МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра інформатики та фізико-математичних дисциплін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів спеціальності 126 Інформаційні системи та технології

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Ужгород
2024

УДК 512.64(076)
М-80

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 126 Інформаційні системи та технології. Лінійна алгебра / Уклад.: Морохович В.С., Кут В.І. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2024. 48 с.

Укладачі:
Морохович Василь Степанович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет»;
Кут Василь Іванович – доцент, кандидат технічних наук, завідувач кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Рецензенти:
Млавець Юрій Юрійович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет»;
Рубіш Василь Васильович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін факультету інформаційних технологій (протокол №6 від «27» грудня 2023 р.)

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету інформаційних технологій (протокол №1 від «18» січня 2024 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять з розділу «Лінійна алгебра» укладені відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 126 Інформаційні системи та технології. При написанні вказівок враховувалась можливість їхнього використання студентами заочної форми навчання, а також при дистанційному навчанні.

У методичних вказівках запропоновано методи розв’язання СЛАР: метод Крамера та матричний метод, які застосовуються для розв’язання квадратних СЛАР, а також універсальний метод Гаусса. Викладено математичний апарат, яким оперують ці методи: матриці, визначники, обернена матриця та ранг матриці. Кожному з цих понять відведена окрема тема, де міститься основний теоретичний матеріал, приклади розв’язання типових задач, а також завдання для аудиторної і самостійної роботи. Також у методичних вказівках наведено варіанти самостійних робіт і тестові завдання для самоконтролю.

Тема 1. Матриці та дії над ними

Теоретичні відомості

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), яка має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці позначають великими латинськими літерами: *A, B, C,…,* та скорочено записують наступним чином: $A_{m\times n} = (a_{ij})$, де a_{ij} – елементи матриці.

Матриця називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю, і позначається $\mathrm{O_{m\times n}}$.

Матриця називається *квадратною*, якщо кількість стовпців цієї матриці дорівнює кількості її рядків, тобто $m = n$. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а числа a_{1n}, $a_{2n-1)}, \dots, a_{n1}$ – *побічну діагональ*.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи окрім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю.

Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі цієї матриці дорівнюють одиниці. Одиничні матриці позначають літерами E_n або I_n.

Квадратна матриця називається *верхньою трикутною (нижньою трикутною)*, якщо всі її елементи нижче (вище) головної діагоналі, рівні нулю.

Матриця, яка містить один рядок (стовпець), називається *матрицею-рядком* або *вектор-рядком* (*матрицею-стовпцем* або *вектор-стовпцем*).

Матриця $A_{1\times n} = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n})$ є матрицею-рядком, що містить *n* елементів, а матриця $B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ є матрицею-стовпцем, що містить *m* елементів.

Матриця $A_{m\times n}$ називається *східчастою*, якщо крайній елемент кожного рядка знаходиться справа від крайнього елемента попереднього рядка. Наприклад, східчаста матриця розміру 3×4:

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називаються рівними між собою, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи, тобто $A=B$, якщо $a_{ij}=b_{ij}$.

Розглянемо основні дії над матрицями.

1. Множення матриці на число (вводиться для будь-яких матриць).

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* $\lambda\in R$, називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює добутку кожного елемента матриці A на число λ, тобто

$$c_{ij}=\lambda a_{ij},\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n.$$

Приклад 1.1. Для матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$ та числа $\lambda=-2$:

$$\lambda A=-2A=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ -14 & 2\\ 4 & -18\end{pmatrix}.$$

Матриця $-A=(-1)\cdot A$ називається *протилежною* до матриці A.

2. Додавання і віднімання матриць (вводиться тільки для матриць однакового розміру).

Сумою (різницею) матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\qquad (c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}),$$

де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A та B.

Позначається: $C=A+B,\ \ (C=A-B)$.

Приклад 1.2. Нехай задано матриці:

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 5\\ 7 & 8 & 3\end{pmatrix},\qquad A-B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -7 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Сформулюємо основні властивості операцій додавання матриць та множення матриці на число:

Для довільних узгоджених матриць A, B, C та чисел $\alpha,\beta\in$ R виконується:

1) $A+B=B+A$

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$

3) $A + O = O + A = A$
4) $A + (-A) = (-A) + A = O$
5) $1 \cdot A = A$
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

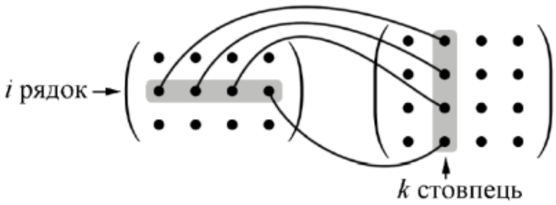
3. Множення матриць (вводиться тільки для узгоджених матриць).

Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Добутком матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ та $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ називається матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk},\ i = 1,2,\ldots,m,\ k = 1,2,\ldots,p.$$

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



З існування добутку AB не слідує існування добутку BA. У загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються *переставними* (або *комутуючими*).

