Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma

Ungvári Nemzeti Egyetem

Ukrán-Magyar Oktatási-Tudományos Intézet

Fizika és Matematika Tanszék

Mikla Viktor, Petki Katalin, Traski Viktor, Traski Natália, Turóci - Sütő Jolán

PÉNZÜGYI ELEMZÉS ALAPJAI

UNGVÁR 2023

UDC 519.86(075.8)
BBK B 172я73
T -76

Mikla Viktor, Petki Katalin, Traski Viktor, Traski Natália, Turóci - Sütő Jolán. Pénzügyi elemzés alapjai (Szak: "Matematika"). – Ungvár: «AUTDOR-Shark», 2023. – 42 old.

RECENZENSEK:
Dr. Gecse Ferenc *a Technikai Tudományok doktora, professzor, a Fizika és Matematika Tanszék professzora.*
Dr. Mlávec Jurij *a Fizika és Matematika Tudományok kandidátusa, docens, a Kibernetika és Alkalmazott Matematika Tanszék docense*

Kiadását ajánlotta:

- Fizika és Matematika Tanszék
  (2023. június 23-i ülésén, 11.sz. jegyzőkönyv)
- Ukrán-Magyar Oktatási-Tudományos Intézet módszertani bizottsága
  (2023. június 27-i ülésén, 2.sz. jegyzőkönyv)
- Ukrán-Magyar Oktatási-Tudományos Intézet Tudományos Tanácsa
  (2023. június 30-i ülésén, 10.sz. jegyzőkönyv)

Міністерство освіти та науки України
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Українсько-угорський навчально-науковий інститут
Кафедра фізико-математичних дисциплін

В. І. МІКЛА, К.П. ПЕТКІ, В. Б. ТРОШКІ, Н. В. ТРОШКІ,
Й. М. ТУРОВЦІ - ШЮТЕВ

ОСНОВИ ФІНАНСОВОГО АНАЛІЗУ

Методичні рекомендації

УЖГОРОД - 2023

УДК 519.86(075.8)
ББК В 172я73
Т -76

В.І. Мікла, К.П. Петкі, В.Б. Трошкі, Н.В.Трошкі, Й.М. Туровці-Шютев
Т-76 Основи фінансового аналізу: Методичні рекомендації - Ужгород: «АУТДОР-Шарк», 2023. – 42с.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Федір ГЕЧЕ – *доктор технічних наук, професор, професор кафедри фізико-математичних дисциплін.*

Юрій МЛАВЕЦЬ – *кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри кібернетики та прикладної математики.*

Рекомендовано до друку:

- **Кафедрою фізико-математичних дисциплін**
  (протокол №11 від 23 червня 2023р.)
- **Науково-методичною комісією Українсько-угорського навчально-наукового інституту**
  (протокол №2 від 27 червня 2023р.)
- **Вченою радою Українсько-угорського навчально-наукового інституту**
  (протокол №10 від 30 червня 2023р.)

Tartalom

ELŐSZÓ

Minden egyes értékpapírba való befektetést alapos elemzés kell, hogy megelőzzön. Az elemzés célja, segíteni minél jobb döntést hozni, azáltal, hogy a lehető legjobb értékpapírt válasszuk ki. Egyértelmű, hogy a pénzügyi piac eszközei nem egyformák. Rengeteg dolog van, ami befolyásolja az értékpapír jövőbeli értékét. A körültekintő, intelligens befektetőnek illik tudnia ezeket és ezen tényezők alapján képes legyen a legjobb befektetési döntést hoznia.

Ez a jegyzet elsősorban az Ukrán-magyar oktatási és tudományos intézet negyedéves matematika szakos hallgatói számára készült a “Pénzügyi elemzés” című tantárgy előadásai alapján. A pénzügyi elemzés a matematika és azon belül a valószínűségszámítás egyik ága. Ennek a kurzusnak a folyamán a hallgatók megismerkednek a pénzügyi elemzés alapfogalmaival, közöttük olyanokkal, mint a kamatláb, diszkontláb, akkumuláció, annuitások, hitel, befektetés, stb. Ezek a fogalmak nemcsak közgazdasági szempontból vannak megmagyarázva, hanem inkább matematikai eszközök segítségével. A tantárgy ismeretei segítik a jól képzett matematikai analitikus felkészítését.

A jegyzet célja az, hogy segítséget nyújtson a “Pénzügyi elemzést” tanulmányozó matematika szakos diákok számára az önálló munkában, továbbá, hogy használható ismereteket nyújtson tanulmányaikban és a vizsgára való eredményes felkészülésben.

§1. A PÉNZÜGYI PIAC ESZKÖZEI

A pénzügyi piac eszközei (árui) számos vonatkozásban eltérnek a szokásos árucikkektől, például nem szolgálnak a közvetlen szükséglet kielégítésére. Miután nem rendelkeznek használati értékkel, nem is amortizálódnak, nem is kopnak el, mint a közönséges termékek. Piaci értéküket nem befolyásolja a fizikai megjelenés. Általában speciális jogszabályok, előírások kötelezik kiállítójukat a formai követelmény betartására. Belső értékkel nem rendelkeznek, ezért belső értéküket az adja, hogy későbbi időpontra szóló követelést testesítenek meg. A pénzügyi eszközök a megtakarítás ideiglenes átadására szolgálnak. Számos formájuk lehet, többek között, értékpapír, elismervény, utalvány, szerződés vagy egyéb jogi dokumentum.

1.1. Értékpapírok

Az értékpapír valamilyen vagyonnal kapcsolatos jogot megtestesítő forgalomképes okirat. Elnevezése onnan ered, hogy a vagyonjog értékét képviseli. Az értékes jog a papírhoz kapcsolódik, így a papír maga is értékét nyeri. Az értékpapírban lévő vagyonjog rendkívül sokféle lehet. Az értékpapír tulajdonképpen egy igazolás, a benne körülírt jog érvényesítésének az eszköze. Az értékpapír legfőbb különlegessége és egyben a legkarakterisztikusabb jellemvonása abban rejlik, hogy úgy testesíti meg a benne körülírt jogot, hogy az csak az értékpapír által létezik. A sokáig kötelezően kinyomtatandó okirat napjainkban átadta helyét a csak számlanyilvántartásban létező csupán elektronikus jelként megjelenő ún. dematerializált értékpapírnak. A dematerializált értékpapír nyilvántartásban létező, elektronikus úton rögzített és továbbított értékpapírszámlán nyilvántartott, az értékpapír jogszabályában meghatározott valamennyi tartalmi kelléket azonosítható módon tartalmazó adat. Kibocsátásakor, a jegyzés lezárásakor, amikor a kibocsátandó értékpapír mennyiség véglegessé válik, a kibocsátó egyetlen olyan okiratot állít elő, amely minden alapvető fontosságú adatot tartalmaz. Annak ellenére, hogy ez a dokumentum minden alapvető, s egyben az értékpapíroknál kötelezően előírt kelléket tartalmazza, nem minősül értékpapírnak. Az értékpapírokban foglalt jogok átruházhatóságának részletes jogi szabályozása elsőként a váltónál alakult ki, ezért általános gyakorlat szerint a többi értékpapír esetén is a váltóra vonatkozó szabályokat kell alkalmazni.

1.2. Az értékpapírok csoportosítása

Forgalomképesség alapján az értékpapírokat 2 alapvető csoportra bonthatjuk. A bemutatásra szóló értékpapírokon nincs feltüntetve a kedvezményezett neve. Átruházásuk a papír egyszerű fizikai átadásával történik. A névre, illetve rendeletre szóló értékpapírok mindig egy meghatározott személy nevére, illetve rendelkezésére vannak kiállítva, így ezek egyszerű átadással nem ruházhatóak át. Az értékpapírokban foglalt jogot csak írásbeli nyilatkozattal lehet elvégezni. A dematerializált értékpapír mindig névre szóló. Átruházása kizárólag értékpapírszámlán történő terhelés, illetve jóváírás útján kerülhet rá sor.

Az értékpapírokban vagyonjog szerint hitelviszonyt, tagsági jogokat, illetve áruval kapcsolatos jogokat megtestesítő értékpapírokat különböztethetünk meg. A hitelviszonyt megtestesítő értékpapírokat szokás kamatozó papíroknak is nevezni.

Az értékpapírokat hozama szerint a következő típusokra bonthatjuk:

1. formailag nem kamatozó (váltó, csekk, diszkontkincstárjegy, zéró kupon, kötvény, diszkont betéti jegy);
2. fix kamatozású (kötvény klasszikus formái) ;
3. a változóhozomány osztalékpapírok (részvény, részjegy);
4. átmeneti formák (változó kamatozású és az átváltható kötvény).

Az értékpapírok lejárata szerint:

1. rövid, 1 évnél nem hosszabb lejáratúak (csekk, váltó, kincstárjegy);
2. középlejáratúak, melyek futamideje általában 1-5 év;
3. hosszúlejáratúak, 5 évnél hosszabb futamidejűek (záloglevelek);
4. lejárat nélküli értékpapírok (örökjáradékú kötvény).

A forgalmazás területi felosztása alapján:

1. belföldi forgalomra szánt értékpapírok;
2. nemzetközi forgalomra szánt értékpapírok, melyeknek 2 típusa létezik:
   - külföldi kötvény, amely egy másik országban, a forgalmazó ország pénznemében kibocsátott kötvény;

- eurókötvény, olyan kötvény, amelyet egy másik országban, de egy harmadik ország valutájában bocsátanak ki.

A forgalom koncentráltsága szempontjából megkülönböztetünk a tőzsde kereskedési tárgyát képző, illetve tőzsdén nem forgalmazott értékpapírokat. Az előbbi kategóriába tartozó értékpapírokat tovább bonthatjuk tőzsdén jegyzett, azaz 1. osztályú, más néven A – kategóriájú értékpapírokra, illetve tőzsdén forgalmazott 2. minőségű osztályba sorolt, ún. B – kategóriájú értékpapírok csoportjára.

Az értékpapírok kibocsátója szerint:

1. állampapírok, melyeket kibocsátójuk szerint tovább kategorizálhatjuk:
   - az állami költségvetés által kibocsátott értékpapírok (kincstárjegy, államkötvény);
   - az állam központi szervei fejezetei által kibocsátott értékpapírok (kötvények);
   - a helyi önkormányzatok által kibocsátott értékpapírok.
2. pénzintézetek által kibocsátott kötelezettségek (letéti jegy);
3. társaságok, gazdálkodó szervek által kibocsátott értékpapírok (részvények, vállalati kötvények).

