

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ СТАТИСТИЧЕСКИ ЗАВИСИМЫХ ОБЪЕКТОВ НА ДИСКРЕТНОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

САВАНЕВИЧ В.Е.

Рассматриваются вопросы синтеза и асимптотического анализа алгоритма совместного оценивания местоположения Q объектов по группированной выборке наблюдений.

Часто на практике объекты наблюдения локационных средств расположены настолько близко друг от друга, что сигналы от них уже нельзя считать статистически независимыми. Не менее часто результатом обработки таких сигналов локационным средством является дискретный вектор наблюдения, каждый элемент которого представляет особый результат интегрирования соответствующей пространственно-временной области (так называемые группированные выборки [1]).

Примером может служить оптико-электронное средство с ПЗС-матрицей при наблюдении им кратных звезд или группы близко расположенных космических объектов.

Понятно, что для максимизации точности оценки положения каждого из объектов необходимо, во-первых, учесть сам факт дискретизации пространства наблюдений (оценивается непрерывная величина — координата объекта, по дискретной — амплитудам напряжения на выходе элементов ПЗС-матрицы), а во-вторых — их количество (многократное, по числу объектов, использование даже оптимального обнаружителя-измерителя одного объекта приводит в описанных условиях к большим искажениям в точности оценивания).

Решим задачу синтеза и анализа совместного измерителя положения Q объектов по группированной выборке наблюдений на основе метода максимального правдоподобия при условии кругового нормального распределения ошибок координат падения фотонов:

$$f(x, y) = p_0 + \sum_{j=1}^Q \frac{p_j}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}[(x - m_{xj})^2 + (y - m_{yj})^2]\right),$$

где p_j — относительный “вес” j -го объекта

$$\left(\sum_{j=0}^Q p_j = 1\right); p_0 \text{ — относительный “вес” шумовых}$$

токов; m_x, m_y — соответствующие координаты j -го объекта.

Наблюдению доступны напряжения на выходе дискрет ПЗС-матрицы, которые легко преобразуются в относительные частоты попадания средств в ik -й

$$\text{дискрет матрицы } v_{ik}^* : \sum_{i,k} v_{ik}^* = 1.$$

Здесь M — общее количество элементов ПЗС-матрицы; i, k — номера дискрет по координатам x и y соответственно.

Теоретическим аналогом величины v_{ik}^* является вероятность попадания фотонов v_{ik} в ik -й элемент матрицы с границами α_i, β_i по координате x и

$$\psi_k, \eta_k \text{ — по координате } y: v_{ik} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \int_{\psi_k}^{\eta_k} f(x, y) dx dy.$$

В рассматриваемом случае уравнения максимального правдоподобия имеют вид [2]

$$\sum_{i,k} v_{ik}^* \frac{dv_{ik}}{d\Theta_t} = 0, \quad (1)$$

где Θ_t — t -й параметр, подлежащий оцениванию.

Вектор оцениваемых параметров, в свою очередь, имеет размерность $3Q-1$ ($4Q-1$) при известной (неизвестной) дисперсии и включает в себя веса p_j и координаты m_{xj}, m_{yj} объектов.

Производные, входящие в (1), могут быть представлены выражениями:

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial m_{xj}} = p_j F_{yjk} \{N_{\beta_i}(m_{xj}; \sigma_j^2) - N_{\alpha_i}(m_{xj}; \sigma_j^2)\}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial m_{yj}} = p_j F_{xji} \{N_{\eta_k}(m_{yj}; \sigma_j^2) - N_{\psi_k}(m_{yj}; \sigma_j^2)\}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \sigma_j} = & \frac{p_j}{\sigma_j} \{F_{yjk} [(\alpha_i - m_{xj})N_{\alpha_i}(m_{xj}; \sigma_j^2) - \\ & - (\beta_i - m_{xj})N_{\beta_i}(m_{xj}; \sigma_j^2)] + \\ & + F_{xji} [(\psi_k - m_{yj})N_{\psi_k}(m_{yj}; \sigma_j^2) - \\ & - (\eta_k - m_{yj})N_{\eta_k}(m_{yj}; \sigma_j^2)]\}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial p_j} = F_{jik} - F_{Qik}; \quad (5)$$

