = \{\, a \mid a \in A^D,\ \mu_i(a) \ge \beta_i \,\} \ .$$

Даний крок виконується ***m*** разів.

Крок m+1. Шукаємо множину ефективних альтернатив у вигляді

$$A^* = \bigcap_{i=1}^{m} A_i^D \ .$$

Якщо множина $A^* \equiv \text{О}$(порожня) або не задовольняє особу, що приймає рішення, тоді необхідно змінити або всі значення порогів рівня $\beta_i\,(i=\overline{1,m})$, або лише деякі із них і повернутись на ***і-ий*** крок. У протилежному випадку, алгоритм завершує роботу.

Примітка 1. Якщо порядок критеріїв не строгий, то для таких задач потрібно використовувати комбінацію алгоритмів ***Р1*** і ***Р2***.

Примітка 2. Якщо про важливість критеріїв нічого не можна сказати або невідомо, тоді для розв'язування таких задач можна використати алгоритм ***P1*** з почерговим вибором номера критерію за допомогою датчика випадкових чисел.

3.9.5. Метод визначення пріоритетів

Представимо метод визначення пріоритетів для критеріального простору, який базується на використанні матриці рішень. Даний підхід описаний у роботах [29, 97]. Нехай, для здійснення вибору за багатьма критеріями, нам відома матриця рішень (3.2) , тобто

$$O=\begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{m1} & O_{m2} & \dots & O_{mn} \end{pmatrix},$$

де $O_{ij} = K_i(a_j) = x_i^j (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n};)$– це оцінка j-альтернативи за i-критерієм. На основі цієї матриці, використовуючи деякі із способів нормування(розділ 2.5.2), отримаємо матрицю

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix},$$

де $d_{ij}(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n};)$– це нормована оцінка j-альтернативи за i-критерієм.

Побудуємо матрицю B наступним чином $B = D \times D^T$, де D^T - матриця транспонована до матриці D. Оскільки розмірність матриці D $m \times n$, тоді розмірність матриці B буде відповідно $m \times m$. Елементи матриці B обчислюються наступним чином $b_{ij} = \sum_{l=1}^{n} d_{il} \times d_{jl}$. Як видно із даної формули матриця B є симетричною, тобто $b_{ij} = b_{ji}$. Інформаційний зміст матриці B це інтегральні оцінки важливості множини критеріїв на множині альтернатив. Наступним етапом є знаходження для матриці B власних значень. Для цього потрібно розв'язати наступне характеристичне(матричне) рівняння

$| A-\lambda \cdot E |=0$, де E - одинична матриця, а коренями $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ – вектор власних значень. Однією з властивостей симетричних матриць є те, що всі їх власні значення є дійсними числами. Серед отриманих власних значень $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ знаходимо найбільше і шукаємо відповідний йому власний вектор, розв'язавши наступне матричне рівняння: $B \times Y=\lambda_{\max} \cdot Y$.

На основі вище викладеного, опишемо алгоритм визначення пріоритетів для критеріїв у задачі багатокритеріального вибору.

Крок 1. Задати або визначити матрицю рішень O.

Крок 2. Провести нормалізацію матриці рішень O (перехід від матриці O до матриці D).

Крок 3. Знайти матрицю $B=D \times D^T$.

Крок 4. Для матриці B визначити максимальне власне значення і відповідний йому власний вектор $Y=(y_1,...,y_m)^T$.

Крок 5. Провести нормування власного вектора. Наприклад, $w_j=\dfrac{y_j}{\max\limits_j y_j}$.

Крок 6. Визначимо вектор пріоритетів $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_m)^T$ наступним чином: $\eta_m=1$, $\eta_j=w_j / w_{j+1}$, $j=\overline{1,m-1}$.

Для побудови ряду пріоритетів необхідно проранжирувати критерії відносно величин $\{w_1,...,w_m\}$ у порядку спадання їх значень і побудувати ряд $P=\{p_1,\ldots,p_m\}$, який відповідає упорядкованій множині індексів критеріїв. Для визначення вектора ваг можна використати наступну формулу: $\nu_j=\prod\limits_{q=j}^{m}\eta_q\left(\sum_{i=1}^{m}\prod\limits_{l=i}^{m}\eta_l\right)^{-1}$, $j=\overline{1,m}$. Побудований таким чином вектор $\nu=(\nu_1,...,\nu_m)^T$ буде нормованим, тобто $0 \le \nu_j \le 1$ і $\sum_{j=1}^{m}\nu_j=1$.

При багатокритеріальному аналізі виникають як задачі визначення пріоритетів критеріїв відносно альтернатив, так і задачі визначення пріоритетів альтернатив відносно критеріїв. У такому випадку, теж можна використати даний метод, але потрібно матрицю B обчислити наступним чином: $B = D^T \times D$ (***крок 3***).

Запропонований метод дозволяє отримати ряд або вектор пріоритетів, або вектор ваг, визначивши один раз власні значення і власний вектор для матриці рішень. Даний фактор являється важливим при вирішення багатокритеріальних задач вибору великої розмірності, як відносно множини альтернатив так і множини критеріїв.

3.9.6. Метод модифікації вагових коефіцієнтів

На сьогоднішній час відомо дуже багато методів і алгоритмів визначення вагових коефіцієнтів. Але у інтерактивних методах прийняття рішень, часто виникає питання зміни цих коефіцієнтів у ході прийняття рішення. Приведемо метод[50, 55, 81], який дозволяє робити модифікацію вагових коефіцієнтів у процесі прийняття рішень. Тобто, пропонується схема інтерактивного корегування ваг, суть якої полягає у тому, що вона надає можливість одночасно змінювати і залишати незмінними декілька вагових коефіцієнтів.

Припустимо, що на деякому етапі прийняття рішень, нам відомі вагові коефіцієнти. Вони можуть бути задані або обчислені. Позначимо їх у вигляді вектора $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ для якого виконуються умови: $0 \le \nu_i \le 1 \, (i = \overline{1, m})$ і $\sum_{i=1}^{m} \nu_i = 1$. Нехай ми знаємо, які з цих коефіцієнтів потребують зміни, а які ні. На основі цих знань, побудуємо величини $\{\tau_i\}, \{\alpha_i\}$ і $\{\beta_i\} \, (i = \overline{1, m})$ наступним чином:

$$\tau_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо вагу } i\text{-го критерія потрібно замінити,} \\ 0, \text{ якщо вагу } i\text{-го критерія потрібно залишити,} \\ -1, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \tau_i = 1, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}, \qquad \beta_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \tau_i = 0, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Визначимо нові значення вагових коефіцієнтів за формулою:

$$v_i^H = \frac{(1-\sum\limits_{j=1}^{m} v_j^c \beta_j + \varepsilon \alpha_i) v_i^c}{1-\sum\limits_{j=1}^{m} v_j^c \beta_j - \dfrac{\varepsilon(\beta_i - 1)\sum\limits_{j=1}^{m} v_j^c \alpha_j}{1-\sum\limits_{j=1}^{m} v_j^c \beta_i}}, \tag{3.15}$$

де v_i^H, v_i^C $(i = \overline{1,m})$ – відповідно нові і старі значення вагових коефіцієнтів.

Значення ε задається користувачем і від нього залежить зміна вагових коефіцієнтів. Якщо $\varepsilon > 0$, то відповідні ваги збільшуються, а якщо $\varepsilon < 0$ – то зменшуються.

Приведену вище схему опишемо у вигляді алгоритму:

Крок 1. Нехай нам відомі вагові коефіцієнти, задані у вигляді вектора $v^c = (v^c{}_1, \ldots, v^c{}_m)$.

Крок 2. Задамо, в інтерактивному режимі, величини $\{\tau_i\}$ $(i = \overline{1,m})$ і величину ε.

Крок 3. Обчислимо значення величин $\{\alpha_i\}$ та $\{\beta_i\}$ $(i = \overline{1,m})$.

Крок 4. Знаходимо нові значення вагових коефіцієнтів за відповідною формулою (3.15).

3.9.7. Метод колективного прийняття рішень

При вирішенні практичних задач часто виникають ситуації, коли особа, що приймає рішення не в силах самостійно вибрати вірне рішення і змушена звернутися за допомогою до інших осіб, які мають однакові наміри і повноваження. Такий процес прийняття рішень носить назву колективний, груповий або колегіальний вибір. Розглянемо метод прийняття рішень, який описано у роботах [10, 23, 62, 98], для колективного вибору.

Сформулюємо задачу колективного вибору наступним чином. Нехай задана скінченна множина альтернативних рішень $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і відома група осіб $I = \{I_1, \ldots, I_l\}$, яким на даній множині альтернатив надано повноваження приймати рішення з різним ступенем переваг $P = \{ p_1,..., p_l \}$. Множина альтернативних рішень може оцінюватись за допомогою універсальної множини критеріїв $K = \{ K_1,..., K_m \}$. Ставиться задача вироблення деякого нового відношення у сенсі(розумінні) «загальної думки», що дозволить виділити множину ефективних альтернатив.

Суть даного методу полягає у наступному. Кожний індивід(особа), який бере участь у колективному прийнятті рішень, вибирає із універсальної множини критеріїв свою підмножину критеріїв, за яким він здатний оцінити множину альтернативних рішень і розв'язує свою індивідуальну задачу багатокритеріального вибору методом визначення узагальненої оцінки корисності (див. підрозділ 3.9.2). Результатом роботи за даним методом отримаємо профіль узагальнених оцінок корисності, за якими можна провести ранжирування альтернатив.

На основі індивідуальних профілів будуємо реляційне відношення $\tilde{R} : I \times A$ типу «індивід – альтернатива» у вигляді таблиці(матриці):

$\tilde{R}$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
I_1	μ_{11}	μ_{12}	$\dots$	μ_{1n}
I_2	μ_{21}	μ_{22}	$\dots$	μ_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_l	μ_{l1}	μ_{l2}	$\dots$	μ_{ln}

Дане відношення будемо розглядати як нечітке відношення, тому μ_{ij} - значення функції належності нечіткій множині визначеній i-им індивідом для j-ї альтернативи.

Кожен індивід колективу може по різному впливати на прийняття колективного рішення. Це може бути пов'язано з його компетентністю, авторитетністю, кількістю акцій і т.д., що повинно бути відображено у векторі степенем переваг $P = \{ p_1,..., p_l \}$. На основі нечіткого логічного виводу, який базується на композиційному правилі Заде, взявши вектор P, як нечітке відношення вхідної інформації, а за нечітку базу знань відношення $\tilde{R}$, побудуємо нечітке відношення $\tilde{C} = P \circ \tilde{R}$. Знак «$\circ$» означає композиційна операція, наприклад, максимінний або мінімаксний, або максмультиплікативний добутки тощо. Таким чином, вихідним результатом колективного вибору буде нечітка множина, значення функції належності якої задані нечітким відношенням $\tilde{C}$. Проранжируємо альтернативні рішення за даними значеннями функції належності у спадаючому порядку.

Алгоритм, на основі вище сказаного, буде виглядати наступним чином:

Крок 0. Задати множину альтернатив $A = \{ a_1,..., a_n \}$ і універсальну множину критеріїв $K = \{ K_1,..., K_m \}$ для їх оцінки.

Крок s-ий $(s = \overline{1,l})$***.*** Розв'язуємо індивідуальну задачу багатокритеріального вибору для s-ї особи. Цей крок виконується l разів, тобто для всіх індивідів.

Крок l+1. Будуємо відношення $\tilde{R} : I \times A$ і задаємо вектор степенів переваг P.

Крок l+2. Визначаємо нечітку множину, функцію належності якої будемо вважати колективним вибором, на основі нечіткого відношення $\tilde{C} = P \circ \tilde{R}$.

Крок l+3. Проранжируємо альтернативні рішення відносно значень функції колективного вибору.

Примітка. Кожний індивід має право вибирати свою точку «задовлення вимог», описувати свою нечітку множину і задавати модель для функції належності цій множині.

3.9.8. Метод узгодження рішень

Розглянемо дворівневу ієрархічну структуру прийняття рішень[64, 95, 146]. Нехай деякий суб'єкт, далі будемо називати центр, намагається досягти визначеної цілі, реалізація якої оцінюється множиною критеріїв $K^0 = \{ K_1^0, K_2^0,..., K_m^0 \}$. Центр впливає на окремі ланки $U_1, U_2,..., U_s$, які назвемо агентами, кожний із них має свої цілі $K^l = \{ K_1^l, K_2^l,..., K_{m_l}^l \}, l = \overline{1,s}$. Задача, яка стоїть перед центром і агентами, це зробити вибір на дискретній множині альтернативних варіантів $A=\{a_1,..., a_n\}$. Прикладом такої задачі може служити вибір виробничої програми для фірми – виробника. У даному випадку центром являється дирекція фірми, а агентами її підрозділи - виробничий відділ, відділ збуту, фінансовий відділ, відділ кадрів та інші. Прийняття рішень центром потребує додаткових інформаційних затрат для узгодження своїх цілей з цілями агентів.

Розглянемо підхід(метод), який запропоновано у роботах [85, 86, 91]. Даний метод дозволяє пов'язати вибір агентів з вибором центру, використовуючи принципи багатокритеріального аналізу, теорії нечітких множин та задовольняючого розв'язку. Припустимо, що центру і агентам відомі множина альтернативних варіантів і відповідні множини критеріїв, за якими проводиться оцінка цих альтернатив, для досягнення їхніх цілей. Таким чином, центром і агентами повинні вирішуватись задачі багатокритеріального вибору. Центр і агенти розв'язують свої індивідуальні задачі багатокритеріального вибору методом визначення узагальненої оцінки корисності (див. підрозділ 3.9.2). Загальна схема методу полягає в тому, що кожен агент розв'язує свою задачу вибору і як результат декларує центру свій профіль переваг у вигляді узагальненої оцінки корисності.

На основі даної схеми опишемо алгоритм.

Крок 0. Задати множину альтернатив $A=\{a_1,..., a_n\}$, множини критеріїв центру $K^0=\{K_1^0, K_2^0,..., K_m^0\}$ і агентів $K^l=\{K_1^l, K_2^l,..., K_{m_l}^l\}, l=\overline{1,s}$ для їх оцінки та вектор ступенів переваг центру і агентів $W=\{W_0, W_1,..., W_s\}$.

Крок l-ий ($l=\overline{1,s}$ ***).*** Розв'язуємо задачу багатокритеріального вибору для l-го агента. Цей крок виконується s разів, тобто для всіх агентів.

Крок s+1. Розв'язуємо задачу багатокритеріального вибору для центру.

Крок s+2. Будуємо відношення $\widetilde{R}:U\times A$, де $U=\{U_0, U_1,..., U_s\}$- вектор профілів переваг, U_0 - профіль переваг центру, U_l - профіль переваг l-го агента.

Крок s+3. Визначаємо нечітку множину, функцію належності якої будемо вважати узгоджений вибір, на основі нечіткого відношення $\widetilde{C}=W\circ\widetilde{R}$.

Крок s+4. Проранжируємо альтернативні рішення відносно значень функції узгодженого вибору.

Примітка. Центр і кожний агент має право вибирати свою точку «задоволення вимог», описувати свою нечітку множину і задавати модель для функції належності цій множині.

Розділ 4
БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

4.1. Загальна постановка проблеми

Важливе місце, при вирішенні практичних задач, займають системи, які моделюються за допомогою лінійних моделей. Такі системи називаються лінійними системами, а оптимізаційні задачі, які розв'язуються на даних моделях, називаються задачами лінійного програмування. Задача лінійного програмування являється частинним випадком задачі математичного програмування, якщо цільова функція і обмеження задані у лінійному вигляді. Оскільки проблемні ситуації, які виникають на практиці і описуються лінійними моделями, як правило, залежать від багатьох факторів, тому вирішення багатокритеріальної задачі прийняття рішень супроводжується розв'язанням задач багатокритеріального лінійного програмування або іншими словами задач векторної оптимізації.

У багатокритеріальних задачах прийняття рішення, які моделюються за допомогою континуальної множини, і цільові функції задані в аналітичному вигляді, однією із найсерйозніших проблем є зменшення кількості критеріїв за якими проводиться вибір. Особливо гостро така проблема виникає в ситуації, коли розглядувані об'єкти описуються великим числом ознак, тобто при дослідженні слабо структурованих задач, які об'єднують кількісні і якісні залежності. Вирішення цієї проблеми можливе до побудови математичної моделі, застосувавши наприклад, метод вербального аналізу розв'язків [39], який потребує додаткових психологічно коректних операцій отримання інформації від особи, що приймає рішення(ОПР) або експерта. Однаково набір таких операцій є досить великим і для багатьох задач не знімає проблему багатокритеріальності.

Альтеративним способом є застосування методів пониження розмірності критеріального простору. Суть даного підходу полягає у тому, що будується ієрархічна система критеріїв, у якій початкові критерії послідовно агрегуються у менший набір критеріїв. Найбільш відомими можна вважати наступні методи: фрактальний аналіз[118], регресійний аналіз[22,125], дискримінантний аналіз[125], кластерний аналіз[100, 121, 125], багатовимірне метричне і неметричне шкалювання[125,136], методи векторної стратифікації[18], теорія гранулювання інформації[18], детермінований аналіз[139], методи функціонального шкалювання[136].

У загальному випадку задача пониження розмірності критеріального простору може бути представлена наступним чином :

$$f_1, f_2, \ldots, f_k \;\Rightarrow\; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \quad k > m,$$

де $\{f_i\}$ - початковий набір критеріїв, $\{\psi_i\}$ - новий набір критеріїв, k-розмірність початкового критеріального простору, m – розмірність нового критеріального простору.

Якщо число m є досить великим($m \geq 10$), то знаходження оптимального розв'язку є неможливим у реальному масштабі часу. Тому виникає проблема групування критеріїв з подальшим їх "згортанням". Тобто задача вибору буде розглядатися у критеріальному просторі з подальшим зменшенням їх кількості шляхом згортання критеріїв з кожної групи у деякі інтегральні критерії[59].

4.2. Загальна схема розв'язання векторних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності

Розглядається математична модель задачі вибору з континуальною множиною альтернатив X, заданою у вигляді обмежень і результат вибору оцінюється декількома критеріями ефективності, які описуються за допомогою лінійних функцій. Тобто, задача вибору моделюється за допомогою багатокритеріальної задачі математичного програмування з лінійними цільовими функціями.

Математична модель такої задачі має наступний вигляд:

$$y_i = f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to extr, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.1}$$

$$x \in X \subseteq R^n, \tag{4.2}$$

де X – множина допустимих розв'язків (альтернатив), яка визначається сукупністю лінійних рівнянь та нерівностей, $y_i = f_i(x)$ – цільові функції, c_{ij} – коефіцієнти. Тобто, є деяка сукупність цілей, які відображені критеріями $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, і потрібно знайти таку точку $x \in X \subseteq R^n$, яка в деякому розумінні мінімізує або максимізує кожен з критеріїв.

В залежності від необхідної додаткової інформації, яка потрібна для знаходження розв'язку, можна провести наступну їх класифікацію [13]:

1. Формальні методи (не використовують допоміжної інформації від ОПР)
2. Методи, які використовують один тип допоміжної інформації від ОПР:

а) методи, які використовують інформацію про відносну перевагу критерію;

б) методи, які використовують інформацію про бажані значення критерію;

в) методи, які використовують інформацію про інтервали зміни значень критерію.

3. Комбіновані (гібридні) методи : використовуються різні типи інформації від ОПР.

Очевидно, чим точніше математична модель описує деяку багатокритеріальну задачу, тим вона складніша, що в свою чергу веде за собою проблеми, пов'язані із великим об'ємом інформації. Причинами цього можуть бути як велика розмірність простору альтернатив, так і велика розмірність критеріального простору. Дослідження психологів показують, що при прийнятті рішень людина (ОПР, експерт) одночасно може оперувати (порівнювати) 7 ± 2 об'єктами (критеріями, альтернативами) [104]. На практиці зустрічаються задачі, у яких розмірність просторів критеріїв або альтернатив перевищує десятки, а то і сотні. Такі задачі вважаються задачами великої розмірності. Так, приклади моделей і задач великої "критеріальної" розмірності наведено зокрема в [137]. Із задач такого типу утворимо клас задач із "великою" критеріальною розмірністю.

Велика розмірність критеріального простору приводить до складності для ОПР проаналізувати (впорядкувати або порівняти) критерії між собою. Крім того, критеріальний простір деяких моделей містить рівнозначні критерії, що також приводить до неможливості їх порівняння. Як правило люди дають завищені оцінки тим критеріям, які порівняно мало впливають на вибір, і недооцінюють найбільш суттєві. Тому для аналізу взаємозв'язків між критеріями пропонується провести кластеризацію критеріального простору, яка дозволить виявити та побудувати підмножини "суперечливих" критеріїв та кластери "сильно зв'язаних" критеріїв. Це у свою чергу, дасть додаткову інформацію ОПР для обгрунтованішого підбору вагових коефіцієнтів.

Всі відомі методи кластеризації використовують певні метрики і оптимізацію відповідних критеріїв якості [24]. У подальших дослідженнях нами буде використовуватись неевклідова міра подібності – косинусна відстань, тобто міра подібності, як значення косинуса кута між двома векторами[141]. Суть даної метрики полягає у знаходженні кута між двома векторами, а значення косинуса цього кута виражається через нормалізований скалярний добуток векторів заданих у координатній формі.

Для розв'язання задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності пропонується використати евристичний підхід, який базується на моделі суперечливості критеріїв, для кластеризації критеріального простору на множини сильно зв'язаних часткових критеріїв з подальшою їх згорткою і підбором вагових коефіцієнтів. Тобто, пропонується задачу (4.1), (4.2) звести до однокритеріальної за допомогою деякого глобального критерію вигляду:

$$F(x) = S(\beta_i, \tilde{f}_i(x)),$$

де S – деяка функція згортки, $\tilde{f}_i$ – представник кластеру K_i, а β_i- ваговий коефіцієнт K_i.

Загальні кроки розв'язання задач із "великою" критеріальною розмірністю описані блок-схемою (рисунок 4.1).

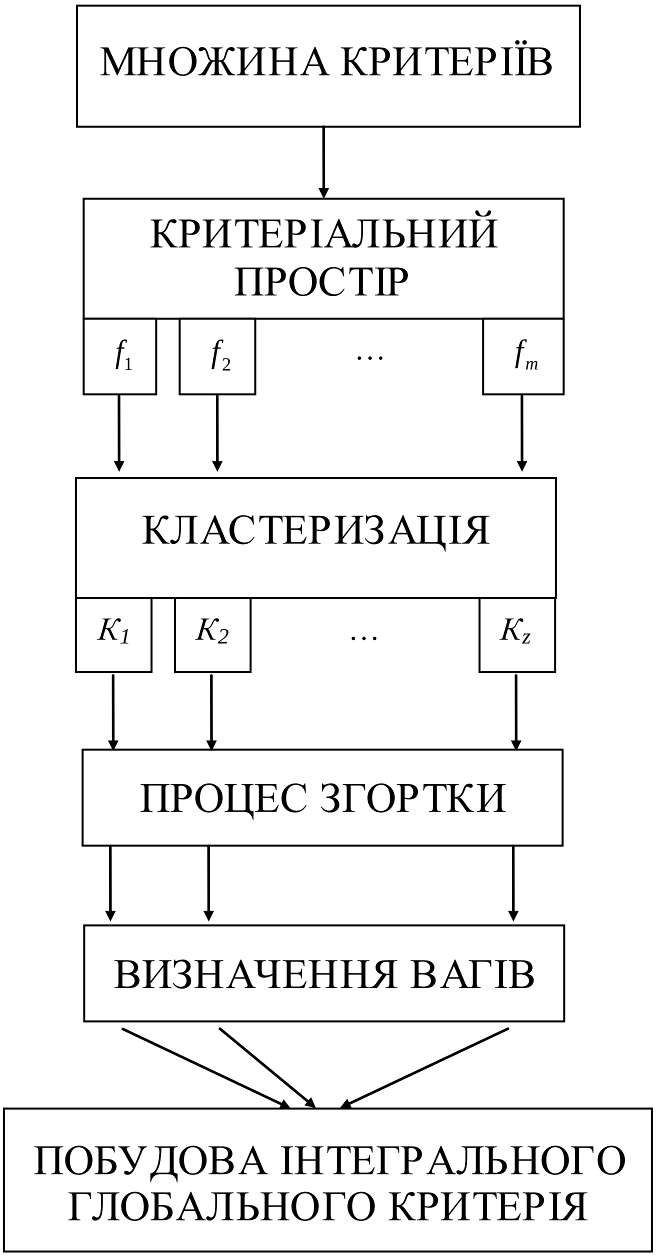


Рисунок 4.1. Загальна схема розв’язання векторних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності

Очевидно, що аналізувати і співставляти вектори можна тільки тоді, коли всі вони мають однакову розмірність. Але часткові критерії можуть мати різну фізичну природу. Тому їх необхідно приводити до безрозмірної форми і одного способу екстремізації. В цьому випадку простір критеріїв(критеріальний простір) буде метричним, отже можуть бути використані поняття збільшення –

зменшення вектора ефективності, що характеризує той або інший допустимий розв'язок задачі.

При нормалізації часткові критерії підлягають деякому перетворенню, що задовольняє наступну основну вимогу: розв'язок, отриманий в нормалізованому просторі критеріїв, не має змінюватись при переході до вхідного простору часткових критеріїв.

Різні методи нормалізації та їх порівняння описані, зокрема, в роботах [1, 134].

Використовуючи алгоритми, описані в підрозділі 4.5, проведемо кластеризацію множини часткових критеріїв на кластери ”сильно” і ”слабо” зв'язаних (див. підрозд. 4.3). Після чого отримаємо z кластерів. Вибравши в кожному із утворених кластерів представника кластеру $\tilde{f}_i(x)$ $i=\overline{1,z}$ (наприклад, згорнувши деяким чином локальні критерії даного кластеру за допомогою згорток описаних в підрозділі 4.6), отримаємо наступну багатокритеріальну задачу меншої розмірності критеріального простору:

$$\tilde{y}_i = \tilde{f}_i(x) \to \max, \quad i=\overline{1,z}, \tag{4.3}$$

$$x \in X \subseteq R^n. \tag{4.4}$$

В даній задачі потужність критеріального простору зменшилась до деякого числа $z \le m$.

Часто для подальшого розв'язування задачі (4.3)–(4.4) необхідна інформація про вагові коефіцієнти $\beta_i(x)$, $i=\overline{1,z}$, кожного представника кластеру. Їх можна визначити, наприклад, згідно алгоритмів, описаних у підрозділі 4.7.

Таким чином, розв'язавши задачу (4.3)–(4.4) за допомогою побудови згортки представників кластерів, зводимо багатокритеріальну задачу до однокритеріальної. Розв'язок отриманої задачі і буде розв'язком вихідної задачі із „великим” критеріальним простором.