1.3. Váltó

Váltó – rövid lejáratú rendeletre szóló fizetési igérvény, amelyben a váltóadós (intézményezett) a váltón feltüntetett időpontban és összegben fizetést ígér a váltó tulajdonosának, intézményezőnek. A váltó jellemzően a kereskedelmi kapcsolatokban az áruszállítások pénzügyi elszámolások során születő hiteleszköz, ezért sokáig kereskedelmi hitelnek is nevezték. Ezt a szállító és vevő közötti későbbi fizetésre szóló megállapodást kereskedelmi váltónak nevezzük. Ritkábban egyszerű pénzkölcsön dokumentálására, tartozás elismerésére állítják ki. Ilyenkor beszélhetünk finánsz váltóról. A váltó mindig jogcímmentes pénztartozást, pénzkövetelést testesít meg. Tartalmaz kamatot, de formailag mindez a váltóból nem derül ki. A váltónál, mint értékpapíron nincs feltüntetve, hogy miért állították ki, hogy az adós miért ígér benne fizetést. Így tehát nem ad alapot arra, hogy a pénzkövetelésen kívül bármilyen követelést érvényesíthető legyen. Minden váltó, még ha nem is szól kifejezetten rendeletre, a váltóátruházás útján átruházható. A váltóátruházó személyt forgatónak, a váltó, s vele együtt a váltóból eredő valamennyi jog megszerzőjét forgatmányosnak nevezik. A váltó forgalomképessége biztosítja, hogy nemcsak hiteleszközként, hanem tartozások kiegyenlítésére, a váltó másra történő átruházásával közvetlen fizetőeszközként is funkcionálhat. A forgatók kötelezettség teljesítésére vonatkozó felelőssége miatt a váltó rendkívül megbízható fizetési eszközként minősül. Sőt, minél több előírás szerepel egy váltón, a váltóbirtokos szempontjából az annál biztonságosabb.

1.4. Váltó típusok

A fizetésre kötelezett személy szerint idegen - és sajátváltót különbözetünk meg. Az idegenváltó kibocsátója egy másik személy, fizetési kötelezettséget ígér egy harmadik személynek, vagyis a váltón feltüntetett kedvezményezettnek. Az idegenváltó utalványi alakkal bír, azaz a kiállító utasít valakit, hogy meghatározott összeget meghatározott helyen és időben fizessen ki egy harmadik személynek. Az ilyen alakú váltót intézményezett váltónak vagy röviden intézménynek nevezik. Sajátváltó esetén a kiállító a saját fizetési kötelezettségét ígéri. Arra kötelezi magát, hogy meghatározott összeget meghatározott helyen és időben kifizet. Éppen ezért a sajátváltó csak két személyt tételez fel: a kiállítót, vagyis az adóst, aki a saját nevében ígér fizetést, illetve a rendelvényest, azaz a hitelezőt. Az alaptípusok mellett léteznek egyéb speciális váltók:

1. intézvényezett sajátváltó, amelynél a kiállító és az intézvényezett egy személy;
2. sajátrendeletre szóló váltó, amelynél a kibocsátó és a rendelvényes egy személy;
3. bizományi váltó, amelynél a kibocsátó a saját nevében, de megbízója számlájára állítja ki a váltót.

A váltó lejárása, vagyis a fizetés esedékességének megjelölési módja szerint:

1. határozott napra szóló váltó, amely a váltón feltüntetett konkrét napon esedékes;
2. látra (megtekintésre) szóló váltó, amely akkor esedékes, amikor a váltóbirtokos azt fizetésre bemutatja;
3. a lát (megtekintés) után bizonyos időre szóló váltó, amit előbb elfogadás végett be kell mutatni a címzettnek, a saját váltót pedig láttamoztatásra a kiállítónak. A váltó az ettől számított határidő lejáratakor lesz esedékes.

A váltó speciális változatai:

1. avalváltó (kezes aláírással ellátott váltó);
2. rektaváltó (csak engedéllyel forgatható);
3. solaváltó (egyetlen példányban kiállított váltó);
4. telepített váltó (nem az elfogadó fizeti ki vagy az elfogadó lakóhelyétől földrajzilag eltérő helyen fizetik ki).

1.5. Kötvény

A kötvény névre szóló, megtestesítő értékpapír. A kötvény kibocsátásával a kibocsátó adós beruházási célok finanszírozására általában hosszúlejáratú pénzügyi kötelezettséget vállal és ennek eredményeként likvid pénzeszközökhöz jut. E kötelezettség arra irányul, hogy a kötvényen feltüntetett összeget, annak meghatározott kamatját vagy egyéb járulékait, valamint a vállalt esetleges szolgáltatásokat a megjelölt időben és módon a kötvény mindenkori tulajdonosának megfizeti. A kötvény tulajdonosa a kibocsátó intézmény üzletvitelébe sem beleszólási joggal, sem valóságos, sem formális társtulajdonosi jogokkal nem rendelkezik.

A kötvény jogi formáját tekintve kölcsön. A hitel a lejáratig szól, a kötvény névértékét a kibocsátó legkésőbb a lejáratkor köteles visszafizetni. Ez alól kivételt képez az örökjáradék kötvény, amelynél a kibocsátó magát örök időkre (vagy a tulajdonos élete végéig) a szokásos kamatnál valamivel nagyobb összeg fizetésére kötelezi.

A törlesztés alapvető formái:

- lejáratkor egy összegben;
- a futamidő alatt azonos időszakonként (pl.: évenként egyenlő) részletekben;
- bizonyos idő után megkezdett, de szinte egyenlő részletekre osztott törlesztés;
- sorsolás szerinti törlesztés (általában a nyereménykötvényeknél alkalmazott);
- annuitásos törlesztés (az adós egyenletes teherviselését biztosítja);

A kamat mértéke szerint:

- fix kamatozású kötvények (az előre megállapított kamatláb az egész futamidő alatt változatlan);

- lebegő rátájú vagy változó kamatozású kötvények (A kamatszintet valamilyen gazdasági változóhoz kötik. Többnyire az ilyen esetekben a kamat 2 részből áll: egy előre megállapított mértékű rögzített kamatból és egy mozgó vagy lebegő kamatból;
- zérókupon kötvény (kamatszelvény nélkül bocsátják ki és a lejáratkor a befizetett összegnél magasabb összeg fizetését garantálja).

1.6. Jelzáloglevél

A jelzáloglevél olyan kamatozó értékpapír, amelyet hosszú lejáratú, telekkönyvileg bebiztosított jelzáloghitelt fedez. A jelzáloglevél a kötvény közeli rokona. A kötvényhez képesti legfőbb eltérése az, hogy a jelzáloglevél az adós tartozásainak fedezeteként ingatlanra vonatkozó zálogjogot testesít meg telekkönyvi bejegyzés alapján. A jelzáloglevelet csak erre feljogosított, erre szakosított pénzintézetek (jelzáloghitel – intézetek, földhitelintézetek) bocsáthatnak ki. Lejárati ideje jellemzően 5 és 25 év között mozog.

1.7. Letéti jegy

A letéti jegy olyan névre szóló értékpapír, amelyben a pénzintézet arra kötelezi magát, hogy az abban megjelölt részére befizetett pénzösszeget, illetve annak kamatát a letéti jegy mindenkori tulajdonosának a megjelölt időben és módon megfizeti. A kölcsönügylet adósa tehát kizárólag pénzintézet lehet, hitelezője pedig a letéti jegy mindenkori tulajdonosa.

A bankbetéttől az különbözteti meg, hogy forgalomképes, így likviditása nagyobb. A kamat mértékét a kibocsátó határozza meg.

A letéti jegyen fel kell tüntetni az alábbiakat:

- a kibocsátó megnevezését;
- a névértékét, értékpapírkódot és sorszámot;
- kamat és beváltási feltételeket;
- kiállítás helyét és napját;
- a kibocsátó aláírását.

A letéti jegy egyik változata a betéti jegy (okiratok). Ezen okiratok tulajdonképpen egy betétszerződést testesítenek meg. A betéti okiratok közzé tartozik a pénztárjegy, a kamatozó – jegy, értékjegy és a hozamjegy.

1.8. Részvény

A részvény a részvénytársaságok alapításakor (illetve alaptőkéjük felemelésekor) kibocsátott értékpapír, amely a vállalat tőkéjének adott hányadát testesíti meg. A vállalat által kibocsátott részvények névértékének összege adja a részvénytársaság alaptőkéjét. A részvényes az értékpapír megvásárlásával pénzét véglegesen a vállalkozás rendelkezésére bocsátja és részvényei névértéke erejéig a vállalat tulajdonosává válik. A részvényt tulajdonosa bármikor eladhatja.

A részvénytársaság alapítása történhet nyilvánosan vagy zárt körben. A nyilvános alapítás nyilvános eljárással, részvényjegyzés útján történik. A nyilvános kibocsátásnál nem kötelező forgalmazót (bankot, brókercéget) igénybe venni, de tőzsdére való bevezetésnél igen zártkörű alapítás esetén az alapítók arra vállalnak kötelezettséget, hogy a társaság valamennyi részvényét átveszik. Ebben az esetben a részvénytársaság egyetlen részvényét sem hozhatják nyilvánosan forgalomba, hiszen ebben az esetben a társaság már nyilvánosan működne.

Az alaptőke felemelésére akkor kerül sor, ha a társaság új tőkét kíván bevenni, tehát új részvényeket hoz forgalomba.

A részvényes három területen érvényesítheti vagyoni jogait:

- részvénytársaság nyereségéből való részesedési jog, más néven osztalékra való jog;
- likvidációs árbevételre való jog;
- elővételi jog.

A részvénytársaság fennállása alatt a mindenkori részvénytulajdonosokat részvényük névértékének arányából a vállalkozás éves adózás utáni nyereségének egy bizonyos hányada illeti meg, osztalék formájában.

1.9. Befektetési jegy

A befektetési jegy törvényben meghatározott módon és alakszerűséggel az alapkezelő által sorozatban kibocsátott vagyoni és egyéb jogokat biztosító, átruházható érték. A kibocsátó meghatározott pénzösszegnek a rendelkezésre bocsátásával arra kötelezi magát, hogy azt a befektetési jegy tulajdonosa érdekében befektetési alap kialakítására fordítja és az így létrehozott befektetési alapot a befektetők általános megbízásából kezeli.

A befektetési jegyrészesedést, tagsági jogokat megtestesítő, forgalomképes értékpapír. Tulajdonosa korlátozott tulajdonosi jogokat szerez, ugyanis kizárólag a hozamra és a likvidációs ellenértékre jogosult, az alap működésébe nem szólhat bele.

A befektetési jegyet kizárólag befektetési alapkezelő társaság bocsáthat ki nyilvános vagy zárt jegyzés útján.

A befektetési jegy névre szóló és futamideje alapján lehet nyílt – és zártvégű. A nyílt, azaz meghatározatlan ideig működő alapok befektetési jegyeit nyílt végű befektetési jegynek nevezzük. Az ilyen jegyeket a kibocsátó bármikor, azaz minden munkanapon köteles visszavásárolni, mégpedig előre meghatározott áron. A zártvégű befektetési alap által kibocsátott befektetési jegyet hívjuk zártvégű befektetési jegynek. A zártvégű befektetési jegy meghatározott futamidejű. A zártvégű alapok befektetési jegyeit az alapkezelő a futamidő alatt nem vásárolhatja vissza, visszafizetésük csak a lejáratkor lehetséges.