$$\text{где } N_z(m; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(z-m)^2\right);$$

$$F_{xji} = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} N_x(m_{xj}; \sigma_j^2); \quad F_{yjk} = \int_{\psi_k}^{\eta_k} N_y(m_{yj}; \sigma_j^2);$$

$$F_{jik} = F_{xji} * F_{yjk}.$$

Для дальнейшего преобразования выражений (2)-(5) воспользуемся понятием локального математического ожидания случайной величины на интервале $[\alpha, \beta]$:

$$\hat{m}_{xi} = \frac{1}{F_{xi}} \int \frac{\beta_i}{\alpha_i} x N_x(m, \sigma^2) dx = m + \frac{\sigma^2}{F_{xi}} (N_{\alpha_i}(m_x, \sigma^2) - N_{\beta_i}(m_x, \sigma^2)). \quad (6)$$

После подстановки выражения (6) в (2)-(5) и ряда несложных преобразований имеем:

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial m_{xj}} = \frac{p_j F_{jik}}{\sigma^2} (m_{xj} - \hat{m}_{xji}); \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial m_{yj}} = \frac{p_j F_{jik}}{\sigma^2} (m_{yj} - \hat{m}_{yjk}); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \sigma_j} = & \frac{p_j}{\sigma_j} [F_{yjk} ((\hat{m}_{xji} - m_{xj}) \frac{F_{xji}}{\sigma_j^2} - (\Delta\alpha_i N_{\alpha_i}(m_{xj}; \sigma_j^2) + \\ & + \Delta\beta_i N_{\beta_i}(m_{xj}; \sigma_j^2))) + F_{xjk} ((\hat{m}_{yjk} - m_{yj}) \frac{F_{yjk}}{\sigma_j^2} - \\ & - (\Delta\psi_k N_{\psi_k}(m_{yj}; \sigma_j^2)) + \Delta\eta_k N_{\eta_k}(m_{yj}; \sigma_j^2))], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta\alpha_i = \hat{m}_{xji} - \alpha_i$; $\Delta\beta_i = \beta_i - \hat{m}_{xji}$;

$\Delta\psi_k = \hat{m}_{yjk} - \psi_k$; $\Delta\eta_k = \eta_k - \hat{m}_{yjk}$.

Система уравнений максимального правдоподобия после подстановки в нее выражений (5), (7)-(9) является трансцендентной. Для ее решения был выбран метод последовательных приближений [3], при реализации которого система уравнений была представлена в виде:

$$\hat{m}_{xj} = \frac{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik} \hat{m}_{xji}}{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik}}; \quad (10)$$

$$\hat{m}_{yj} = \frac{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik} \hat{m}_{yji}}{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik}}; \quad (11)$$

$$\hat{\sigma}_j = \frac{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik} ((\hat{m}_{xji} - m_{xj})^2 + (\hat{m}_{yjk} - m_{yj})^2)}{\sum_{i,k} L_{ik}} \approx$$

$$\approx \frac{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik} ((\hat{m}_{xji} - m_{xj})^2 + (\hat{m}_{yjk} - m_{yj})^2)}{2 \sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik}}; \quad (12)$$

$$\hat{P}_j = P_Q \frac{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{jik}}{\sum_{i,k} v_{ik}^* \lambda_{Qik}}; \quad (13)$$

где $\lambda_{jik} = p_j F_{jik} / v_{ik}$;

$$\begin{aligned} L_{ik} = & \frac{v_{ik}^*}{v_{ik}} p_i (F_{yjk} (\Delta\alpha_i N_{\alpha_i}(m_{xj}; \sigma_j^2) + \Delta\beta_i * \\ & * N_{\beta_i}(m_{xj}; \sigma_j^2)) + F_{xji} (\Delta\psi_k N_{\psi_k}(m_{yj}; \sigma_j^2) + \\ & + \Delta\eta_k N_{\eta_k}(m_{yj}; \sigma_j^2))). \end{aligned}$$

Второй вариант уравнения для $\hat{\sigma}_j^2$ выводится путем приближенной замены

$$\Delta\alpha_i N_{\alpha_i}(m_{xj}; \sigma_j^2) + \Delta\beta_i N_{\beta_i}(m_{xj}; \sigma_j^2) \approx F_{xji}$$

и

$$\Delta\psi_k N_{\psi_k}(m_{yj}; \sigma_j^2) + \Delta\eta_k N_{\eta_k}(m_{yj}; \sigma_j^2) \approx F_{yjk},$$

основанной на формуле прямоугольника численного интегрирования.