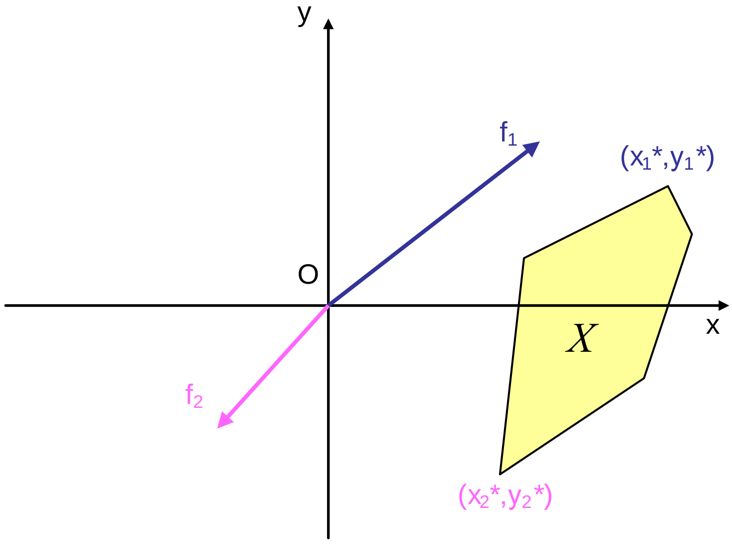


Рисунок 4.2. Приклад суперечливих критеріїв в просторі R^2

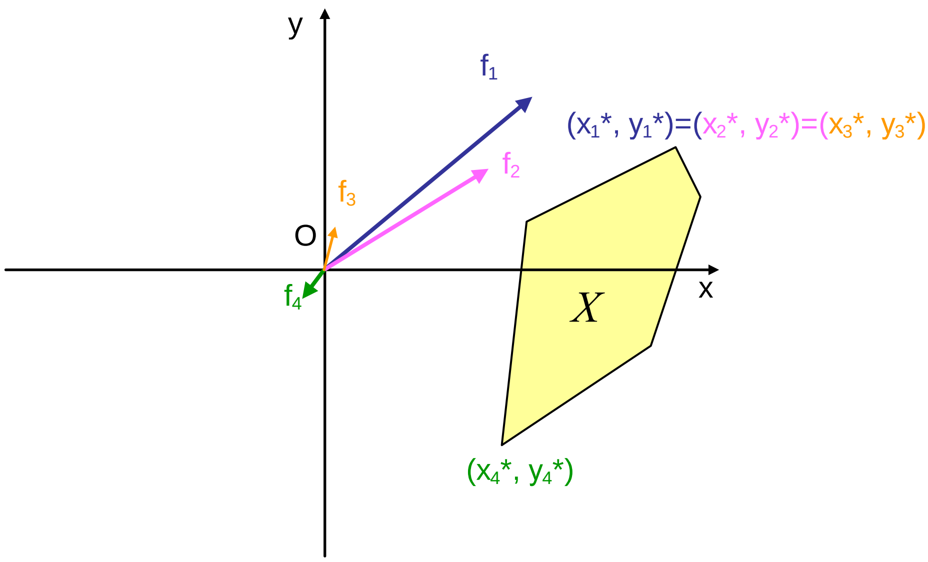


Рисунок 4.3. Приклад сильно зв’язаних груп критеріїв в просторі R^2

4.3. Види взаємозв'язків між цільовими функціями

Модель суперечливості критеріїв ефективності, що описуються цільовими функціями $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, використовує переваги напрямів та зв'язки між ними, які описуються наступними означеннями.

Означення 4.1. Два критерії назвемо ***суперечливими*** відносно деякої множини допустимих альтернатив X, якщо покращення оцінки по одному з критеріїв на множині X супроводжується її погіршенню за іншим (рис.4.2).

Означення 4.2. Два критерії назвемо ***сильно зв'язаними*** відносно деякої множини допустимих альтернатив X, якщо їх оцінки є близькими на різних альтернативах множини X, або якщо покращення оцінки за одним критерієм на множині X приводить до її покращення за іншим критерієм.

Очевидно, що поняття сильно зв'язаних критеріїв допускає їх суперечливість. На рисунку 4.3 показано, що критерії f_1, f_2, f_3 є сильно зв'язаними несуперечливими, а пара критеріїв f_3 та f_4 є сильно зв'язаними суперечливими. В даному прикладі локально оптимальними розв'язками є величини $\left(x_i^*, y_i^*\right)$, $i=\overline{1,5}$, а локально оптимальними оцінками – $f_i\left(x_i^*, y_i^*\right)$, $i=\overline{1,5}$. Очевидно, що покращення оцінки по одному із критеріїв першої групи приведе до автоматичного покращення оцінок всіх інших критеріїв даної групи. А оцінки критеріїв другої групи є близькими на різних альтернативах до нуля.

Оскільки критерії лінійні, то напрямки до екстремуму співпадають з напрямками $\pm grad\ f_i(x)$. Якщо сумістити початок вектора $grad\ f_i(x)$ з початком системи координат, то він співпаде з радіус-вектором $\overline{OC_i}$, де точка O – початок координат, а $C_i(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, $i=\overline{1,m}$. Тому розділивши вектори $\overline{OC_i}=\bar{c}_i$ або точки $C_i=(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, $i=\overline{1,m}$ на множини, тим самим розділимо і критерії, що їм відповідають $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$.

Для наочності розглянемо геометричну інтерпретацію критеріального простору та простору альтернатив деякої задачі (рису. 4.4).

Відповідно до введених означень 4.1 і 4.2, пропонується виділити дві групи методів кластеризації критеріального простору:

– на множини суперечливих критеріїв;

– на множини сильно зв'язаних критеріїв, які допускають (рис. 4.5) та не допускають (рис. 4.6) суперечливість;

Очевидно, що поняття суперечливих та сильно зв'язаних критеріїв, що не допускають суперечливість, тісно пов'язане із кутом між векторами градієнтами цільових функцій критеріїв. Так, якщо цей кут рівний 180°, то критерії будуть суперечливі при будь-якій множині допустимих альтернатив X, а якщо ж 0°, то критерії будуть сильно зв'язаними. Тому вид множини X може впливати тільки на міру прояву цих ознак.

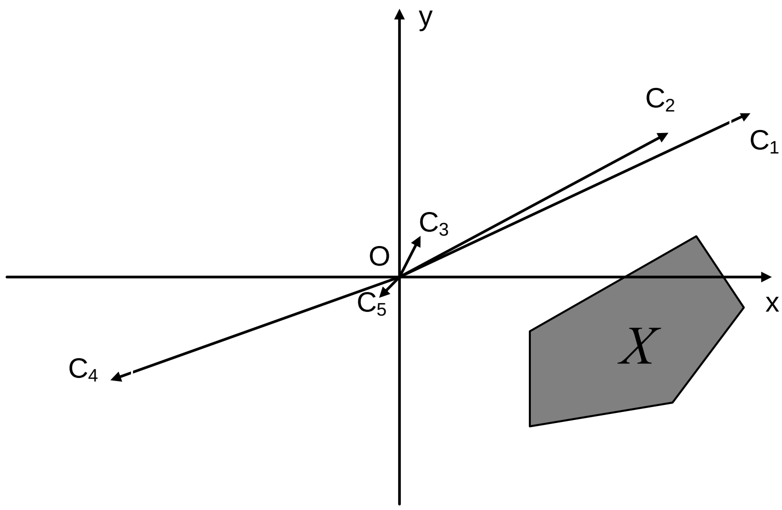


Рисунок 4.4. Приклад розміщення векторів $\overline{OC_i}$ в просторі R^2

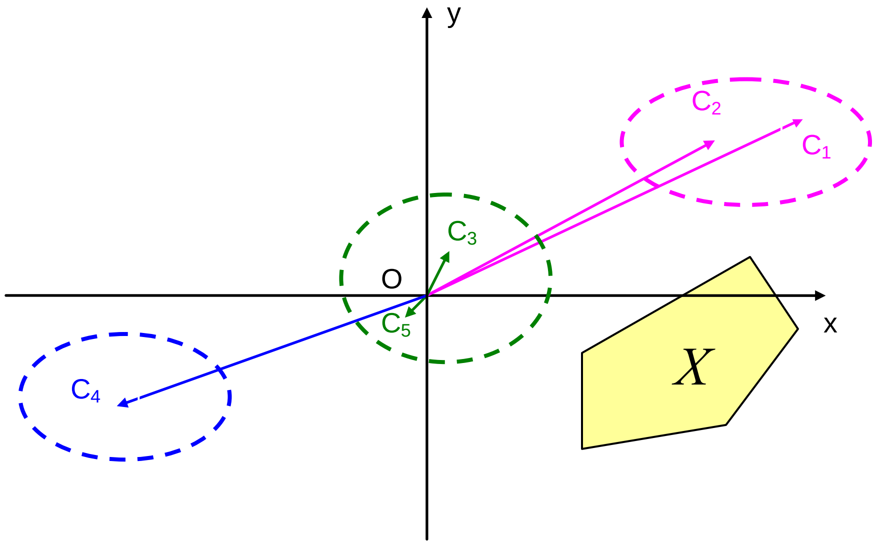


Рисунок 4.5. Приклад кластеризації критеріального простору на множини сильно зв’язаних критеріїв, які допускають суперечливість

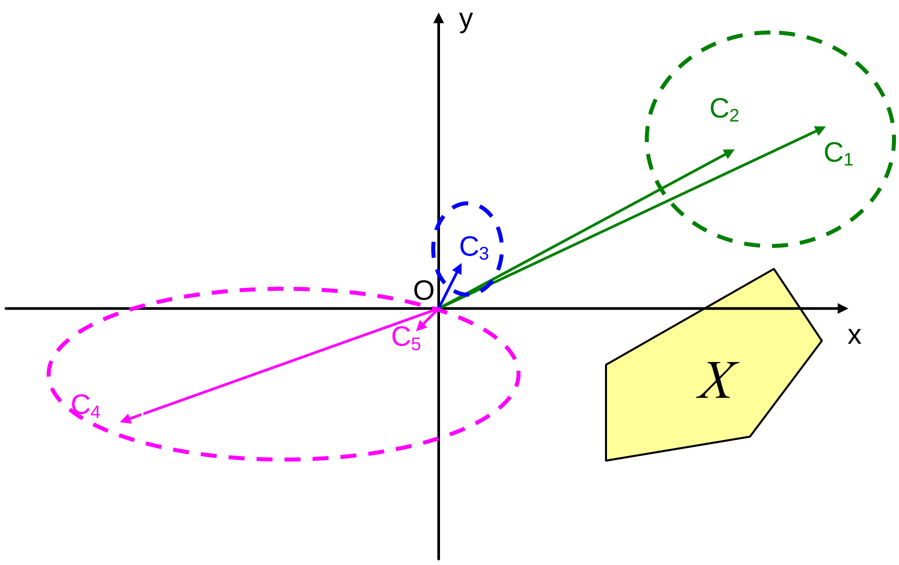


Рисунок 4.6. Приклад можливої кластеризації критеріального простору на множини сильно зв’язаних несуперечливих критеріїв

4.4. Методи кластеризації цільових функцій на множини суперечливих критеріїв

Різні методи кластеризації критеріїв ефективності описані в роботах [2, 3, 5, 53].

Метод «гіперплощина» [3, 53]

Будемо проводити всі можливі гіперплощини через точку $\boldsymbol{O}$ – початок координат і $n-1$ точку із множини $\left\{ C_i \middle| \ i=\overline{1,m} \right\}$ (або через $n-1$ лінійно-незалежний радіус-вектор $\overline{OC}=\overline{c_i}$).

Нехай на деякому кроці вибрано вектори $\overline{c_{i_1}},\overline{c_{i_2}},...,\overline{c_{i_{n-1}}}$. Побудуємо матрицю Грама

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix} \left(\overline{c_{i_1}},\overline{c_{i_1}}\right) & \left(\overline{c_{i_1}},\overline{c_{i_2}}\right) & ... & \left(\overline{c_{i_1}},\overline{c_{i_{n-1}}}\right) \\ \left(\overline{c_{i_2}},\overline{c_{i_1}}\right) & \left(\overline{c_{i_2}},\overline{c_{i_2}}\right) & ... & \left(\overline{c_{i_2}},\overline{c_{i_{n-1}}}\right) \\ ... & ... & ... & ... \\ \left(\overline{c_{i_{n-1}}},\overline{c_{i_1}}\right) & \left(\overline{c_{i_{n-1}}},\overline{c_{i_2}}\right) & ... & \left(\overline{c_{i_{n-1}}},\overline{c_{i_{n-1}}}\right) \end{pmatrix}. \qquad (4.5)$$

Відомо, що якщо детермінант $\det(\tilde{C})=0$, то вектори $\bar{c}_{i_1},\bar{c}_{i_2},...,\bar{c}_{i_{n-1}}$ – лінійно-залежні, а якщо $\det(\tilde{C})>0$, то дана система лінійно-незалежна.

Припустимо, що всіх таких лінійно-незалежних наборів векторів буде s ($s \le C_m^{n-1}=\dfrac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$), тоді можна побудувати s гіперплощин, які містять дані радіус-вектори.

Зокрема, нехай одним із цих s наборів будуть вектори $\bar{c}_{l_1},\bar{c}_{l_2},...,\bar{c}_{l_{n-1}}$, тоді рівняння гіперплощини має вигляд:

$$\Delta=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & ... & z_n \\ c_{l_1 1} & c_{l_1 2} & ... & c_{l_1 n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{l_{n-1}1} & c_{l_{n-1}2} & ... & c_{l_{n-1}n} \end{vmatrix}=0, \qquad (4.6)$$

де z_i, $i=\overline{1,n}$ – змінні, $c_{l_k j}$, $k=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,n}$ є відповідними координатами вектора $\overline{c_{l_k}}$, $k=\overline{1,n-1}$.

Розклавши детермінант Δ за елементами першого рядка, отримаємо

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n = 0, \tag{4.7}$$

де $p_i, \quad i = \overline{1,n}$ є алгебраїчними доповненнями до z_i.

Рівняння (4.7) будуть рівняннями гіперплощини, яка проходить через початок координат і точки $C_{l_1}, C_{l_2}, \ldots, C_{l_{n-1}}$.

Гіперплощина (4.7) розбиває весь n-вимірний простір на два напівпростори, які визначаються наступними нерівностями:

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n \geq 0,$$

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n < 0.$$

Отже, підставляючи кожну з точок $C_1, C_2, \ldots, C_m$, можна із системи рівнянь знайти максимальну кількість точок, які належать деякому напівпростору відносно однієї із знайдених гіперплощин.

Даний метод можна реалізувати наступним алгоритмом.

Алгоритм 4.1.

Крок 1. Будемо перебирати всі можливі s лінійно-незалежних набори векторів $\overline{OC} = \overline{c_i}$, де $s \leq C_m^{n-1} = \dfrac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$.

Крок 2. Для кожного такого набору проводимо гіперплощину $p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n = 0$ через точку ***O*** – початок координат і $n-1$ лінійно-незалежний радіус-вектор із множини $\left\{ \overline{c_i} \mid i = \overline{1,m} \right\}$.

Крок 3. Підставляючи кожну з точок $C_1, C_2, \ldots, C_m$ можна знайти таку їх максимальну кількість, що належать деякому напівпростору, відносно однієї із знайдених гіперплощин. Ця множина точок і буде однією із суперечливих підмножин..

Метод «ортонормований базис» [53]

Як і в попередньому методі, із множини $\left\{ \overline{c_i} \mid i = \overline{1,m} \right\}$ за допомогою матриці Грама (5.5), виберемо всі можливі лінійно-незалежні комбінації *n-1* векторів, і будемо вважати, що їх є s, причому $s \le C_m^{n-1} = \dfrac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$.

Нехай одним із цих S наборів будуть вектори $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, ..., \bar{c}_{i_{n-1}}$. Побудуємо ортогональну систему векторів $\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, ..., \bar{e}_{i_{n-1}}$, яка отримана із даної процесом ортогоналізації, тобто:

$$\overline{e_{i_1}} = \overline{c_{i_1}},$$

$$\overline{e_{i_2}} = \beta_1 \overline{c_{i_1}} + \overline{c_{i_2}}, \ \beta_1 = -\frac{(\bar{e}_{i_2}, \overline{e_{i_1}})}{(\overline{e_{i_1}}, \overline{e_{i_1}})},$$

$$\dots$$

$$\overline{e_{i_{n-1}}} = \beta_1 \overline{e_{i_1}} + \dots + \beta_{n-2} \overline{e_{i_{n-2}}} + \overline{c_{i_{n-1}}}, \quad \text{де} \quad \beta_j = -\frac{(\overline{c_{i_{n-1}}}, \overline{e_{i_j}})}{(\overline{e_{i_j}}, \overline{e_{i_j}})}. \qquad (4.8)$$

Сумістимо початки всіх векторів $\overline{e_{i_j}}$, $j = \overline{1, n-1}$ із початком системи координат.

Теорема 4.1. Вектори $\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, ..., \bar{e}_{i_{n-1}}$***, які утворені із системи лінійно-незалежних векторів*** $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, ..., \bar{c}_{i_{n-1}}$ ***процесом ортогоналізації, будуть належати гіперплощині*** P***, яка визначається векторами*** $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, ..., \overline{c}_{i_{n-1}}$**.**

Доведення. Рівнянням гіперплощини P, яка проходить через початок координат $\boldsymbol{O}$ і точки $C_{l_1}, C_{l_2}, ..., C_{l_{n-1}}$ ($\overline{OC_i} = \overline{c_i}$, $i = 1, ..., m$), буде рівняння (4.6). Потрібно довести, що кожний вектор із системи $\bar{e}_{l_1}, \bar{e}_{l_2}, ..., \overline{e}_{l_{n-1}}$ буде його задовольняти. Доведемо це методом математичної індукції.

I. Перевіримо для *i=1* чи $\overline{e_{i_1}} \in \mathrm{P}$. Так як $\overline{e_{i_1}} = \overline{c_{i_1}}$, то $\overline{e_{i_1}} \in \mathrm{P}$.

II. Перевіримо для *i=2* чи $\overline{e_{i_2}} \in \mathrm{P}$.

Використавши, що $\overline{e_{i_2}} = \beta_1 \overline{e_{i_1}} + \overline{c_{i_2}} = (\beta_1 e_{i_1 1} + c_{i_2 1}, \beta_1 e_{i_1 2} + c_{i_2 2}, ..., \beta_1 e_{i_1 n} + c_{i_2 n})$, $\overline{e_{i_1}} \in \mathrm{P}$, $\overline{c_{i_2}} \in \mathrm{P}$, і підставивши (4.8) в рівняння (4.7), отримаємо

$$p_1 e_{i_2 1} + p_2 e_{i_2 2} + \ldots + p_n e_{i_2 n} = \beta_1 (p_1 e_{i_1 1} + p_2 e_{i_1 2} + \ldots + p_1 e_{i_1 n}) + p_1 c_{i_2 1} + p_2 c_{i_2 2} + \ldots + p_n c_{i_2 n} = 0 \cdot$$

Звідси випливає, що $\overline{e_{i_2}} \in \mathrm{P}$.

III. Припустимо, що $\overline{e_{i_{k-1}}} \in \mathrm{P}$, тобто виконується $p_1 e_{i_{k-1} 1} + p_2 e_{i_{k-1} 2} + \ldots + p_n e_{i_{k-1} n} = 0$.

IV. Доведемо, що $\overline{e_{i_k}} \in \mathrm{P}$. Враховуючи (4.7), отримаємо:

$$p_1 e_{i_k 1} + p_2 e_{i_k 2} + \ldots + p_n e_{i_k n} = p_1 (\beta_1 e_{i_1 1} + \beta_2 e_{i_2 1} + \ldots + \beta_{k-1} e_{i_{k-1} 1} + c_{k1}) +$$

$$+ p_2 (\beta_1 e_{i_1 2} + \beta_2 e_{i_2 2} + \ldots + \beta_{k-1} e_{i_{k-1} 2} + c_{k2}) + \ldots + p_n (\beta_1 e_{i_1 n} + \beta_2 e_{i_2 n} + \ldots + \beta_{k-1} e_{i_{k-1} n} + c_{kn}) =$$

$$= \beta_1 (p_1 e_{i_1 1} + p_2 e_{i_1 2} + \ldots + p_n e_{i_1 n}) + \beta_2 (p_1 e_{i_2 1} + p_2 e_{i_2 2} + \ldots + p_n e_{i_2 n}) + \ldots +$$

$$+ \beta_{k-1} (p_1 e_{i_{k-1} 1} + p_2 e_{i_{k-1} 2} + \ldots + p_n e_{i_{k-1} n}) + p_1 c_{i_k 1} + p_2 c_{i_k 2} + \ldots + p_n c_{i_k n} = 0,$$

так як $\overline{e_{i_j}}$, $j = \overline{1, k-1}$ належать гіперплощині P, то кожний вираз в дужках дорівнює нулю, тому $\overline{e_{i_k}} \in \mathrm{P}$.

Отже, за математичною індукцією *теорема доведена*.

Пронормувавши вектори $\overline{e_{i_j}}$, $j = \overline{1, n-1}$, отримаємо ортонормовану систему $\overline{\tilde{e}_{i_j}}$, $j = \overline{1, n-1}$, яка лежить в тій же гіперплощині Р, що і $\overline{c_{i_j}}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Визначимо вектор $\overline{\tilde{e}}$ таким чином, щоб він був ортогональний до векторів $\overline{\tilde{e}_{i_j}}$, $j = \overline{1, n-1}$:

$$\overline{\tilde{e}} = \left(\begin{vmatrix} e_{i_1 2} & \ldots & e_{i_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{i_{n-1} 2} & \ldots & e_{i_{n-1} n} \end{vmatrix}, \ldots, (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} e_{i_1 1} & \ldots & e_{i_1 n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{i_{n-1} 1} & \ldots & e_{i_{n-1} n-1} \end{vmatrix} \right).$$

Лема 4.1. *Вектор* $\tilde{\bar{e}}$ *буде перпендикулярний до гіперплощини* P.

Доведення. Оскільки вектор $\tilde{\bar{e}}$ є ортогональний до системи векторів $\overline{e_{i_j}}$, $j=\overline{1,n-1}$, які за теоремою 4.1 належать гіперплощині P, то тим самим $\tilde{\bar{e}}$ буде перпендикулярний і до P.

Лему доведено.

Теорема 4.2. Система векторів $\overline{e_{i_1}},\overline{e_{i_2}},...,\overline{e_{i_{n-1}}},\tilde{\bar{e}}$ ***є ортонормованим базисом в*** R^n**.**

Доведення. Дана система векторів є ортонормованою за побудовою. Так як кількість векторів системи є n і вони є лінійно-незалежними за побудовою, то дана система векторів також утворює базис.

Теорему доведено.

Таким чином, знак n-ї координати векторів $\overline{c_i}$, $i=\overline{1,m}$ в ортонормованому базисі $\overline{e_{i_1}},\overline{e_{i_2}},...,\overline{e_{i_{n-1}}},\tilde{\bar{e}}$ і буде критерієм розподілу векторів $\overline{c_i}$ до різних груп множин, тобто:

$$\Psi_t=\{i|c_{in}>0\}\bigcup\{i_1\}\bigcup\{i_2\}\bigcup...\bigcup\{i_{n-1}\}.$$

Враховуючи припущення, що всіх лінійно-незалежних систем векторів є s, то таких множин Ψ_t також буде s. Серед них виберемо множину Ψ_{t^*}, потужність якої буде найбільша, причому вектори $\overline{c_i}$, індекси яких будуть входити в цю множину, належатимуть одній групі, а всі інші – другій.

Опишемо алгоритм, що реалізує даний метод.

Алгоритм 4.2.

Крок 1. Будемо перебирати всі можливі s лінійно-незалежних наборів векторів $\overline{OC}=\overline{c_i}$, де $s\le C_m^{n-1}=\dfrac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$.

Крок 2. Нехай одним із цих s наборів будуть вектори $\bar{c}_{i_1},\bar{c}_{i_2},...,\bar{c}_{i_{n-1}}$, побудуємо ортонормовану систему $\overline{e_{i_1}},\overline{e_{i_2}},...,\overline{e_{i_{n-1}}}$, яка отримана із даної процесами ортогоналізації і нормування.

Крок 3. Складемо вектор $\overline{\overline{e}} = \left(\begin{vmatrix} e_{i_1 2} & \dots & e_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{i_{n-1} 2} & \dots & e_{i_{n-1} n} \end{vmatrix}, \dots, (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} e_{i_1 1} & \dots & e_{i_1 n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{i_{n-1} 1} & \dots & e_{i_{n-1} n-1} \end{vmatrix} \right)$.

Крок 4. Знак n-ї координати векторів $\overline{c_i}$, $i = \overline{1, m}$ в ортонормованому базисі $\overline{\hat{e}_{i_1}}, \overline{\hat{e}_{i_2}}, \dots, \overline{\hat{e}_{i_{n-1}}}, \overline{\tilde{e}}$ буде критерієм поділу векторів $\overline{c_i}$ до різних груп множин, тобто: $\Psi_t = \{ i | \, c_{in} > 0 \} \bigcup \{ i_1 \} \bigcup \{ i_2 \} \bigcup \dots \bigcup \{ i_{n-1} \}$, $t = \overline{1, s}$.

Крок 5. Серед Ψ_t, $t = \overline{1, s}$ виберемо множину Ψ_{t^*}, потужність якої буде найбільша, причому вектори $\overline{c_i}$, індекси яких будуть входити в цю множину, належатимуть одній групі суперечливих множин, а всі інші – другій.

Зауваження. Гарантією збіжності вищеозначених методів служить те, що вони полягають в переборі всіх можливих лінійно-незалежних комбінацій *n-1* векторів, кількість яких є s, причому $s \le C_m^{n-1} = \dfrac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$.

4.5. Методи кластеризації критеріїв ефективності на множини сильно зв’язаних

Методи описані в [31, 34, 36, 37, 46, 63, 82] представляють дану групу методів .

Спочатку розглянемо сукупність методів, що наперед не вимагає додаткової інформації про верхню межу кількості потрібних кластерів кластеризації.

Нехай $\{\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_k}\}$ – довільна скінченна сукупність точок в n-вимірному Евклідовому просторі E_n. Розглянемо задачу про розбиття множини цих точок на дві підмножини гіперплощиною

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0, \quad (4.9)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – деякі дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю. Даний підхід розглядався у роботах [2, 3]. Надалі будемо розглядати підмножину точок $A_i\left(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n\right)$, координати яких задовольняють нерівність

$$\alpha_1 a_i^1 + \alpha_2 a_i^2 + \cdots \alpha_n a_i^n \geq 0, \tag{4.10}$$

причому така умова виконується для максимально-можливої кількості точок. Очевидно, задача зводиться до розв'язування відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ наступної системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1^1 + \ldots + \alpha_n a_1^n \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 a_k^1 + \ldots + \alpha_n a_k^n \geq 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Позначимо систему (4.11) через $S(k)$, а через $S(k-l)$ позначимо систему нерівностей, яка одержується із $S(k)$ відкиданням довільних l нерівностей $(l = 1,2,\ldots)$. Якщо система $S(k)$ має ненульовий розв'язок, то вибравши один з цих розв'язків одержимо шукану гіперплощину. Якщо система $S(k)$ не має ненульового розв'язку, то розглядаємо всі можливі системи $S(k-1)$ і вибираємо тільки ті, які мають ненульовий розв'язок. Якщо жодна система $S(k-1)$ не має ненульового розв'язку, то розглядаємо всі можливі системи $S(k-2)$. Нехай l_0 – найменше натуральне число, для якого існують системи нерівностей $S(k-l_0)$, що мають ненульові розв'язки. Це означає, що із заданої сукупності точок можна відокремити $(k-l_0)$ точок. Якщо декілька систем $S(k-l_0)$ мають ненульові розв'язки, то розглядаємо кожну із сукупностей $(k-l_0)$ точок окремо.