1.10. Közraktári jegy

A közraktári jegy rendeletre szóló, árukövetelést megtestesítő értékpapír. Kibocsátója a közraktár. A közraktári jegy a közraktárban elhelyezett áru tulajdonjogát, illetve az áru felett való rendelkezési jogot testesíti meg. A közraktár speciális, korlátozott tevékenységi körrel felruházott intézmény. Legfőbb, általános tevékenységei a következők:

- a befogadott áru minőségi, időleges tárolása;
- egyéb kiegészítő szolgáltatások: fuvarozás, csomagolás, minőség és mennyiség meghatározása, értékbecslés, vámkezelés és egyéb hatósági vizsgálatok elvégzése;
- hitelnyújtás;
- garanciavállalás;

A közraktári jegy maximum 1 évre szólhat, s annak időtartalmát nem lehet meghosszabbítani. Ha a szerződés lejáratát követően az árut nem értékesítik, akkor a közraktári jegy birtokosa és a közraktár új szerződést kötnek.

A közraktári jegy két részből, az árujegyből (cedule) és a zálogjegyből (warrant) áll. Az árujegy és a zálogjegy együttes birtoklása jogosít a közraktárban elhelyezett áru kiszolgáltatásának igénylésére. A közraktári jegy két része önálló életet is élhet, külön – külön is átruházható.

§2. A PÉNZ IDŐÉRTÉKE

A pénz ára idővel változik. Például, a most megkapott 100 hrivnya jelenleg többe kerül, mint ugyanez a 100 hrivnya egy év múlva. Felmerül a kérdés, hogy most jobb elkölteni a 100 hrivnyát vagy egy év múlva? A válasz egyértelmű. Szakmai nyelven ez a pénz időértéke. Definiáljuk konkrétabban.

A pénz időértéke – a pénz árának csökkenése. Ez a folyamat nem csak az inflációval magyarázható.

Hiteli kockázat – kockázat, amely során nem kapjuk meg a konkrét összeget a jövőben.

Likviditási kockázat – azok az eszközök (készletek, értékpapírok, követelések), amelybe most befektethetünk, de nem lesznek elérhetőek egy bizonyos idő múlva. Végül visszakaphatjuk a pénzt, de nem használhatjuk fel most és emiatt csökken az értéke. Vagyis, amikor kölcsönadunk, ezzel átadjuk a használati jogot másnak és ezért a jogért fizetni kell.

Kamat – az a díj, amelyet az adós fizet a hitelezőnek a pénz használati jogáért. A kamat nagysága előre megbeszélődik, ez lehet egy konkrét összeg, amelyet visszaadunk a hitellel együtt vagy néhány kisebb fizetés. A hitellel együtt megemlíthetjük a betét példáját is.

A betét – az az összeg, amelyet beruházunk a bankba egy konkrét időre (ezért a pénzügyi analízisben használják nem csak a hitelfelvétel kifejezést, hanem a befektetést is).

Abban az esetben, ha a kamatot a hitelezés végén fizetjük vissza, akkor legtöbbször ezt az összeget a kamatlábon keresztül számítjuk.

Kamatláb – a hitel azon része, amelyet a kölcsönért fizetünk egy konkrét idő alatt (legtöbb esetben egy év). Például, ha az évi kamatláb: $i = 0{,}1$, akkor 100 hrivnya tőke esetében egy év múlva vissza kell fizetnünk

$$100 + 100 \cdot 0{,}1 = 110$$

hrivnyát.

Most általánosítsuk. Ha C – a hitel összege, i – az évi kamatláb, akkor egy év múlva $C(1 + i)$ összeget kell visszafizetnünk. A kamatlábat általában nem $i = 0{,}06$ formában jelölik, hanem százalékokban, azaz, mint $i = 6\%$.

Tehát, ha a kamatláb már definiálva van egy évre, akkor érthető, hogy mennyit kell visszafizetni az év végén. A kérdésre, hogy mennyit kell visszafizetnünk egy t év múlva, nem ilyen egyszerű a válasz. Létezik 2 abszolút külön módszer, amely segítségével kilehet számítani a kamat összegét néhány év elteltével.

1. Egyszerű kamatozás.

Ez a módszer lineárisan függ az időtől. Vagyis a kamat összege, amelyet vissza kell fizetni a hitelezés végén lineárisan függ a hitelezés idejétől. Ha C – összegű kölcsönt veszünk fel, t évre, i – az évi kamatláb, akkor a hitelezés végén

$$C(1 + ti) \tag{2.1}$$

összeget kell visszafizetnünk. Itt a t értéke nem feltétlenül egész (azaz lehet fél, negyed is).

2. Kamatos (komplex) kamatozás.

Tételezzük fel, hogy a bank lehetőséget ad elhelyezni a betétet i kamat alá, ahol az elhelyezés az év elején történik. A befektető ebben az esetben egy év múlva leveheti a pénzét, amelynek az összege már $C(1 + ti)$, majd újból letétre helyezheti. Akkor az összeg, amelyet két év múlva megkap:

$$C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^{\,2} = C(1 + 2i + i^2) > C(1 + 2i).$$

Érthető, hogy a befektető minden év végén felbontaná a betétet és újból elhelyezné. Annak érdekében, hogy megelőzzék a sok haszontalan munkát bevezették a kamatos kamatozást. A különbség abban rejlik, hogy a kamatot kamatra számítják.

A befektető a befektetés végén annyit kap vissza, mintha minden év végén felbontaná és újból elhelyezné a betétet. Ebben az esetben, ha C – a befektetett összeg, i – a kamatláb, akkor t – év múlva a befektető

$$C(1+i)^{t} \tag{2.2}$$

összeget kap vissza, amiből C – a tőke, $C[(1+i)^{t}-1]$ – pedig a kamat. Ha napokban számítjuk, akkor

$$C(1+i)^{d/365}. \tag{2.3}$$

A két módszeren kívül léteznek más módszerek is, például a vegyes módszer: ha az invesztíció ideje, azaz a t nem egész szám. Ilyen esetben a szám egész részére alkalmazzuk a kamatos kamatozást, a többire, azaz a törtrészre pedig az egyszerű kamatozást. Ha $t=n+s$, ahol $n\in\mathbb{Z}$, $s\in[0;1)$, akkor az invesztíció összege, amely eredetileg C, t év múlva $C(1+i)^{n}(1+si)$. Ezt a kamatszámítási módot a gyakorlatban ritkán használják. Ezért a továbbiakban, ha nincs megadva feltétel, akkor maradunk az egyszerű kamat mellett és a minimális idő 1 év.

Vannak helyzetek, amikor a kamatot nem a hitelidő lejárata után fizetik ki, hanem az elején, azaz előleggel. Ebben ez esetben a nagyságát d – vel jelöljük, nem kamatlábnak, hanem diszkontlábnak nevezzük. Tételezzük fel, hogy a C összeget befektetjük egy évre, azzal a feltétellel, hogy a kamatot az év elején kapjuk. Akkor az előleg Cd lesz. Ha a betét összege $C(1-d)$, akkor egy év múlva visszakapjuk a C összeget, amelyből Cd – a kamat. Ezek alapján meghatározhatjuk az összefüggést a kamatláb és a diszkontláb között:

$$iC(1-d)=Cd \Rightarrow i=\frac{1}{1-d}-1.$$

§3. PÉNZÁRAMLATOK

Amint azt kiderítettük, a pénz értéke az idő folyamán változik. Hogyan hasonlítsuk össze a bejövő összegeket különböző időpontokban? Könnyebb helyzetben vagyunk, ha az időpont már elmúlt. Tételezzük fel, hogy i – az évi kamatláb. Ha egy C - összeget betétre helyeztünk t – évvel ezelőtt, akkor az akkumuláció végén $C(1+i)^t$ összeget kapunk. Ebben az esetben $C(1+i)^t$ lesz a pénz jelenértéke és ahhoz, hogy összehasonlítsunk két különböző időpontban bejött összeget, elég összehasonlítani a két összeg jelenértékét. Ugyanígy a K nagyságú összeg, t év múlva $K(1+i)^t$ – be fog kerülni. Ezért, hogy kiderítsük, hogy mennyibe kerül egy összeg, amely t év múlva C – be fog kerülni egy egyenletet kell megoldanunk:

$$K(1+i)^t = C \Rightarrow K = \frac{C}{(1+i)^t} = C\nu^t,$$

amely megadja a C összeg jelenértékét a t időpontban. A $\nu = \frac{1}{1+i}$ - szorzót diszkont tényezőnek nevezzük. Magát a folyamatot pedig, amely abban rejlik, hogy a jövendő pénzösszeg jelenértékét meghatározzuk diszkontálásnak.

Idáig csak a lokális összegről volt szó. A reális befektetések viszont számításba vesznek néhány bevételt és néhány kiadást különböző időpontokban. Ilyen esetben már pénzáramlatokról beszélünk.

A pénzáramlatok összetevői lehetnek mint pozitívak, úgy negatívak is. Mivel a pénzáramlatoknál különböző időpontokban különböző összegekről van szó, ezért nem elég összeadni az összes bejöveteleket és kiadásokat, hanem a pénzösszeg jelenértékét figyelembe véve kell végrehajtanunk a műveletet. Tételezzük fel, hogy a pénzáramlat $C_1, C_2, \ldots, C_n$ összegekből áll a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpontokban. Akkor a jelenértékét kiszámíthatjuk a következő képlet alapján:

$$C_1\nu^{t_1} + C_2\nu^{t_2} + \cdots + C_n\nu^{t_n} = \sum_{k=1}^{n} C_k\nu^{t_k}. \tag{3.1}$$

Ha pedig ki akarjuk deríteni, hogy milyen összeg akkumulálódott egy t időpontra, akkor a $\sum_{k:t_k\le t} C_i(1+i)^{t-t_k}$ képletet használhatjuk.

§4. A KAMAT ÁLTALÁNOS ELMÉLETE

Tételezzük fel, hogy befektetünk 1 hrivnyát egy t időpontban. Egy év múlva $1+t(i)$ hrivnyát kapunk, ahol $t(i)$ – effektív évi kamatláb a t és $t+1$ időszak között. Akkor ahhoz, hogy ki tudjuk számítani, hogy milyen összeget kapunk egy C összegből n év múlva, a következő számításokat kell elvégeznünk:

$$C[1+i(0)][1+i(1)]\ldots[1+i(n-1)].$$

Vegyünk fontolóra egy befektetést h időre (h - nem feltétlenül egész szám). Akkor az évi nominális kamatlábat $i_h(t)$ – vel jelölik és a következőképpen határozhatjuk meg: ha egy t – időpontban befektetünk egy C összeget, h időre, akkor $Chi_h(t)$ lesz a kamat, $C(1 + hi_h(t))$, pedig az akkumulált összeg.

Ha a kamatláb nem függ az időtől, akkor egyszerűen i_h – val jelöljük. Ebben az esetben, ha a $h = Vp$, ahol p – egész szám, akkor ezt a nominális kamatlábat p – szer konvertálódó nominális kamatlábnak nevezzük, amely jelölése: $i^{(p)} = i_{1/p}$. Akkor minden $1/p$ év múlva a befektetett összeg $(1 + i^{(p)}/p)$ – szer növekszik. Azaz, ha egy C összeget befektetünk az év elején, akkor $C(1 + i^{(p)}/p)^{p}$ összeget kapunk vissza. Ha más szempontból nézünk erre a befektetésre, akkor egy év múlva $C(1 + i)$ összeget kapunk vissza, ahol i - az effektív évi kamatláb. Ebből kifolyólag megkapjuk az összefüggést az effektív és a nominális kamatláb között:

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p}. \tag{4.1}$$

Ugyanígy összefüggésbe hozhatjuk a nominális kamatlábat és nominális diszkontlábat

$$1 + \frac{i^{(p)}}{p} = \left(1 + \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-1}. \tag{4.2}$$

§5. AKKUMULÁCIÓ ÉS DISZKONTÁLÁS

A pénzi analízis fő feltételezése: a kamatláb nem függ attól, hogy milyen összeget fektettünk be. Vagyis az akkumuláció összegek aránya egyenlő a befektetett összegek arányával. Ezért határozzuk meg az akkumulációs szorzót.