Основні властивості операції добутку матриць:

Для довільних узгоджених матриць A, B, C та числа $\alpha \in R$ виконується:
1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + A \cdot C$
3) $A \cdot O = O \cdot A = O$
4) $A \cdot E = E \cdot A = A$
5) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$

Приклад 1.3. Знайти AB і BA, якщо: $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування:

$$AB = C_{2\times2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$c_{11} = 5 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) = 30;$$
$$c_{12} = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot (-1) = 40;$$
$$c_{21} = 0 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-2) = 10;$$
$$c_{22} = 0 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) = 15.$$

У результаті, $AB = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$.

Далі знаходимо $BA = C_{3\times3}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 45 \\ 40 & 26 & 59 \\ -10 & -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

4. Піднесення до степеня (вводиться тільки для квадратних матриць).

Квадратна матриця A^2 – це результат множення матриці A самої на себе, тобто $A \cdot A$. Аналогічно вводиться поняття k-го степеня матриці A.

Натуральним степенем k квадратної матриці A називається квадратна матриця A^k, яка задається співвідношенням:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ разів}}.$$

Для $k = 0$ вважають $A_n^0 = E_n$.

Нехай маємо многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ та квадратну матрицю A. Многочленом p від матриці A називається матриця $p(A)$, яка задається співвідношенням:

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E,$$

де E – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A.

Приклад 1.4. Знайти значення многочлена $f(A)$ для матриці A, якщо:

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2;\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування:

Спочатку знайдемо A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = 3A^2 + 4A - 2E = 3\begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -4 \\ -8 & 29 \end{pmatrix}.$$

5. Транспонування (вводиться для будь-яких матриць).

Транспонування матриці – перехід від матриці $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ до матриці $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$, при якому рядки та стовпці матриці міняються місцями зі збереженням порядку, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При цьому, матриця A^T називається *транспонованою* до матриці *A*.

Приклад 1.5. До матриці $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ транспонованою буде матриця $B^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Властивості операції транспонування:

Для довільних матриць *A*, *B* та числа $\alpha \in R$ виконується:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A_{m\times n} + B_{m\times n})^T = A^T + B^T$

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4) $\left(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}\right)^T = B^T \cdot A^T$

Квадратна матриця *A* називається *симетричною*, якщо $A^T = A$.

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Обчислити лінійні комбінації матриць *A*, *B*, *C*:

а) $2A + 5B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

б) $2A - 3B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $-2A - 5B + C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $4A + 3B - 2C$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити вирази, де *A, B, C* – задані матриці:

а) $3A+B\cdot C$, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & -7 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix};$$

б) $(2A-B)\cdot C^{\mathrm{T}}$, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -6 & 0\\ 4 & 1 & 5\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -10 & 3\\ 4 & 1 & 8\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix};$$

в) $5A\cdot(B+C)^{\mathrm{T}}$, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -11 & 9\\ 5 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 10 & -7\\ -9 & 2\end{pmatrix};$$

г) $A\cdot B\cdot C$, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\\ 1 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

4. Чи будуть матриці A і B комутуючими, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 0 & 5\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

5. Обчислити A^2, A^3, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

6. Обчислити добутки AA^T і A^TA. Якщо різниця AA^T-A^TA визначена, знайдіть її.

а) $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

7. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці *A*, якщо:

а) $f(x)=x^2-5x-2,\ A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^2 - 2x + 2, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f(x) = x^2 - x - 3, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Визначники та їх властивості

Теоретичні відомості

Будь-якій квадратній матриці можна поставити у відповідність число, що називається її *визначником* або *детермінантом* та позначається $\det A$, ΔA або Δ.

Визначником (детермінантом) 2-го порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, яке визначається виразом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схема обчислень визначника другого порядку полягає у відшуканні різниці добутку елементів головної діагоналі та добутку елементів побічної діагоналі.

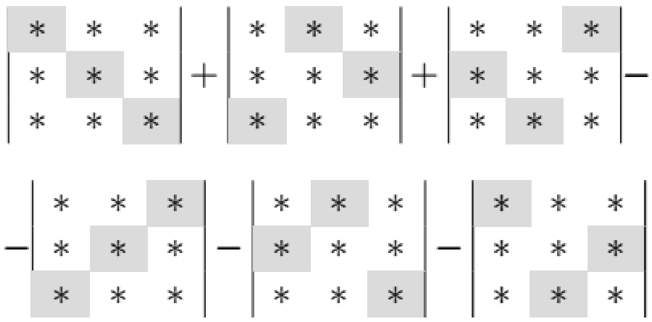
Визначником (детермінантом) 3-го порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число, яке визначається виразом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Обчислення виконуються за *правилом трикутників*: зі знаком “+” беруться добутки елементів головної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних головній діагоналі, та елемента, розміщеного у відповідному протилежному куті визначника. Зі знаком “–” беруться добутки елементів, побудовані за таким самим правилом відносно побічної діагоналі визначника.