Метод «Скалярний добуток» [82]

Нехай $\{\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_k}\}$ – довільна скінченна сукупність точок у n-вимірному Евклідовому просторі E_n, які відокремлені деякою гіперплощиною вигляду (4.9) і координати кожної точки $\boldsymbol{A_i}$ задовольняють нерівність (4.10).

Розглянемо метод відокремлення точок, який враховує модулі векторів $\overline{r_i} = \overline{OA_i}$, де O – початок системи координат, $\overline{OA_i}$ – радіус-вектор точки A_i.

Нехай $\overline{r_i} \cdot \overline{r_j}$ – скалярний добуток векторів $\overline{r_i}$ та $\overline{r_j}$ таких, що кут між ними не більший 90^0(π/2). Не порушуючи загальності, припустимо, що таких векторів буде k.

Побудуємо матрицю вигляду:

$$\begin{pmatrix} \overline{r_1} \cdot \overline{r_1} & \cdots & \cdots & \overline{r_1} \cdot \overline{r_k} \\ \overline{r_2} \cdot \overline{r_1} & \cdots & \cdots & \overline{r_2} \cdot \overline{r_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{r_k} \cdot \overline{r_1} & \cdots & \cdots & \overline{r_k} \cdot \overline{r_k} \end{pmatrix} . \tag{4.12}$$

Оскільки $\overline{r_i} \cdot \overline{r_j} = \left|\overline{r_i}\right| \cdot \left|\overline{r_j}\right| \cdot \cos\left(\overline{r_i}, \overline{r_j}\right)$, то скалярний добуток буде тим більший, чим модулі більші і кут між цими векторами менший. Припустимо, що $\overline{r_1} \cdot \overline{r_1} \geq \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} \geq \cdots \geq \overline{r_1} \cdot \overline{r_k}$. Нехай $p_{1j} = \overline{r_1} \cdot \overline{r_j}$ і виконуються наступні умови $p_{1,1} = p_{1,2} = \cdots = p_{1,l_1} > p_{1,l_1+1} = p_{1,l_1+2} = \cdots = p_{1,l_2} > \cdots > p_{1,l_{s-1}+1} = \cdots = p_{1,l_s}$.

Позначивши через φ_{ij} кут між векторами $\overline{r_i}$ та $\overline{r_j}$, знайдемо величину

$$\lambda_1 = \max\left\{\frac{l_1}{\varphi_{11}}, \frac{l_2}{\varphi_{1,l_1+1}}, \cdots, \frac{l_s}{\varphi_{1,l_{s-1}+1}}\right\}.$$

Елементи кожного рядка матриці (4.12) можна записати у порядку спадання

$p_{i1} = p_{i2} = \cdots = p_{i,l_1'} > p_{i,l_1'+1} = p_{i,l_1'+2} = \cdots = p_{i,l_2'} > \cdots > p_{i,l_{s-1}'+1} = \cdots = p_{i,l_s'}$.

Тоді $\lambda_i = \max\left\{\frac{l_1'}{\varphi_{i1}}, \frac{l_2'}{\varphi_{i,l_1'+1}}, \cdots, \frac{l_s'}{\varphi_{i,l_{s-1}'+1}}\right\}$.

Позначимо через λ максимальний елемент множини $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$. Знаючи λ, можна відокремити по можливості максимальну кількість векторів серед $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \ldots, \overline{r_k}$, для якої буде враховано як довжини цих векторів, так і їх скупченість (тобто кількість точок на одиницю виміру кута).

Метод «Об'єм» [82]

Цей метод використовує підхід описаний у [2, 63]. Нехай $\{\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_k}\}$ – довільна скінченна сукупність точок у n- вимірному Евклідовому просторі

E_n, які відокремлені деякою гіперплощиною вигляду (4.9) і координати кожної точки $\boldsymbol{A_i}$ задовольняють нерівність (4.10). Розглянемо $\vec{r_i} = \overrightarrow{OA_i}$ – радіус вектор точки $\boldsymbol{A_i}$, де $\boldsymbol{O}$ – початок системи координат. З множини $\{\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_k}\}$ виберемо лінійно незалежні підсистеми максимальної розмірності. Відомо (вища алгебра), що ці підсистеми векторів складаються з одного й того ж числа векторів. Нехай $\{\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_s}\}$ одна з таких підсистем ($1 \le s \le k$). Сумістивши ці вектори з початком системи координат $\boldsymbol{O}$, дістанемо так званий s-вимірний паралелепіпед. Число, яке дорівнює квадратному кореню від визначника Грама з цих векторів, має властивості об'єму. Нагадаємо (вища алгебра), що число, зіставлене з кожною областю простору E_n, буде об'ємом тоді і тільки тоді, коли конгруентним областям відповідають рівні числа і області, яка складається з двох областей, відповідає число, що дорівнює сумі чисел, відповідних цим двом областям. Позначаючи об'єм паралелепіпеда символом V_s, маємо

$$V_s^2 = \begin{vmatrix} \vec{r_1}\vec{r_1} & \cdots & \vec{r_1}\vec{r_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{r_s}\vec{r_1} & \cdots & \vec{r_s}\vec{r_s} \end{vmatrix} = g.$$

Відомо, що $g \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{r_1}, ..., \vec{r_s}$ лінійно незалежні (g називається визначником Грама).

Нехай $\{ B_i^s = \overrightarrow{r_{1i}}, ..., \overrightarrow{r_{si}} \}$ – сукупність всіх максимальних лінійно незалежних підсистем системи векторів $\{\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_k}\}$. Тоді V_i^s об'єм s-вимірного паралелепіпеда, побудованого на s векторах з множини векторів

$$\overline{B_i^s} = \left\{ \frac{\overrightarrow{r_{1i}}}{\left\|\overrightarrow{r_{1i}}\right\|}, ..., \frac{\overrightarrow{r_{si}}}{\left\|\overrightarrow{r_{si}}\right\|} \right\}.$$

Позначимо через t_i^s сукупність векторів із $\{\vec{r_1}, ..., \vec{r_k}\}$, які лінійно виражаються через вектори $\overline{B_i^s}$ з невід'ємними коефіцієнтами і знайдемо відношення $\rho_i^s = \frac{|t_i^s|}{V_i^s}$, де $|t_i^s|$ – число векторів з t_i^s. Виберемо ті паралелепіпеди, для яких ρ_i^s приймає найбільше значення. Таких паралелепіпедів може бути декілька. Якщо для різних систем об'єми $V_i^s = V_{i_1}^s$ співпадають, то вибираємо той паралелепіпед, для якого ρ_i^s більше від $\rho_{i_1}^s$.

Дані методи дозволяють відокремити певну сукупність точок у просторі E_n, координати яких можуть відповідати векторам сполученим з початком координат. Ці вектори можна розглядати як вектор-градієнти певних цільових функцій, за допомогою яких моделюються критерії ефективності у задачах вибору.

Метод «нечіткі бінарні відношення» [31]

Задамо два нечіткі бінарні відношення R^d і R^k, за допомогою яких легко можна визначити ступінь зв'язаності критеріїв.

Введемо бінарне відношення R^d із функцією належності

$$\varphi_{R^d} : \left\{ \overline{c_i} \middle| i = \overline{1,m} \right\}^2 \to (0,1]: \tag{4.13}$$

$$\varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) = \frac{\Delta - \left| \left\| \overline{c_i} \right\| - \left\| \overline{c_j} \right\| \right|}{\Delta}, \tag{4.14}$$

де $\Delta = \max\limits_{i,j} \left| \left\| \overline{c_i} \right\| - \left\| \overline{c_j} \right\| \right|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$.

Лема 4.2. *Нечітке бінарне відношення R^d характеризує різницю між довжинами векторів $\overline{c_i}$ і $\overline{c_j}$. Причому чим менша різниця між довжинами, тим φ_{R^d} буде ближче до 1. І навпаки, чим ця різниця більша, тим воно буде ближче до нуля.*

Доведення.

Очевидно, що мінімальна різниця між довжинами векторів рівна нулеві, тобто $\left\| \overline{c_i} \right\| - \left\| \overline{c_j} \right\| = 0$. Підставивши дане значення в формулу (4.13) $\varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) = 1$.

Аналогічно, максимальна різниця між довжинами векторів рівна Δ (згідно умови (4.14), підставивши його в (4.13), отримаємо $\varphi_{R^d}\left(\overline{c_i},\overline{c_j}\right)=0$.

Змінну величину $\left|\left\|\overline{c_i}\right\|-\left\|\overline{c_j}\right\|\right|$, що характеризує різницю між довжинами векторів позначимо через x, тоді частина прямої $y=1-\dfrac{x}{\Delta}$, де $0\le x\le\Delta$ буде описувати рівняння (4.13) .

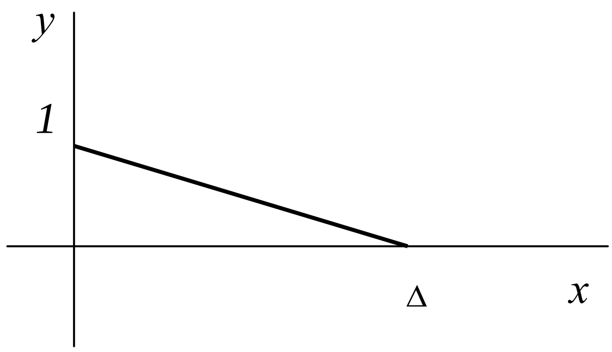


Рисунок 4.7. Рівняння частини прямої $y=1-\dfrac{x}{\Delta}$, де $0\le x\le\Delta$.

Лема доведена.

Вводиться бінарне відношення R^k із функцією належності $\varphi_{R^k}:\left\{\overline{c_i}\,\middle|\, i=\overline{1,m}\right\}^2\to[0,1]$, яка визначається за формулою:

$$\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i},\overline{c_j}\right)=\frac{1+\dfrac{\overline{c_i}\cdot\overline{c_j}}{\left\|\overline{c_i}\right\|\cdot\left\|\overline{c_j}\right\|}}{2},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,m}. \tag{4.15}$$

Лема 4.3. *Нечітке бінарне відношення R^k характеризує кут відхилення між векторами $\overline{c_i}$ і $\overline{c_j}$. Чим менший кут між ними, тим значення φ_{R^k} буде ближчим до 1, і навпаки, чим більшим є цей кут, тим φ_{R^k} буде ближче до нуля.*

Доведення.

Мінімальний кут між векторами рівний нулеві, тоді $\overline{c_i}\cdot\overline{c_j}=\left\|\overline{c_i}\right\|\cdot\left\|\overline{c_j}\right\|\cos 0^o=\left\|\overline{c_i}\right\|\cdot\left\|\overline{c_j}\right\|$, підставивши в (4.8) отримаємо $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i},\overline{c_j}\right)=1$.

Максимальний кут між векторами рівний 180°, тоді скалярний добуток $\overline{c_i} \cdot \overline{c_j} = \left\| \overline{c_i} \right\| \cdot \left\| \overline{c_j} \right\| \cos 180^o = -\left\| \overline{c_i} \right\| \cdot \left\| \overline{c_j} \right\|$, підставивши в (4.8) отримаємо, що $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) = 0$.

Перепишемо $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right)$, використавши означення скалярного добутку. Отримаємо $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$.

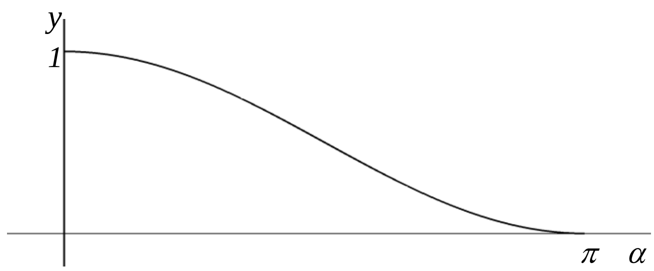


Рисунок 4.8. Графік функції $y = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ на проміжку $[0, \pi]$

Дана функція є спадною (рисунок 4.8). Отже, із збільшенням кута значення $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right)$ спадає.

Лема доведена.

Побудуємо нечітке бінарне відношення $R^s = R^d \cap R^k$ із функцією належності $\varphi_{R^s} : \left\{ \overline{c_i} \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}^2 \to [0,1]$, що

$$\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) = \min(\varphi_{R^d}(\overline{c_i}, \overline{c_j}); \varphi_{R^k}(\overline{c_i}, \overline{c_j})).$$

Дане відношення буде визначати ступінь зв’язаності критеріїв: чим сильніша зв’язаність між критеріями f_i, f_j, тим $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right)$ буде ближче до 1.

Тому, ввівши поріг сильної зв’язаності μ_s (деяке число близьке до 1), всі критерії f_i, f_j, для яких $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) > \mu_s$ можна вважати сильно зв’язаними.

На основі всіх даних методів описані відповідні їм алгоритми.

Із вище наведених положень можна запропонувати наступні алгоритми різної модифікації, які реалізують дані методи кластеризації.

Алгоритм 4.3.

Крок 0. Задаємо деяке число $\mu_s \in [0, 1]$.

Крок 1.

1. Позначимо $F^1 = \left\{ f_i(x) \middle| i = \overline{1,m} \right\}$, а $I^1 = \left\{ i \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}$. Серед критеріїв $f_i(x) \in F^1$, вибираємо деякий домінантний $f_{i_1^*}$. Домінантним критерієм може бути:

а) критерій, який задасть ЛПР;

б) критерій для якого відповідно $\left\| \overline{c_{i_1^*}} \right\| = \max\limits_{i \in I^1} \left\| \overline{c_i} \right\|$;

в) критерій для якого відповідно $\varphi_{i_1^* j} = \max\limits_{\substack{i, j \in I^1 \\ i \neq j}} \varphi_{i j}$, причому $\varphi_{i j} = \varphi_{R^s}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j} \right)$, $i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}$.

2. Із критеріїв $f_i(x) \in F^1$, для яких $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_{i_1^*}}, \overline{c_j} \right) \geq \mu_s$ створимо кластер K^1.

3. Позначимо $F^2 = F^1 \setminus K^1$, а $I^2 = \left\{ i \,\middle|\, f_i(x) \in F^2 \right\}$.

Крок t.

1. Серед критеріїв $f_i(x) \in F^t$ вибираємо домінантний $f_{i_t^*}$, так само як і на кроці 1:

а) критерій, який задасть ЛПР;

б) критерій, для якого відповідно $\left\| \overline{c_{i_t^*}} \right\| = \max\limits_{i \in I^t} \left\| \overline{c_i} \right\|$;

в) критерій, для якого відповідно $\varphi_{i_t^* j} = \max\limits_{\substack{i, j \in I^t \\ i \neq j}} \varphi_{i j}$, причому $\varphi_{i j} = \varphi_{R^s}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j} \right)$, $i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}$.

2. Із критеріїв $f_i(x) \in F^t$, для яких $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_{i_t^*}}, \overline{c_j} \right) \geq \mu_s$ створимо кластер K^t.

3. Позначимо $F^{t+1} = F^t \setminus K^t$, а $I^{t+1} = \left\{ i \,\middle|\, f_i(x) \in F^{t+1} \right\}$.

Процес завершуємо на деякому кроці T, якщо $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_s$ для будь-яких $i, j \in I^{T+1}$. Причому $K^{T+1} = F^{T+1}$.

Алгоритм 4.4.

Крок 0. Задаємо деяке число μ_d близьке до одиниці.

Крок 1.

1. Позначимо $F^1 = \left\{ f_i(x) \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}$, а $I^1 = \left\{ i \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}$. Серед критеріїв $f_i(x) \in F^1$, вибираємо деякий домінантний $f_{i_1^*}$. Домінантним критерієм може бути:

   а) критерій, який задасть ЛПР;

   б) критерій для якого відповідно $\left\| \overline{c_{i_1^*}} \right\| = \max\limits_{i \in I^1} \left\| \overline{c_i} \right\|$;

   в) критерій для якого відповідно $\varphi_{i_1^* j} = \max\limits_{\substack{i, j \in I^1 \\ i \neq j}} \varphi_{i j}$, причому

$\varphi_{i j} = \varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right), \; i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}$.

2. Із критеріїв $f_i(x) \in F^1$, для яких $\varphi_{R^d}\left(\overline{c_{i_1^*}}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_d$ створимо кластер K^1.

3. Позначимо $F^2 = F^1 \setminus K^1$, а $I^2 = \left\{ i \,\middle|\, f_i(x) \in F^2 \right\}$.

Крок t.

1. Серед критеріїв $f_i(x) \in F^t$ вибираємо домінантний $f_{i_t^*}$, так само як і на кроці 1:

   а) критерій, який задасть ЛПР;

   б) критерій, для якого відповідно $\left\| \overline{c_{i_t^*}} \right\| = \max\limits_{i \in I^t} \left\| \overline{c_i} \right\|$;

   в) критерій, для якого відповідно $\varphi_{i_t^* j} = \max\limits_{\substack{i, j \in I^t \\ i \neq j}} \varphi_{i j}$, причому

$\varphi_{i j} = \varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right), \; i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}$.

2. Із критеріїв $f_i(x) \in F^t$, для яких $\varphi_{R^d}\left(\overline{c_{i_t^*}}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_d$ створимо кластер K^t.

3. Позначимо $F^{t+1} = F^t \setminus K^t$, а $I^{t+1} = \left\{ i \,\middle|\, f_i(x) \in F^{t+1} \right\}$.

Процес завершуємо на деякому кроці T, якщо $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_s$ для будь-яких $i, j \in I^{T+1}$. Причому $K^{T+1} = F^{T+1}$.

Алгоритм 4.5.

Крок 0.

1. Задаємо деякі числа μ_k, μ_d близькі до одиниці.

2. Позначимо $\Phi^k = \{\varphi_{ij}\}$, де $\varphi_{ij} = \varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$.

Крок 1.

1. Позначимо $F^1 = \left\{ f_i(x) \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}$, а $I^1 = \left\{ i \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}$. Серед критеріїв $f_i(x) \in F^1$, знайдемо домінантний $f_{i_1^*}$ такий, для якого виконується умова $\varphi_{i_1^* j} = \max\limits_{\substack{i,j \in I^1 \\ i \neq j}} \varphi_{ij}$.

2. Відносно домінантного критерію $f_{i_1^*}$ будуємо множину-конус $\Psi_{i_1^*} = \left\{ f_i(x) \middle| \, f_i(x) \in F^1 \; i \; \varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_{i_1^*}}\right) \geq \mu_k \right\}$.

3. Створимо кластер K^1, фільтруючи елементи із множини $\Psi_{i_1^*}$: $K^1 = \left\{ f_i(x) \middle| \, f_i(x) \in \Psi_{i_1^*} \; i \; \varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_{i_1^*}}\right) \geq \mu_d \right\}$.

4. Позначимо $F^2 = F^1 \setminus K^1$, а $I^2 = \left\{ i \,\middle|\, f_i(x) \in F^2 \right\}$.

Крок t.

1. Серед критеріїв $f_i(x) \in F^t$, виберемо домінантний критерій $f_{i_1^*}$, для якого виконується $\varphi_{i_t^* j} = \max\limits_{\substack{i,j \in I^t \\ i \neq j}} \varphi_{ij}$.

2. Будуємо множину-конус $\Psi_{i_t^*} = \left\{ f_i(x) \middle| \, f_i(x) \in F^t \; i \; \varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_{i_t^*}}\right) \geq \mu_k \right\}$.

3. Фільтруємо елементи $\Psi_{i_t^*}$: $K^t = \left\{ f_i(x) \middle| \, f_i(x) \in \Psi_{i_t^*} \; i \; \varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_{i_t^*}}\right) \geq \mu_d \right\}$.

4. Позначимо $F^{t+1} = F^t \setminus K^t$, а $I^{t+1} = \left\{ i \,\middle|\, f_i(x) \in F^{t+1} \right\}$.

Процес завершуємо на деякому кроці T, якщо $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_k$ і $\varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_d$ для будь-яких $i, j \in I^{T+1}$. Причому $K^{T+1} = F^{T+1}$.

Зауваження. Завершення процесу виконання ітерацій алгоритмів гарантується тим, що умови кластеризації $\varphi_{R^s}\left(\overline{c_{i_t^*}}, \overline{c_j}\right) \geq \mu_s$, $\varphi_{R^k}\left(\overline{c_i}, \overline{c_{i_t^*}}\right) \geq \mu_k$, $\varphi_{R^d}\left(\overline{c_i}, \overline{c_{i_t^*}}\right) \geq \mu_d$ завжди виконуються хоча б для одного із критеріїв - домінантного, тобто при $i = i_t^*$ (кожен критерій сильно зв'язаний сам із собою). Тому не буде утворюватись «пустих» кластерів на кожному кроці. Таким чином, у деяких вироджених задачах (коли немає сильно зв'язаних критеріїв) кількість кластерів z буде рівна кількості локальних критеріїв m.

Далі будуть описані методи кластеризації критеріїв ефективності, що наперед потребують інформацію про верхню межу кількості потрібних кластерів кластеризації z.

Метод «Окіл» [46]

Будемо розбивати точки $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, $i = \overline{1, m}$ на множини їх скупчення, тим самим прокластеризуємо і локальні критерії критеріального простору, що їм відповідають.

При побудові методу використано поняття околів точок та гіперсфери. Нехай z – число, що характеризує верхню межу кількості потрібних кластерів розбиття.

Пронормувавши вектори $\overline{c_i}$, отримаємо систему $\overline{e_i} = \dfrac{\overline{c_i}}{\left\|\overline{c_i}\right\|} = \overline{OE_i}$, $i = \overline{1, m}$ (рисунок 4.9). Таким чином, кожен початок вектора $\overline{e_i}$, $i = \overline{1, m}$ буде співпадати з точкою O – початком координат, а кінець лежатиме на одиничній гіперсфері Λ виду: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Будемо розбивати на множини точки $E_i = \left(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}\right)$, що відповідають векторам $\overline{e_i}$, використовуючи їх околи. Знайдемо середнє арифметичне відстаней від кожної точки E_i до точки, що знаходиться на мінімальній відстані від даної, за формулою: $r_1 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \min\limits_{j \in \{1,...,m\}/\{i\}} \| E_i E_j \|}{m}$.

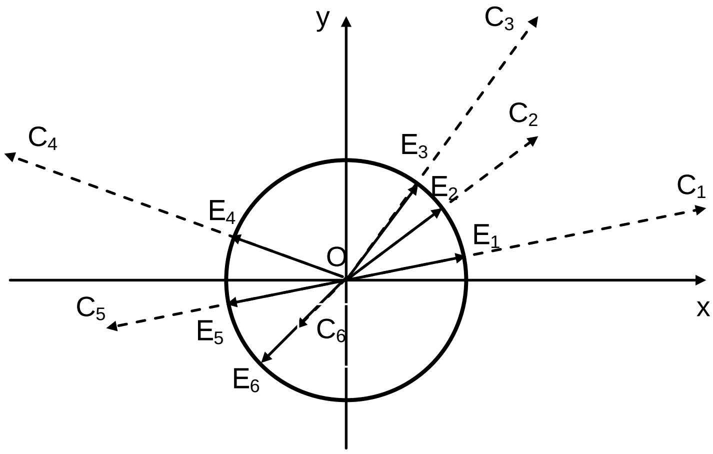


Рисунок 4.9. Приклад можливого розміщення векторів $\overline{OE_i}$ в просторі R^2

Для кожної точки E_i, $i = \overline{1,m}$ будуємо окіл Q_{1i} радіуса r_1. Проводимо об'єднання точок у множини, враховуючи їх кількість в кожному з даних околів ("потужність" околу). Тобто, домінантним є окіл, який має найбільшу (максимальну) потужність серед тих, які ще не розглядались і які не перетинаються із вже взятими. Нехай, на першому кроці, околи із множини $\left\{ Q_{1i} \,\middle|\, i = \overline{1,m} \right\}$, що задовольняють даний принцип, позначимо $\Omega_{11}, \Omega_{12}, ..., \Omega_{1s_1}$, де $s_1 < m$. Центр (представник околу) кожного із Ω_{1i} позначимо $M_{11}, M_{12}, ..., M_{1s_1}$, які є центрами ваги фігури, обмеженої точками, що лежать в Q_{1i}, а радіус візьмемо $r_{\Omega_{1i}} = \max\limits_{j \in \Theta_{1i}} \| M_{1i} E_j \|$, $i = \overline{1, s_1}$, де $\Theta_{1i} = \left\{ j \,\middle|\, E_j \in \Omega_{1i} \right\}$.

На наступному кроці будемо розглядати тільки ті точки, що не ввійшли до жодного із отриманих околів (тобто із множини $\left\{ E_i \,\middle|\, i \in \{1,2,...,m\} / \bigcup\limits_{i=1}^{s_1} \Theta_{1i} \right\}$) і точки, що є представниками околів $\Omega_{11}, \Omega_{12}, ..., \Omega_{1s_1}$. Якщо $s_1 \le z$, то процес групування закінчено, в противному випадку розбиття критеріїв на множини продовжуємо.

Припустимо, що на деякому k-му кроці ми отримали s_k околів $\Omega_{k1}, \Omega_{k2}, ..., \Omega_{ks_k}$, де $s_k < s_{k-1}$. $M_{k1}, M_{k2}, ..., M_{ks_k}$ – представники даних околів, а $\Theta_{kj} = \{ i \mid E_i \in \Omega_{kj} \}$, $j = \overline{1, s_k}$ – множини індексів точок, що належать околам Ω_{kj}.

Позначимо через $M_{k\, s_k+1}, M_{k\, s_k+2}, ..., M_{k\, p_k}$ точки, кількість яких є $p_k - s_k$, що не ввійшли в жодний з околів Ω_{ki}, $i = \overline{1, s_k}$, причому

$$p_k = m - \sum_{j=1}^{s_k} \left| \Theta_{kj} \right|.$$

Із кожної з точок $M_{k1}, M_{k2}, ..., M_{kp_k+s_k}$ проведемо околи $Q_{k1}, Q_{k2}, ..., Q_{kp_k+s_k}$ радіуса r_k, де

$$r_k = \frac{\sum_{j=1}^{p_k+s_k} \min_{i \in \{1, ..., p_k+s_k\} / \{j\}} \left| \overline{M_i M_j} \right|}{p_k + s_k}.$$

Знаходимо Q_{kt_1} – максимальний по потужності окіл із Q_{ki}, $i = \overline{1, p_k + s_k}$. На його основі будуємо окіл Ω_{k+11}, центром якого беремо центр ваги фігури, що обмежена точками $E_i \in Q_{kt_1}$, а радіус $r_{\Omega_{k+11}} = \max_{j \in \Theta_{k+11}} \left\| \overline{M_{k+11} E_j} \right\|$, де $\Theta_{k+11} = \left\{ i \middle| E_i \in Q_{kt_1} \right\}$.