Akkumulációs szorzó – az az összeg, amely a t_z időpontra akkumulálódott. Két időpont között a következőképpen jelöljük: $A(t_1, t_2)$. Vagyis, ha ki akarjuk számítani, hogy milyen összeg akkumulálódott egy konkrét időpontban, akkor a befektetett összeget meg kell szorozni a megfelelő akkumulációs szorzóra.

Ha $t_1 < t_2 < t_3$, akkor $A(t_1, t_3) = A(t_1, t_2)\, A(t_2, t_3)$, amely kifejezést az akkumulációs szorzó következetessége elvének nevezünk. A meghatározásból kifolyólag:

$$A(t, t+h) = 1 + hi_h(t) \tag{5.1}$$

vagy

$$i_h(t) = \frac{A(t,t+h)-1}{h}. \tag{5.2}$$

Ha a $h \to 0$, akkor $\delta(t) = \lim_{h\to 0} i_h(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t,t+h)-1}{h}$, ahol $\delta(t)$ – kamatintenzitás. A k – t úgy interpretáljuk, mint a nominális kamatlábat, amely minden pillanatban konvertálódik. Ha egy C összeget befektetünk egy t időpontban, akkor egy nagyon rövid idő múlva (dt), az akkumulált összeg $C(1 + \delta(t)dt)$ lesz. Tudjuk, hogy $1 + \delta(t)dt \approx e^{\delta(t)dt}$. Ha ezt számításba vesszük, akkor meghatározhatjuk az akkumulációs szorzót a kamat intenzitásán keresztül:

$$A(t_1, t_2) = exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\right\} \tag{5.3}$$

Ha a kamat intenzitása nem függ az időtől, akkor

$$A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_2 - t_1)}. \tag{5.4}$$

Hasonlóan meghatározhatjuk a diszkontszorzót:

$$\nu(t_1, t_2) = (A(t_1, t_2))^{-1} = exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\right\}. \tag{5.5}$$

A $\nu(0, t)$ diszkontszorzó fontos szerepet játszik abban az esetben, amikor a jelenérték kiszámításáról van szó, ilyenkor a jelölése: $\nu(0, t) = \nu(t)$. Ha a kamat intenzitása nem függ az időtől, akkor

$$\nu(t) = \nu^t = exp\{-\delta t\}.$$

Tételezzük fel, hogy a pénzáramlat $C_1, C_2, \dots$ összegekből áll a $t_1, t_2, \dots$ időpontokban. Akkor a jelenértéke:

$$C_1\nu(t_1) + C_2\nu(t_2) + \cdots = \sum_k C_k \nu(t_k).$$

Az akkumuláció összege egy t időpontban: $\sum_{k:t_k \le t} C_k A(t_k, t)$.

Tételezzük fel, hogy $\rho(t)$ – a szüntelen pénzáramlat intenzitása, $t \ge 0$ és $S(t_1, t_2)$ – az az összeg, amely bejött a t_1 és t_2 időpont között. Akkor

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt.$$

Vagyis a t és dt, nagyon rövid idő között a bejövő összeg $\rho(t)dt$ lesz. Ezért a szüntelen pénzáramlat jelenértéke:

$$\int_0^\infty \rho(t)\nu(t)dt. \tag{5.6}$$

Tételezzük fel, hogy a pénzáramlat két részből áll: az első a C_k összegek a t_k időpontokban, a második pedig a szüntelen pénzáramlat, amelynek $\rho(t)$ az intenzitása. Akkor a pénzáramlat jelenértéke:

$$\sum_k C_k \mathrm{v}(t_k) + \int_0^\infty \rho(t)\nu(t)dt.$$

Példa (Sztudli képlet).

Ha a kamat intenzitása $\delta(t) = p + \frac{s}{1+re^{st}}$, ahol p, r, s - konkrét paraméterek, amelyek a kamatlábtól függnek. Ebben az esetben a diszkont függvény a következőképpen van meghatározva:

$$\nu(t) = \frac{1}{1+r}\nu_1^t + \frac{1}{1+r}\nu_2^t,$$

ahol $\nu_1 = e^{-(p+s)}$, $\nu_2 = e^{-p}$.

§6. ÉRTÉKEGYENLET

Haszon – azaz összeg, amelyet a befektető kap, azért, hogy nem használhatja a pénzét a befektetés ideje alatt. Emellett az évi haszont évi befektetési rátának is nevezik.

Tételezzük fel, hogy a befektető passzívai a $t_1, t_2, \ldots$ időpontokban $L_1, L_2, \ldots$ és az aktívai ugyanezekben az időpontokban $A_1, A_2, \ldots$. Akkor a nettófizetési összeg egy t_k időpontban $C_k = A_k - L_k$ lesz, továbbá az i befektető évi megtérülési rátája a következő egyenlőségből határozható meg:

$$J\mathrm{E}(i) = C_1\nu^{t_1} + C_2\nu^{t_2} + \cdots = 0, \tag{6.1}$$

$$A_1\nu^{t_1} + A_2\nu^{t_2} + \cdots = L_1\nu^{t_1} + L_2\nu^{t_2} + \cdots \tag{6.2}$$

ahol $\nu = {}^{1}\!/_{(t+i)}$. Itt az (1) és (2) – értékegyenletek.

Ha az értékegyenletnek van több megoldása is, akkor az évi megtérülési ráta a legkisebb pozitív szám lesz.

Legyen: $S(k) = C_1 + \cdots + C_k$.

Tétel. Tételezzük fel, hogy n - természetes szám, amelyre $S(k) < 0$, amikor $k < n$, és $S(n) \leq 0$, $S(k) > 0$, amikor $k > n$. Ebben az esetben egyetlen kamatláb létezik, amely megfelel az (1) – es egyenletnek.

§7. ANNUITÁSOK

Annuitás – olyan egyenlő nagyságú pénzáramlatok sorozata, amely meghatározott ideig esedékes.

Tételezzük fel, hogy $i = const$ – az évi kamatláb, δ – az évi intenzitás.

Az annuitás legegyszerűbb formája a konstans annuitások. Ezek az évek során egyforma nagyságú fizetések. Ha a fizetés az év végén történik, akkor szokásos annuitásról beszélünk, ha pedig az év elején, akkor esedékes annuitásról van szó. Ha a szokásos annuitás jelenértékét szeretnénk kiszámítani az n év alatt, azaz az évi kifizetések nagyságát, amely jelölése $a_{\overline{n|}}$, a következő képletet használhatjuk:

$$a_{\overline{n|}} = \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n = \frac{1-\nu^n}{i},$$

Az előleges annuitás jelenértéke pedig:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{n-1} = (1+i)a_{\overline{n|}} = \frac{1-\nu^n}{d},$$

ahol d – az évi diszkontláb, amely megfelel az évi kamatlábnak.

Azokat az annuitásokat, amelyek akkumulálódnak n perióduson keresztül $s_{\overline{n|}}$ és $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ jelölik:

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^n_{a_{\overline{n|}}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

illetve

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^{n+1}_{a_{\overline{n|}}} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Ha az annuitás kifizetése nem most történik, hanem t év múlva, akkor az ilyen annuitást t évre elhalasztottnak nevezik. Az ilyen annuitás jelenértéke pedig a következőképpen számítható ki:

$${}_t|a_{\overline{n|}} = \nu^{t+1} + \nu^{t+2} + \cdots + \nu^{t+n} = \nu^t a_{\overline{n|}}.$$

Érthető, hogy

$$a_{\overline{n+m|}} = a_{\overline{n|}} + n a_{\overline{m|}} = a_{\overline{n|}} + v^n a_{\overline{m|}}.$$

Az utóbbi egyenletet annuitás egyenletnek nevezik.

Ha a kifizetések az annuitás után nem fejeződnek be, akkor szüntelen annuitásról beszélünk. A szüntelen szokásos annuitás jelenértéke: $a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i}$, az esedékes szüntelen annuitásé pedig: $\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d}$. Az annuitás egyenlete pedig:

$$a_{\overline{\infty|}} = a_{\overline{n|}} + v^n a_{\overline{\infty|}}.$$

7.1. Változó annuitás

Növekvő annuitás – olyan annuitás, amelynél a k év végén egy k – tól függő összeget fizetnek ki ($k = 1,2, \dots, n$). Az ilyen annuitás jelenértéke:

$$(Ia)_{\overline{n|}} = v + 2v^2 + \dots + nv^n = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$$

$$\text{vagy } \ddot{a}_{\overline{n|}} = i(Ia)_{\overline{n|}} + nv^n.$$

Az egyenletnek a következő az interpretációja: a befektetőnek, amely minden év elején felvesz egy valamilyen összeget, majd, hogy azt visszafizesse egy n időpontra, minden éven i nagyságú kamatot fizet.

Vagyis a k év végén a befektető kifizeti a ki kamatot és az n év végén visszafizeti az egész összeget.

A növekvő annuitás akkumulációja egy n időpontra a következőképpen számítható ki:

$$(Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}}$$

A csökkenő annuitás n évre – egy olyan annuitás, amely szerint a k év végén $n - k + 1$ összeget fizetnek ki ($k = 1,2, \dots, n$).

A csökkenő annuitás jelenértéke:

$$(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}.$$

Abban ez esetben, ha az n év szerinti szokásos annuitásnál a kifizetések számtani sorozatot alkotnak, akkor az ilyen annuitás jelenértéke a következő:

$$(a-b)a_{\overline{n|}} + b(Ia)_{\overline{n|}},$$

ahol a – az első kifizetés, b – a különbség a két kifizetés között.

7.2. Annuitások, amelyeknél az év folyamán többször történnek a kifizetések

Tételezzük fel, hogy az annuitás szerint egy év folyamán p alkalommal történik a kifizetés. Továbbá az annuitások konstansok és az évi kifizetések nagysága 1, vagyis ${}^{1}/_{p}$ év múlva ${}^{1}/_{p}$ összeget fizetünk ki. Az ilyen típusú szokásos annuitás jelenértéke n évre, a következő:

$$a_{\overline{n|}}^{(p)} = \frac{1}{p}\left(\nu^{1/p} + \nu^{2/p} + \cdots + \nu^{n}\right) = \frac{1-\nu^{n}}{i^{(p)}} = \frac{1}{i^{(p)}} a_{\overline{n|}}.$$

A bal oldala az egyenletnek a kamat azon jelenértéke, amelyet visszafizetünk minden n év végén, a jobb oldala pedig az a jelenérték, amelyet visszafizetünk minden ${}^{1}/_{p}$ év végén.