В полученную систему уравнений максимального правдоподобия входит Q (по числу объектов) уравнений типа (10)-(12) для j = 1, Q и (Q-1) уравнений типа (13).

Теперь поговорим об основной, сущностной стороне процедуры получения оценок (10)-(15). Функциональная схема ее реализующего устройства может иметь вид, представленный на рис.1. По сути, при получении оценок положения Q близких объектов последовательно, поочередно выполняются два процесса. Первый – расщепление элементов ПЗС-матрицы, а точнее фотонов, попавших в эти элементы, на (Q+1)-у ПЗС-матрицу. Данная операция, в соответствии с начальными условиями по значению параметров $\bar{\Theta}$, полученных предыдущей итерацией (на первой итерации – начальные условия поступают с блока начальных приближений), распределяет фотоны, попавшие в каждый элемент ПЗС-матрицы, на Q независимых измерителей положения, отделяя при этом, в соответствии с принятой моделью сигналов и помех, шумовые фотоны, источником излучения которых не являются объекты, подлежащие оценке. Результатом первого процесса является совокупность коэффициентов расщепления λ_{jik} (блок расщепления).

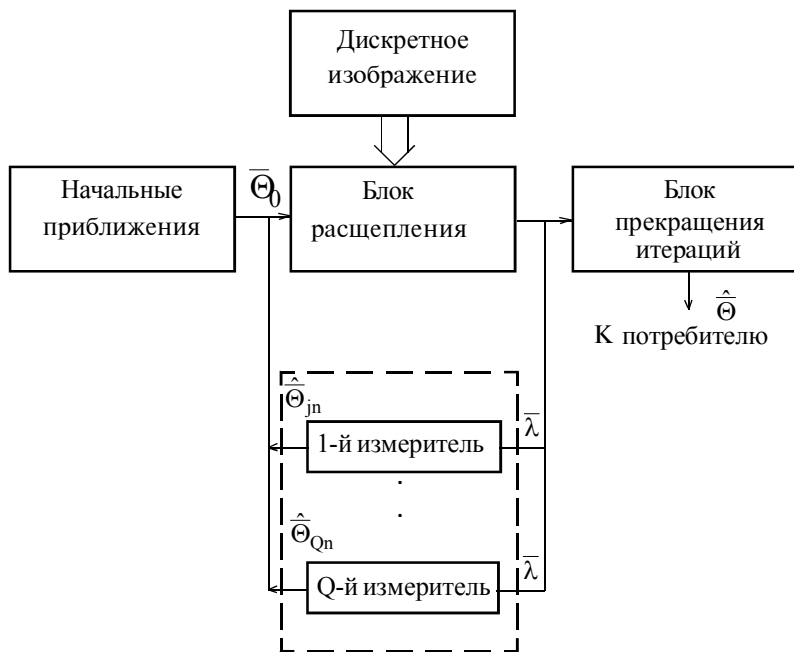


Рис. 1. Функциональная схема устройства определения координат статистически зависимых объектов

Процесс, следующий за расщеплением, – взаимно независимая оценка положения каждого из Q объектов (блок оценивания). При этом используется Q измерителей, на каждый из которых поступает подвыборка – один из $Q+1$ результатов расщепления ПЗС-матрицы на данной итерации. Каждый измеритель на n -й итерации по детерминированному правилу формирует оценку положения соответствующего объекта $\hat{\Theta}_n$.

Графики, поясняющие возможные варианты детерминированной оценки положения в одномерном случае, приведены на рис. 2-4. В первом случае (рис. 2, а) используется классическая астронометрическая процедура определения центра звезды:

$$m = 0,5 (x_k + x_n),$$

где x_k, x_n – координаты первого и последнего дискрет ПЗС-матрицы, которые были “засвечены”. Во втором (рис. 2, б) – в качестве положения объекта используется среднее значение медиан дискрет, в которые попали “целевые” фотоны:

$$m = \sum_i p_i d_i;$$

Здесь p_i – относительный вес фотонов, попавших в i -й дискрет ПЗС-матрицы; d_i – медиана i -го дискрета ПЗС-матрицы.