Надалі цей процес повторюємо, але розглядаємо околи Q_{ki} із максимальною потужністю, крім вже взятих, враховуючи тільки ті, які не перетинаються із жодним околом, утвореним на $k+1$ кроці, і або повністю поглинають деякі із околів Ω_{ki}, $i = \overline{1, s_k}$,або взагалі не перетинаються із жодним із них. Тобто, якщо Q_{kt_j} – окіл з максимальною потужністю, то беремо його тільки тоді, коли $\left(\forall i = \overline{1, j-1} \right)$ $Q_{kt_j} \cap \Omega_{k+1i} = \varnothing$ і або $\left(\forall i = \overline{1, s_k} \right)$ $Q_{kt_j} \cap \Omega_{ki} = \varnothing$, або $\left(\exists i \in \{1, ..., s_k\} \right)$ $Q_{kt_j} \cap \Omega_{ki} = \Omega_{ki}$.

Нехай на деякому кроці l кількість околів $\Omega_{l1}, \Omega_{l2}, ..., \Omega_{l s_l}$ буде менша за z (тобто $s_l < z$), тоді ітераційний процес закінчуємо і формуємо кластери $K_j = \left\{ C_i \,\middle|\, E_i \in \Omega_{l j} \right\}, \quad j = \overline{1, s_l}$.

Твердження 4.1. *Для того щоб даний метод виключав попадання в один кластер суперечливих критеріїв, необхідно, щоб на* l*-му кроці виконувалась умова* $r_l < \sqrt{2}$.

Доведення.

Для простоти обмежимося простором R^2. Очевидно, що для суперечливості двох критеріїв достатньо, щоб кут між відповідними їм векторами $\overline{c_i}$ був близький до 180°.

Тобто, для попадання в один кластер суперечливих векторів необхідно, щоб радіус деякого околу Ω_{li} був настільки великим, щоб він міг «захопити» туди деякі два вектори $\overline{OE_{i_1}}$ та $\overline{OE_{i_2}}$ кут між якими близький до 180°.

Розв'язавши нескладну геометричну задачу (рисунок 4.10), отримаємо, що радіус при цьому має бути близьким до $\sqrt{2}$.

Твердження доведено.

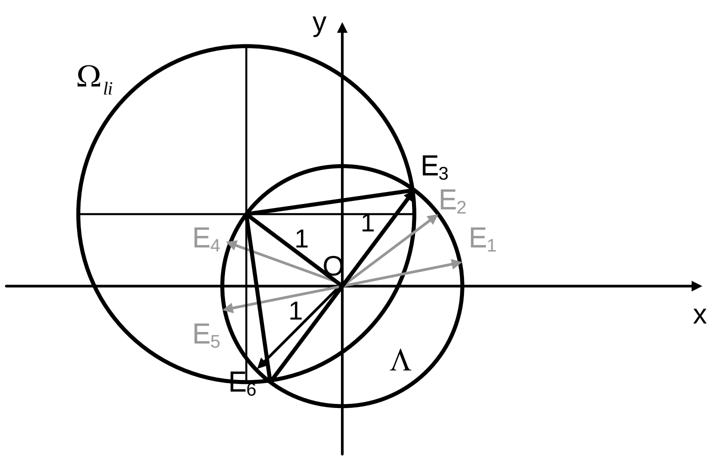


Рисунок 4.10. Визначення граничного значення радіуса околу Ω_{li}

Враховуючи твердження 4.1, вибір верхньої межі кількості кластерів z не є довільним. Тому очевидно, якщо на останній ітерації $r_l \geq \sqrt{2}$, то величину z потрібно збільшити.

Крім того, як видно з рисунку 4.10, якщо $r_l \geq 2$, то в результаті буде утворений один кластер, який буде містити всі точки $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}), \quad i = \overline{1,m}$.

Даний метод можна реалізувати у вигляді наступного алгоритму.

Алгоритм 4.6.

Нехай задано кількість кластерів z.

Крок 1.

1. Нормуємо радіус-вектори $\overline{c_i}$ і отримаємо систему $\overline{e_i} = \frac{\overline{c_i}}{\left\| \overline{c_i} \right\|} = \overline{OE_i}, \quad i = \overline{1,m}$.

2. Для кожної точки $E_i, \quad i = \overline{1,m}$ будуємо окіл Q_{1i} радіуса r_1, де

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \min_{j \in \{1,\ldots,m\}/\{i\}} \left\| E_i E_j \right\|}{m}.$$

3. Проводимо об'єднання точок $E_i, \quad i = \overline{1,m}$ в околи за принципом домінантного околу, описаного вище. Створені при цьому околи позначимо $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \ldots, \Omega_{1s_1}, \quad s_1 < m$. Визначимо центри $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1s_1}$, кожного із околів Ω_{1i} як центри ваги фігури, обмеженої точками, що лежать в Q_{1i}, а радіус візьмемо $r_{\Omega_{1i}} = \max_{j \in \Theta_{1i}} \left\| M_{1i} E_j \right\|$, $i = \overline{1,s_1}$, де $\Theta_{1i} = \left\{ j \,\middle|\, E_j \in \Omega_{1i} \right\}$.

Крок t.

1. Припустимо, що на деякому k-му кроці ми отримали s_k околів $\Omega_{k1}, \Omega_{k2}, \ldots, \Omega_{ks_k}$, де $s_k < s_{k-1}$, причому $M_{k1}, M_{k2}, \ldots, M_{ks_k}$ – представники даних околів, а $\Theta_{kj} = \left\{ i \,\middle|\, E_i \in \Omega_{kj} \right\}$, $j = \overline{1,s_k}$ – множини індексів точок, що належать

околам Ω_{kj}, $M_{k\,s_k+1}, M_{k\,s_k+2}, ..., M_{k\,p_k}$ точки, кількість яких є $p_k - s_k$, що не ввійшли в жодний з околів Ω_{ki}, $i = \overline{1, s_k}$, причому $p_k = m - \sum_{j=1}^{s_k} \left| \Theta_{kj} \right|$.

2. Із кожної з точок $M_{k1}, M_{k2}, ..., M_{kp_k+s_k}$ проведемо околи $Q_{k1}, Q_{k2}, ..., Q_{kp_k+s_k}$ радіуса r_k, де $r_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{p_k+s_k} \min\limits_{i \in \{1,...,p_k+s_k\}/\{j\}} \left| \overline{M_i M_j} \right|}{p_k + s_k}$.

3. Знаходимо Q_{kt_1} – максимальний по потужності окіл із Q_{ki}, $i = \overline{1, p_k + s_k}$. На його основі будуємо окіл Ω_{k+11}, центром якого беремо центр ваги фігури, що обмежена точками $E_i \in Q_{k\,t_1}$, а радіус $r_{\Omega_{k+11}} = \max\limits_{j \in \Theta_{k+11}} \left\| \overline{M_{k+11} E_j} \right\|$, де $\Theta_{k+11} = \left\{ i \middle| E_i \in Q_{k\,t_1} \right\}$.

4. Надалі цей процес повторюємо, але розглядаємо околи Q_{ki} із максимальною потужністю для яких виконується $\left(\forall i = \overline{1, j-1}\right)$ $Q_{k\,t_j} \cap \Omega_{k+1i} = \varnothing$ і або $\left(\forall i = \overline{1, s_k}\right)$ $Q_{k\,t_j} \cap \Omega_{k\,i} = \varnothing$, або $\left(\exists i \in \{1, ..., s_k\}\right)$ $Q_{k\,t_j} \cap \Omega_{k\,i} = \Omega_{k\,i}$.

Нехай на деякому кроці l кількість околів $\Omega_{l1}, \Omega_{l2}, ..., \Omega_{l\,s_l}$ буде менша за z (тобто $s_l < z$), тоді ітераційний процес закінчуємо і формуємо кластери $K_j = \left\{ C_i \middle| E_i \in \Omega_{l\,j} \right\}$, $j = \overline{1, s_l}$. Якщо при цьому $r_l \geq \sqrt{2}$, то кількість околів z є дуже малою. Тому для непопадання в кластери суперечливих критеріїв потрібно z збільшити і алгоритм 4.6 повторити.

Метод «розмита деревовидна кластеризація» [34]

В даному підрозділі розвинуто метод деревовидної кластеризації кластерного аналізу для кластеризації критеріального простору на чіткі та нечіткі множини сильно зв'язаних критеріїв, які допускають їх суперечливість [24].

Припустимо, що ми хочемо розбити критерії ефективності $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ на z кластерів (множин).

На першому кроці кожну з точок $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}),\quad i = \overline{1, m}$, розглядаємо як окремий кластер, тобто $K_i^1 = \{C_i\}$, $i = \overline{1, m}$.

Введемо поняття відстані між кластерами наступним чином. Якщо кожний із двох кластерів K_s^p і K_l^p на деякому кроці p містить лише по одній точці C_s і C_l відповідно, то відстань між ними визначається як евклідова відстань між цими точками:

$$\left\| K_s^p, K_l^p \right\| = \left\| C_s, C_l \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(c_{si} - c_{li}\right)^2} \,. \tag{4.16}$$

У випадку, коли хоча б один із двох кластерів K_s^p і K_l^p містить більше як одну точку, то відстань між кластерами визначається, наприклад, як найбільша відстань між будь-якими двома точками в різних кластерах (тобто, ”найбільш віддаленими сусідами”, див. рисунок 4.11):

$$\left\| K_s^p, K_l^p \right\| = \max_{C_i \in K_s^p, C_j \in K_l^p} \left\| C_i, C_j \right\|. \tag{4.17}$$

Мотивацією для вибору відстані виду (4.17) є те, що вона не приводить до проблеми утворення «нескінченних» кластерів.

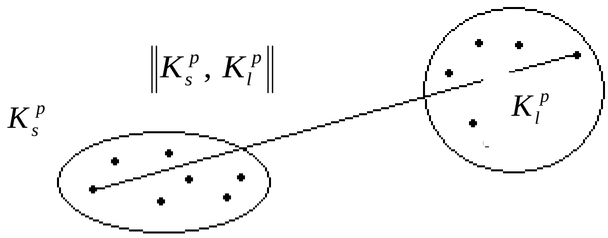


Рисунок 4.11. Приклад знаходження відстані між кластерами K_s^p і K_l^p в просторі R^2

Далі проводимо об’єднання кластерів, відстань між якими є найменшою. На кроці $t = m - z$ кількість кластерів буде рівна z, тобто ми отримаємо кластери $K_1^t, K_2^t, \dots, K_z^t$. Таким чином, алгоритм знаходження множин скупчення точок $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}),\quad i = \overline{1, m}$ на цьому завершується.

Далі пропонується на основі отриманих кластерів $K_1^t, K_2^t, \ldots, K_z^t$ побудувати розмиті множини $Y_j = \{(C_i, \mu_{Y_j}(C_i))\}$, $j = \overline{1, z}$, де $C_i \in \{C_k \mid k = \overline{1, m}\}$, $\mu_{Y_j}(C_i) \in [0, 1]$. Для побудови функцій належності μ_{Y_j}, $j = \overline{1, z}$ точок $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, $i = \overline{1, m}$ розмитим кластерам $Y_1, Y_2, \ldots, Y_z$ потрібно знайти точки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_z$, які є центрами ваги точок, що належать кластерам $K_1^t, K_2^t, \ldots, K_z^t$:

$$x_l^{Q_j} = \frac{\sum\limits_{C_p \in K_j^t} x_l^{C_p}}{w_j}, \ l = \overline{1, n}, \ \ j = \overline{1, z}, \tag{4.18}$$

де $x_l^{Q_j}$, $x_l^{C_p}$ l-і координати відповідно точок Q_j і C_p, а w_j рівна потужності множини K_j^t. Точки Q_j можна назвати центрами скупчення точок C_i, $i = \overline{1, m}$.

Далі позначимо через r_j, $j = \overline{1, z}$:

$$r_j = \max_{i = \overline{1, m}} \| C_i, Q_j \|, \ j = \overline{1, z} \tag{4.19}$$

Отже, для кожного кластеру Y_j, $j = \overline{1, z}$ будуємо функцію належності $\mu_{Y_j} : \{C_i \mid i = \overline{1, m}\} \to [0, 1]$ наступним чином:

$$\mu_{Y_j}(C_i) = \frac{r_j - \| C_i, Q_j \|}{r_j}, \ j = \overline{1, z}, i = \overline{1, m}. \tag{4.20}$$

Таким чином, значення функції $\mu_{Y_j}(C_i)$ буде визначати міру належності точки C_i до кластеру Y_j.

Із вищенаведеного методу кластеризації, можна описати наступні алгоритми.

Алгоритм 4.7.

Крок 1. Будуємо кластери $K_i^1 = \{C_i\}$, $i = \overline{1, m}$, де $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, $i = \overline{1, m}$. Знаходимо відстані між кластерами за формулою (4.16) і об’єднуємо ті два кластери, відстань між якими є найменшою.

Крок 2. Перенумеруємо отримані кластери K_i^2, $i=\overline{1, m-1}$. За формулами (4.16) або (4.17) знаходимо відстані між ними і знову проводимо об'єднання кластерів, відстань між якими є найменшою.

Крок 3. Перенумеруємо отримані кластери K_i^3, $i=\overline{1, m-2}$ і проробляємо теж саме, що і на попередньому кроці.

Крок t=m-z. На цьому кроці кількість отриманих кластерів буде рівна z, перенумеруємо їх $K_1^t, K_2^t, \ldots, K_z^t$.

Таким чином, результатом виконання алгоритму буде z кластерів $K_i = K_i^t$.

Алгоритм 4.8.

Крок 1. Знаходимо точки Q_j, $j=\overline{1, z}$, які є центрами ваги точок, що належать кластерам $K_1^t, K_2^t, \ldots, K_z^t$ за формулою (4.18) і величини r_j, $j=\overline{1, z}$ за формулою (4.6).

Крок 2. Задаємо функції, $\mu_{Y_j} : \left\{ C_i \,\middle|\, i=\overline{1, m} \right\} \to [0, 1]$ за формулою (4.20).

Крок 3. Будуємо розмиті кластери $Y_j = \left\{ \left(C_i, \mu_{Y_j}(C_i) \right) \right\}$, $j=\overline{1, z}$, де $i=\overline{1, m}$, а $\mu_{Y_j}(C_i) \in [0, 1]$ є функціями належності точок C_i до даних кластерів.

4.6. Методи згорток критеріїв кластерів

Нехай проведена кластеризація критеріального простору за будь-яким із методів, описаних в підрозділі 4.5, на кластери $K_1, K_2, \ldots, K_z$ сильно зв'язаних критеріїв. В кожному із кластерів K_i, $i=\overline{1, z}$ потрібно визначити деякі вектори – представники кластерів. Для цього пропонується використати один із наступних методів згортки кластерів критеріїв:

Кожному вектору $\overline{c_1}^*, \overline{c_2}^*, \ldots \overline{c_z}^*$ поставимо у відповідність критерій $\tilde{f}_i(x)$, $i=\overline{1, z}$ - представник кластеру, де $\tilde{f}_i(x) = c_{i1}^* \cdot x_1 + c_{i2}^* \cdot x_2 + \ldots + c_{in}^* \cdot x_n$. Надалі розглядаючи замість критеріїв ефективності $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нові критерії

$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_z$ можна зменшити потужність критеріального простору до числа z. Наведемо деякі евристичні правила для згортки кластерів [4, 32].

1. Позначимо через $\overline{\beta} = \sum_{\overline{c_j} \in K_i} \overline{c_j}$. Згортку кластеру визначимо $\overline{c_i}^* = \frac{\overline{\beta}}{\left\| \overline{\beta} \right\|}$.

2. Середню довжину векторів, що належать даному кластеру позначимо через $\eta = \frac{\sum_{\overline{c_j} \in K_i} \left\| \overline{c_j} \right\|}{|K_i|}$, де $|K_i|$ - потужність множини K_i, а $\left\| \overline{c_j} \right\|$ - довжина вектора $\overline{c_j}$. Визначимо $\overline{\beta}$, як і на попередньому кроці. Згортку кластеру визначимо $\overline{c_i}^* = \frac{\eta \cdot \overline{\beta}}{\left\| \overline{\beta} \right\|}$.

3. Позначимо $\Gamma_i = \left\{ j \,\middle|\, \overline{c_j} \in K_i \right\}$ і $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, де $\beta_k = \sum_{j \in \Gamma_i} \frac{c_{jk}}{\left\| \overline{c_j} \right\|}$, $k = \overline{1, n}$.

Як і в першому пункті вектор $\overline{c_i}^* = \frac{\eta \cdot \overline{\beta}}{\left\| \overline{\beta} \right\|}$ буде визначати згортку кластеру.

4. Нехай кожному із векторів $\overline{c_j}$ кластера K_i ОПР може поставити у відповідність ваговий коефіцієнт λ_j або, наприклад, ваги можна визначити і з формули $\lambda_j = \frac{\left\| \overline{c_j} \right\|}{\sum_{k \in \Gamma_i} \left\| \overline{c_k} \right\|}$, $\forall j \in \Gamma_i$, причому $\sum_{j \in \Gamma_i} \lambda_j = 1$. Координати вектора $\overline{\beta}$ визначимо $\beta_k = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i} \lambda_j c_{jk}}{\sum_{l \in \Gamma_i} \lambda_l}$. І на кінець $\overline{c_i}^* = \overline{\beta}$.

Метод «Пошуку найближчої точки до заданої» [79]

Нехай система лінійних нерівностей

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{n1}x_n > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{1k}x_1 + \dots + c_{nk}x_n > 0, \end{cases} \tag{4.21}$$

сумісна і $M(x_1^0,...,x_n^0)$ – деякий розв'язок системи (4.21). Візьмемо деяку внутрішню точку O_1 області D, що визначається системою (4.2). Позначимо через M_1 таку точку, для якої $\overline{OM} = \overline{O_1M_1}$ (***O*** – початок системи координат). Припустимо, що точка O_1 має координати (l_1, l_2, ... , l_n), точка M_1 має координати (x_1, x_2, ... , x_n). Отже, сукупність чисел (x_1-l_1, x_2-l_2, ... , x_n-l_n) є розв'язком системи нерівностей (4.21):

$$\begin{cases} c_{11}(x_1 - l_1) + ... + c_{n1}(x_n - l_n) > 0, \\ .... \\ c_{1k}(x_1 - l_1) + ... + c_{nk}(x_n - l_n) > 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + ... + c_{n1}x_n > c_{11}l_1 + ... + c_{n1}l_n, \\ .... \\ c_{1k}x_1 + ... + c_{nk}x_n > c_{1k}l_1 + ... + c_{nk}l_n. \end{cases} \tag{4.22}$$

Оскільки O_1 – внутрішня точка області D, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що відкрита куля $U(O_1, \varepsilon)$ з центром в точці O_1 радіуса ε належить області D. Виберемо додатне число k таким, щоб $\left|k \cdot \overline{O_1M_1}\right| < \varepsilon$. Цій умові задовольняє будь-яке додатне число $k < \dfrac{\varepsilon}{|O_1M_1|}$.

Нехай $\overline{O_1M_2} = k\overline{O_1M_1}$, де $M_2 = (x_1^2, x_2^2,...,x_n^2)$. Доведемо, що координати точки M_2 задовольняють систему нерівностей (4.22). Дійсно, i-а нерівність має вигляд:

$$c_{1i}\left(\frac{x_1^2 - l_1}{k}\right) + c_{2i}\left(\frac{x_2^2 - l_2}{k}\right) + ... + c_{ni}\left(\frac{x_n^2 - l_n}{k}\right) > 0,$$

або $c_{1i}x_1^2 + c_{2i}x_2^2 + ... + c_{ni}x_n^2 > c_{1i}l_1 + c_{2i}l_2 + ... + c_{ni}l_n$.

Отже, $f_i(M_2) > f_i(O_1)$. Нехай $\max f_i(x) = N_i$. Тоді $f_i(O_1) - N_i < f_i(M_2) - N_i < 0$. Звідси випливає, що $(f_i(O_1) - N_i)^2 > (f_i(M_2) - N_i)^2$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{k}(f_i(O_1) - N_i)^2 > \sum_{i=1}^{k}(f_i(M_2) - N_i)^2 .$$

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 4.3. ***Нехай $f_i(x_1, \dots, x_n) = c_{1i}x_1 + \dots + c_{ni}x_n$ $(i = 1, \dots, k)$ деяка сукупність цільових функцій така, що система нерівностей (4.21) сумісна, тоді мінімум функції $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{k}(f_i(x_1,\dots,x_n) - N_i)^2$ досягається не у внутрішній точці області D, що визначається системою нерівностей (4.21).***

Гранню опуклої багатогранної множини, що визначається системою (4.21), називається опукла багатогранна множина розв'язків системи, яка одержується з (4.21) заміною деяких нежорстких нерівностей (нерівність, що входить в систему (4.21) називається жорсткою, якщо для всіх розв'язків системи вона виконується тільки як рівність) на рівності. Одновимірні грані називаються ребрами, 0-вимірні грані – вершинами опуклої многогранної множини.

З доведеної теореми випливає, що мінімальне значення на множині D функції $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(f_i(x_1,\dots,x_n) - N_i)^2$ може досягатися тільки в точках якої-небудь її грані D_r (r - розмірність грані).

Позначимо через $T(O_1)$ сукупність всіх точок простору R^n, які задовольняють систему нерівностей (4.21). З доведеної теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок. Функція $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ мінімізується в тих точках O_1 області D, для яких виконується умова $T(O_1) \cap D = \varnothing$.

Теорема 4.4. ***Якщо для всіх точок P кожної грані D_r розмірності $r > 1$ опуклої багатогранної множини D, що визначається системою (4.21), виконується умова $T(P) \cap D_r \neq \varnothing$ $(P \in D_r)$, то мінімум функції $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ досягається або на деякому ребрі, або в деякій вершині опуклої багатогранної множини D.***

Зауваження. У випадку коли система (4.21) немає розв'язку можна навести приклад, в якому функція $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ досягає мінімуму у внутрішній точці області D.

Доведення. Розглянемо випадок $n=2$. Нехай $f_1(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2$, $f_2(x_1,x_2)=b_1x_1+b_2x_2$. Припустимо, що $\max\limits_{(x_1,x_2)\in D} f_i(x_1,x_2)=M_i$, $\min\limits_{(x_1,x_2)\in D} f_i(x_1,x_2)=m_i$ $(i=1,2)$, причому вектор $n_1=\{a_1,a_2\}$не колінеарний вектору $n_2=\{b_1,b_2\}$. Очевидно $\max\limits_{(x_1,x_2)\in D}\{-f_i(x_1,x_2)\}=m_i$, $\min\limits_{(x_1,x_2)\in D}\{-f_i(x_1,x_2)\}=M_i$.

Розглянемо функцію $\varphi(x_1,x_2)=(f_1-M_1)^2+(-f_1-m_1)^2+(f_2-M_2)^2+(-f_2-m_2)^2$. Очевидно, функція $\varphi(x_1,x_2)$ мінімізується у внутрішній точці області D, яка визначається з системи рівнянь $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=\dfrac{M_1-m_1}{2}, \\ b_1x_1+b_2x_2=\dfrac{M_2-m_2}{2}. \end{cases}$

Нехай $f_i(x_1,x_2,x_3)=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3$. Припустимо, що $\max\limits_{(x_1,x_2,x_3)\in D} f_i(x_1,x_2,x_3)=M_i$, $\min\limits_{(x_1,x_2,x_3)\in D} f_i(x_1,x_2,x_3)=m_i$ $(i=1,2,3)$, причому $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$.

Аналогічно випадку $n=2$, розглянемо функцію $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}(f_i(x_1,x_2,x_3)-M_i)^2+\sum\limits_{i=1}^{3}(-f_i(x_1,x_2,x_3)-m_i)^2$. Функція $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ мінімізується у внутрішній точці області D, яка визначається з системи рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\dfrac{M_1-m_1}{2}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\dfrac{M_2-m_2}{2}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\dfrac{M_3-m_3}{2}. \end{cases}$

Розглянемо випадок довільного натурального n. Нехай $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{1n}x_n$. Припустимо, що

$$\max_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D} f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=M_i, \qquad \min_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D} f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=m_i \ (i=1,2,\ldots,n),$$

причому $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$, $\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

Розглянемо функцію

$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)-M_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(-f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)-m_i)^2$. Функція $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ мінімізується у внутрішній точці області D, яка визначається з

системи рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=\dfrac{M_1-m_1}{2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=\dfrac{M_n-m_n}{2}. \end{cases}$.

Дана система рівнянь має єдиний розв’язок, оскільки детермінант системи за умовою не дорівнює нулю.

Теорему доведено.

Твердження 4.2. *Опукла багатогранна множина, яка задається системою лінійних нерівностей з матрицею A рангу r, не може мати грані розмірностей, які менші ніж n-r.*

Опишемо методику побудови згортки цільових функцій відносно заданої точки на основі вище викладеного матеріалу.

Припустимо, що маємо деяку сукупність k цільових функцій $f_k(x) = c_{k1}x_1 + \ldots + c_{kn}x_n$ (k – натуральне число, більше 1). Позначимо через M_k $(x_1^k,\ldots,x_n^k)$ – точку, що є розв’язком системи (4.21), в якій, наприклад, функції $f_k(x)$ приймають екстремальне значення. Нехай $f_k(M_k) = A_k$ – значення функції $f_k(x)$ в точці M_k.. Знайдемо цільову функцію $\varphi(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, яка б по можливості найкраще представляла залежність $\varphi(M_l) = A_l$ ($l = 1, \ldots, k$). Оскільки в загальному випадку не можна підібрати цільову функцію $\varphi(x)$ так, щоб виконувалися рівності

$$\varphi(M_l) = A_l \ (l = 1,2, \ldots k), \tag{4.23}$$

то вимога до функції $\varphi(x)$ наступна: $\varphi(x)$ повинна мінімізувати суму квадратів

$$(\varphi(M_1) - A_1)^2 + \ldots + (\varphi(M_k) - A_k)^2. \qquad (4.24)$$

Функцію $\varphi(x)$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації цільових функцій $\varphi(x) = \theta^1\varphi_1(x) + \cdots + \theta^k\varphi_k(x)$. Тоді рівності (4.23) являють собою систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\theta^1,\ldots,\theta^k$.

$$\begin{cases} a_{11}\theta^1 + \cdots + a_{1k}\theta^k = A_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\theta^1 + \cdots + a_{kk}\theta^k = A_k. \end{cases} \qquad (4.25)$$

Тоді дану систему можна записати у матричному вигляд

$$A\theta = b, \qquad (4.26)$$

де $\theta = \left(\theta^1,\ldots,\theta^n\right)^T$, $b = \left(A_1,\ldots,A_n\right)^T$.