Esedékes annuitás - amely szerint minden ${}^{1}/_{p}$ év végén ${}^{1}/_{p}$ összeget fizetünk, jelenértéke a következő:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(p)} = \frac{1}{p}\left(1 + \nu^{1/p} + \nu^{2/p} + \cdots + \nu^{n-1/p}\right) = \frac{1-\nu^{n}}{d^{(p)}} = \frac{1}{i^{(p)}} d_{\overline{n|}}.$$

Az egy év alatt p – szer kifizetődő szokásos és esedékes annuitások akkumulációja egy n időpontban:

$$s_{\overline{n|}}^{(p)} = (1+i)^{n} a_{\overline{n|}}^{(p)} \text{ és } \ddot{s}_{\overline{n|}}^{(p)} = (1+i)^{n} \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(p)}.$$

A számításoknál az n nem feltétlenül egész szám, de a p és np csak egész szám lehet.

7.3. Folytonos annuitások

Folytonos annuitásról akkor beszélünk, amikor a kifizetések p – szer történnek egy év alatt. A folytonos annuitásokat nem bonthatjuk szokásos és esedékesre, mivel $p \to \infty$.

Konstans folyamatos annuitás n évre – az a pénzfolyamat, amelynek intenzitása konstans n éven keresztül. Az intenzitása többnyire egyenlő 1 – el. Az ilyen annuitás jelenértéke:

$$a_{\overline{n|}} = \int_{0}^{n} \nu^{t}\, dt = \frac{1-\nu^{n}}{\delta} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}},$$

az akkumuláció pedig

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|}.$$

Megkülönböztetünk 2 standard növekvő n éves annuitást:

1. A kifizetések intenzitása k perióduson keresztül konstans és egyenlő k – val.
2. A kifizetések intenzitása egy t időpontban egyenlő t – vel.

Az első esetben az intenzitás megadható egy lépcsőfüggvénnyel. Az ilyen annuitás jelenértéke a következő:

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k \int_{k-1}^{k} v^t \, dt = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta} = \frac{i}{\delta}(Ia)_{\overline{n}|}.$$

A második esetben az intenzitás egy lineáris függvény, az annuitás jelenértéke pedig:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n tv^t \, dt = \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{\delta}.$$

A folytonos annuitások periódusa lehet bármilyen egész szám vagy végtelen. Ha a periódus végtelen, akkor az ilyen annuitást örök annuitásnak nevezzük, a jelenértékét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$(\bar{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{\delta},\ (I\bar{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d\delta},\ (\bar{I}\bar{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{\delta^2}.$$

§8. ADÓSSÁG VISSZAFIZETÉSI BEOSZTÁS

A hitelezőt minden esetben érdekli, hogy annak az összegnek amelyet ő visszafizet, melyik része megy a hitel és melyik a kamat törlesztésére. Ha az L összegű hitelt visszafizetnék egy C összeggel, akkor egyértelmű, hogy L része megy a hitel törlesztésére és $C - L$ - a kamat. Az első összeget tőkeösszetevőnek nevezik, a másodikat pedig kamatösszetevőnek. Ha a hitelező részletenként akarja visszafizetni a hitelt, akkor lehetősége van elosztani a hitelt tőke- és kamatösszetevőkre, valamint csökkenteni a hitelt a tőkeösszetevő nagyságára. Ha a kifizetett részlet nem fedezi a periódus alatt rászámolt kamatot, akkor a hitel összege növekszik. Az ilyen elosztást adósság visszafizetési beosztásnak nevezik.

Tételezzük fel, hogy a hitelező a $t = 0$ időpontban felvesz egy L összegű hitelt, amelyet $x_1, x_2, \dots$ összegekként fizet vissza $1,2, \dots$ időpontokban, a kamatláb a $t = k$ és $t = k + 1$ időpontok között: $i(k)$.

Ebben az esetben igaz a következő egyenlet:

$$L = x_1[1 + i(0)]^{-1} + x_2[1 + i(0)]^{-1}[1 + i(1)]^{-1} + \cdots +$$
$$+x_k[1 + i(0)]^{-1} \dots [1 + i(k - 1)]^{-1} + \cdots$$

Az $F_0 = L$ összeg a hitel maradéka a periódus kezdetére. A $t = 1$ időpontban a rászámolt kamat $i(0)F_0$ lesz, azaz első részlet kamatösszetevője: $g_1 = i(0)F_0$, a tőkeösszetevője pedig: $f_1 = x_1 - i(0)F_0$. Akkor kiszámíthatjuk a hitel maradékát az első részlet visszafizetése után:

$$F_1 = F_0 - f_1 = L[1 + i(0)] - x_1 =$$
$$= x_2[1 + i(1)]^{-1} + x_3[1 + i(0)]^{-1}[1 + i(2)]^{-1} + \cdots$$

Ha tovább folytatjuk ezeket a számításokat, akkor könnyen megkaphatjuk a hitel maradékát t visszafizetés után:

$$F_t = L[1 + i(0)] \dots [1 + i(t - 1)] - x_1[1 + i(1)] \dots [1 + i(t - 1)] - \cdots - x_t =$$
$$= x_{t+1}[1 + i(t)]^{-1} + x_{t+2}[1 + i(t)]^{-1}[1 + i(t + 1)]^{-1} + \cdots$$

§9. PÉNZÜGYI JELLEMZŐK

Tételezzük fel, hogy az abszolút pénzügyi folyamat két részből áll: az első része C_k összegekből t_k időpontokban, a második szüntelen folyamat, amely intenzitása $\rho(t)$.

A pénzügyi folyamatok legegyszerűbb jellemzője a jelenértéke:

$$\sum_k C_k v^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t) v^t dt \tag{9.1}$$

A (9.1) kifejezést a pénzügyi folyamat abszolút jelenértékének is nevezzük. Ezt a jellemzőt gyakran használják a befektetési projektek összehasonlításánál. Az abszolút jelenérték hiányossága abban rejlik, hogy nem tudjuk meghatározni a befektetés jövedelmét az összehasonlításkor. Ezért használják a jövedelem jellemzőt:

$$P = \frac{1}{C}\left(\sum_k C_k v^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t) v^t dt\right).$$

Itt $C_1 = -C$, vagyis a $t_1 = 0$ időpontban befektettek egy C összeget és csak ezután kaptak jövedelmet.

A következő fontos pénzügyi jellemző a projekt megtérülési ideje. Tételezzük fel, hogy létezik egy olyan t_0 időpont, amelyre:

$$S(t) = \sum_{t_k \leq t} C_k + \int_0^t \rho(s)ds < 0,$$

ahol $t < t_0$ és $S(t) \geq 0$, ha $t \geq t_0$. A t_0 – a projekt megtérülési ideje. Ha nincs t_0, akkor a megtérülési idő végtelen.

Diszkont megtérülési idő – az az időpont, amelynél az akkumulált összeg pozitív. Tételezzük fel, hogy

$$V(t) = \sum_{t_k < t} C_k v^{t_k} + \int_0^t \rho(s) v^s ds.$$

Akkor t_0, az a legkisebb olyan szám, amelyre $V(t) < 0$, ha $t < t_0$ és $V(t) \geq 0$, ha $t \geq t_0$.

§10. A KONSTANS ANNUITÁS ADÓSSÁG VISSZAFIZETÉSI BEOSZTÁSA

Tételezzük fel, hogy az i – kamatláb konstans az egész perióduson keresztül és a hitelt minden n év végén egyforma nagyságú összegekkel fizetik vissza. Továbbá az évi visszafizetések nagysága 1. Akkor a hitel összege $a_{\overline{n|}}$.

A t részlet visszafizetése után a hitel maradéka $F_t = a_{\overline{n-t|}}$, vagyis a hitel maradéka egyenlő a megmaradt részletek jelenértékével. Akkor a t részlet tőkei összetevője: $f_t = F_{t-1} - F_t = a_{\overline{n-t+1|}} - a_{\overline{n-t|}} = v^{n-t+1}$.

Legtöbbször az adósság visszafizetési beosztást táblázat segítségével ábrázolják a következőképpen:

Év	A hitel maradéka az év elejére	Kamat összetevő	Tőke összetevő	A hitel maradéka az év végére
1	$a_{\overline{n|}}$	$1 - v^n$	v^n	$a_{\overline{n-1|}}$
2	$a_{\overline{n-1|}}$	$1 - v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-2|}}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
t	$a_{\overline{n-t+1|}}$	$1 - v^{n-t+1}$	v^{n-t+1}	$a_{\overline{n-t|}}$
.	.	.	.	.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{\overline{1}\rceil} = \nu$	$1-\nu$	ν	0

§11. KONSTANS KAMATLÁB ÉS A HITEL VALÓDI ÉRTÉKE

Tételezzük fel, hogy egy L összegű hitelt n egyforma összegekkel k éven keresztül törlesztenek és emellett az évi kamatláb F, egy konstans érték. Akkor a hitel árát kiszámíthatjuk: $D = LFk$. Akkor egyértelmű, hogy $L + D = L(i + Fk)$, az az összeg, amelyet a hitelezőnek vissza kell fizetni. Emellett érthető, hogy a részlet nagysága $\frac{L+D}{n}$ lesz.

Most kiszámíthatjuk a hitel valódi értékét. Továbbra is feltételezzük, hogy a hitel összege L, amelyet n egyforma összegekkel fizetnek vissza m alkalommal egy év alatt, minden periódus végén és a kamatláb változatlan: F. Akkor a hitel ára: $D = \frac{LFn}{m}$ és a részlet: $\frac{L+D}{n} = L\left(\frac{1}{n} + \frac{F}{m}\right)$.

Számításba véve az értékegyenletet megkapjuk a hitel valódi értékét:

$$L = mL\left(\frac{1}{n} + \frac{F}{m}\right) a^{(m)}_{\overline{n/m}\rceil}.$$

A könnyebb számítások érdekében a továbbiakban feltételezzük, hogy $L = 1$, akkor

$$1 = m\left(\frac{1}{n} + \frac{F}{m}\right) a^{(m)}_{\overline{n/m}\rceil}.$$

Most számításba véve az $a^{(m)}_{\overline{k}\rceil}$ képletét, kapjuk

$$m = \left[(1+i)^{1/m} - 1\right] = \left(\frac{m}{n} + F\right)\left[1 - (1+i)^{-n/m}\right] \qquad (11.1)$$

Alkalmazzuk a Taylor – sorfejtést a (11.1) egyenlet jobb és bal oldalára egyaránt és számításba véve a Taylor – sor első három összetevőjét, kapjuk:

$$-\frac{n}{m}F + \frac{n+1}{2m}i + \frac{n(n+m)}{2m^2}Fi - \frac{(n+1)(n+3m+1)}{6m^2}i^2 = 0 \qquad (11.2)$$

Ha nem vesszük figyelembe azokat az összetevőket, amelyek i^2 és Fi tagokat tartalmaznak, akkor megkapjuk az hitel éves valódi értéke határértékét: $i \approx 2F\frac{n}{n+1}$.

Ha itt az i^2 határértékét helyettesítjük az i határértékével, akkor a hitel éves valódi értékére: $i \approx \frac{2F}{\frac{n+1}{n}+\frac{n-3m+2}{3m}F}$.