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



Для обчислення визначників третього порядку використовують також *правило Саррюса*, яке полягає у дописуванні справа від визначника 1-го та 2-го стовпців зі збереженням порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника треба утворити зі знаком “+” алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком “–” беруться добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Приклад 2.1. Знайти визначники матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) = 6 + 20 = 26;$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 \cdot 4 -$$

$$-4 \cdot 1 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot (-2) - 6 \cdot 0 \cdot (-3) = 6 + 48 - 28 + 20 = 46;$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Визначником n-го порядку матриці $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\nolimits_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\mathrm{J}}\, a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де сума береться по всіх можливих перестановках з елементів множини $(1,2,3,\dots,n)$, а J – кількість інверсій у відповідній перестановці.

Основні властивості визначників:

1) Значення визначника не змінюється при транспонуванні (заміні всіх його рядків на відповідні стовпці, і навпаки), тобто $\det A = \det(A^{\mathrm{T}})$.

2) Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

3) При перестановці двох рядків (стовпців) місцями визначник змінює знак на протилежний.

4) Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) рівний нулю.

5) Спільний множник деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника. Звідси випливає, що якщо елементи якого-небудь рядка (стовпця) домножити на число λ, то визначник Δ множиться на це ж число λ.

6) Визначник, який містить два пропорційних рядки (стовпця), дорівнює нулю.

7) Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох визначників.

8) Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число. Наприклад, для стовпців визначника ця властивість виражається рівністю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mathrm{i}} & a_{1\mathrm{j}} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\mathrm{i}} & a_{2\mathrm{j}} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & \dots & a_{\mathrm{ni}} & a_{\mathrm{nj}} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mathrm{i}} + \lambda a_{1\mathrm{j}} & a_{1\mathrm{j}} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\mathrm{i}} + \lambda a_{2\mathrm{j}} & a_{2\mathrm{j}} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & \dots & a_{\mathrm{ni}} + \lambda a_{\mathrm{nj}} & a_{\mathrm{nj}} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}$$

Обчислення визначників будь-якого порядку:

Якщо обчислення визначників 2-го та 3-го порядків не є складною вправою, то знаходження значення визначників вище 3-го порядку вже викликає труднощі. Розглянемо спосіб обчислення визначників будь-якого порядку.

Нехай задано визначник *n*-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} *елемента* a_{ij} визначника *n*-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, що отримується з даного визначника шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} *елемента* a_{ij} визначника *n*-го порядку називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад 2.2. Знайти мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{21} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Елемент визначника $a_{21} = 1$ (знаходиться у другому рядку і в першому стовпці). Отже,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1.$$

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця (Теорема Лапласа).

Теорема 2.1. Визначник *n*-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \dots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{ik}} A_{\mathrm{ik}} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{i1}} A_{\mathrm{i1}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{i2}} A_{\mathrm{i2}} + \dots + \boldsymbol{a}_{\mathbf{in}} A_{\mathrm{in}},$$

$i = 1,2, \dots, n$;

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{\mathbf{1j}} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{13} & \dots & \boldsymbol{a}_{\mathbf{2j}} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{n1}} & a_{\mathrm{n2}} & \dots & \boldsymbol{a}_{\mathbf{nj}} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{kj}} A_{\mathrm{kj}} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{1j}} A_{\mathrm{1j}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{2j}} A_{\mathrm{2j}} + \dots +$$

$$+ \boldsymbol{a}_{\mathbf{nj}} A_{\mathrm{nj}}, \ j = 1,2, \dots, n.$$

Теорема 2.2. Сума добутків елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \ i \neq j.$$

Теорема 2.1 дає змогу обчислити визначник довільного порядку, тобто за її означенням визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Приклад 2.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 9 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 121 + 62 + 36 = 219.$$

Використовуючи 8 властивість визначників та теорему Лапласа, можна обчислити визначник шляхом зведення його до визначника, шо містить довільний рядок (стовпець) тільки з одним відмінним від нуля елементом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{a_{ij}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{\mathrm{ij}}\cdot A_{\mathrm{ij}}.$$

Обчислення визначника шляхом зведення його до трикутного вигляду:

Визначник, у котрого всі елементи, що розташовані вище або нижче головної діагоналі, рівні нулю, називається визначником трикутного вигляду.

Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & \ddots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot \ldots \cdot a_{\mathrm{nn}}}.$$

Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду.

Приклад 2.4. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Зведемо даний визначник до трикутного вигляду. Поміняємо місцями перший і четвертий стовпці, а потім – другий і третій, після чого отримаємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі виконаємо наступні операції. До першого стовпця додаємо четвертий стовпець, помножений на (–4); до другого стовпця додаємо цей же четвертий стовпець, помножений на (–3); до третього стовпця додаємо четвертий стовпець, помножений на (–2). У результаті отримаємо визначник трикутного вигляду, який рівний добутку його діагональних елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ -cos\alpha & sin\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 0 & \cos\propto & tg\propto \\ \cos\propto & 0 & \cos\propto \\ tg\propto & \cos\propto & 0 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники за допомогою розкладу по довільному рядку або стовпцю:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити визначники, використовуючи їх властивості:

а) $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} sin^2\alpha & \cos 2\alpha & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & \cos 2\beta & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & \cos 2\gamma & cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} sin^2\alpha & 1 & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & 1 & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & 1 & cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

4. У визначниках знайти мінори та алгебраїчні доповнення:

а) всіх елементів другого рядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$;

б) всіх елементів другого стовпця $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

в) всіх елементів третього стовпця $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти визначник матриці A^2B^3.

6. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} x-4 & x-8 \\ \sqrt{x}+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$;

д) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0;$ е) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$

є) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ ж) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

7. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;$ б) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14;$

в) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{x+2} \end{vmatrix} \geq 1;$ г) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$

д) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0;$ е) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0.$

Тема 3. Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці

Теоретичні відомості

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A, якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Обернена матриця A^{-1} має той самий порядок, що і матриця A.

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то матриця A називається *виродженою*.

Теорема 3.1. Якщо квадратна матриця A порядку n є невиродженою, то існує єдина обернена до неї матриця A^{-1}, яку можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A; $i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,n$.

Іншими словами, обернена матриця A^{-1} – це транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A, поділених на визначник матриці A.

Для невиродженої квадратної матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обернену матрицю можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

тобто елементи головної діагоналі треба поміняти місцями, а у елементів бічної діагоналі змінити знаки на протилежні.

Властивості оберненої матриці:

1) $E^{-1} = E$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

5) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Приклад 3.1. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування: Обчислимо визначник заданої матриці, використовуючи будь-який з відомих методів, наприклад, правило трикутника:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 5 - 9 - 6 = -1 \neq 0,$$

тобто A^{-1} існує.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3;$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3;$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3;$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -4;$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$

Записуємо матрицю з алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, транспонуємо її $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, поділивши кожен елемент на $\det A = -1$, одержимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи перевірку, переконуємося, що обернену матрицю знайдено правильно:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричним рівнянням називається рівняння виду:

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

де A, B, C – відомі матриці, а X – шукана матриця.

Якщо одна з матриць A або B є одиничною, тоді матричне рівняння матиме вигляд:

$$A \cdot X = C, \text{ або } X \cdot B = C.$$

Шукатимемо розв’язок матричних рівнянь у випадку, коли матриці A і B є квадратними та невиродженими ($\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$). Тоді розв’язки цих рівнянь можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot B = C, \quad &\Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}; \\ A \cdot X = C, \quad &\Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C; \\ X \cdot B = C, \quad &\Rightarrow \quad X = C \cdot B^{-1}. \end{aligned}$$

Приклад 3.2. Розв’язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування: Матричне рівняння має вид: $A \cdot X = C$,

де $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Його розв’язок шукатимемо за формулою: $X = A^{-1} \cdot C$.

Обчислимо матрицю, обернену до матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків та k стовпців, $k \leq \min\{m, n\}$.

Мінором порядку k матриці $A_{m\times n}$ називається будь-який визначник k-го порядку, що складається з елементів матриці, які стоять на перетині виділених k рядків та k стовпців.

Матриця $m \times n$ має всього мінорів k-го порядку: $C_m^k \cdot C_n^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Наприклад, у матриці розміру $A_{3\times 4}$ є 12 мінорів 1-го порядку, 18 мінорів 2-го порядку та 4 мінори 3-го порядку.

Рангом матриці $A_{m\times n}$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, і позначається: r, $r(A)$ або $rang(A)$.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним*. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Властивості ранга матриці:

1) $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$, де $\min(m, n)$ – найменше з чисел m та n;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці A дорівнюють нулю;

3) для квадратної матриці порядку n, $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A є невиродженою;

4) при транспонуванні матриці її ранг не змінюється;

5) якщо викреслити з матриці нульовий рядок (стовпець), то її ранг не зміниться;

6) ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці;

7) ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Існує два методи обчислення рангу матриці.

1. Метод обвідних мінорів полягає у обчисленні мінорів матриці, які вибираються певним чином.

Обвідним мінором до мінора порядку k матриці $A_{m\times n}$ називається мінор $(k+1)$-го порядку цієї матриці, який цілком містить даний мінором порядку k.

Якщо хоча б один із мінорів 1-го порядку матриці відмінний від нуля ($M_1 \neq 0$), а всі її обвідні мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A) = 1$.

Якщо хоча б один із мінорів 2-го порядку $M_2 \neq 0$, а всі її обвідні мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A) = 2$, і т.д.

Якщо хоча б один із мінорів k-го порядку матриці відмінний від нуля, а всі її мінори $(k+1)$-го порядку, які містять даний мінор k-го порядку, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Приклад 3.3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язування: У матриці є мінор 2-го порядку, відмінний від нуля: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. До цього мінора у матриці є два обвідних мінори 3-го порядку:

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки обидва мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$.

2. Метод елементарних перетворень, який полягає у зведенні матриці до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень. Тоді ранг матриці дорівнює кількості ненульових крайніх елементів (або ненульових рядків) матриці, що отримується.

Елементарними перетвореннями матриці $A_{m\times n}$ є:

– перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;

– множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;

– додавання до елементів деякого рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Матриці $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$називаються *еквівалентними*, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Еквівалентність матриць позначають $A \sim B$.