Нев'язкою, яку дає θ при підстановці у систему рівнянь (4.25), називається стовпчик $V = b - A\theta$.

Розв'язок системи – це стовпчик, який дає нульову нев'язку. Система лінійних рівнянь

$$A^T A\theta = A^T b \qquad (4.27)$$

по відношенню до системи (4.26) називається нормальною системою.

Відомо з курсу вищої алгебри, що нормальна система обов'язково сумісна і, що точна нижня грань квадрата норми нев'язки досягається для всіх розв'язків нормальної системи (4.27) і тільки для них. Нормальна система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли система $AZ = 0$ має тільки тривіальний розв'язок, тобто стовпці матриці A лінійно-незалежні. Зокрема, це буде виконуватися, якщо матриця A невироджена.

Нев'язка, яку дає конкретний набір коефіцієнтів θ_1, ... ,θ_n, має компоненти $A_1 - \varphi(M_1)$, ... , $A_k - \varphi(M_k)$ і квадрат її норми має вигляд (4.24). Таким чином, сукупність чисел θ_1, ... , θ_n, яка мінімізує суму квадратів (4.24), задовольняє нормальній системі для системи (4.25). Якщо стовпці матриці A лінійно незалежні, то нормальна система має єдиний розв'язок. Тому і наша задача про знаходження цільової функції $\varphi(x)$ з вказаними вище властивостями має єдиний розв'язок. У випадку, коли стовпці матриці A лінійно залежні, вибір розв'язку $\theta_1, ..., \theta_n$ системи (4.25) буде одним із можливих.

Якщо розв'язок нормальної системи не єдиний, то виникає задача вибрати який-небудь з розв'язків. Таким вибирається розв'язок з мінімальною нормою.

Нормальним псевдорозв'язком системи лінійних рівнянь називається стовпець з мінімальною нормою серед всіх стовпців, що дають мінімальну по нормі нев'язку при підстановці в цю систему. Відомо, що кожна система лінійних рівнянь має один і тільки один нормальний псевдорозв'язок.

Отже, вибравши нормальний псевдорозв'язок системи, ми тим самим знайдемо цільову функцію $\varphi(x) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ з вказаними властивостями.

Таким чином, має місце наступне твердження.

Твердження 4.3. *Для довільного скінченого набору цільових функцій $f_k(x) = c_{k1}x_1 + ... + c_{kn}x_n$ (k – натуральне число, більше 1) існує цільова функція $\varphi(x)$, яка мінімізує суму квадратів відхилень даних цільових функцій від їхніх максимальних значень в області D.*

Припустимо, що маємо деяку сукупність k цільових функцій $\varphi_k(x) = c_{k1}x_1 + \cdots c_{kn}x_n$ $(k>1)$. Позначимо через $M_k(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ точку, яка належить області D, значення функції $\varphi_k(x)$ в цій точці може задовольнити особу, що робить вибір. Нехай $\varphi_k(M_k) = A_k$ – значення функції $\varphi_k(x)$ в точці M_k.

Назвемо лінійні функції $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ лінійно незалежними, якщо рівність $k_1\varphi_1(x) + \cdots + k_s\varphi_s(x) = 0$ для будь-якого x із D виконується тільки при $k_1 = \cdots = k_s = 0$.

Лема 4.4. *Нехай $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$, $(k \le n)$ – лінійно незалежні цільові функції. Тоді функція*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} (\varphi_i(x) - A_i)^2 \tag{4.28}$$

мінімізується у всіх точках деякої $(n-k)$-вимірної площини, приймаючи в цих точках одне й теж мінімальне значення.

Доведення. Нехай $f(x)=\sum_{i=1}^{k}(\varphi_i(x)-A_i)^2$. Виконаємо наступні перетворення невідомих:

$$\begin{cases} \varphi_1(x)-A_1=y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k(x)-A_k=y_k, \\ x_{i1}=y_{i1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{in}=y_{in}, \end{cases}$$

де $k+i_1+...+i_n=n$ і індекси $i_1,\dots,i_n$ не співпадають з номерами стовпців мінору, складеного з коефіцієнтів цільових функцій $\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x)$, відмінного від нуля. Тоді $f(x)=y_1^2+\dots+y_k^2$.

Нехай D_r проекція області D на підпростір R^2 простору R^n. Знайдемо у підпросторі R^k точку, яка належить області D_r і мінімально віддалену від початку системи координат. Тоді, очевидно, функція $f(x)$ мінімізується у всіх точках $(n-k)$-вимірної площини

$$\begin{cases} \varphi_1(x)-A_1=y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k(x)-A_k=y_k. \end{cases}$$

Лема доведена.

Теорема 4.5. ***Нехай*** $\varphi_1(x),\dots,\varphi_s(x)$ ***– довільна сукупність цільових функцій, серед яких*** $\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x)$ ***– максимальна сукупність лінійно незалежних функцій*** $(s\geq k)$***. Тоді функція*** $f(x)=\sum_{i=1}^{k}(\varphi_i(x)-A_i)^2$ ***приймає найменше одне й те ж саме значення у всіх точках деякої*** $(n-k)$***-вимірної площини.***

Доведення. Відомо, що будь-яку цільову функцію $\varphi_i(x)\left(i=\overline{k+1,s}\right)$ можна представити у вигляді лінійної комбінації цільових функцій $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_k(x)$:

$$\varphi_i(x)=l_1^{(i)}\varphi_1(x)+\cdots+l_s^{(i)}\varphi_s(x).$$

Отже, $f(x)=\sum_{i=1}^{k}(\varphi_i(x)-A_i)^2+\sum_{i=k+1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{k}l_j\varphi_j(x)-A_i\right)^2$. Тоді функцію $f(x)$ можна представити у вигляді :

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(x)+2\sum_{t=1}^{k}a_t\varphi_t(x)+d\ .$$

Нехай $\varphi_i(x)=z_i\quad\left(i=\overline{1,k}\right)$. Тоді $f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_iz_j+2\sum_{t=1}^{n}a_tz_t+d$. Квадратичну форму $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}z_iz_j$ невиродженим лінійним перетворенням можна звести до канонічного вигляду $\lambda_1\mu_1^2+\cdots+\lambda_k\mu_k^2$.

Тоді $f(x)=\lambda_1\mu_1^2+\cdots+\lambda_k\mu_k^2+2\sum_{t=1}^{k}a_t^{'}\mu_t+d$. Якщо припустити, що деяке λ_i від'ємне, то при $\lambda_1=\cdots=\lambda_{i-1}=\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_k=0$ одержимо $f(x)=\lambda_i\mu_i^2+2a_i^{'}\mu_i+d$. Але $f(x)>0$ при всіх $x\in D$, а квадратний тричлен $\lambda_i\mu_i^2+2a_i^{'}\mu_i+d$ при $\lambda_i<0$ може приймати і від'ємні значення. Отже, всі λ_i додатні.

Нехай $\sqrt{\lambda_1}\mu_1=\xi_1,\ldots,\sqrt{\lambda_k}\mu_k=\xi_k$. Тоді $f(x)=\xi_1^2+\cdots+\xi_k^2+2\sum_{t=1}^{k}b_t\xi_t+d$ або $f(x)=(\xi_1+b_1)^2+\cdots+(\xi_k+b_k)^2+d^{'}$. Виконаємо перетворення змінних: $\xi_1+b_1=\eta_1,\ldots,\xi_k+b_k=\eta_k$. Тоді $f(x)=\eta_1^2+\cdots+\eta_k^2+d^{'}$. Знайдемо в області $D^{'}$ точку $\left(\eta_1^0,\ldots,\eta_k^0\right)$, мінімально віддалену від початку системи координат, тобто точку, яка мінімізує функцію $f(x)$.

Тоді в області D функція мінімізується в точках $(n-k)$-вимірної площини

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \psi^{-1}(\eta_1^0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k(x) = \psi^{-1}(\eta_k^0). \end{cases},$$

де ψ – невироджене перетворення невідомих, яке переводить змінні $z_1,\dots,z_k$ в змінні $\eta_1,\dots,\eta_k$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. Функція $f(x)$ досягає мінімального значення в одній точці області D тоді і тільки тоді, коли $k = n$.

Наслідок 2. При $n = 2$ функція $f(x) = (\varphi_1(x) - A_1)^2 + (\varphi_2(x) - A_2)^2$, де $\varphi_1(x) \neq k\varphi_2(x)$, мінімізується в одній точці області D.

При $n = 3$ функція $f(x) = \sum_{i=1}^{s} (\varphi_i(x) - A_i)^2$ мінімізується тільки в одній точці області D тоді і тільки тоді, коли серед лінійних функцій $\{\varphi_i(x),\ i = \overline{1,s}\}$ існують три лінійно незалежні лінійні функції.

Серед точок $(n-k)$-вимірної площини, які мінімізують функцію $f(x) = \sum_{i=1}^{s} (\varphi_i(x) - A_i)^2$, знайдемо точку, яка мінімально віддалена від початку системи координат. Для цього потрібно знайти таке r, при якому система рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \psi^{-1}(\eta_1^0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k(x) = \psi^{-1}(\eta_k^0), \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \end{cases} \tag{4.29}$$

має один розв'язок. Виразивши $x_1,\dots,x_k$ через вільні невідомі з перших k рівнянь системи і підставивши їх у останнє рівняння, одержимо рівність

$$(a_{11}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n - d_1)^2 + (a_{k1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n - d_k)^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 = r^2 .$$

Як і при доведені теореми можна показати, що функцію

$$f(x_1,\dots,x_k) = \sum_{i=1}^{k} (a_{i1}x_{k+1} + \dots + a_{in}x_n - d_k)^2$$

деяким невиродженим перетворенням можна звести до вигляду

$$y_1^2+\cdots+y_k^2+d^2.$$

Вважаючи, що $y_1=x_1,\ldots,y_k=x_k$, одержимо рівність

$$y_1^2+\cdots+y_n^2+d^2=r^2 \tag{4.30}$$

Очевидно рівняння (5.30) матиме один розв'язок тоді і тільки тоді, коли $d=r$. Якщо $d=r$, то одержуємо $y_1=\cdots=y_n=0$. Підставивши у систему рівнянь (4.29) $\eta_1^0=\cdots=\eta_k^0=0$, знайдемо точку з $(n-k)$-вимірної площини, яка мінімально віддалена від початку системи координат.

Опишемо загальну схему алгоритму побудови функції згортки на основі вище викладеного матеріалу.

Крок 1. Задамо точку задоволення M_k так, щоб

$$\min_{x\in D}\varphi_k(x)\le\varphi_k(M_k)\le\max_{x\in D}\varphi_k(x).$$

Крок 2. Серед сукупності цільових функцій $\{\varphi_i(x), i=\overline{1,k}\}$ виберемо $(p\le k)$ p лінійно-незалежних.

Крок 3. Будуємо $f(x)$ за формулою (5.28) і зводимо до канонічного вигляду

$$f(x)=\eta_1^2+\cdots+\eta_p^2+d'.$$

Крок 4. Знаходимо в D' $(D'=\psi(D))$ точку мінімально віддалену від початку координат.

Крок 5. Знаходимо $(n-p)$-вимірну площину

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=\psi^{-1}(\eta_1^0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_p(x)=\psi^{-1}(\eta_p^0),\end{cases}$$

де ψ – невироджене перетворення невідомих, яке переводить змінні $z_1,\ldots,z_p$ в змінні $\eta_1,\ldots,\eta_p$.

Крок 6. Будуємо цільову функцію, з мінімальною нормою, напрям якої перпендикулярний до вказаної $(n-p)$-вимірної площини.

4.7. Метод визначення вагових коефіцієнтів кластерів

Далі для кожного із кластерів $K_1, K_2, \ldots, K_z$ визначаємо ваговий коефіцієнт $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_z$ наступними чотирма методами [32, 36, 55], тим самим визначимо їх і для $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_z$.

1. Ваги всіх кластерів можна взяти однаковими: $\beta_i = \dfrac{1}{z}$.

2. Нехай ОПР може вказати вагові коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ відповідно кожному із критеріїв $f_i(x),\ i = \overline{1,m}$. Ваговий коефіцієнт β_j кластеру K_j можна задати, як суму тих α_i, що відповідають критеріям, які містить даний кластер, тобто:

$$\beta_j = \frac{\sum\limits_{i \in \{s | f_s \in K_j\}} \alpha_i}{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k},\ j = \overline{1,z}.$$

3. Якщо не має можливості отримати інформацію від ОПР, або ОПР не в змозі її надати, то ваги кластерів визначимо, як:

$$\beta_j = \frac{|K_j|}{m},\ \text{де } |K_j| \text{ - потужність кластеру } K_j.$$

4. Якщо ж ОПР не може задати вагові коефіцієнти критеріїв ефективності, але може зробити їх попарні порівняння. Утворимо матрицю B, яка має z рядків і z стовпчиків, використавши, наприклад, калібровку

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо } K_i \textit{ переважає } K_j, \\ 0, \textit{в інших випадках.} \end{cases}.$$

Для визначення вагових коефіцієнтів $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_z$ просумуємо матрицю B по рядках і про нормуємо знайдені величини:

$$\beta_j = \frac{c_j}{\sum\limits_{s=1}^{z} c_s},\ \text{де } c_i = \sum_{j=1}^{z} b_{ij},\ i = \overline{1,z}.$$

Розділ 5.
ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

5.1. Нечіткі моделі і методи оцінювання платоспроможності суб'єктів підприємництва та інвестиційних проектів

Після фінансової кризи всі учасники ринку дуже обережно і обґрунтовано підходять до розподілу грошових коштів. Актуальними практичними задачами сьогодення являються – оцінка та вибір підприємства для надання йому кредиту або фінансування деякого інвестиційного проекту. Застосуємо багатокритеріальні технології у задачах оцінювання кредитоспроможності підприємств та оцінки інвестиційних проектів, а також важливість застосування нечітких моделей для проведеного дослідження.

Наведемо постановки задач, які було розв'язано за допомогою моделей і методів наведених у розділі 3 і описано у роботах [14, 19, 30, 33, 45, 57, 58, 60, 71, 74, 78, 88, 99, 120,145-147].

I. Задача оцінювання і встановлення кредитного рейтингу підприємству. Для розв'язання цієї задачі було запропоновано два підходи:

1. Встановлення кредитного рейтингу підприємств з використанням лінгвістичних змінних.

Нехай нам задано множину критеріїв $K=(K_1,K_2,...,K_m)$, за якими потрібно оцінити деякий суб'єкт (підприємство). На основі даних оцінок потрібно визначити для розглядуваного суб'єкта оцінку рівня кредитоспроможності $D=(D_1,D_2,...,D_t)$.

Модель такої задачі представляється у вигляді наступного підходу, коли аналізується об'єкт із n входами та одним виходом:

$$W=L(U_1,U_2,...,U_m), \qquad (5.1)$$

де W – вихідна лінгвістична змінна, $U_1,U_2,...,U_m$ – вхідні лінгвістичні оцінки, які будуються на відповідних критеріях $K_1,K_2,...,K_m$. L – оператор, який здійснює відображення з простору лінгвістичних оцінок $U_1, U_2, ..., U_m$ у лінгвістичну змінну W (правило логічного виводу).

Рішення щодо поточного рівня фінансового стану підприємства обирається таке, для якого функція належності вихідної змінної буде найбільшою для заданих значень показників діяльності підприємства $U_i^*, i = \overline{1,m}$:

$$W^* = \arg \max_{D_j} [\mu^{D_j}(U_1^*, ..., U_m^*)], \ j = \overline{1,t}, \tag{5.2}$$

де $\mu^{D_j}(U_1, U_2, ..., U_m)$ – функція належності рівневі $D_j, j = \overline{1,t}$.

2. Встановлення кредитного рейтингу підприємству на основі функцій належності критеріїв.

Нехай для кожного показника K_i, $i = \overline{1,m}$ визначимо функцію належності $\mu(K_i) \in [0;1]$. Далі кожен показник K_i буде описуватись множиною $\{\mu(K_1), \mu(K_2), ..., \mu(K_m)\}$ відповідних їм числових оцінок. Використовуючи згортку значень функцій належності критеріїв і їх вагових коефіцієнтів, отримуємо оцінку кредитоспроможності.

II. Задача оцінки та вибору підприємств для надання кредиту.

Модель такої задачі представлена у виді задачі багатокритеріального вибору альтернатив(таблиця 5.1).

Таблиця 5.1.

Оцінки значень функцій належності по альтернативах

	P_1	P_2	P_3	…	P_n
K_1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	…	O_{1n}
K_2 $\vdots$	O_{21}	O_{22}	O_{23}	…	O_{2n}
K_m	O_{m1}	O_{m2}	O_{m3}	…	O_{mn}

Де $P=(P_1,P_2,...,P_n)$ – множина альтернатив, O_{ij} – це оцінка j-ї альтернативи за i-м критерієм. Необхідно, на основі оцінок альтернатив по критеріям, оцінити та побудувати ранжувальний ряд альтернатив $P=(P_1,P_2,...,P_n)$.

ІІІ. Задача оцінки та вибору інвестиційних проектів.

Інвестиційний проект відноситься до класу складних техніко-економічних об'єктів з множиною входів (витрати) і виходів (випуск продукції або послуг), що функціонують і розвиваються в конкретних умовах та визначаються станом навколишнього середовища. Формально можемо представити багатокритеріальну задачу оцінки та вибору інвестиційних проектів у наступному вигляді.

Нехай нам задано множину інвестиційних проектів $P=(P_1,P_2,...,P_n)$, які потрібно проаранжувати. Множину проектів оцінюють експерти з різних галузей $E^1,E^2,...,E^{k-1}$, а також враховуються міркування інвестора (особи, що приймає рішення), які позначимо – E^k. Кожен експерт та інвестор E^l, $(l=\overline{1,k})$ використовує свою множину критеріїв $I_1^l,I_2^l,...,I_m^l$ для оцінки інвестиційних проектів:

$$O^l=(O_{ij}^l),\quad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n};\quad l=\overline{1,k}\,; \tag{5.3}$$

де O_{ij}^l – це оцінка функції належності j-ї альтернативи по i-му критерію, l-го експерта. Необхідно на основі даних оцінок, оцінити та побудувати ранжувальний ряд інвестиційних проектів.

Наведемо множину критеріальних оцінок, які можуть використовуватись для визначення кредитоспроможності підприємств і побудуємо їх функції належності. Різні автори використовують різну кількість показників. Використовуючи мінімальну кількість критеріїв, їх можна прокласифікувати наступними групами (таблиця 5.2):

Таблиця 5.2.

Групи критеріїв оцінки кредитоспроможності підприємств

Групи критеріїв	Показники у групі	Шифр
1. Показники фінансової стійкості	1. Коефіцієнт миттєвої ліквідності; 2. Коефіцієнт поточної ліквідності; 3. Коефіцієнт загальної ліквідності; 4. Коефіцієнт фінансової незалежності; 5. Коефіцієнт маневреності власних коштів; 6. Коефіцієнт фінансового левериджу.	K_{11} K_{12} K_{13} K_{14} K_{15} K_{16}
2. Аналіз обсягів реалізації продукції	1. Динаміка виручки від реалізації продукції ; 2. Критерій обсягу реалізації продукції на експорт.	K_{21} K_{22}
3. Аналіз оборотів за рахунками позичальника	1. Коефіцієнт надходжень коштів на поточні рахунки позичальника; 2. Критерій наявності поточних рахунків; 3. Критерій наявності заборгованості за кредитами; 4. Критерій наявності спеціального режиму розрахунків для погашення кредитів.	K_{31} K_{32} K_{33} K_{34}
4. Аналіз складу та динаміки дебіторської і кредиторської заборгованості	1. Коефіцієнт періоду обороту дебіторської заборгованості; 2. Коефіцієнт питомої ваги простроченої дебіторської заборгованості; 3. Коефіцієнт періоду обороту кредиторської заборгованості; 4. Коефіцієнт питомої ваги простроченої	K_{41} K_{42} K_{43}

	кредиторської заборгованості.	K_{44}
5. Аналіз прибутків та збитків	1. Коефіцієнт діяльності минулих років; 2. Коефіцієнт рентабельності виробництва; 3. Коефіцієнт обслуговування (покриття) боргу.	K_{51} K_{52} K_{53}
6. Кредитна історія клієнта	1. Критерій кредитна історія по погашенню основної суми боргу; 2. Критерій кредитна історія по погашенню відсотків; 3. Коефіцієнт найбільшої суми раніше повернутого кредиту.	K_{61} K_{62} K_{63}
7. Оцінка майнового стану позичальника	1. Коефіцієнт питомої ваги вартості основних засобів; 2. Коефіцієнт зносу основних засобів; 3. Коефіцієнт наявності власного ліквідного майна	K_{71} K_{72} K_{73}
8. Ефективність управління підприємством	1. Термін існування підприємства; 2. Питома вага коштів підприємства у вартості кредитного проекту; 3. Критерій репутації якості продукції; 4. Критерій оцінки ділових якостей керівництва. 5. Аудиторські висновки.	K_{81} K_{82} K_{83} K_{84}

Проведемо фазифікацію даних критеріїв (показників), тобто представимо їх у вигляді нечітких величин з відповідними функціями належності. Для цього використаємо різні типи функцій належності.

Задамо у загальному випадку, трикутну функцію належності наступним аналітичним виразом

$$\mu_1(x,a,b,c) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b < c < x \\ 0, & x \ge c \end{cases}, \tag{5.4}$$

де a,b,c - числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a \le b \le c$. Параметри a і c характеризують основу трикутника, а параметр b - його вершину.

Розглянемо групу критеріїв, що можна представити у вигляді трикутної функції належності

1. Коефіцієнт загальної ліквідності.

$$\mu(K_{13};\quad 1;\quad 1{,}75;\quad 2{,}5) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{13} \le 1; \\ \dfrac{4(K_{13}-1)}{3}, & \text{якщо} \quad 1 < K_{13} \le 1{,}75; \\ \dfrac{10-4K_{13}}{3}, & \text{якщо} \quad 1{,}75 < K_{13} < 2{,}5; \\ 0, & \text{якщо} \quad K_{13} \ge 2{,}5. \end{cases}$$

2. Коефіцієнт фінансової незалежності.

$$\mu(K_{14};\quad 0;\quad 1;\quad 2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{14} \le 0; \\ K_{14}, & \text{якщо} \quad 0 < K_{14} \le 1; \\ 2-K_{14}, & \text{якщо} \quad 1 < K_{14} < 2; \\ 0, & \text{якщо} \quad K_{14} \ge 2. \end{cases}$$

3. Коефіцієнт маневреності власних коштів.

$$\mu(K_{15};\quad 0;\quad 0{,}5;\quad 1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{15} \le 0; \\ 2K_{15}, & \text{якщо} \quad 0 < K_{15} \le 0{,}5; \\ 2-2K_{15}, & \text{якщо} \quad 0{,}5 < K_{15} < 1; \\ 0, & \text{якщо} \quad K_{15} \ge 1. \end{cases}$$

4. Коефіцієнт фінансового левериджу.

$$\mu(K_{16};\quad 0;\quad 0{,}7;\quad 1{,}4)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{16}\le 0;\\ \dfrac{10K_{16}}{7}, & \text{якщо} \quad 0\le K_{16}\le 0{,}7;\\ \dfrac{14-10K_{16}}{7}, & \text{якщо} \quad 0{,}7\le K_{16}<1{,}4;\\ 0, & \text{якщо} \quad K_{16}\ge 1{,}4. \end{cases}$$

Розглянемо групу критеріїв, яку можна представити за допомогою s-подібної функції належності. В загальному випадку s-подібна функція належності задана наступним аналітичним виразом:

$$\mu_2(x,a,b)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & x\le a\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\le\dfrac{a+b}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2, & \dfrac{a+b}{2}<x<b\\ 1, & x\ge b \end{array}\right\}, \tag{5.5}$$

де a,b - числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a<b$. Дані функції належності утворюють нормальні випуклі нечіткі множини з ядром $[b;+\infty)$ і носієм $(a;+\infty)$.