Egyértelmű, hogy abban az esetben, ha a kifizetések csak egyszer zajlanak egy évben, akkor az utolsó képletet egyszerűsíthetjük:

$$i \approx \frac{2F}{\frac{n+1}{n}+\frac{n-1}{3}F}.$$

Megjegyezzük azt is, hogy ha a hitel éves valódi értéke nagyon eltér a megkapott határértéktől, akkor pontosabb számításokat szükséges alkalmaznunk az egyenlet megfejtéséhez.

§12. MEJKEM KÉPLET

Figyelembe veszünk egy N névértékű hitelt, melynek ára – R, p kifizetésekkel egy év alatt, D kamattal. Akkor a visszafizetett összeg: $C = NR$.

Tételezzük fel, hogy a hitelt n év múlva egy összeggel térítik meg. Tételezzük továbbá, hogy az a befektető, amely t_1 adót fizet felakar venni egy ilyen hitelt.

A $g = \frac{D}{R}$ értéket egy egyes kifizető összeg kupon értékének nevezik.

Az árat, amelyet a befektető fizet a felvett kölcsönért a következőképpen számíthatjuk ki:

$$A = (1-t_1)DNa_{n|}^{(p)} + Cv^n = \frac{(1-t_1)g}{i^{(p)}}C(1-v^n) + Cv^n = K\frac{(1-t_1)g}{i^{(p)}}(C-K),$$

ahol K – a visszafizetett összeg jelenértéke, $\frac{(1-t_1)g}{i^{(p)}}(C-K)$ – a kifizetett kamat jelenértéke. Ezt a képletet Mejkem képletének nevezik (MP).

A képletet abban az esetben is használhatjuk, ha a hitel nem egy összeggel fizetődik vissza, hanem részletenként. Tételezzük fel, hogy a hitelt m kifizetésekkel törlesztik: n_l év múlva N_l névértékű összeget, ahol $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_m$. Akkor a hitel azon részének az ára, amelyet az n_l időpontban törlesztenek, a következő:

$$A_l = K_l + \frac{(1-t_1)g}{i^{(p)}}(C_l - K_l),$$

ahol $C_l = RN_l$ – az l. kifizetés összege, $K_l = C_l v^{n_l}$ – ezen összeg jelenértéke.

Akkor az egész hitel nagyságát a következőképpen számíthatjuk ki:

$$A = \sum_{l=1}^{m} A_l = K - \frac{(1-t_1)g}{i^{(p)}}(C-K),$$

ahol $C = \sum_{l=1}^{m} C_l$ – az egész törlesztendő összeg, $K = \sum_{l=1}^{m} K_l$ – a kifizetések jelenértéke.

Az MP csak akkor használható, ha a hitel felvevése és törlesztése egy konkrét időpontban zajlik, valamint a D, t és R konstansok egyformák maradnak az egész idő folyamán.

Ellenkező esetben a következőket tehetjük:

1. Felosszuk a hitelt kisebb részekre, amelyekhez felhasználhatjuk az MP-t és ezután összeadjuk a megkapott összegeket.
2. Kiszámítjuk a hitel árát, majd ezután változtatunk azokon a változókon, amelyek nem voltak konstansok.

§13. FELADATOK

I. Tételezzük fel, hogy a bank évi 10% alá adja a kölcsönt. A kamatot havonta számítják, akkor:
   1. Milyen összeget kell visszafizetni az év végén, ha az ügyfél egy C összegű hitelt vett fel?
   2. Mivel lesz egyenlő az effektív kamatláb?
   3. Milyen összeget fizet vissza az ügyfél az év végén és mivel lesz egyenlő az effektív kamatláb, ha a kamatot folytonosan számítják?

II. Tételezzük fel, hogy a kamatot évente számítják. Mennyi idő múlva kétszereződik meg a befektetett összeg? Adjon választ erre a kérdésre, ha:
   a) $r = 0{,}03$;
   b) $r = 0{,}13$;
   c) $r = 0{,}08$
   d) $r = 0{,}1$.

III. A diszkontláb, amely négyszer konvertálódik, 8%. Számítsa ki
   a) a megfelelő kamatlábat, amely félévente konvertálódik;
   b) a megfelelő diszkontlábat, amely havonta konvertálódik.

IV. Tételezzük fel, hogy van 2 jövedelmező pénzügyi folyamatunk, amely szerint az év végén kapjuk meg a betéteket:

$$20\ \ 20\ \ 20\ \ 15\ \ 10\ \ 5,$$

$$10\ \ 10\ \ 15\ \ 20\ \ 20\ \ 20.$$

   Melyik pénzügyi folyamat jelenértéke nagyobb, ha az évi kamatláb:
   a) 5%;

b) 10%.

V. Egy 5 éves kötvénynek 10 000 hrivnya az ára és 10% az évi kupon rátája, amely félévente kerül kifizetésre. Vagyis ez azt jelenti, hogy a kötvény tulajdonosa félévente 500 hrivnyát fizet 5 éven keresztül és ezután még visszafizeti a 10 000 hrivnyát. Számítsa ki a kötvény árát a vásárlás pillanatában, ha a kamatláb:

a) 6%;
b) 10%;
c) 12%.

VI. A hitelező 2 lehetőséget kapott a hitel törlesztésére. Az első, hogy 10 000 hrivnyát fizessen ki egyszerre. A második, hogy 10 000 hrivnyát most és 10 000 hrivnyát 10 év múlva. Melyik lehetőség érdemesebb, ha a kamatlábat folytonosan számítják és:

a) 2%;
b) 5%;
c) 10%.

VII. Egy személy eldöntötte, hogy 20 év múlva nyugdíjba megy. Ahhoz, hogy majd nyugdíjas korában 30 éven keresztül havi 1000 hrivnyát kapjon most 20 éven keresztül havi A összeget helyez betétre. Tételezzük fel, hogy az évi kamatláb 12%, amelyet havonta fizetnek ki. Számítsa ki az A – t!

VIII. Egy személy megvett egy tévét, amely 4200 hrivnyába került. Rögtön kifizetett 1000 hrivnyát és minden hónapban 160 – at 24 hónapon keresztül, amelyet 1 hónap múlva kezdett el a vásárlás után. Számítsa ki az effektív évi kamatlábat!

IX. Számítsa ki a 2 éves befektetés profitrátáját, ha az az 1000 hrivnya befektetésre az első év végén 400 hrivnya jövedelmet ad és a 2. év végére:

a) 400 hrivnya;
b) 600 hrivnya;
c) 800 hrivnya.

Hogyan változik meg a válasz, ha felcseréjük az évi jövedelmeket?

Megjegyzés. A profitráta $i = \frac{b}{a} - 1$, ahol b – az 1 év múlva kapott jövedelem, $\frac{b}{a}$ – a befektetett összeg. Ha a jövedelmet nem egyszerre kapjuk meg, hanem k év múlva és egy b_k összeget fektetünk be minden k évben, akkor az i – t úgy számítjuk ki, mint az $a + \sum_{k=1}^{n} b_k\,(1+i)^{-k} = 0$ egyenlet megoldását.

X. Milyen összeget szükséges most betétre helyezni, ha az évi kamatláb 7% és a befektető 30 éven keresztül évi 1000 hrivnyát akar megkapni?

XI. Tételezzük fel, hogy a kamat intenzitása δ. Számítsa ki az akkumulált összeget a t_1 és t_2 időpontok között!

XII. A kamat intenzitása $\delta(t) = 0{,}12$. Az időt években mérik. Számítsa ki az évi nominális kamatlábat egy:

a) 1 hónapos betétre;

b) 6 hónapos betétre.

XIII. A kamat intenzivitása $\delta(t) = 0{,}05 + 0{,}001t + 0{,}0001t^2$, $0 \leq t \leq 10$.

1. Számítsa ki az akkumulált összeget a $t = 10$ időpontban. ha a befektetett összeg 100 hrivnya a $t = 0$ időpontban!
2. Számítsa ki az akkumulált összeget a $t = 10$ időpontban, ha a befektetett összeg 100 hrivnya a $t = 5$ időpontban.
3. Számítsa ki az ekvivalens kamat intenzivitását!

XIV. A kamat intenzivitása a t időpontban a következő:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}06 + 0{,}005t, & 0 \leq t < 4 \\ 0{,}12 - 0{,}01t, & 4 \leq t < 6. \\ 0{,}06\,, & t \geq 6 \end{cases}$$

Számítsa ki:

a) a $t = 0$ időpontban befektetett 1 hrivnyára akkumulált összeget a tetszőleges t időpontban;

b) a $t = 5$ időpontban 100 hrivnyára akkumulált összeg értékét a $t = 0$ időpontban.

XV. Tételezzük fel, hogy az időt években számítják és a kamat intenzivitása:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}04, & 0 \leq t < 10 \\ 0{,}03, & t \geq 10 \end{cases}$$

Számítsa ki a $v(t)$ - folytonos pénzáramlat diszkont függvényét, amelynek 1 az intenzivitása, 15 éven keresztül a $t = 0$ időponttól kezdve.

XVI. A kamat intenzivitása a következőképpen van megadva:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}04, & 0 < t \leq 10 \\ 0{,}001(t - 10)^2 + 0{,}04, & t > 10 \end{cases}.$$

Számítsa ki:

a) a 150 hrivnyára akkumulált összeget, a $t = 0$ időponttól kezdve, a $t = 20$ időpontig;

b) a folytonos pénzáramlat jelenértékét, évi 10 hrivnya kifizetéssel, a $t = 5$ időponttól a $t = 10$ időpontig;

c) a folytonos pénzáramlat jelenértékét, amelynek $e^{-0{,}03t}$az intenzivitása, a $t = 0$ időponttól a $t = 10$ időpontig.

XVII. Legyen $\delta(t) = 0{,}01(t^3 - 9t)$ – a kamat intenzivitása. Számítsa ki a megfelelő évi effektív kamatlábat a $t = 3$ időponttól a $t = 4$ időpontig.

XVIII. Egy hitelező a következőképpen összegeket vett fel: 1000 hrivnyát – 2000 január 1., 2500 hrivnyát – 2001 január 1., 3000 hrivnyát – 2001 július 1. A kamat intenzivitása konstans és egyenlő évi 0,06 – al. Számítsa ki a pénzáramlat értékét:

a) 1998 január 1.;
b) 1999 március 1.

XIX. A befektető megvásárolt egy részvényt 2 hónappal azelőtt, hogy e részvény után kifizették volna az osztalékot, amely 12 cent. Az osztalékot évente fizetik ki. A befektető azt feltételezi, hogy az osztalék öröknövekvő évi 4% – kal. Számítsa ki azon részvény árát, amelyet szükséges a kifizetőnek kifizetni ahhoz, hogy a tiszta jövedelme 7% legyen.

XX. Bizonyítsa be, hogy a növekvő annuitás jelenértéke $(s_a)_{\bar{n}_1} = \left(\ddot{a}_{\bar{n}_1} - nv^n\right)/i.$

XXI. Számítsa ki az $\ddot{s}^{(12)}_{\overline{\sigma_1 \delta_1}}$ értékét, ha az évi effektív kamatláb 13%.

XXII. A diák megnyert egy 3 éves pályázatot. A következőképpen folyósították:
1 év – 5000 hrivnya az év folyamán;
2 év – 5000 hrivnya egyenlőrészekkel, kifizetéssekel minden hónap elején;
3 év – 5000 hrivnya egyenlőrészekkel, előleggel, félévente.
Számítsa ki az egész pályázat jelenértékét az 1. év kezdetére, ha a kamatláb 8% és évente háromszor konvertálódik.