Третий случай (рис. 2, в), соответствующий используемой в статье процедуре, аналогичен второму, но в нем вместо медиан применяются оценки локальных математических ожиданий координат падения целевых фотонов в пределах каждого дискрета (б):

$$m = \sum_i p_i \hat{m}_i.$$

Опыт статистического моделирования свидетельствует о том, что вторая и третья процедуры по качеству оценивания практически совпадают в случае, когда проведенный шаг дискретизации Δ / σ составляет величины, меньшие чем 0,4. В противном

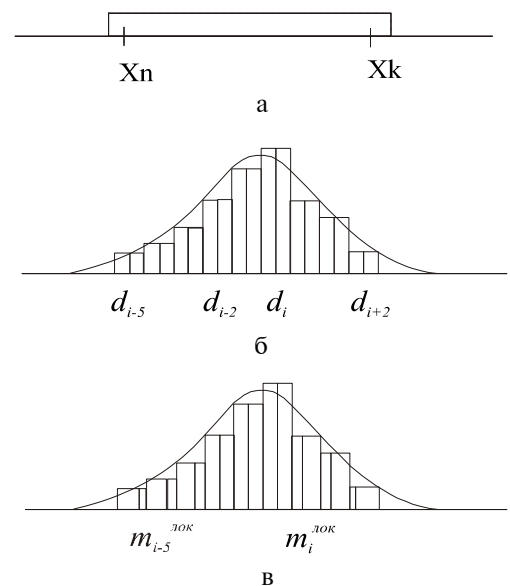


Рис. 2. Методы оценки положения объекта: а – классическая; б – по среднему значению медиан дискрет, которые были “засвечены” объектом; в – по среднему значению оценок локальных математических ожиданий координат падения фотонов в пределах каждого дискрета

случае третья процедура выглядит предпочтительнее тем больше, чем больше размер дискрета вплоть до $\Delta / \sigma = 5 \dots 7$. В дальнейшем все процедуры вырождаются в одну, так как все целевые фотоны попадают в один-единственный дискрет ПЗС-матрицы.

Сформированная таким образом оценка $\hat{\Theta}_n$ поступает в качестве начального приближения на процедуру расщепления и т.д. Итерационный процесс продолжается до тех пор (блок прекращения итераций), пока либо все коэффициенты расщепления λ_{jik} на n -м и $(n-1)$ -м шаге алгоритма не станут практически попарно равны, либо, что то же самое, оценки $\hat{\Theta}_{n-1}$ и $\hat{\Theta}_n$ практически совпадут:

$$|\hat{\Theta}_{n-1} - \hat{\Theta}_n| < \varepsilon,$$

где ε – некая наперед заданная малая величина, определяющая требуемую точность вычислений.

При выполнении одного из указанных выше условий оценка $\hat{\Theta}_n$ признается за оценку $\hat{\Theta}$ и выдается на выход устройства – потребителю.

Следует особо подчеркнуть, что само основание к использованию процедуры расщепления в рамках поставленной задачи весьма прочно, так как после “регистрации ik -м приемником ПЗС-матрицы какого-либо числа фотонов” никто уже не сможет сказать, какой или какие конкретно фотоны принадлежат какому источнику излучения. Речь можно вести лишь о степени принадлежности всех фотонов, попавших в этот приемник, тому или иному объекту и не более. В этой связи разработанная в статье процедура оценки положения Q близко расположенных объектов очень сильно перекликается с классификаторами, основанными на методе размытых множеств [4] и является в сущности их параметрическим аналогом.

Прежде чем перейти к анализу качества процедур оценивания параметров (10)-(13), остановимся на ряде практических аспектов их реализации.