1. Коефіцієнт миттєвої ліквідності

$$\mu(K_{11};\quad 0{,}2;\quad 0{,}25)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{11}\le 0{,}2;\\ 32(5K_{11}-1)^2, & \text{якщо} \quad 0{,}2<K_{11}\le 0{,}225;\\ 1-50(1-4K_{11})^2, & \text{якщо} \quad 0{,}225<K_{11}<0{,}25;\\ 1, & \text{якщо} \quad K_{11}\ge 0{,}25. \end{cases}$$

2. Коефіцієнт поточної ліквідності

$$\mu(K_{12};\quad 0{,}5;\quad 1)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{12}\le 0{,}5;\\ 2(2K_{12}-1)^2, & \text{якщо} \quad 0{,}5<K_{12}\le 0{,}75;\\ 1-8(1-K_{12})^2, & \text{якщо} \quad 0{,}75<K_{12}<1;\\ 1, & \text{якщо} \quad K_{12}\ge 1. \end{cases}$$

3. Коефіцієнт надходжень коштів на поточні рахунки позичальників

$$\mu(K_{31};\quad 1{,}5;\quad 3)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{31}\le 1{,}5; \\ \dfrac{2(2K_{31}-3)^2}{9}, & \text{якщо} \quad 1{,}5<K_{31}\le 2{,}25; \\ 1-\dfrac{8(3-K_{31})^2}{9}, & \text{якщо} \quad 2{,}25<K_{31}<3; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{31}\ge 3. \end{cases}$$

4. Коефіцієнт діяльності минулих років

$$\mu(K_{51};\quad 1;\quad 5)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{51}\le 1; \\ \dfrac{(K_{51}-1)^2}{8}, & \text{якщо} \quad 1<K_{51}\le 3; \\ 1-\dfrac{(5-K_{51})^2}{8}, & \text{якщо} \quad 3<K_{51}<5; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{51}\ge 5. \end{cases}$$

5. Коефіцієнт рентабельності виробництва.

$$\mu(K_{52};\quad 0{,}05;\quad 0{,}1)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{52}\le 0{,}05; \\ 2(20K_{52}-1)^2, & \text{якщо} \quad 0{,}05<K_{52}\le 0{,}075; \\ 1-8(1-10K_{52})^2, & \text{якщо} \quad 0{,}075<K_{52}<0{,}1; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{52}\ge 0{,}1. \end{cases}$$

6. Критерій «кредитної історії» (з врахуванням поточної заборгованості за кредитом) по погашенню основної суми боргу.

$$\mu(K_{61};\quad 1;\quad 6)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{61}\le 1; \\ \dfrac{2(K_{61}-1)^2}{25}, & \text{якщо} \quad 1<K_{61}\le 3{,}5; \\ 1-\dfrac{2(6-K_{61})^2}{25}, & \text{якщо} \quad 3{,}5<K_{61}<6; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{61}\ge 6. \end{cases}$$

7. Критерій «кредитна історія» (з врахуванням поточної заборгованості за кредитом) по погашенню відсотків.

$$\mu(K_{62};\quad 1;\quad 3)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad K_{62}\le 1;\\ \dfrac{(K_{62}-1)^2}{2}, & \textit{якщо} \quad 1<K_{62}\le 2;\\ 1-\dfrac{(3-K_{62})^2}{2}, & \textit{якщо} \quad 2<K_{62}<3;\\ 1, & \textit{якщо} \quad K_{62}\ge 3. \end{cases}$$

8. Коефіцієнт найбільшої суми раніше повернутого кредиту.

$$\mu(K_{63};\quad 0{,}8;\quad 1)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad K_{63}\le 0{,}8;\\ 2(5K_{63}-4)^2, & \textit{якщо} \quad 0{,}8<K_{63}\le 0{,}9;\\ 1-2(5-5K_{63})^2, & \textit{якщо} \quad 0{,}9<K_{63}<1;\\ 1, & \textit{якщо} \quad K_{63}\ge 1. \end{cases}$$

9. Коефіцієнт питомої ваги реальної вартості основних засобів у валюті балансу.

$$\mu(K_{71};\quad 0{,}3;\quad 0{,}5)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad K_{71}\le 0{,}3;\\ \dfrac{(10K_{71}-3)^2}{2}, & \textit{якщо} \quad 0{,}3<K_{71}\le 0{,}4;\\ 1-\dfrac{(5-10K_{71})^2}{2}, & \textit{якщо} \quad 0{,}4<K_{71}<0{,}5;\\ 1, & \textit{якщо} \quad K_{71}\ge 0{,}5. \end{cases}$$

10. Коефіцієнт зносу основних засобів.

$$\mu(K_{72};\quad 0{,}25;\quad 0{,}85)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad K_{72}\le 0{,}25;\\ \dfrac{25(4K_{72}-1)^2}{72}, & \textit{якщо} \quad 0{,}25<K_{72}\le 0{,}55;\\ 1-\dfrac{(17-20K_{72})^2}{72}, & \textit{якщо} \quad 0{,}55<K_{72}<0{,}85;\\ 1, & \textit{якщо} \quad K_{72}\ge 0{,}85. \end{cases}$$

11. Коефіцієнт наявності власного ліквідного майна.

$$\mu(K_{73};\quad 0{,}25;\quad 1)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad K_{73}\le 0{,}25;\\ \dfrac{2(4K_{73}-1)^2}{9}, & \textit{якщо} \quad 0{,}25<K_{73}\le 0{,}625;\\ 1-\dfrac{32(1-K_{73})^2}{9}, & \textit{якщо} \quad 0{,}625<K_{73}<1;\\ 1, & \textit{якщо} \quad K_{73}\ge 1. \end{cases}$$

12. Термін існування підприємства.

$$\mu(K_{81};\quad 1;\quad 5)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{81}\le 1; \\ \dfrac{(K_{81}-1)^2}{8}, & \text{якщо} \quad 1<K_{81}\le 3; \\ 1-\dfrac{(5-K_{81})^2}{8}, & \text{якщо} \quad 3<K_{81}<5; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{81}\ge 5. \end{cases}$$

13. Критерій репутації якості продукції, робіт та послуг торгової марки.

$$\mu(K_{83};\quad 1;\quad 2)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{83}\le 1; \\ 2(K_{83}-1)^2, & \text{якщо} \quad 1<K_{83}\le 1{,}5; \\ 1-2(2-K_{83})^2, & \text{якщо} \quad 1{,}5<K_{83}<2; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{83}\ge 2. \end{cases}$$

14. Критерій оцінки ділових якостей керівництва позичальника.

$$\mu(K_{84};\quad 3;\quad 5)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{84}\le 3; \\ \dfrac{(K_{84}-3)^2}{2}, & \text{якщо} \quad 3<K_{84}\le 4; \\ 1-\dfrac{(5-K_{84})^2}{2}, & \text{якщо} \quad 4<K_{84}<5; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{84}\ge 5. \end{cases}$$

15. Аудиторські висновки.

$$\mu(K_{85};\quad 2;\quad 5)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad K_{85}\le 2; \\ \dfrac{2(K_{85}-2)^2}{9}, & \text{якщо} \quad 2<K_{85}\le 3{,}5; \\ 1-\dfrac{2(5-K_{85})^2}{9}, & \text{якщо} \quad 3{,}5<K_{85}<5; \\ 1, & \text{якщо} \quad K_{85}\ge 5. \end{cases}$$

Група критеріїв, яку можна представити за допомогою лінійної s-подібної функції належності. Лінійну s-подібну функцію належності задамо наступним аналітичним виразом:

$$\mu_3(x,a,b)=\begin{Bmatrix} 0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b \\ 1, & x\ge b \end{Bmatrix}, \tag{5.6}$$

де a,b - числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a<b$.

1. Динаміка виручки від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг)

$$\mu(K_{21};-20;20)=\begin{cases}0, & якщо \quad K_{21}\le -20;\\ \dfrac{K_{21}}{40}+\dfrac{1}{2}, & якщо \quad -20<K_{21}<20;\\ 1, & якщо \quad K_{21}\ge 20.\end{cases}$$

2. Критерій обсягу реалізації продукції на експорт

$$\mu(K_{22};10\%;50\%)=\begin{cases}0, & якщо \quad K_{22}\le 10\%;\\ \dfrac{K_{22}-10\%}{40\%}, & якщо \quad 10\%<K_{22}<50\%;\\ 1, & якщо \quad K_{22}\ge 50\%.\end{cases}$$

3. Коефіцієнт обслуговування (покриття) боргу

$$\mu(K_{53};\quad 0{,}5;\quad 1{,}5)=\begin{cases}0, & якщо \quad K_{53}\le 0{,}5;\\ \dfrac{2K_{53}-1}{2}, & якщо \quad 0{,}5<K_{53}<1{,}5;\\ 1, & якщо \quad K_{53}\ge 1{,}5.\end{cases}$$

4. Питома вага власних коштів підприємства у вартості кредитного проекту

$$\mu(K_{82};\quad 0{,}2;\quad 0{,}4)=\begin{cases}0, & якщо \quad K_{82}\le 0{,}2;\\ 5K_{82}-1, & якщо \quad 0{,}2<K_{82}<0{,}4;\\ 1, & якщо \quad K_{82}\ge 0{,}4.\end{cases}$$

Група критеріїв, яку можна представити за допомогою лінійної z-подібної функції належності.

Лінійну z-подібну функцію належності задамо наступним аналітичним виразом:

$$\mu_4(x,a,b)=\left\{\begin{matrix}1, & x\le a\\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & b\le x\end{matrix}\right\}, \tag{5.7}$$

де a,b - числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a<b$.

1. Коефіцієнт періоду обороту дебіторської заборгованості

$$\mu(K_{41};\quad 30;\quad 120)=\begin{cases}1, & якщо \quad K_{41}\le 30;\\ \dfrac{120-K_{41}}{90}, & якщо \quad 30<K_{41}<120;\\ 0, & якщо \quad K_{41}\ge 120.\end{cases}$$

2. Коефіцієнт питомої ваги простроченої дебіторської заборгованості

$$\mu(K_{42};\quad 0{,}05;\quad 0{,}2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad K_{42} \le 0{,}05; \\ \dfrac{4(1-5K_{42})}{3}, & \text{якщо} \quad 0{,}05 < K_{42} < 0{,}2; \\ 0, & \text{якщо} \quad K_{42} \ge 0{,}2. \end{cases}$$

3. Коефіцієнт періоду обороту кредиторської заборгованості

$$\mu(K_{43};\quad 30;\quad 120) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad K_{43} \le 30; \\ \dfrac{120 - K_{43}}{90}, & \text{якщо} \quad 30 < K_{43} < 120; \\ 0, & \text{якщо} \quad K_{43} \ge 120. \end{cases}$$

4. Коефіцієнт питомої ваги простроченої кредиторської заборгованості

$$\mu(K_{44};\quad 0{,}05;\quad 0{,}2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad K_{44} \le 0{,}05; \\ \dfrac{4(1-5K_{44})}{3}, & \text{якщо} \quad 0{,}05 < K_{44} < 0{,}2; \\ 0, & \text{якщо} \quad K_{44} \ge 0{,}2. \end{cases}$$

Крім запропонованих вище типів функцій належності, для решти визначених критеріїв побудуємо наступні функції належності.

1. Критерій наявності поточних рахунків в національній та іноземній валюті

$$\mu(K_{33}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо всі рахунки відкриті у Банку;} \\ \dfrac{БПр}{Пр}, & \text{якщо деякі рахунки відкриті в іншому Банку;} \\ 0, & \text{якщо всі рахунки відкриті в іншому Банку.} \end{cases}$$

Де *Пр* – загальна кількість всіх поточних рахунків клієнта; *БПр* – кількість поточних рахунків відкритих у оцінюючому Банку.

2. Критерій наявності заборгованості за кредитами в інших банках.

Якщо заборгованість за кредитами в інших банках наявна, тоді коефіцієнт наявності заборгованості за кредитами визначимо наступним чином:

$$\mu(K_{33}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо заборгованість відсутня;} \\ [0{,}5;1), & \text{якщо заборгованість строкова;} \\ [0;0{,}5) & \text{якщо заборгованість прострочена.} \end{cases}$$

3. Критерій наявності спеціального режиму розрахунків для погашення кредитів

$$\mu(K_{34}) = \begin{cases} 1, & \text{наявне рішення;} \\ 0, & \text{відсутнє рішення.} \end{cases}$$

На основі побудованих функцій належностей розроблено модель, яка буде визначати рейтинг позичальника. Для кожного суб'єкта, якого потрібно оцінити, будемо визначати оцінку кредитоспроможності, і на основі даної оцінки відносити його до певного кредитного рейтингу та категорії якості.

На базі побудованих функцій належностей опишемо методику, за допомогою якої будемо визначати рейтинг позичальника. Для кожного суб'єкта, який потрібно оцінити, буде визначатись оцінка кредитоспроможності. На основі даної оцінки проводиться зарахування суб'єкта до певного кредитного рейтингу та категорії якості.

Нехай $K = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$ - множина визначених критеріїв, які використовуються для оцінки деякого підприємства *A*. Шкалу вимірювань визначимо інтервалом [0;1] і тому для кожного показника $K_j \quad (j = \overline{1,m})$ визначили функції належності $\mu(K_j) \in [0,1]$. Далі кожен показник K_j буде описуватись множиною $\{\mu(K_1), \mu(K_2), ..., \mu(K_m)\}$ відповідних їм числових оцінок. Якщо серед оцінок $\mu(K_j) \quad (j = \overline{1,m})$ існують від'ємні значення, тоді множину $\{\mu(K_1), \mu(K_2), ..., \mu(K_m)\}$ нормалізуємо за допомогою формули:

$$\mu'(K_j) = \mu(K_j) - \min \mu(K_j), \ (j = \overline{1,m}). \tag{5.8}$$

Кожному показнику задамо оцінку вагомості $p_j \in [0; l], \quad l \in N, \quad j = \overline{1,m}$. Коефіцієнт, що характеризує відносну важливість показників, будемо називати коефіцієнтом вагомості:

$$\beta_j = \frac{p_j}{\sum_j p_j}, \ \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1 \tag{5.9}$$

Розглянемо загальний випадок. Нехай нам задано n – підприємств $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, для яких потрібно визначити рейтинг кредитоспроможності.

Оцінку кредитоспроможності визначимо за допомогою наступної формули:

$$m(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \mu_{a_i}(K_j), \; i = \overline{1,n}. \qquad (5.10)$$

Отже, якщо $B = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m]^T$ – вектор коефіцієнтів вагомості, $M = \begin{bmatrix} \mu_{a_1}(K_1) & ... & \mu_{a_1}(K_m) \\ . & . & . \\ \mu_{a_n}(K_1) & ... & \mu_{a_n}(K_m) \end{bmatrix}$ – матриця значень функцій належності для підприємств $a_1,...,a_n$, тоді M' - вектор елементів $m(a_1), m(a_2),..., m(a_n)$, які визначають кредитний рейтинг того чи іншого підприємства, обчислюється за формулою:

$$M' = M \cdot B. \qquad (5.11)$$

Описані моделі і методи реалізовані у вигляді програмної системи підтримки прийняття рішень[45, 61].

Наведемо деякі приклади застосування описаних вище моделей і методів.

Приклад 5.1. Розглянемо підприємство ПП «Єврофойл» і визначимо його оцінку кредитоспроможності. Спочатку визначимо критерії оцінки за фінансовими результатами. Потім для кожного з критеріїв побудуємо функцію належності. Всю інформацію запишемо у вигляді таблиці:

Критерій	Експертна оцінка вагомості	Коефіцієнт вагомості	Значення критерію K_i	Функція належності $\mu(K_i)$
K_{11}	85	0,052	0,131	0
K_{12}	50	0,031	0,922	1
K_{13}	75	0,046	0,84	0
K_{14}	50	0,031	6,882	0,619
K_{15}	72	0,044	0,898	0,024
K_{16}	50	0,031	1,016	0,871
K_{21}	50	0,031	99	1

K_{22}	32	0,02	0	0
K_{31}	42	0,026	12,599	1
K_{32}	50	0,031	5	0,714
K_{33}	60	0,037	0	1
K_{34}	23	0,014	0	0
K_{41}	56	0,034	146,618	0
K_{42}	46	0,028	0	1
K_{43}	56	0,034	164,747	0
K_{44}	46	0,028	0	1
K_{51}	55	0,034	4,5	0,969
K_{52}	56	0,034	0,174	1
K_{53}	50	0,031	222,512	1
K_{61}	79	0,048	5,5	0,98
K_{62}	78	0,048	3	1
K_{63}	51	0,031	1	1
K_{71}	69	0,042	0,017	0
K_{72}	48	0,029	0,823	0,996
K_{73}	36	0,022	0,2	0
K_{81}	90	0,055	0	1
K_{82}	43	0,026	0,25	0,25
K_{83}	43	0,026	3	1
K_{84}	53	0,032	0	1
K_{85}	45	0,027	2,4	0,036

Значення функції належності запишемо у вигляді вектора: M=[0; 1; 0; 0; 0,619; 0,024; 0,871; 1; 0; 1; 0,714; 1; 0; 0; 1; 0; 1; 0,969; 1; 1; 0,98; 1; 1; 0; 0,996; 0; 1; 0,25; 1; 1; 0,036].

Вектор коефіцієнтів вагомості має наступний вигляд:

B=[0,052; 0,031; 0,046; 0,031; 0,044; 0,031; 0,031; 0,02; 0,026; 0,031; 0,037; 0,014; 0,034; 0,028; 0,034; 0,028; 0,034; 0,034; 0,031; 0,048; 0,048; 0,031; 0,042; 0,029; 0,022; 0,055; 0,026; 0,026; 0,032; 0,027 $]^T$.

За допомогою формули (5.11) отримаємо – $M' = 0{,}623722$.

Отже, ми визначили оцінку кредитоспроможності, на основі якої можемо зробити висновок, що розглядуване підприємство має високу кредитоспроможність, відноситься до другої категорії якості та рейтингу А.

Приклад 5.2.

Нехай маємо множину підприємств $P = (P_1, P_2, ..., P_5)$, яких потрібно оцінити. Множина критеріїв – $K' = (K_{14}, K_{15}, K_{12}, K_{41}, K_{43})$ наступна:

1. Коефіцієнт фінансової незалежності – K_{14}.
2. Коефіцієнт маневреності власних коштів – K_{15}.
3. Коефіцієнт поточної ліквідності – K_{12}.
4. Коефіцієнт періоду обороту дебіторської заборгованості – K_{41}.
5. Коефіцієнт періоду обороту кредиторської заборгованості – K_{43}.

Для кожного з критеріїв ОПР визначив координати «точки задоволення вимог» – $T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$. Множину критеріїв K' розіб'ємо на підмножини K'' за означенням нечіткої множини $A = \{A_1, A_2, A_3\}$: $K_1'' = \{K_{14}, K_{15}\}$, $K_2'' = \{K_{12}\}$, $K_3'' = \{K_{41}, K_{43}\}$.

Значення оцінок підприємств по кожному критерію та значення координат «точки задоволення вимог» запишемо у таблицю 5.3:

Таблиця 5.3.

Значення оцінок підприємств

K'	K''	T	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
K_{14}	K_1''	0,5 або 1,5	0,4	1,2	0,7	1,6	0,8
K_{15}		0,3 або	1	0,35	0,4	0,2	0,55

		0,7					
K_{12}	K_2''	0,9	0,95	0,93	0,81	0,77	1
K_{41}	K_3''	50	45	40	50	90	30
K_{43}		50	60	25	45	60	35

Наступним кроком, за допомогою функцій належності обчислимо значення для «точок задоволення» по всім критеріям $\mu(t_i), i = \overline{1,5}$, і значення всіх підприємств по кожному з критерію $\mu_{P_j}(K), j = \overline{1,5}$. Результат обчислень запишемо у таблицю 5.4.

Далі обчислюємо множину значень величин, користуючись формулами (3.10)-(3.12) відповідно по множині критеріїв K_1'', K_2'', K_3'', і покладемо значення $\alpha = 0,7$ (таблиця 5.5).

Таблиця 5.4.

Оцінки відносно функцій належності

	$\mu(T)$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\mu(K_{14})$	0,5	0,4	0,8	0,7	0,4	0,8
$\mu(K_{15})$	0,6	0	0,7	0,8	0,4	0,9
$\mu(K_{12})$	0,92	0,98	0,96	0,71	0,58	1
$\mu(K_{41})$	0,22	0,17	0,11	0,22	0,67	0
$\mu(K_{43})$	0,22	0,33	0	0,17	0,6	0,06

Таблиця 5.5.

Оцінки функцій належності другого рівня

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$Z_{K_{14}}^1$	0	1	0,67	0	1

$Z^1_{K_{15}}$	0	0,33	0,67	0	1
$Z^2_{K_{12}}$	0,82	0,88	0	0	0,76
$Z^3_{K_{41}}$	0,23	0,5	0	0	1
$Z^3_{K_{43}}$	0	1	0,23	0	0,73

Відносно отриманих оцінок будуємо множини $Z^1_{k_{14}}, Z^1_{k_{15}}, Z^2_{k_{12}}, Z^3_{k_{41}}, Z^3_{k_{43}}$, які містять підприємства у порядку їх спадання: $Z^1_{k_{14}} = \{P_2, P_5, P_3\}$, $Z^1_{k_{15}} = \{P_5, P_3, P_2\}$, $Z^2_{k_{12}} = \{P_2, P_1, P_5\}$, $Z^3_{k_{41}} = \{P_5, P_2, P_1\}$, $Z^3_{k_{43}} = \{P_2, P_5, P_3\}$. Далі візьмемо перетин цих множин $Z^1_{k_{14}} \bigcap Z^1_{k_{15}} \bigcap Z^2_{k_{12}} \bigcap Z^3_{k_{41}} \bigcap Z^3_{k_{43}} = \{P_2, P_5\}$. Отримані підприємства P_2, P_5 – які по своїх фінансових показниках задовольняють ОПР. Упорядкувати їх можна щодо інтегральної функції належності, використовуючи одну із згорток (песимістичну, обережну, середню, оптимістичну).

Приклад 5.3.

Нехай у банк поступило шість заявок від підприємств для отримання позики. Підприємства будемо розглядати як альтернативи, які ОПР має проранжирувати.

Критерії за якими будемо визначати ефективність роботи підприємства наступні:

Критерій	Назва критерію
K_{11}	Коефіцієнт миттєвої ліквідності
K_{12}	Коефіцієнт поточної ліквідності
K_{13}	Коефіцієнт загальної ліквідності
K_{14}	Коефіцієнт фінансової незалежності
K_{15}	Коефіцієнт маневреності власних коштів
K_{16}	Коефіцієнт фінансового левериджу
K_{21}	Динаміка виручки від реалізації продукції
K_{51}	Коефіцієнт діяльності минулих років

K_{52}	Коефіцієнт рентабельності виробництва
K_{61}	Критерій кредитна історія по погашенню основної суми боргу

Критеріальні оцінки та оцінки функцій належності подано у вигляді таблиці 5.6.

Множину «точок задоволення» визначимо наступним чином відповідно за критеріями: T=((0,25; 1), (0,8; 0,28), (2; 0,66), (0,9; 0,9), (0,4; 0,8), (0,6; 0,43), (3,5; 0,22), (3,5; 0,22), (0,1; 1) (4,5; 0,02)). Вагомість критеріїв експерт оцінив у числах із інтервалу [0,10] відповідно: {8, 10, 9, 8, 7, 6, 7, 5, 8, 9}. Тоді нормовані вагові коефіцієнти $w_i(i=\overline{1,10})$ обчислимо за формулою: $w_i = v_i / \sum_{h=1}^{10} v_h$, де $v_i, i=(\overline{1,10})$ - вагові коефіцієнти критеріїв задані експертами і запишемо як множину: {0,10; 0,13; 0,12; 0,10; 0,09; 0,08; 0,09; 0,06; 0,10; 0,12}.

Таблиця 5.6.

Критеріальні оцінки по підприємствах

i	P_1		P_2		P_3		P_4		P_5		P_6	
	K_i	$\mu(K_i)$	K_i	$\mu(K_i)$	K_i	$\mu(K_i)$	K_i	$\mu(K_i)$	K_i	$\mu(K_i)$	K_i	$\mu(K_i)$
11	0,26	1	0,11	0	0,21	0,08	0,23	0,28	0,22	0,32	0,25	1
12	0,4	0	1,1	1	0,6	0,08	0,7	0,32	0,65	0,18	0,8	0,28
13	1,1	0,13	1,7	0,93	2,4	0,13	2,2	0,4	1,9	0,8	1,5	0,67
14	1,1	0,9	2,3	0	0,5	0,5	1,7	0,3	0,9	0,9	2,1	0
15	0,1	0,2	0,9	0,2	0,8	0,4	0,5	1	0,2	0,4	1,1	0
16	0	0	0,6	0,43	0,8	0,86	1,4	0	0,7	0,5	1	0,57
21	3,3	0,34	3,1	0,45	1,7	0,06	0,4	0	2,7	0,36	2,9	0,45
51	0,9	0	5,5	1	3,8	0,02	3,5	0,22	2,2	0,18	1,9	0,1
52	0,04	0	0,06	0,01	0,09	0,87	0,12	1	0,05	0	0,07	0,03
61	0,3	0	2,3	0,14	3,8	0,37	4	0,28	2,5	0,18	1,9	0,06

Обчислимо величини за допомогою формули (3.10) відносно «точки задоволення вимог» та результат запишемо у вигляді матриці Z:

$$Z = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0800 & 0,2800 & 0,3200 & 1,0000 \\ 0,6111 & 0,0000 & 0,7222 & 0,9444 & 0,8611 & 1,0000 \\ 0,0000 & 0,4906 & 0,0000 & 0,5094 & 0,7358 & 0,9811 \\ 1,0000 & 0,0000 & 0,5556 & 0,3333 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,2500 & 0,2500 & 0,5000 & 0,7500 & 0,5000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,8372 & 0,6744 \\ 0,4783 & 0,0000 & 0,3043 & 0,0435 & 0,3913 & 0,0000 \\ 0,7179 & 0,0000 & 0,7436 & 1,0000 & 0,9487 & 0,8462 \\ 0,0000 & 0,0100 & 0,8700 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0300 \\ 0,9429 & 0,6571 & 0,0000 & 0,2571 & 0,5429 & 0,8857 \end{pmatrix}.$$

Для вибору найкращої альтернативи обчислимо середню та оптимістичну згортки за допомогою формул (3.9) і запишемо їх у вигляді таблиці:

	Середня	Оптимістична
P_1	0,5102	0,6482
P_2	0,2358	0,4028
P_3	0,3716	0,4961
P_4	0,5169	0,6275
P_5	0,6063	0,6770
P_6	0,5626	0,7211

Якщо вибирати середню згортку, то підприємства проаранжуються наступним чином: $\{P_5, P_6, P_4, P_1, P_3, P_2\}$ і найкраща альтернатива буде P_5. Для оптимістичної згортки найкраща альтернатива буде P_6, оскільки ранжувальний ряд наступний: $\{P_6, P_5, P_1, P_4, P_3, P_2\}$. Одна і друга альтернативи показали хороші значення. Обчислення альтернатив для обережної та песимістичної згортки неможливе, так як у матриці Z є нульові значення. Отже, вибір найкращої альтернативи в загальному залежить від психосоматичного настрою ОПР.

Приклад 5.4.

Математичну модель задачі вибору розглянемо на прикладі вибору підприємства для надання кредиту. Нехай у банк поступило заявки від чотирьох підприємств. Підприємства будемо розглядати як альтернативи($n = 4$), серед яких ОПР має обрати одне для видачі кредиту. Їх оцінки за п'ятьма критеріями($m = 5$) подано у вигляді наступної таблиці:

i	P_1		P_2		P_3		P_4	
	K_i	K_i – нормоване	K_i	K_i – нормоване	K_i	K_i – нормоване	K_i	K_i – нормоване
1	0,26	1	0,11	0	0,21	0,08	0,23	0,28
2	0,4	0	1,1	1	0,6	0,08	0,7	0,32
3	1,1	0,13	1,7	0,93	2,4	0,13	2,2	0,4
4	1,1	0,9	2,3	0	0,5	0,5	1,7	0,3
5	0,1	0,2	0,9	0,2	0,8	0,4	0,5	1

Матриця рішень O наступна:

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}08 & 0{,}28 \\ 0 & 1 & 0{,}08 & 0{,}32 \\ 0{,}13 & 0{,}93 & 0{,}13 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

На першому етапі побудуємо матрицю A за формулою:

$$A = O \times O^T = \begin{pmatrix} 1{,}08 & 0{,}10 & 0{,}25 & 1{,}02 & 0{,}51 \\ 0{,}10 & 1{,}11 & 1{,}07 & 0{,}14 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 1{,}07 & 1{,}06 & 0{,}30 & 0{,}66 \\ 1{,}02 & 0{,}14 & 0{,}30 & 1{,}15 & 0{,}68 \\ 0{,}51 & 0{,}55 & 0{,}66 & 0{,}68 & 1{,}24 \end{pmatrix}.$$

Від матриці A переходимо до матриці A' $(a'_{ij} = a_{ij} / m; i, j = \overline{1,m})$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}02 & 0{,}22 & 0{,}21 & 0{,}03 & 0{,}11 \\ 0{,}05 & 0{,}21 & 0{,}21 & 0{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}20 & 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}23 & 0{,}14 \\ 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо значення ваг параметрів за формулами $v_k = \sqrt[m]{\sum_{r=1}^{m} \left(a'_{kr}\right)^m}$ і $w_k = v_k / \sum_{h=1}^{m} v_h, k = \overline{1,m}$:

$v = (0{,}243; 0{,}251; 0{,}247; 0{,}254; 0{,}254)$, $w = (0{,}195; 0{,}201; 0{,}198; 0{,}203; 0{,}203)$.