XXIII. A hitelező felvett 100 hrivnya kölcsönt és 7 hónap múlva 110 hrivnyát fizetett vissza. Számítsa ki:

a) az évi kamatlábat;
b) az évi diszkontlábat;
c) az évi kamat intenzivitását.

§14. TIPIKUS FELADATOK MEGOLDÁSA

1. A befektető betétre helyezte a pénzét. Milyen idő múlva kapja vissza a pénz dupláját, ha tudjuk, hogy az évi nominális kamatláb 10% és folyamatos a kamatszámolás?

Megoldás: Jelöljük a befektettet összeget C-vel. Akkor felhasználva a kettes paragrafusban kapott képletet felírhatjuk, hogy

$$C(1 + 0{,}1)^t = 2C,$$

vagy $(1{,}1)^t = 2$. Innen kifejezve a t megkapjuk hogy $t = \frac{ln2}{ln1{,}1} \approx 7$ év. Vagyis a befektető minimum 7 év múlva kapja vissza a befektetett összeg dupláját.

2. Tételezzük fel, hogy egy személy felvett egy C összegű hitelt egy évre, i – az évi kamatláb, a kamatszámolási mód kamatos kamatozás, amely számítása félévenként történik. Milyen összeget kell visszafizetnie a félév végén?

Megoldás: A (4.1) egyenlet felhasználása után megkapjuk, hogy az évi i kamatlábnak megfelel a $0{,}5i$ félévi kamatláb. Akkor felhasználva a (2.3) képletet megkapjuk hogy hitelezőnek a félév végén $C(1 + 0{,}5i)^2$ összeget kell visszafizetnie.

3. Milyen összeget kell visszafizetni egy C nagyságú hitelből egy év múlva, ha a kamatláb 15% és a kamatszámolási mód kamatos kamatozás, amelyet havonta számítanak?

Megoldás: Felhasználva ugyanazt a képletet, amit az előző esetben is, megkapjuk, hogy az évi $15\% -$kos kamatlábnak megfelel a $1{,}25\% -$kos havi kamatláb. Ezért a (2.3) képletből megkapjuk, hogy

$$C(1 + 0{,}0125)^{12} = 1{,}0125^{12}C \approx 1{,}161C.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az év végén a hitelezőnek $1{,}161C$ összeget kell visszafizetnie.

4. Tételezzük fel, hogy a banki kamatláb 6%, valamint a kamatot folyamatosan számítják az év folyamán. Számítsa ki az effektív kamatlábat!

Megoldás: Felhasználva az (5.2) képletet és számításba véve, hogy a feladatban a $h = 1$ megkapjuk, hogy $A(t, t + 1) - 1 = i_1(t)$. Mivel a banki kamatláb állandó, vagyis nem függ az időtől ezért az akkumulációs szorzó kiszámításához felhasználhatjuk az (5.4)-es képletet $A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_1 - t_2)}$. Számításba véve, hogy a $t_1 = t$ és a $t_2 = t + 1$, megkapjuk $A(t, t + 1) = e^{\delta(t+1-t)} = e^{\delta}$. Az adott feladatban a $\delta = 0{,}06$. Akkor az akkumulációs szorzó és az évi kamatláb összefüggéséből megkapjuk, hogy

$$i = e^{0{,}06} - 1 \approx 0{,}062.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az effektív kamatláb 6,2%.

5. Számítsa ki az effektív kamatlábat, ha a nominális kamatláb 10%, a kamatszámolási módszer a kamatos kamatozás, amely félévente zajlik!

Megoldás: Az évi és a havi kamatláb összefüggéséből megkapjuk, hogy

$$i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p - 1.$$

Ebbe a képletbe behelyezve a feladat adatait megkapjuk, hogy

$$i = \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^2 - 1 = 1{,}05^2 - 1 = 0{,}1025.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az effektív kamatláb $10{,}25\%$.

6. Tételezzük fel, hogy az évi kamatláb havi kifizetésekkel 7%. Számítsa ki az évi kamatlábat félévenkénti kifizetések esetére!

Megoldás: Legyen a befektetett összeg (vagy a felvett hitel összege) C. Akkor, mivel az évi kamatláb 7%, az év végén visszakapott összeg

$$C\left(1 + \frac{0{,}07}{12}\right)^{12} = 1{,}0058^{12}\mathrm{C} \approx 1{,}0723\mathrm{C}.$$

Jelöljük $i^{(2)}$ - a keresett kamatlábat, amely megfelel az évi 7% kamatlábnak. Mivel, függetlenül attól, hogy hogyan számítsuk a kamatlábat, az év végén kapott összegeknek egyezniük kell ezért felírható

$$1{,}0723\mathrm{C} = C\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2.$$

Vagyis $1 + \frac{i^{(2)}}{2} \approx 1{,}0353$. Ez pedig azt jelenti, hogy $i^{(2)} = 0{,}706$. Vagyis az évi kamatláb félévenkénti kifizetések esetén 7,06%.

7. A befektető 100 hrivnyát betétre helyezett egyszerű kamatszámolási módszer mellett 10% alá, 2,5 évre. Ezután az összegyűlt összeget újból betétre helyezte ugyanilyen kamatszámolási módszernél 16% alá, T hónapra. A periódus végén 140 hrivnyát kapott. Mennyi a T értéke?

Megoldás: Felhasználva a (2.1) képletet, megkapjuk, hogy a 2,5. év végén a befektető $100(1 + 0{,}1 \cdot 2{,}5) = 125$ hrivnyát kapott vissza. Most felhasználva ugyanezt a képletet és számításba véve, hogy a befektetés végén a befektető 140 hrivnyát kapott vissza megkapjuk

$$125\left(1 + 0{,}16\frac{T}{12}\right) = 140.$$

Kifejezve innen a T-t, egyértelmű, hogy a befektetőnek 16% alá 9 hónapra kell befektetnie.

8. A befektető 1000 hrivnyát befektetett a következőképpen: 2 évre 8% és egyszerű kamatozási módszer alá, azután 6% diszkontláb alá, havi kifizetésekkel. Milyen összeg gyűl össze a 4. év végén?

Megoldás: Felhasználva a (2.1) képletet, megkapjuk, hogy a 2. év végén a befektető $1000(1+0{,}08\cdot 2)=1160$ hrivnyát kapott vissza. Mivel minket az érdekel, hogy milyen összeg gyűl össze a 4. év végén, ezért a következő időszak, amelyre a befektető elhelyezi az összegyűlt összeget 2 év lesz. Akkor a (4.2) képletből kifolyólag felírható, hogy

$$1160\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)^{-24}=1308{,}29.$$

Vagyis a befektető a 4. év végén $1308{,}29$ hrivnyát kapott vissza.

9. 100 hrivnyát befektettek egy évre 5,5% diszkontláb alá, majd ezután még egy évre 5,5% nominális évi kamatláb alá. Mindkét esetben a kifizetések negyedévente zajlanak. Milyen összeg gyűl össze a 2. év végén?

Megoldás: Felírjuk az általános képletet. Ha egy C összeget befektetünk egy évre d diszkontláb alá negyedévenkénti kifizetésekkel, akkor egy

$$C\left(1-\frac{d}{4}\right)^{-4t}$$

összeget kapunk vissza. Most, hogy ha ezt az összeget újból befektetjük egy évre i kamatláb alá negyedévi kifizetésekkel, akkor egy

$$C\left(1-\frac{d}{4}\right)^{-4t}\left(1+\frac{i}{4}t\right)^{4t}$$

összeget kapunk vissza. Ha ebbe a képletbe behelyettesítjük a feladatban szereplő adatokat, megkapjuk, hogy a befektető

$$C\left(1-\frac{d}{4}\right)^{-4t}\left(1+\frac{i}{4}t\right)^{4t}=100\left(1-\frac{0{,}055}{4}\right)^{-4}\left(1+\frac{0{,}055}{4}\right)^{4}=121{,}63$$

összeget kapunk vissza a 2. év végén.

10. Ha a kamatláb évi 5%, akkor hány év múlva négyszereződik az összeg?

Megoldás: Jelöljük a befektettet összeget C-vel. Mivel a feladatban nincs megadva a kamatozási mód, emiatt a kamatos kamatozásit választjuk. Akkor felhasználva a (2.2) képletett felírhatjuk, hogy

$$C(1+0{,}05t)^t = 4C$$

vagy $1{,}05^t = 4$. Innen kifejezve a t megkapjuk, hogy $t = \frac{ln4}{ln1{,}05} \approx \frac{1{,}386}{0{,}04879} \approx 28$. Vagyis a befektető minimum 28 év múlva kapja vissza a befektetett összeg négyszeresét.

11. Milyen összeget kell betétre helyezni minden hónap elején 60 hónap folyamán, ha a periódus végén 100000 hrivnyát akarunk visszakapni, az évi kamatláb 6%, havi kifizetésekkel?

Megoldás: Legyen ez az összeg C. Akkor, hogyha most betétre helyezzük ezt az összeget, akkor 60 hónap múlva $C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)^{60}$ összeget kapunk vissza. Hogyha egy hónap múlva helyezzük ezt az összeget betétre, akkor ez az összeg már csak 59 hónapon keresztül fog kamatozni. Ebben az esetben a visszakapott összeg $C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)^{59}$ lesz. Hogyha két hónap múlva helyezzük ezt az összeget betétre, akkor ez az összeg már csak 58 hónapon keresztül fog kamatozni és a visszakapott összeg $C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)^{58}$ lesz és így tovább. Ha az utolsó hónap elején helyezzük ezt az összeget betétre akkor $C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)$ összeget kapunk vissza. Mivel szükségünk van arra, hogy a 60 hónap végén 100000 gyűljön össze, ezért felírhatjuk, hogy

$$C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)^{60} + C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right)^{59} + \cdots + C\left(1-\frac{0{,}06}{12}\right) = 100000,$$

vagy

$$C\sum_{k=1}^{60} 1{,}005^k = 100000.$$

Kifejezve innen a C-t és kiszámítva az egyenletben szereplő összeg összegét, megkapjuk, hogy $C \approx 1426$. Vagyis ahhoz, hogy 60 hónap múlva 100000 hrivnyát kapjunk vissza minden hónap elején 1426 hrivnyát kell betétre helyezni az évi 6% kamatláb alá.

12. Tételezzük fel, hogy van 2 jövedelmező pénzügyi folyamatunk, amely szerint az év végén kapjuk meg a betéteket:

$$20\ \ 20\ \ 20\ \ 15\ \ 10\ \ 5,$$

$$10\ \ 10\ \ 15\ \ 20\ \ 20\ \ 20.$$

Melyik pénzügyi folyamat jelenértéke nagyobb, ha az évi kamatláb 3%?