Приклад 3.4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування: Виконуючи елементарні перетворення над рядками матриці A, знайдемо еквівалентну їй східчасту матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim [II - 2\cdot I \to II] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim[III-I\rightarrow III]\sim\begin{pmatrix}1&-2&6&-1\\0&3&-12&6\\0&2&-8&4\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim[3\cdot III-2\cdot II\rightarrow III]\sim\begin{pmatrix}1&-2&6&-1\\0&3&-12&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Кількість ненульових рядків східчастої матриці – два, отже $r(A)=2$.

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Знайти обернену матрицю і зробити перевірку:

а) $\begin{pmatrix}-2&3\\2&7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5&0\\-1&2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-3&0&2\\5&1&-1\\2&4&0\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}3&5&-2\\1&-3&2\\6&7&-3\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}10&20&-30\\0&10&20\\0&0&10\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}2&2&-1\\1&3&2\\3&-1&2\end{pmatrix}$.

2. Знайти обернену матрицю до заданої матриці:

а) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&2&1&0\\1&4&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&3&1&-7\\2&7&6&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}$.

3. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$;

б) $X\cdot\begin{pmatrix}-1&-4\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\4&1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\2&2\end{pmatrix}$;

д) $X\cdot\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-1&3&5\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&1\\0&2&3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\2&-1\\3&5\end{pmatrix}$.

4. Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 16 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. При яких значеннях λ ранг матриці $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ дорівнює 1?

Тема 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Теоретичні відомості

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що містить m рівнянь та n невідомих, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де числа a_{ij} $(i = 1,2,\dots,m;\ \ j = 1,2,\dots,n)$ називаються коефіцієнтами системи, числа b_i $(i = 1,2,\dots,m)$ – вільними членами.

Розв'язком СЛАР називається n значень невідомих $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються на тотожності.

СЛАР, у якої кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($m = n$), називається *квадратною*.

СЛАР називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. У протилежному випадку система називається неоднорідною.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком*. Сукупність частинних розв'язків системи називається *загальним розв'язком* цієї системи.

Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну і ту саму множину розв'язків.

СЛАР зручно записувати у матричній формі:

$$A\,X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається основною матрицею СЛАР, елементами якої є коефіцієнти системи; B – вектор-стовпцем вільних членів, X – вектор-стовпцем невідомих.

Розширеною матрицею СЛАР (позначається $\bar{A}$ або $(A|B)$) називається основна матриця A системи, доповнена вектор-стовпцем вільних членів B:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема 4.1 (Кронекера-Капеллі). Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи, тобто $r(A) = r(\bar{A})$.

При цьому, якщо $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (n – кількість невідомих системи), то СЛАР має єдиний розв'язок. Якщо $r(A) = r(\bar{A}) < n$, то система має безліч розв'язків.

Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими:

Розглянемо квадратну СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Квадратна СЛАР називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Якщо матриця A системи є невиродженою, то СЛАР є сумісною і має єдиний розв'язок, який можна знайти, застосовуючи один із наступних методів:

1. Формули Крамера. Введемо позначення:

Δ – визначник основної матриці СЛАР:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Δ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ – визначники, отримані із визначника Δ заміною його i-го стовпця на вектор-стовпець вільних членів системи.

Зауважимо, що визначник Δ_1 отримується з визначника Δ шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів системи $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, визначник Δ_2 отримується з визначника Δ шляхом заміни другого стовпця стовпцем вільних членів $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ і т.д.

Теорема 4.2. Якщо основна матриця СЛАР є невиродженою ($\det A \neq 0$), то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за *формулами Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Дослідження квадратної СЛАР на сумісність та визначеність за формулами Крамера:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок.

2. Якщо $\Delta = 0$, і існує хоча б один із визначників $\Delta_i \neq 0$, то система несумісна.

3. Якщо $\Delta = 0$, і всі $\Delta_i = 0$, тоді система має безліч розв'язків, тобто є сумісна і невизначена.

Приклад 4.1. Розв’язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = \ \ 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

Розв’язування:

Обчислимо основний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 1 + 5 + 6 = -2 \neq 0.$$

Замінивши в Δ послідовно перший, другий та третій стовпці стовпцем із вільних членів, отримаємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & -4 & 1 \\ \mathbf{-1} & -5 & 3 \\ \mathbf{2} & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & 3 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & \mathbf{3} \\ 1 & -5 & \mathbf{-1} \\ 1 & -1 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 2.$$

За формулами Крамера, знаходимо розв’язок заданої СЛАР:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1.$$

2. Матричний метод. Квадратну СЛАР можна представити у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки, $\Delta = \det A \neq 0$, то єдиний розв’язок матричного рівняння, еквівалентного СЛАР, можна знайти за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

де A^{-1} – матриця, обернена до A.

Приклад 4.2. Розв’язати СЛАР матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = \ \ 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язування:
Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \det A = -2 \neq 0$$

Обернена матриця рівна:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді знаходимо

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Метод Гаусса розв'язання довільних СЛАР:

Метод Гаусса є найбільш універсальним методом розв'язання СЛАР. Він дозволяє одночасно дослідити довільну СЛАР на сумісність та визначеність, і у разі сумісності системи, знайти її загальний розв'язок. Цей метод полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи.