Утворимо матрицю B $(b_{ij} = b_{ij} \cdot w_i; i, j = \overline{1,m})$:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}195 & 0{,}000 & 0{,}016 & 0{,}055 \\ 0{,}000 & 0{,}201 & 0{,}016 & 0{,}064 \\ 0{,}026 & 0{,}184 & 0{,}026 & 0{,}079 \\ 0{,}183 & 0{,}000 & 0{,}102 & 0{,}061 \\ 0{,}041 & 0{,}041 & 0{,}081 & 0{,}203 \end{pmatrix}.$$

На наступному етапі перемножуємо матриці O^T і B:

$$C = O^T \times B = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}03 & 0{,}13 & 0{,}16 \\ 0{,}03 & 0{,}38 & 0{,}06 & 0{,}18 \\ 0{,}13 & 0{,}06 & 0{,}09 & 0{,}13 \\ 0{,}16 & 0{,}18 & 0{,}13 & 0{,}29 \end{pmatrix}.$$

На останньому кроці будуємо оцінки $Z_i = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$, де $s_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, i = \overline{1,n}.$:

$$Z = (0{,}276; 0{,}259; 0{,}161; 0{,}304).$$

Альтернативи упорядковуємо по спаданню величин Z_i $(P_4; P_1; P_2; P_3)$ і найкращим підприємством є P_4.

5.2. Використання моделей кластеризації критеріального простору для векторних задач лінійного програмування

Найбільш уживаним та обґрунтованим методом розв'язання багатокритеріальних задач лінійного програмування є зведення її до однокритеріальної за допомогою адитивної згортки. Порівняємо розв'язок знайдений за допомогою адитивної згортки з розв'язком отриманим згідно використання підходу кластеризації критеріального простору задачі описаного в розділі 4.

Враховуючи, що часткові критерії в багатьох прикладних задачах (наприклад, задачах збалансованого харчування та дієтотерапії [33,135]), як правило, вважаються рівнозначними, то їх вагові коефіцієнти пропонується вважати рівними. Обмежимось розглядом деяких задач багатокритеріального лінійного програмування із рівнозначними критеріями[35].

<u>Задача 1.</u>

Нехай задано векторну задачу лінійного програмування критеріальний простір якої містить п'ять критеріїв та множину альтернатив X (рис. 5.1).

На рисунку 5.1 зображено паретівську множину ***AB*** непокращувальних альтернатив та локальні розв'язки задачі.

Розв'язання задачі 1 за допомогою адитивної згортки

Як відомо недоліком методу адитивної згортки є можливість компенсації одних критеріїв за рахунок інших (рис. 5.2).

Як видно з рисунка 5.2 три критерії: $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ компенсували свої оцінки за рахунок критеріїв $\overline{f_4}, \overline{f_5}$ при згортанні їх адитивною згорткою $\overline{F}$. Розв'язком при цьому буде точка оптимуму $\left(x^*, y^*\right)$, в якій досягають максимальні значення лише критерії, $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$, а критерії $\overline{f_4}, \overline{f_5}$ свої мінімальні значення.

Розв'язання задачі 1 із використанням підходу кластеризації критеріального простору задачі на множини сильно зв'язаних критеріїв.

Провівши кластеризацію критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв методами описаними в розділі 4 отримаємо два кластери. До першого кластеру відносяться вектори $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$, а до другого $\overline{f_4}, \overline{f_5}$.

Далі згідно методу описаного в розділі 4.6, проводиться згортка критеріїв кластерів та визначення їх представників.

Враховуючи, що результатами кластеризації на множини сильно зв'язаних, що не допускають суперечливості критеріїв будуть кластери, які містять вектори близькі по куту, то при використанні адитивної згортки всередині кластерів компенсація одних критеріїв за рахунок інших малоймовірна. Крім того, адитивна згортка є найпростішою та обґрунтованою, тому пропонується для згортки критеріїв кластерів використовувати саме її.

Для «усунення» проблеми компенсації одних векторів за рахунок інших, доцільно користуватися методом згортки (розділ 4.6), коли представником кожного кластеру є орт сумарного вектора всіх градієнтів локальних цільових функцій всередині кластеру.

Таким чином, вищеозначені кроки приведуть до зведення вхідної задачі до багатокритеріальної задачі лінійного програмування меншої критеріальної розмірності (надалі згідно прикладу представленому на рисунку 5.3 пропонується розглядати два критерії: $\overline{F_1}$ та $\overline{F_2}$).

Яким чином, може бути проведена згортка представників кластерів ($\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$) наведено в [36]. Крім того, види згорток мають бути вибрані в залежності від конкретної ситуації та фізичного змісту критеріїв задачі, або за згодою із ОПР.

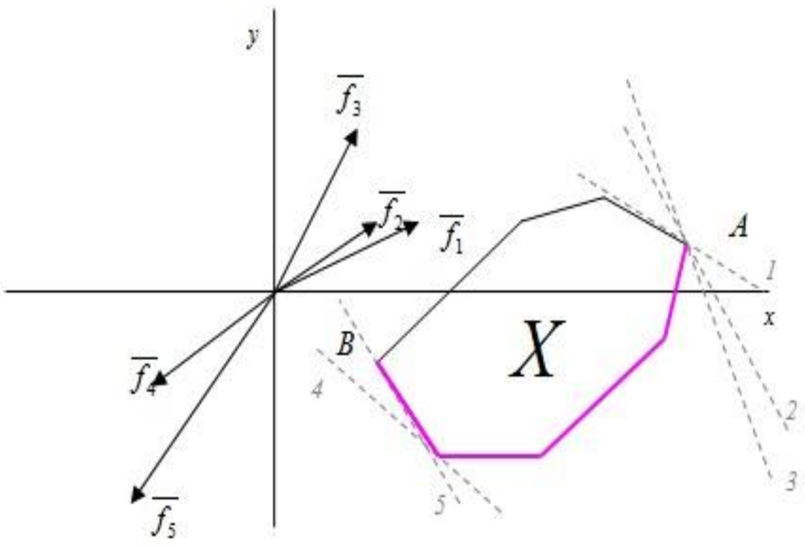


Рисунок 5.1. Геометрична інтерпретація задачі 1

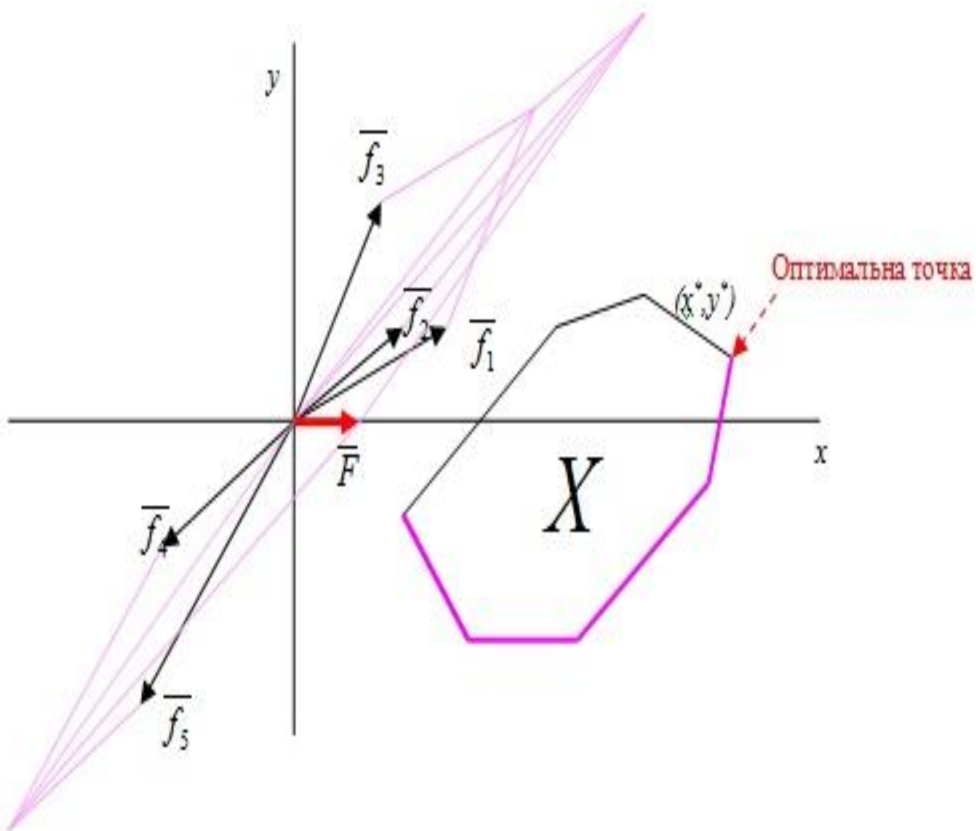


Рисунок 5.2. Приклад можливої компенсації рівнозначних критеріїв ($\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$, $\overline{f_3}$) за рахунок інших ($\overline{f_4}$, $\overline{f_5}$) при адитивній згортці ($\overline{F}$)

Методи визначення вагових коефіцієнтів кластерів описані в підрозділі 4.7. Щоб підсилити рівноважливість всіх критеріїв доцільно ваги представників кластерів взяти однаковими. В якості суперкритерію також візьмемо адитивну згортку представників кластерів. Тоді отримана однокритеріальна задача буде мати наступний вигляд:

$$F = \frac{1}{2}\overline{F_1} + \frac{1}{2}\overline{F_2} \to extr,$$

$$x \in X \, .$$

Геометричну інтерпретацію розв’язання даної задачі приведено на рисунку. 5.4.

По суті для розв’язання даної задачі використано тільки адитивні згортки із різними вагами, які підібрані не довільно, а на основі інформації про взаємозв’язки між критеріями. Тому, в данному прикладі використання підходу методів кластеризації лише дещо модифікувало метод адитивної згортки.

Таким чином, можна підвести підсумок, що знайдений оптимальний розв’язок для даної задачі із використанням підходу кластеризації критеріального простору гарантовано буде паретівським (непокращувальним, ефективним) і крім того в певній мірі відображатиме принцип «золотої середини» по відношенню до множини Паретто.

Використання ж кластеризації критеріального простору на множини сильно зв’язаних критеріїв дає змогу усунути проблему компенсації однієї групи критеріїв за рахунок інших при адитивній згортці, завдяки точному підбору ваг локальних критеріїв. Отриманий розв’язок при цьому в деякій мірі є компромісним для всіх локальних критеріїв одночасно.

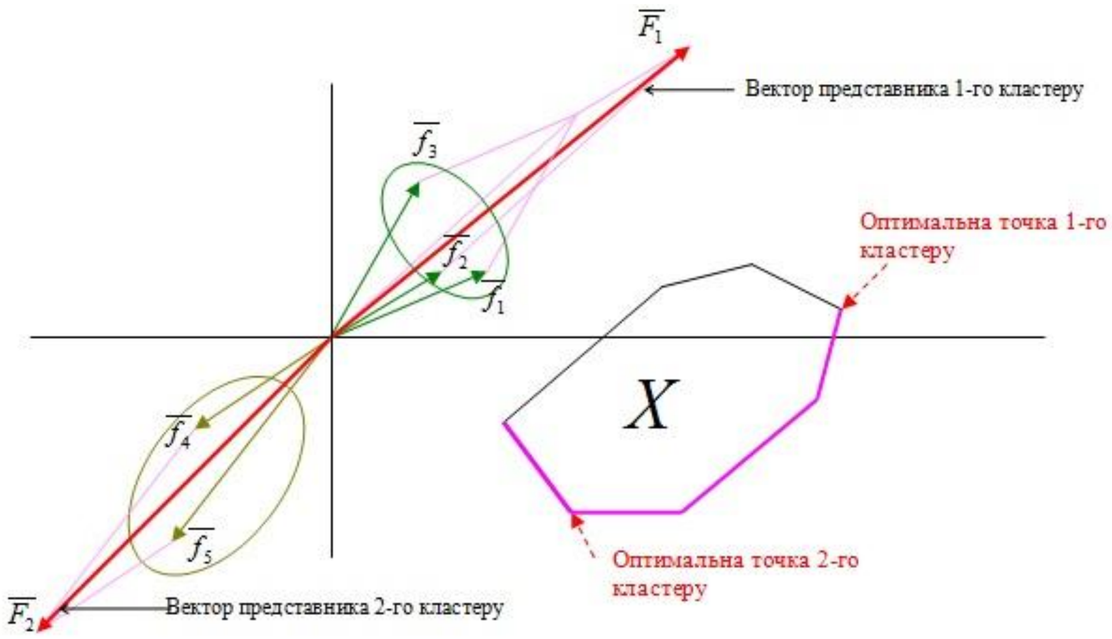


Рисунок 5.3. Приклад визначення представників кластерів $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$

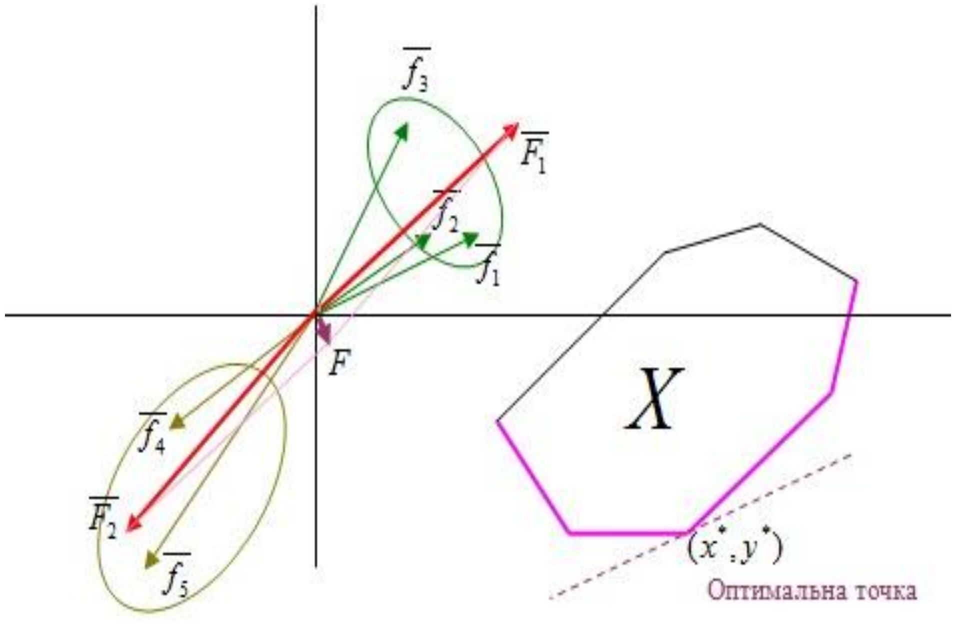


Рисунок 5.4. Оптимальний розв'язок задачі для знаходження якого використано підхід кластеризації критеріального простору

Задача 2.

Нехай потрібно розв'язати деяку багатокриріальну задачу лінійного програмування, причому знайдений ефективний розв'язок при цьому має максимізувати (мінімізувати) максимальну по кількості підмножину локальних критеріїв.

Дана умова не є випадковою, бо відображає специфіку деяких прикладних задач. Наприклад, задача збалансованого харчування [33].

Перейдемо до конкретної нескладної задачі критеріальний простір якої містить 7 критеріїв. На рисунку 5.5 зображена геометрична інтерпретація даної задачі та виділено множину Парето непокращувальних альтернатив, показано локально оптимальні точки для кожного з часткових критеріїв.

Розв'язання задачі 2 за допомогою методу адитивної згортки

Як і в попередній задачі будемо рахувати, що критерії є рівноважливими. Використаємо адитивну згортку (рис. 5.6) для знаходження розв'язку задачі без застосування вивчення взаємозв'язків між критеріями. Як видно із рисунка. 5.6 розв'язком задачі буде оптимальна точка $\left(x^*, y^*\right)$, яка на відміну від попередньої задачі є «компромісною» для всіх часткових критеріїв, але в той же час не є локально оптимальною для жодного із критеріїв, що не задовольняє постановку задачі

Розв'язання задачі 2 із використанням підходу кластеризації критеріального простору

Проведемо кластеризацію критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв [31, 34, 46]. При цьому отримаємо два кластери: перший кластер містить критерії $\overline{f_1}, \overline{f_2}$, а другий $\overline{f_3}, \overline{f_4}, \overline{f_5}, \overline{f_6}, \overline{f_7}$. Виберемо кластер потужність якого є найбільшою (другий). Цей кластер назвемо головним.

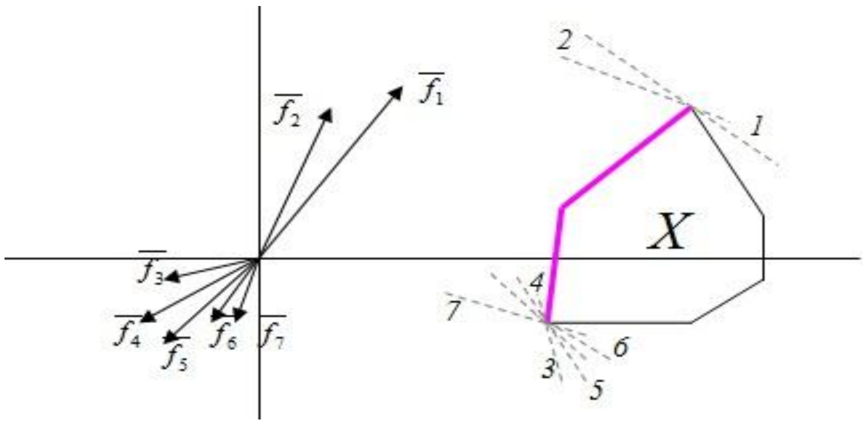


Рисунок 5.5. Геометрична інтерпретація задачі 2

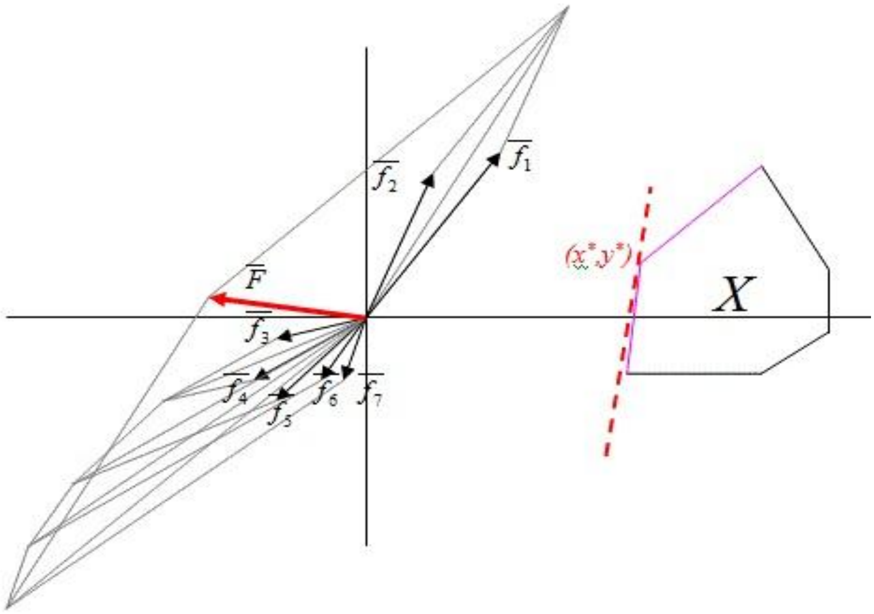


Рисунок 5.6. Розв'язок задачі 2 за допомогою адитивної згортки

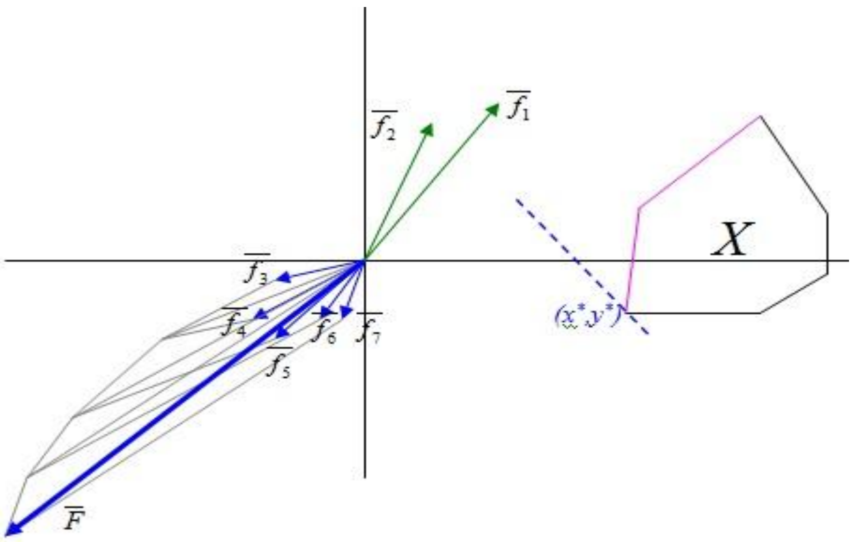


Рисунок 5.7. Розв'язок задачі 2 узагальненим методом

У якості згортки критеріїв кластерів використаємо адитивну згортку із однаковими вагами. Вагу головного кластеру візьмемо рівну 1, а ваги всіх інших кластерів рівні нулеві.

Далі як і в попередній задачі для побудови інтегрального суперкритерію використаємо адитивну згортку представників кластерів, чим зводимо вихідну задачу до однокритеріальної. Розв'язок якої буде точка $\left(x^*, y^*\right)$ зображена на рисунку 5.7. Таким чином, отримана оптимальна точка з використанням підходу кластеризації критеріального простору буде гарантовано паретівською, бо по суті вона знайдена за допомогою адитивної згортки при чому критерії «головного» кластеру беруться з однаковими вагами, а критерії інших кластерів з нульовими.

Використання підходу кластеризації критеріального простору при адитивній згортці дало можливість знайти таку оптимальну точку, яка є локально оптимальною для максимальної кількості критеріїв критеріального простору, завдяки точному підбору вагових коефіцієнтів часткових критеріїв.

Проведений порівняльний аналіз отриманих розв'язків задачі 1 та задачі 2 різними методами показує, що використання підходу кластеризації критеріального простору для розв'язання векторних задач лінійного програмування дозволяє «маніпулювати» потрібною мірою «компромісності» знайденого розв'язку при застосуванні адитивної згортки; усунути проблему компенсації однієї групи критеріїв за рахунок інших при адитивній згортці; знайти ефективний розв'язок, який задовольняє наперед визначеним специфічним умовам.

Проведення кластеризації критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв дозволяє вивчити взаємозв'язки між критеріями ефективності, що в свою чергу дає можливість точнішого підбору їх вагових коефіцієнтів. Що ж до задач великої критеріальної розмірності, то доцільність використання для їх розв'язання кластеризації критеріального простору є ще більш обґрунтованою, оскільки в цих задачах взаємозв'язки між критеріями ефективності мають значно складнішу структуру.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айзерман М.А. Выбор вариантов. Основы теории / М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров. – М.: Наука, 1990. – 227 с.
2. Баранник В.Ф. Зменшення кількості критеріїв ефективності / В.Ф. Баранник, М.М. Маляр // Вісник Київського університету. Вип.4. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2001. – С. 345– 348.
3. Баранник В.Ф. Критерії ефективності та їх протирічивість / В.Ф. Баранник, М.М. Маляр // Наук.-техн. зб. “Проблеми економічного та соціального розвитку регіону і практика наукового експерименту”.Вип.13. – Київ-Ужгород, 1997. – С. 253– 255.
4. Баранник В.Ф. Побудова згортки цільових функцій для багатокритеріальних задач лінійного програмування / В.Ф.Баранник, М.М. Маляр // Вісник УжНУ. Серія: математика і інформатика. Вип. 16. – Ужгород, 2008. – С. 95– 100.
5. Баранник В.Ф. Про відокремлення критеріїв ефективності / В.Ф. Баранник ,М.М. Маляр // Вісник УжНУ. Серія: математика і інформатика. – Ужгород, 2001. – С. 137– 139.
6. Баранник В.Ф. Спосіб згортки цільових функцій для задач вибору / В.Ф. Баранник, М.М. Маляр // Вісник Київського університету. Вип. 2. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2007. – С.174– 177.
7. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: навчальний посібник / І.В. Бейко, П.М. Зінько, О.Г. Наконечний – Рівне: НУВТП, 2011. – 624 с.
8. Берзлев О.Ю. Адаптивні комбіновані моделі прогнозування біржових показників /О.Ю.Берзлев, М.М. Маляр, В.В.Ніколенко // Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки. – Черкаси, 2011. – №1. – С. 50 – 54.

9. Берзлев О.Ю. Методи прогнозування для прийняття ефективних рішень у багаторівневих моделях / О.Ю.Берзлев, М.М.Маляр, В.В.Ніколенко // Вісник УжНУ. Серія: математика і інформатика, випуск 22. – Ужгород, 2011. – С. 18– 25.
10. Волошин А.Ф. Нечеткие модели многокритериального коллективного выбора / А.Ф.Волошин, Н.Н. Маляр // Proceedings XI-th International Conference "Knowledge – Dialogue – Solution". Vol.1. – Sofia, 2005. – P. 247 – 250.
11. Волошин А.Ф. Нечеткий алгоритм последовательного анализа вариантов / А.Волошин, Н. Маляр, О. Швалагин // International Book Series "INFORMATION SCIENCE & COMPUTING", Number 15, Supplement to the International Journal "INFORMATION TECHNOLOGIES & KNOWLEDGE" Volume 3 / 2009, Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA. – Sofia, Bulgaria, 2009. – C. 189 – 194.
12. Волошин А.Ф. Последовательный анализ вариантов в задачах исследования и проектирования сложных систем: монография / А.Ф.Волошин, В.И Кудин ; под общ. ред. И.В. Сергиенко. – К.: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2015. – 351с.
13. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень: Навчальний посібник / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет", 2010. – 336 с.
14. Волошин О.Ф. Моделювання конкурентоспроможності об'єктів економічної діяльності за допомогою нечітких множин / О.Ф.Волошин, М.М. Маляр, М.М.Шаркаді // Вісник національного університету «Львівська політехніка», серія: Логістика. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2010. – № 690. – С. 534– 539.