Megoldás: A (3.1) –es képlet segítségével kiszámítjuk mindkét pénzügyi folyamat jelenértékét.

$$1{,}03^6 \cdot 20 + 1{,}03^5 \cdot 20 + 1{,}03^4 \cdot 20 + 1{,}03^3 \cdot 15 + 1{,}03^1 \cdot 10 + 1{,}03 \cdot 5 \approx 101{,}73,$$

$$1{,}03^6 \cdot 10 + 1{,}03^5 \cdot 10 + 1{,}03^4 \cdot 15 + 1{,}03^3 \cdot 20 +$$
$$+1{,}03^1 \cdot 20 + 1{,}03 \cdot 20 \approx 104{,}09.$$

Innen már egyértelmű, hogy a második pénzügyi folyamat jelenértéke nagyobb.

13. Tételezzük fel, hogy a kamat intenzitása $\delta(t) = a + bt$. Számítsa ki az akkumulált összeget a t_1 és t_2 időpontok között!

Megoldás: Felhasználva a (5.3) képletet, kiszámítjuk az akkumulációs szorzót

$$A(t_1, t_2) = exp\left\{\int_{t_1}^{t_2}(a + bt)dt\right\} = exp\left\{a(t_2 - t_1) + \frac{b}{2}(t_2^2 - t_1^2)\right\}.$$

Vagyis egy egyes összegre a t_1 és t_2 időpontok között $\delta(t) = a + bt$ kamat intenzitással $exp\left\{a(t_2 - t_1) + \frac{b}{2}(t_2^2 - t_1^2)\right\}$ összeg akkumulálódik.

14. Tételezzük fel, hogy az időt években mérik és $t_1 \leq t_2$, $A(t_1, t_2) = exp\left\{\frac{5}{100}(t_2 - t_1)\right\}$. Számítsa ki a 600 hrivnyára akkumulált összeget 15 év múlva, amely egy konkrét időpontban volt befektetve!

Megoldás: Mivel minket ebben az esetben az érdekel, hogy milyen összeg akkumulálódik a befektetéstől 15 évre rá, ezért kiválaszthatjuk a $t_1 = t$ és $t_2 = t$+15. Akkor

$$A(t, t + 15) = exp\left\{\frac{5}{100}(t + 15 - t)\right\} = e^{3/4}$$

De ez az akkumulált összeg egy egyes összegre. Ahhoz, hogy kiszámítsuk a 600 hrivnyára akkumulált összeget, a következőt tesszük:

$$600A(t, t + 15) = 600e^{3/4} \approx 1270{,}2$$

Vagyis 15 év alatt 600 hrivnyára 1270,02 hrivnya akkumulálódik.

15. A kamat intenzitása $\delta(t) = 0{,}12$. Az időt években mérik. Számítsa ki az évi nominális kamatlábat egy 7 napos betétre!

Megoldás: Felírjuk az összefüggést a kamat intenzitása és az évi nominális kamatláb között

$$i_h(t) = \frac{exp\left\{\int_t^{t+h} \delta(s)ds\right\} - 1}{h}.$$

Mivel minket egy 7 napos betét évi nominális kamatlába érdekel, ezért $h = \frac{7}{365}$. Akkor

$$i_h(t) = \frac{exp\left\{0{,}12 \cdot \frac{7}{365}\right\} - 1}{\frac{7}{365}} \approx 0{,}1201.$$

Vagyis az évi nominális kamatláb egy 7 napos betétre, ha a kamat intenzitása $\delta(t) = 0{,}12$ egyenlő 12,01%.

16. A kamat intenzitása $\delta(t) = \begin{cases} 0{,}05; & 0 < t \leq 10 \\ 0{,}08 + 0{,}003t; & t \geq 0 \end{cases}$. Számítsa ki a szüntelen pénzügyi folyamat jelenértékét a $t_1 = 0$ és $t_2 = 5$ időpontok között, ha a bejövő összegek intenzitása $\delta(t) = 100e^{0{,}01t}$!

Megoldás: A szüntelen pénzügyi folyamat jelenértékét az (5.6) képlet segítségével számíthatjuk ki. De ehhez ki kell számítanunk a $\nu(t_1, t_2)$. Ehhez az (5.5) képletet használjuk. Most számításba véve, hogy $t_2 = 5$ (vagyis $\delta(t) = 0{,}05$) megkapjuk, hogy

$$\int_0^t 0{,}05ds = 0{,}05t,$$

vagyis

$$\nu(t) = exp\{-0{,}05t\}.$$

Akkor a pénzügyi folyamat jelenértéke

$$JE = \int_0^5 100e^{0{,}01t}e^{-0{,}05t}dt = 100\int_0^5 e^{-0{,}04t}dt = \frac{100}{0{,}4}(1 - e^{-0{,}2}) \approx 453{,}17.$$

17. Számítsa ki az évi nominális kamatlábat, amely évente négyszer konvertálódik, ha a havi effektív kamatláb 0,5%!

Megoldás: Mivel a befektetés végén azonos összeget kapunk vissza, ezért

$$\left(\frac{i^{(4)}}{4} + 1\right)^4 = \left(i^{(12)} + 1\right)^{12},$$

ahol $i^{(4)}$ évi nominális kamatláb, amely évente négyszer konvertálódik, $i^{(12)}$ havi effektív kamatláb. Akkor

$$\left(\frac{i^{(4)}}{4}+1\right)^4 = 1{,}005^{12}.$$

Ebből az egyenletből kifejezve az $i^{(4)}$ –et megkapjuk, hogy $i^{(4)} \approx 0{,}0603$. Ez pedig azt jelenti, hogy évi nominális kamatláb, amely évente négyszer konvertálódik és megfelel a havi 0,5% effektív kamatlábnak - 6,03%.

18. Számítsa ki az évi diszkontlábat havi kifizetések mellett, ha az évi kamatláb havi kifizetésekkel 7%!

Megoldás: A (4.2) –es képletből felírhatjuk, hogy

$$\left(1-\frac{d^{(12)}}{12}\right)^{-12} = \left(1+\frac{0{,}07}{12}\right)^{12},$$

vagyis

$$\left(1-\frac{d^{(12)}}{12}\right)^{-12} \approx 1{,}00583.$$

Kifejezve innen a $d^{(12)}$-t, megkapjuk, hogy $d^{(12)} \approx 0{,}0695$. Ez pedig azt jelenti, hogy az évi diszkontláb havi kifizetések mellett 6,95%, hogyha az évi kamatláb havi kifizetésekkel 7%.

19. Az alábbi pénzügyi folyamatok közül melyik értékesebb, ha a kamatláb 10%:

a) $12,14,16,18,20$;

b) $16,16,15,15,15$;

c) $20,16,14,12,10$?

Megoldás: Ahhoz hogy kiderítsük, hogy melyik pénzügyi folyamat értékesebb, kiszámítjuk a pénzügyi folyamatok jelenértékét

a) $12\cdot 1{,}1^5 + 14\cdot 1{,}1^4 + 16\cdot 1{,}1^3 + 18\cdot 1{,}1^2 + 20\cdot 1{,}1 \approx 104{,}899$;

b) $16\cdot 1{,}1^5 + 16\cdot 1{,}1^4 + 15\cdot 1{,}1^3 + 15\cdot 1{,}1^2 + 15\cdot 1{,}1 \approx 103{,}808$;

c) $20\cdot 1{,}1^5 + 16\cdot 1{,}1^4 + 14\cdot 1{,}1^3 + 12\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1 \approx 99{,}789$.

Innen egyértelmű, hogy az a) pénzügyi folyamat a legértékesebb.

20. Betétre helyeztek 100 hrivnyát, majd 5 év múlva még 100-at. Milyen összeg akkumulálódik a 10. év végén, ha a kamat intenzitása $\delta(t) = 0{,}05 + 0{,}001t + 0{,}0001t^2$?

Megoldás: Számításba véve az (5.3)-as képletet, megkapjuk, hogy a betétre helyezett 100 hrivnya 10 év múlva $100exp\left\{\int_0^{10}(0{,}05+0{,}001\mathrm{t}+0{,}0001t^2)\,dt\right\}$ lesz. Mivel 5 év múlva még 100 hrivnyát betétre helyeznek ezért ez a 100 hrivnya már csak 5 évig fog kamatozni és $100exp\left\{\int_0^{5}(0{,}05+0{,}01\mathrm{t}+0{,}0001t^2)\,dt\right\}$ lesz a visszakapott összeg. Hogyha ezeket egyesítjük, akkor

$$100exp\left\{\int_0^{10}(0{,}05+0{,}001\mathrm{t}+0{,}0001t^2)\,dt\right\}+100exp\left\{\int_0^{5}(0{,}05+0{,}01\mathrm{t}+0{,}0001t^2)\,dt\right\}=100(exp\{0{,}5+0{,}05+0{,}033\}+exp\{0{,}25+0{,}125+0{,}00417\})=100(e^{0{,}583}+e^{0{,}379})\approx 317.$$

Vagyis 317 hrivnya akkumulálódik.

21. Számítsa ki az évi effektív kamatlábat a $t_1=3$ és $t_2=4$ időpontok között, ha a kamat intenzitása $\delta(t)=0{,}01(t^3-9t)$!

Megoldás: Ugyanazt a gondolkozási menetet folytatva, mint a 6, 17, 18 feladatok megoldásakor, megkapjuk

$$1+i=exp\left\{\int_3^4 0{,}01(t^3-9t)\,dt\right\}.$$

Kifejezve innen az i-t megkapjuk, hogy

$$i=exp\left\{\int_3^4 0{,}01(t^3-9t)\,dt\right\}-1=exp\left\{0{,}01\left(\frac{t^4}{4}-\frac{9t^2}{2}\right)\Big|_3^4\right\}-1=$$

$$=exp\left\{0{,}01\left(64-\frac{81}{4}-72+\frac{81}{2}\right)\right\}-1=e^{0{,}1225}-1\approx 0{,}1303.$$

Vagyis az évi effektív kamatláb, amely megfelel a $\delta(t)=0{,}01(t^3-9t)$, kamat intenzitásanak $t_1=3$ és $t_2=4$ időpontok között 13,03% lesz.

IRODALOM

1. Бойков А. В. Страхование и актуарные расчеты. – М.: РОХОС, 2004.
2. Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов. – М.: Олимп-Бизнес, 1997.
3. Ван Хорн Дж. К. Основы управления финансами. – М.: Финансы и статистика, 2000.
4. Галиц Л. Финансовая инженерия. Инструменты и способы управления финансовым рынком. — М.: ТВП, Научное издательство, 1998.
5. Жуленев С. В. Финансовая математика: введение в классическую теорию. – М.: Изд-во МГУ, 2001.
6. Летчиков А. В. Лекции по финансовой математике. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
7. Люу Ю.-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
8. Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001.
9. Росс С., Вестерфилд Р., Джордан Б. Основы корпоративных финансов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
10. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці/ М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко — К.: Інформтехніка, 1995.
11. Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2005.
12. Шапкин А. Экономические и финансовые риски. – М.: Дашков и К°, 2003.
13. Нікбахт Е., Гроппеллі А. Фінанси. – К.: Основи, 1993.
14. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – М.: Инфра-М, 2001.
15. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998. – Т. 1, 2.

Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний.
Формат видання 60х84/16.
Умовн. друк. арк. 3,72 Наклад:100. Зам. №00.
Видавництво ПП «АУТДОР – ШАРК»
88000, м. Ужгород, Україна
пл. Жупанатська, 15/1.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія 3т № 40 від 29 жовтня 2012 року.