Розглянемо СЛАР, що містить *m* рівнянь та *n* невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Метод Гаусса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю у цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

Випишемо розширену матрицю системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

На цьому кроці будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень над рядками матриці. А саме, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1 не дорівнює нулю. Якщо серед коефіцієнтів $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ є одиниця, то поставимо відповідне рівняння на місце першого. Далі, виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, після певної кількості кроків, отримаємо систему східчастого вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{33}x_3 \dots + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{b}_3, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m. \end{cases}$$

Дана система має такі можливі розв’язки:

1) Якщо система містить рівняння, у якому всі коефіцієнти лівої частини дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля ($b_i \neq 0$), то вихідна система *розв’язку не має*, тобто несумісна.

2) Якщо усі праві і ліві частини відповідних рівнянь системи дорівнюють нулю ($b_i = 0$), то маємо тотожності, і ці нульові рядки можна відкинути. Тоді маємо один із двох випадків:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($r = n$) – система має трикутний вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n, і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має *єдиний розв’язок*.

б) кількість рівнянь менша за число невідомих ($r < n$) – система має *безліч розв’язків* і східчастий вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r. \end{cases}$$

Зауважимо, що система сумісна, оскільки $r(A) = r(\bar{A}) = r$, то r рядків та r стовпців цієї матриці утворюють базисний мінор. Невідомі, коефіцієнти яких входять до базисного мінору, називаються *головними* або *базисними* (їх число r), а інші $(n-r)$ невідомих називаються *вільними*.

Приклад 4.3. Розв'язати СЛАР методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язування: Переставимо місцями перше і друге рівняння системи. Потім складемо розширену матрицю системи та проведемо необхідні елементарні перетворення рядків:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, СЛАР є сумісною та невизначеною, оскільки $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4 = n$. Випишемо еквіваленту систему та знайдемо її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Оберемо у якості базисних змінних x_1 та x_2. Перенесемо у праві частини рівнянь вільні змінні x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Виразивши x_1, x_2 через x_3 і x_4, отримаємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4, \\ x_3 \\ x_4 \end{cases}$$

де x_3 і x_4 можуть приймати довільні значення.

Якщо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то отримаємо частинний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Однорідні СЛАР:

Нагадаємо, що *однорідною* називається СЛАР, у якої всі вільні члени дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна СЛАР завжди є сумісною, оскільки у такої системи $r(A) = r(\bar{A})$. Однорідна система завжди має принаймні один розв'язок: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, який називається *нульовим* або *тривіальним* розв'язком СЛАР.

Теорема 4.3. Для того, щоб однорідна СЛАР мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці $r(A)$ був менший за число невідомих n, тобто $r(A) < n$.

Розв'язати однорідну СЛАЛ означає знайти її загальний розв'язок, або переконатися, що вона має лише нульовий розв'язок.

Позначимо розв'язок однорідної системи у вигляді вектор-стовпця:

$$e = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $e_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$ та $e_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}$ – розв'язки однорідної СЛАР, то для довільних $c_1, c_2 \in R$, вектор-стовпець

$$c_1e_1 + c_2e_2 = \begin{pmatrix} c_1k_1 \\ c_1k_2 \\ \dots \\ c_1k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2k_1 \\ c_2k_2 \\ \dots \\ c_2k_n \end{pmatrix}$$

також є розв'язком цієї системи. Отже, довільна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є її розв'язком.

Система розв'язків однорідної СЛАР $e_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \dots \\ k_{1n} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \dots \\ k_{2n} \end{pmatrix}$, …, $e_s = \begin{pmatrix} k_{s1} \\ k_{s2} \\ \dots \\ k_{sn} \end{pmatrix}$, називається *лінійно незалежною*, якщо матриця $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{s1} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{sn} \end{pmatrix}$ має ранг s.

Система лінійно незалежних розв'язків $e_1, e_2, \ldots, e_s$ однорідної СЛАР називається *фундаментальною системою розв'язків* цієї системи, якщо будь-який її розв'язок X є лінійною комбінацією розв'язків $e_1, e_2, \ldots, e_s$, тобто $X = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_se_s$, де $c_1, c, \ldots, c_s$ – довільні дійсні числа.

Теорема 4.4 (*про структуру загального розв'язку однорідної СЛАР*). Якщо ранг основної матриці $r = r(A)$ однорідної СЛАР є меншим за число невідомих n, тобто $r < n$, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї СЛАР складається з $(n-r)$ розв'язків $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$, причому *загальний розв'язок однорідної системи* є лінійною комбінацією цих розв'язків:

$$X_{\text{з.о.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_{n-r}e_{n-r}.$$

Теорема 4.5 (*про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР*). Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної системи $X_{\text{з.о.}}$ та довільного частинного розв'язку $X_{\text{ч.н.}}$ неоднорідної СЛАР:

$$X_{\text{з.н.}} = X_{\text{з.о.}} + X_{\text{ч.н.}}$$

Однорідні СЛАР як правило розв'язують методом Гаусса. Інші методи для однорідних СЛАР є неефективними. Для квадратних однорідних СЛАР, обчислюючи визначник системи Δ, можна з'ясувати чи є однорідна СЛАР визначеною, тобто має єдиний нульовий розв'язок ($\Delta \neq 0$), чи вона є невизначеною і має безліч розв'язків ($\Delta = 0$). У випадку, коли квадратна однорідна СЛАР є невизначеною, знайти її загальний розв'язок можна лише методом Гаусса.