15. Волошин О.Ф. Послідовний аналіз варіантів : Технології та застосування. Монографія / О.Ф. Волошин, Г.М. Гнатієнко, В.І. Кудін. – К.: «Стилос», 2013. – 304 с.
16. Волошин О.Ф. Процедури послідовного відсіювання варіантів в комбінаторних оптимізаційних задачах з нечіткими функціоналами /О.Волошин, М.Маляр, О.Швалагін //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: кібернетика. Випуск 10. – Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». – 2010. – С. 4 – 7.
17. Воронин А.Н. Многокритериальные решения: модели и методы. /А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, М.В. Куклинский. – К.: НАУ, 2011. – 348 с.
18. Глотов В.А. Векторная стратификация / В. А. Глотов, В. В. Павельев — М.: Наука, 1984.— 94 с.
19. Гнатиенко Г.Н. Система автоматизированной подготовки выводов о финансовом состоянии акционерных обществ /Г.Н. Гнатиенко, М.М. Маляр // Proceedings of the Fourth Internatinal Conference “Information Research and Applications” i.TECH 2006, Varna, Bulgaria. – Sofia, 2006. – P. 229 – 235.
20. Гнатієнко Г.М. Експертні технології прийняття рішень: Монографія // Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк – К.: ТОВ «Маклаут», 2008. – 444 с.
21. Дафт Р.Л. Менеджмент/ Р.Л. Дафт – С.-Петербург: Питер, 2000. – 832с.
22. Дрейпер Н., Смит Р. Прикладной регрессионный анализ // Н. Дрейпер , Р. Смит — М.: Статистика, 1973. — 138 с.
23. Железник А.І. Колективний вибір з врахуванням неманіпульованості / А.І. Железник, М.М. Маляр, І.А. Мич // Вісник УжНУ, Серія: математика і інформатика. Вип. 12-13. — Ужгород, 2006. — С. 71– 75.
24. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах / Ю.П. Зайченко – К.: «Издательский дом «Слово» », 2008, – 344 с.

25. Зайченко Ю.П. Теорія прийняття рішень: підручник / Ю.П. Зайченко – К.: НТУУ«КПІ», 2014.–412 с.
26. Згуровский М.З. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях / М.З. Згуровский , Ю.П. Зайченко. – К.: НПП «Издательство "Наукова думка" НАН Украины», 2011. – 278 с.
27. Згуровский М.З. Системный анализ. Проблемы, методология, приложения / М.З. Згуровский, Н.Д. Понкратова. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наукова думка, 2011. – 725 с.
28. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения [пер. с англ. под ред. Шахнова И. Ф.] / Р.Л. Кини, Х. Райфа. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
29. Кондор Г.М. Визначення пріоритетів використовуючи матрицю рішень / Г.М. Кондор, М.М. Маляр // Обчислювальний інтелект (результати,проблеми,перспективи): Матеріали 1-ї Міжнародної науково-технічної конференції . – Черкаси: Маклаут, 2011. – С. 181.
30. Кондор Г.М. Нечіткий підхід у задачах банківського кредитування / Г.М. Кондор, М.М.Маляр // Праці V міжнародної школи-семінар «Теорія Прийняття рішень». – Ужгород, УжНУ, 2010. – С.118.
31. Кондрук Н.Е. Алгоритми кластеризації критеріального простору для задач вибору / Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр // Вісник Київського університету.Вип. 3. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2006. – С. 225– 229.
32. Кондрук Н.Е. Визначення вагових коефіцієнтів кластерів критеріального простору / Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр // Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні "ІНФОТЕХ-2007": Матеріали міжнар. наук.-практ. конф., Ч.1 – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2007. – С. 90 – 92.
33. Кондрук Н.Е. Застосування багатокритеріальних моделей для задач збалансованого харчування / Н.Е.Кондрук, М.М. Маляр //Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки. –Черкаси, 2010. – №1 – С. 3 – 7.

34. Кондрук Н.Е. Кластеризація критеріїв ефективності у задачах вибору / Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр // Вісник Київського університету. Вип. 3. Серія: фіз.-мат. науки. — Київ, 2005. — С. 288— 291.
35. Кондрук Н.Е. Обґрунтування підходу кластеризації критеріального простору в векторних задачах лінійного програмування / Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр // Східно-Європейський журнал передових технологій. Серія: математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – 2013. – № 1/4(61). – С. 58–61.
36. Кондрук Н.Э. Некоторые применения кластеризации критериального пространства для задач выбора / Н.Э.Кондрук, Н.Н.Маляр // Компьютерная математика. – 2009. – №2. – С. 142-149.
37. Кондрук Н.Е. Про особливості побудови критеріального простору задачі раціонального харчування дітей / Н.Е. Кондрук ,М.М. Маляр // Праці 1V-ї міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень". — Ужгород, УжНУ, 2008. – С. 95.
38. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман; [пер. с франц. В.В. Кузьмина]. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
39. Ларичев О.И. Вербальный анализ решений. Под ред. А. Б. Петровского / О.И. Ларичев. – М.: Наука, 2006. – 181 с.
40. Ларичев О.И. Качественные методы принятия решений / О.И. Ларичев, Е.М. Мошкович . – М.: Наука, 1996. – 208 с.
41. Литвинцева Г.П. Словарь терминов по институциональной экономике / Г.П. Литвинцева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 336 с.
42. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В. Лотов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 392 с.
43. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие/А.В. Лотов, И.И. Поспелова. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197с.
44. Лютенс Ф. Организационное поведение: Пер. с англ. 7-го изд. Текст. / Ф. Лютенс. – М.: ИНФРА-М, 1999. – XXVIII. – 692 с.

45. Маляр М.М. Автоматизація процесу управління банківськими інвестиціями / М.М. Маляр, В.В. Поліщук // Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні "ІНФОТЕХ-2011": Матеріали між нар. наук.-практ. конф. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2011. – С. 215.
46. Маляр М.М. Алгоритм зменшення кількості критеріїв в багатокритеріальній задачі лінійного програмування / М.М. Маляр, Н.Е. Цицика // Вісник Київського університету. Вип. 2. Серія: фіз.-мат. Науки. – Київ, 2004. – С. 288–291.
47. Маляр М.М. Алгоритмізація нечіткого вибору / М.М.Маляр // Праці V міжнародної школи-семінар «Теорія Прийняття рішень». – Ужгород, УжНУ, 2010. – С.146.
48. Маляр М.М. Багатокритеріальна задача вибору з нечіткими ваговими коефіцієнтами / М.М. Маляр // Праці міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень". – Ужгород, 2002. – С. 50.
49. Маляр М.М. Багатоступеневі задачі прийняття рішення / М.М. Маляр // Зб. наук. праць. "Львівська політехніка". – Львів, 1998. – С. 344.
50. Маляр М.М. Визначення та цілеспрямована зміна вагових коєфіцієнтів при багатокритеріальному виборі / М.М. Маляр //Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков: НТУ «ХПИ»,2010. – №9. – С.51-56.
51. Маляр М.М. Використання динамічних критеріїв у задачах прийняття управлінських рішень / М.М. Маляр, Ю.Ю. Млавець // Інформатика і системні науки (ІСН-2014) : матеріали V Всеукр. Наук.-практ. конф.(м. Полтава,13-15 березня 2014). – Полтава: ПУЕТ,2014. – С.206–207.
52. Маляр М.М. Використання динамічних критеріїв у моделях багатокритеріального вибору/ М.М.Маляр, В.В.Поліщук, М.М. Шаркаді // Компютерна математика. – 2015. – №1. – С.125 – 133.

53. Маляр М.М. Групування критеріїв ефективності / М.М. Маляр, Н.Е. Цицика // Вісник СевДТУ. Вип.47: Інформатика,електроніка,зв’язок. Зб. наук. пр. – Севастополь: Вид-во СевДТУ, 2003. – С.75–79.
54. Маляр М.М. Декомпозиція задачі багатокритеріального вибору / М.М.Маляр // Східно-Європейський журнал передових технологій. Серія: математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – 2010. – № 6/4(48). – С. 43 –46.
55. Маляр М.М. Деякі алгоритми знаходження ефективного розв'язку у багатокритеріальних задачах лінійного програмування / М.М. Маляр // Теорія обчислень. Зб. наук. праць НАН України ІК ім. В.М.Глушкова, – Київ, 1999. – С. 252 –254.
56. Маляр М.М. Багатокритеріальна задача оптимального вибору у розмитих множинах /М.М. Маляр // Оптимізація виробничих процесів. Вип.9. Зб. наук. пр. – Севастополь: Вид-во СевДТУ, 2006. – С. 98 –104.
57. Маляр М.М. Задача прогнозування деяких показників діяльності підприємств при розробці стратегічного плану / М.М.Маляр //Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці. Матеріали 1 Міжнародної науково-методичної конференції. – Чернівці: ДрукАрт, 2009. – С. 253.
58. Маляр М.М. Застосування багатокритеріальних моделей у виборі економічного інтересу / М.М. Маляр, М.М. Шаркаді // Тези доповідей Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та коп‘ютерна інженерія» м. Вінниця, 28-30 травня 2014 року. – Вінниця: ВНТУ, 2014. – С. 96–99.
59. Маляр М.М. Зменшення розмірності критеріального простору / М.М.Маляр // Праці 1V-ї міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень". – Ужгород, УжНУ, 2008. – С. 113.
60. Маляр М.М. Інформаційна система по оцінці кредитоспроможності підприємств та інвестиційних проектів / М.М. Маляр, В.В. Поліщук // Управління розвитком складних систем. – 2013. – № 16. – С. 164 – 170.

61. Маляр М.М. Математичне забезпечення для автоматизованої системи підтримки прийняття рішень у кредитуванні підприємств з використанням нечіткої логіки / М.М. Маляр, В.В. Поліщук // Матеріали Всеукраїнської науково-праутичної конференції «В.М.Глушков – піонер кібернетики»(11 грудня 2014р. м. Київ). – К.: Видавництво «Політехніка», 2014. – С. 226.
62. Маляр М.М. Метод неманіпульованих механізмів в задачах колективного вибору / М.М. Маляр, А.І. Железник // Праці ІІ-ї міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень". - Ужгород, УжНУ, 2004. – С. 61.
63. Маляр М.М. Методи групування критеріїв ефективності для задач вибору / М.М. Маляр // Вісник Київського університету. Вип. 2. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2006. – С. 211–215.
64. Маляр М.М. Моделювання дворівневого процесу вибору / М.М. Маляр, О.Ю. Швалагін // Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні "ІНФОТЕХ-2007": Матеріали між нар. наук.-практ. конф. Ч.1. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2007. – С. 38–39.
65. Маляр М.М. Моделювання задач вибору за допомогою розмитих множин / М.М. Маляр, О.Ю. Швалагін // Вісник УжНУ, Серія: математика і інформатика. Вип. 10–11. – Ужгород, 2005. – С. 65–69.
66. Маляр М.М. Моделювання задач вибору на розмитих множинах / М.М. Маляр, О.Ю.Швалагін //International Conferenct "DYNAMICAL SYSTEM MODELLING AND STABILITY INVESTIGATION. – Київ, 2005. – С. 82.
67. Маляр М.М. Моделювання задачі економічної задоволеності фірми / М.М. Маляр // Вісник УжНУ, Серія: економіка. Вип. 22, ч.1. – Ужгород, 2007. – С. 32–35.

68. Маляр М.М. Моделювання обмеженого раціонального вибору з використанням нечітких множин /М.М. Маляр // Вісник Київського університету. Вип. 2. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2014. – С. 161–165.
69. Маляр М.М. Моделювання проблеми задоволеності / М.М. Маляр // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики : Матеріали XIY Всеукраїнської наукової конференції присвяченої 90-річчю з дня народження проф. О.М. Костовського. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. – С. 98.
70. Маляр М.М. Моделювання раціональної задоволеності у задачах вибору // Праці VII міжнародної школи-семінар «Теорія Прийняття рішень». – Ужгород, УжНУ, 2014. – С. 168.
71. Маляр М.М. Модель оцінки кредитоспроможності підприємства в умовах невизначеності / М.М. Маляр, В.В. Поліщук // Східно-Європейський журнал передових технологій. Серія: математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – 2012. – №1/4(55). – С. 51 –57.
72. Маляр М.М. Модель формування рейтингової оцінки знань випускника вузу / М.М.Маляр, А.Ю.Штимак. // Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні “ІНФОТЕХ-2013”: Матеріали між нар. наук.-практ. конф., Севастополь, 9-13 вересня 2013 р.. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2013. – С. 99–100.
73. Маляр М.М. Невизначеність і вибір / М.М.Маляр // Праці VI міжнародної школи-семінар «Теорія Прийняття рішень». – Ужгород, УжНУ, 2012. – С. 133–134.
74. Маляр М.М. Нечітка модель оцінки фінансової кредитоспроможності підприємств / М.М. Маляр, В.В. Поліщук // Східно-Європейський журнал передових технологій. Серія: математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – 2012. – № 3/4(57). – С. 8 –16.

75. Маляр М.М. Нечіткий алгоритм для розв’язування задач проектування складних систем / М.М. Маляр, О.Ю. Швалагін // Інформатика та системні науки(ІСН-2010): матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції [за ред.. д.ф.-м.н., проф. Ємця О.О.]. – Полтава:РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 129–130.
76. Маляр М.М. Обробка експертної інформації у дворівневій задачі вибору / М.М.Маляр, О.Ю. Швалагін // Вісник УжНУ. Серія: математика і інформатика. Вип. 17. – Ужгород, 2008. – С. 95–100.
77. Маляр М.М. Описання задач вибору на мові розмитих множин / М.М. Маляр // Вісник Київського університету. Вип. 4. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2005. – С. 197–201.
78. Маляр М.М. Підхід до ранжування інвестиційних проектів / М.М. Маляр, Поліщук В.В. О //Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці: Матеріали ІІІ міжнародної науково-методичної конференції. – Чернівці : ДрукАрт, 2013. – С. 185–186.
79. Маляр М.М. Побудова інтегрованої цільової функції в аналітичному вигляді / М.М. Маляр, В.Ф. Баранник, Маріанна Маляр // Вісник Київського університету. Вип. 4. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2006. – С. 200–205.
80. Маляр М.М. Про один підхід до моделювання задач вибору / М.М. Маляр // Праці міжнародної конференції "Моделювання та оптимізація складних систем". Том 1. – Київ, 2001. – С. 48–49.
81. Маляр М.М. Процедура побудови ваг для багатокритеріального вибору / М.М. Маляр, П.П. Мулеса // Праці ІІ-ї міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень".– Ужгород, УжНУ, 2004. – С. 62.
82. Маляр М.М. Розв’язання проблеми пониження розмірності критеріального простору у задачах вибору / М.М.Маляр // Оптимізація виробничих процесів. Вип.10. Зб. наук. пр. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2007. – С. 77–81.

83. Маляр М.М. Систематизація проблеми прийняття рішень при багатьох критеріях / М.М.Маляр, Ю.Ю Млавець // Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні “ІНФОТЕХ-2009”: Матеріали між нар. наук.-практ. конф. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2009. – С. 153–154.
84. Маляр М.М. Системний підхід до проблеми прийняття рішення / М.М. Маляр // Наукові замітки УжДУ. Сер. математика. Вип. 3. – Ужгород, 1998. – С. 151–152.
85. Маляр М.М. Спосіб узгодження цілей у задачах вибору /М.М.Маляр, А.Ю.Штимак. // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): Матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції. – Черкаси: Маклаут, 2013. – С. 212.
86. Маляр М.М. Схема багаторівневого узгодження нечіткої оцінки об’єктів /М.М.Маляр, О.Ю.Швалагін // Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та навчанні “ІНФОТЕХ-2011”: Матеріали між нар. наук.-практ. конф. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2011. – С. 27.
87. Маляр М.М. Схема обробки інформації для визначення професійної компетентності випускника ВНЗ /М.М.Маляр, А.Ю.Штимак. // Управління розвитком складних систем. – 2014. – № 18. – С. 153 – 158.
88. Маляр М.М. Схема оцінки інвестиційних проектів із враховуванням перспективності галузей економіки / М.М. Маляр, В.В. Поліщук // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи): праці міжнар. наук.-практ. конф., (Київ-Черкаси, 12-15 травня 2015 р.) – Черкаси: видавець Чабаненко Ю., 2015. – С. 305–306.
89. Маляр М.М. Схема паралельно-послідовного відсіву варіантів для задач вибору / М.Маляр, О.Швалагін // Східно-Європейський журнал передових технологій. Серія: математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – 2011. – № 1/4(49). – С. 39–42.

90. Маляр М.М. Усунення неповноти інформації у задачах вибору / М.М. Маляр // Праці міжнародної науково-практичної конференції „ІНФОТЕХ-2004”.– Севастополь,2004. – С. 67–69.
91. Маляр Н. Моделирование согласованности целей в иерархических структурах принятия решений // International Journal ”Information Models and Analyses”, Vol. 2, Number 4. – 2013. – P. 393–397.
92. Маляр Н. Нечеткие процедуры последовательного анализа вариантов в комбинаторных оптимизационных задачах и их применение / Н. Маляр., О.Швалагин // International Journal ”Information Technologies & Knowledge ”, Vol. 6, Number 1. – 2012. – P. 81–87.
93. Маляр Н. Структуризация пространства факторов для установления предварительного диагноза урологических заболеваний / Н.Маляр, П.Мулеса // International Journal ”Information Technologies & Knowledge”, Vol. 6, Number 1. – 2012. – P. 88–92.
94. Маляр Н.Н. Алгоритмизация нечетких многокритериальных задач выбора / Н.Н.Маляр // Математичні машини і системи. – 2011. –№2. – С. 170–177.
95. Маляр Н.Н. Двухуровневая модель нечеткого рационального выбора / Н.Н. Маляр, В.В. Полищук // Научное издание : сборник статей «Проблемы интеллектуализации компьютера». – Киев-София, Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2012. – С. 242–248.
96. Маляр Н.Н. Нечеткая модель удовлетворительного решения задачи выбора / Н.Н. Маляр // Information Models of Knowledge. – ITHEA – Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010. – С. 220–225.
97. Маляр Н.Н. Подход к определению приоритетов альтернатив для задач многокритериального выбора / Н.Н.Маляр // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 4. –С. 63–67.

98. Маляр Н.Н. Применение нечеткой логики для задач коллективного выбора / Н.Н.Маляр // Artificial Intelligence and Decision Making. International Book Series “INFORMATION SCIENCE & COMPUTING”. Number 7. Supplement to the International Journal “INFORMATION TECHNOLOGIES & KNOWLEDGE” Volume 2 / 2008. Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA. - Sofia, Bulgaria, 2008. – P. 99–102.

99. Маляр Н.Н. Формализация задачи построения стратегического плана деятельности предприятия /Н.Н. Маляр, М.М. Повидайчик // X Белорусская математическая конференция: Тезисы докл. Часть 5. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2008. – С. 94.

100. Мандель И.Д. Кластерный анализ / И.Д. Мандель. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 176 с.

101. Месарович М. Теория многоуровневых иерархических систем / М. Месарович, Д.Мако, И. Такахара перевод с английского под редакцией И.Ф. Шахнова. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

102. Мескон М. Основы менеджмента / М. Мескон ., М. Альберт., Ф. Хедоури – Москва: Дело, 1994. – 701 с.

103. Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив: Учебное пособие/ С.В. Микони. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 272 с.

104. Миллер Г. Магическое число семь плюс или минус два. О некоторых пределах нашей способности перерабатывать информацию / Г. Миллер // Сб. ст. «Инженерная. психология»; под ред. Д.Ю. Паново и В.П. Зинченко, – М.: Прогресс, 1964. – С. 564 – 581.

105. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора/ Б.Г. Миркин. – М.: Наука,1974. – 256 с.

106. Михалев А.И. Компьютерные методы интеллектуальной обработки данных: учеб. пособие / А.И. Михалев, Е.А. Винокурова, С.Л. Сотник. - Днепропетровск : НМетАУ : Системные технологии, 2014. – 208 с.

107. Михалев А.И. Оценка эффективности проектов объединенным методом многокритериального анализа / А.И. Михалев, В.И. Кузнецов, Г.Л. Теплякова // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. Выпуск 3(80). – Днепропетровск, 2012. – С. 113–121.
108. Михалев А.И. Структурный синтез систем управления проектами: учебное пособие/ А.И. Михалев, А.П. Алпатов, И.В. Баклан. – Днепропетровск: НМетАУ, ИК «Системные технологии», 2013. – 144с.
109. Михалевич В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В.С. Михалевич, В.Л. Волкович. – М.: Наука, 1982. – 286 с.
110. Михальов О.І. Проектування автоматизованих інформаційних систем. Частина 1: Навч. Посібник / О.І. Михальов, В.В. Крамаренко. – Дніпродзержинськ, 2011. – 261 с.
111. Михальов О.І. Проектування автоматизованих інформаційних систем. Частина 2: Навч. посібник./ О.І. Михальов, В.В. Крамаренко, А.І. Гуда. – Дніпродзержинськ, 2011. – 260 с.
112. Михеев В.И. Социально-психологические аспекты управления. Стиль и методы работы руководителя / В.И. Михеев. – М.: Московский рабочий, 1975. – 493 с.
113. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа/ Н.Н. Моисеев – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 488 с.
114. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности [Ред. Моисеев Н. Н.] / Д.А. Молодцов. – М.: Наука, 1987. – 280 с.
115. Моргунов Е.Б. Управление персоналом: исследования, оценки, обучение. Учебное пособие; 2-е изд. исправл. и дополн. / Е. Б. Моргунов – М.: Изд- во журнала «Управление персоналом», 2005. – 549 с.

116. Новікова К.Ю. Дослідження алгоритмів нечіткої кластеризації в задачах аналізу металографічних зображень / К.Ю.Новікова, О.І. Михальов // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. Выпуск 4(81). – Днепропетровск, 2012. – С. 110–119.
117. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. Учебно-методическое пособие / В.Д. Ногин. – СПб. Издательство «ЮТАС», 2007. – 104 с.
118. Окунь Я. Факторный анализ [Под ред. В. М. Жуковской]/ Я. Окунь. — М.: Статистика, 1974. – 200 с.
119. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 208 с.
120. Пат. № 64777 Україна, МПК A61K 8/19, A61K 8/30. Спосіб автоматизованого складання дієтичного харчування «ДІЄТОЛОГ» / Маляр М.М., Кондрук Н.Е., Горленко О.М., Томей А.І.; власник ДВНЗ «УжНУ». – № U 2011 00007; заявл. 04.11.2011; опубл. 25.11.2011, Бюл. № 22.
121. Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножеств / А.Б. Петровский. — М.: Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.
122. Петровский А.Б. Теория принятия решений: Учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.Б. Петровский. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 400 с.
123. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В.В. Подиновский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 66 с.
124. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

125. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин; Под ред. С. А. Айвазяна.— М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

126. Саати Томас Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети [пер. с англ. О.Н. Андрейчиковой]. Изд. 2-е/ Томас Л. Саати. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 360 с.

127. Саймон Г. Науки об искусственном / Г Саймон. – М.: Едиторнал УРСС, 2004. – 142 с.

128. Саймон Г.А. Рациональность как процесс и продукт мышления / Г. А. Саймон // THESIS,1993, вып.3, с.16–38.

129. Саймон Г.А. Теория принятия решений в экономической теории и в науке о поведении / Г. А. Саймон // Вехи экономической мысли; под ред. В. М. Гальперина, С.М. Игнатьева, В.И. Моргунова, 1т. – СПб.: Экономическая школа, 1999. – С. 253– 283.

130. Семенова Н.В. Багатокритеріальні задачі лексикографічної оптимізації на нечіткій множині альтернатив / Н.В.Семенова, Л.М.Колєчкіна, А.М.Нагірна // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – №6. – С. 42–50.

131. Семенова Н.В. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання ; за ред. акад. НАНУ І.В.Сергієнка / Н.В. Семенова, Л.М. Колєчкіна . – К.: Наук. думка, 2009. – 266 с.

132. Семенова Н.В. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив / Н.В.Семенова, Л.Н.Колечкина, А.Н.Нагорная //Кибернетика и системный анализ. – 2011. – №2. – С. 88–99.

133. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.: «Наукова думка», 2003. – 261 с.

134. Скурихин В. И. Математическое моделирование / В. И. Скурихин, В. Б. Шифрин, В. В. Дубровский. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.
135. Смоляр В.И. Рациональное питание / В.И. Смоляр. – К.: Наукова думка, 1991. – 368 с.
136. Терехина А. Ю. Анализ данных методами многомерного шкалирования / А.Ю. Терехина. — М.: Наука, 1986.— 168 с.
137. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений / В.Г. Тоценко. – К.: Наукова думка, 2002. – 377 с.
138. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуючий вибір / Ю.Ю.Червак – Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. – 312 с.
139. Чесноков С. В. Детерминационный анализ социально-экономических данных / С.В. Чесноков. — М.: Наука, 1982. — 168 с.
140. Шепель В. М. Управленческая психология / В.М. Шепель. – М.: Экономика, 1984. – 246 с.
141. Amit Singhal. Modern Information Retrieval: A Brief Overview // Bulletin of the IEEE Computer Society Technical Committee on Data Engineering, 2001, 24 (4). – P. 35–43.
142. Hoffman L. R., Stein R. L. The Hierarchical Model of Problemsolving Groups. In "Small Group and Social Interaction. – London, 1983. – P. 173–192.
143. Knight, F.H. (1933). Risk, Uncertainty and Profit (Reprints of Scarce Tracts in Economic and Political Science no. 16). London: London School of Economics and Political Science (1st edn 1921).
144. Kobl D. A., Rubin I. M., McIntyre J. M. Organizational Psychology: An Experimental Approach. – New York: Prentice Hall, Co., 1984. – 639 p.
145. Malyar M.M. Multicriterion choice problem for enterprises to crediting / M.M.Malyar, V.V.Polischuk // International Journal ”Information Theories and Applications”, Vol.19, Number 3. – 2012. – p. 241-248.

146. Malyar M.M. Two-stagen model of multi-criteria selection / N.Malyar, V.Polishchuk, M. Sharkadi // Kosicka bezpecnosna revue, № 1. – 2014. – S. 119–124.
147. Malyar M.M.. Choice and evaluation methodics of investment projects / M.M.Malyar, V.V.Polishchuk // Kosicka bezpecnosna revue, № 1. – 2013. – S. 117– 126.
148. Simon H. A. Administrative behavior : a study of decision-making processes in administrative organization. – New York: Free Press, 1976. – 364 p.
149. Simon H. A. New Science of Management Decision. – New York: Harper, 1960. – 224 p.
150. Von Winterfeldt D., Edwards W. Decision analysis and behavioral research. – Cambridge [Cambridgeshire] ; New York: Cambridge University Press, 1986. – 604 p.
151. Zadeh L. A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic //Fuzzy Sets and Systems, 1997, September, Vol. 90, no. 2. – P. 111–127.

ЗМІСТ

Наукове видання

МАЛЯР Микола Миколайович

МОДЕЛІ І МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ОБМЕЖЕНО-РАЦІОНАЛЬНОГО ВИБОРУ

Монографія

Друкується за авторською редакцією.
Коректура авторська.

Підписано до друку 11.01.2016. Формат 60х84/16.
Умов.друк.арк. 7,14. Гарнітура Times New Roman.
Папір офсетний. Зам. №76. Наклад 300 прим.

Видруковано ПП «АУТДОР-ШАРК»
88000, м.Ужгород, пл. Жупанадська, 15/1.
Тел.: 3-51-25.
E- mail: office@shark.com.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців,виготівників, і розповсюджувачів видавничої продукції Серія 3т №40 від 29 жовтня 2012 року