Приклад 4.4. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування:

Випишемо основну матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $r(A) = 2$, тобто система має безліч розв'язків. Оскільки $r < n$, то x_1, x_2 – базисні невідомі заданої системи, а x_3, x_4 – вільні невідомі. Тоді

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

Загальний розв'язок заданої однорідної СЛАР:

$$X_{\text{з.о.}} = \begin{pmatrix} -3x_3 - 4x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Надаючи вільним змінним x_3 та x_4 різні дійсні значення, отримаємо частинні розв'язки однорідної системи, які складають фундаментальну систему розв'язків даної СЛАР:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді загальний розв'язок однорідної СЛАР можна представити як лінійну комбінацію розв'язків її фундаментальної системи із відповідними коефіцієнтами C_1, C_2:

$$X_{\text{з.о.}} = \begin{pmatrix} -3x_3 - 4x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_2.$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь: а) матричним методом; б) за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 22, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6, \\ x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -8, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. Розв’язати системи рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

3. Дослідити СЛАР на сумісність і, якщо можливо, знайти їх розв’язок:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$

4. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь: а) має єдиний розв'язок; б) не має розв'язків; в) має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1. \end{cases}$$

5. Знайти всі значення α, при яких система визначена. Дослідити систему щодо її розв’язків при заданому значенні α:

а) $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \quad \alpha = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \propto x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8, \quad \alpha = 3. \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

6. Визначити, при якому значенні a система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідних СЛАР:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 12x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Самостійні роботи

Тема «Дії над матрицями. Визначники»

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $(A - 3B) \cdot C^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A, якщо:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

1. Обчислити:

а) $3\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A \cdot (2B + C)^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A, якщо:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема «Обернена матриця. Ранг матриці. СЛАР»

Варіант 1

1. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати системи рівнянь: а) методом Крамера; б) методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$

Варіант 2

1. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати системи рівнянь: а) методом Крамера; б) методом Гаусса:

а) $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -7, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Тестові завдання

1. Визначник – це:
   1) матриця;
   2) число;
   3) вектор;
   4) поняття, якому визначення не подано.
2. Що буде з визначником, якщо поміняти місцями будь-які два стовпці?
   1) визначник від цього не зміниться;
   2) абсолютна величина визначника збільшиться;
   3) абсолютна величина визначника зменшиться;
   4) абсолютна величина визначника залишиться без змін.
3. Чому дорівнює визначник третього порядку, в якому будь-які 2 рядки співпадають?
   1) нулю;
   2) добутку елементів, що не співпадають;
   3) добутку елементів головної діагоналі;
   4) добутку елементів додаткової діагоналі.
4. Чому дорівнює визначник третього порядку, усі елементи третього рядка якого дорівнюють нулю?
   1) добутку елементів головної діагоналі;
   2) сумі добутку елементів першого та другого рядка;
   3) нулю;
   4) серед перерахованих відповідей правильного немає.
5. Що можна сказати про дві матриці, якщо рядки першої є стовпцями другої?
   1) визначник другої матриці є величиною зворотною по відношенню до визначника першої;
   2) ці матриці не відрізняються одна від одної;
   3) їх визначники рівні між собою;
   4) серед перерахованих відповідей правильної немає.
6. Як називається матриця, елементи головної діагоналі якої одиниці, а всі інші елементи – нулі?
   1) нульова;
   2) одинична;
   3) кутова;
   4) трикутна.
7. Теорема Кронекера-Капеллі визначає умову, за якої:
   1) СЛАР буде визначеною;
   2) СЛАР буде сумісною;
   3) СЛАР буде однорідною.
8. Як зміниться значення визначника, якщо помножити на 4 один з його рядків і на 3 – один з його стовпців?
   1) не зміниться;
   2) збільшиться у 7 разів;
   3) збільшиться у 12 разів.

9. Знайти матрицю $3A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $3A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $3A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $3A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4) $3A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Чому дорівнюють елементи a та b, якщо виконується рівність $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?

1) $a=0$, $b=6$
2) $a=-1$, $b=3$
3) $a=1$, $b=2$
4) таких значень не існує.

11. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Обчислити AB.

1) $AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $AB=\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$

3) $AB=-6$

4) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

12. Знайти суму матриць $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

13. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-y=2. \end{cases}$

1) $x=0$, $y=3$
2) $x=2$, $y=0$
3) $x=-3$, $y=4$
4) $x=1$, $y=2$

14. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Яку з вказаних дій можна виконати:

1) $A+B$
2) AB
3) BA
4) $A-B$

15. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю A^{-1}.

1) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

2) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

4) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. Обчислити AB, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

2) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4) $AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

17. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти $A-B$.

1) $A-B=\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

2) $A-B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -11 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $A-B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) $A-B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

18. Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A, якщо:

1) $A+A^{-1}=0$

2) $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, де E – одинична матриця

3) $\dfrac{A}{A^{-1}}=1$

4) $A-A^{-1}=1$

19. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$.

1) 6
2) 5
3) –1
4) 13

20. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

1) 5
2) 27
3) 0
4) 9

21. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=3$.

1) $x=1$
2) $x=\pm 1$
3) $x=2$
4) $x=\pm 2$

22. Обчислити $2A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) $2A-B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2) $2A-B=\begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$

3) $2A-B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

4) $2A-B=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

23. Знайти матрицю A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$

4) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

1) 52
2) 28
3) 15
4) 3

25. Мінор M_{12} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) –6
2) 2
3) 4
4) 36

26. Алгебраїчне доповнення A_{23} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) –6
2) 6
3) –12
4) 12

27. Визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) –62
2) –60
3) 20
4) 26

28. Матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ можна помножити на матрицю:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

29. Скільки рядків буде мати матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

30. Елемент a_{12} матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ дорівнює:

1) 1
2) 2
3) 5
4) 3

31. Щоб вирішити, чи є СЛАР сумісною, треба:
1) знайти ранги матриці системи та розширеної матриці системи;
2) знайти визначник матриці системи;
3) до всіх елементів матриці знайти алгебраїчні доповнення.

32. Як зміниться значення визначника, якщо його третій рядок помножити на 2 та додати до нього перший, помножений на 5?
1) не зміниться;
2) збільшиться у 2 рази;
3) збільшиться у 10 разів.

33. Які перетворення виконали над матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, якщо в результаті було отримано матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$?
1) відняли від першого рядка третій, помножений на 2;
2) відняли від першого стовпчика третій, помножений на 2;
3) розділили другий рядок на (–2), а третій помножили на (–9);
4) відняли від першого стовпчика третій, помножений на 2 та розділили другий рядок на (–2), а третій помножили на (–9).

34. Яка з матриць є узгодженою для матриці $A_{4\times3}$?

1) $B_{4\times3}$
2) $B_{3\times4}$
3) $B_{4\times4}$
4) $B_{1\times3}$

35. Яка з поданих матриць є транспонованою A^T для матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

36. Обчислити матрицю $C = 2A - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $C = \begin{pmatrix} -1 & 12 & -7 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
2) $C = \begin{pmatrix} -1 & -13 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3) $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ -16 & 13 & 5 \end{pmatrix}$
4) $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 9 \\ -14 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

37. Визначник $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) 0
2) 1
3) –8
4) –16

38. Чому дорівнює невідомий елемент визначника $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ x & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, якщо сам визначник дорівнює –54?

1) 9
2) –6
3) 6
4) –9

39. Коли головний визначник системи лінійних рівнянь $\Delta=0$ і хоча б один із визначників, утворених із головного заміною стовпчика коефіцієнтів при x_i на стовпчик вільних членів $\Delta x_i \neq 0$, то, відповідно до формул Крамера, система лінійних рівнянь:

1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;

3) не має розв'язків;
4) кількість розв'язків залежить від вільних членів.

40. Якщо в системі лінійних рівнянь, кількість рівнянь не співпадає з кількістю невідомих, то для відшукання розв'язку можна застосовувати:
1) формули Крамера;
2) метод Гаусса;
3) матричний метод;
4) всі три способи.

41. Дана система лінійний рівнянь $\begin{cases} 2x + 3z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$. Вкажіть вільні члени:
1) (2; 1; 1)
2) (0; -1; 2)
3) (3; -1; 1)
4) (2; 1; 3)

42. Множина (2; 1; –1) є розв'язком системи лінійних рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y - 2z = 3 \\ 5x + 6y - 5z = 4 \end{cases}$
2) $\begin{cases} 5x + 3y + z = 14 \\ -3x + 12y - 8z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 8 \end{cases}$
3) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$
4) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$

43. Яка з поданих систем лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

1) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$
3) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 3y + 4z = 7 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$
4) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 5y - z = 8 \end{cases}$

Список використаної літератури

1. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К.: А.С.К., 2005. 480 с.

2. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Вища алгебра: підручник. Х.: Гімназія, 2008. 182 с.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. К.: А.С.К., 2005. 648 с.

4. Лубенська Т.В., Чупаха Л.Д. Збірник задач з лінійної, векторної та аналітичної геометрії: навч. посібник. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. 212 с.

5. Математика в технічному університеті: підручник. Том 1 / І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова; за ред. О.І. Клесова. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 496 с.

6. Набока О.О. Лінійна алгебра: навч.-метод. посібник. Харків: НТУ «ХПІ», 2020. 64 с.

7. Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу «Вища математика»: Частина І. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2015. 96 с.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
для студентів спеціальності 126 Інформаційні системи та технології

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Формат 60*84/16. Гарнітура Times New Roman
Ум.друк.арк. 2,79. Зам. № 5

Редакційно-видавничий відділ ДВНЗ «УжНУ»
88000, м. Ужгород, вул. Заньковецької, 89
E-mail: dep-editors@uzhnu.edu.ua