Во-первых, как и в любой итерационной схеме, большое значение в скорости сходимости, а также в сходимости в среднем оценок к истинному значению искомых параметров имеют начальные, стартовые приближения. Опыт моделирования и практического использования процедур (10)-(13) свидетельствует о том, что без каких-либо модификаций алгоритма сходимость принципиально обеспечивается при

$$dx = \frac{|x_0 - x_{ист}|}{\sigma_x} < 6...10; \quad dy = \frac{|y_0 - y_{ист}|}{\sigma_y} < 6...10.$$

Данный факт, не смотря на огорчения, которые он вызывает, является всего лишь платой за то, что разработанный алгоритм в состоянии работать на грани фола, там, где обнаружитель одиночного сигнала по-просту уже не в состоянии разрешить объекты. Причина же указанной особенности заключается в том, что фотоны, сконцентрированные в окрестности проекции положения источника их излучения в картинной плоскости, имеют малые значения λ . Следовательно, постепенная (от итерации к итерации) перетяжка оценок положения к их истинному значению происходит крайне медленно или вообще не происходит.

Вторым недостатком процедур (10)-(13) является наличие локального решения системы уравнений в серединной точке совокупности объектов.

Выход из положения, обусловленного указанными недостатками, находится достаточно просто. Необходимо каким-либо методом определить местоположение "группы близких объектов", а потом выбрать начальные приближения параметров, лежащие на внешних границах изображения группы.

В целях сокращения трудоемкости (10)-(13) рекомендуется на первых шагах итерационного процесса вместо m_{xj}^{\wedge} и m_{yj}^{\wedge} использовать значения координат центров ответственности элементов ПЗС-матрицы.

Непосредственно скорость сходимости процедуры можно охарактеризовать следующими цифрами: при относительных расстояниях dx, dy , равных 1, 2, 3, 4, 5, для достижения максимума с приемлемой точностью вычислений (0,01 дискрета ПЗС-матрицы) требуется в среднем 18, 6, 2, 1 итераций.

Надеясь на несмещенность и эффективность полученных оценок не приходится. Вместе с тем, можно показать, что данные оценки являются состоятельными и асимптотически эффективными в строгом смысле [2], т.е. векторная случайная величина $\sqrt{N}(\hat{\Theta} - \Theta^*)$ при числе фотонов $N \gg 1$ распределена по нормальному закону с параметрами:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M[\sqrt{N}(\hat{\Theta} - \Theta^*)] = 0;$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| M\{[\sqrt{N}(\hat{\Theta}_i - \Theta_i^*)][\sqrt{N}(\hat{\Theta}_u - \Theta_u^*)]\} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i,k=1}^M \frac{1}{v_{ik}} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \Theta_i} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \Theta_u} \right\|,$$

Здесь Θ, Θ^* — оценка и истинное значение вектора Θ .

Следовательно, для анализа точности определения координат объектов в асимптотическом случае достаточно вычислить элементы матрицы Фишера (14).

Уточним, что вектор оцениваемых параметров имеет вид $\Theta^T = \{\bar{M}_x^T, \bar{M}_y^T, \bar{\Sigma}^T, \bar{P}^T\}$, где

$$\bar{M}_x^T = \{m_{x1}, \dots, m_{xQ}\}, \bar{M}_y^T = \{m_{y1}, \dots, m_{yQ}\};$$

$$\bar{\Sigma}^T = \{\sigma_1, \dots, \sigma_Q\}, \bar{P}^T = \{p_1, \dots, p_{Q-1}\}.$$

Соответствующие строки и столбцы имеет и матрица Фишера, а каждый ее элемент, с учетом выражений (5), (7)-(9), рассчитывается по формуле

$$I = \left(\sum_{i,k} \frac{1}{v_{ik}} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \Theta_i} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \Theta_u} \right)_{\Theta = \Theta^*}.$$

Некоторые результаты табуляции элементов матрицы Фишера приведены на рис. 3-6.

На рис. 3, 4 представлена зависимость дисперсии оценки координаты объекта от размера дискрета (Δ) и местоположения объекта в дискрете, которому "принадлежит" объект. Видно, что по мере увеличения числа дискрет (уменьшения Δ) точность оценивания повышается и стремится к точности оценивания по обычным, негруппированным, выборкам. При увеличении размеров дискрет с какого-то критического значения ($\Delta_{кр} \approx 2$) важную роль в величине ошибки играет местоположение объекта в "центральной" дискрете; по мере "приближения" объекта к границам дискрета точность значительно повышается. Нарис. 5, 6 представлены зависимости дисперсии и коэффициентов взаимной корреляции координат одного и того же

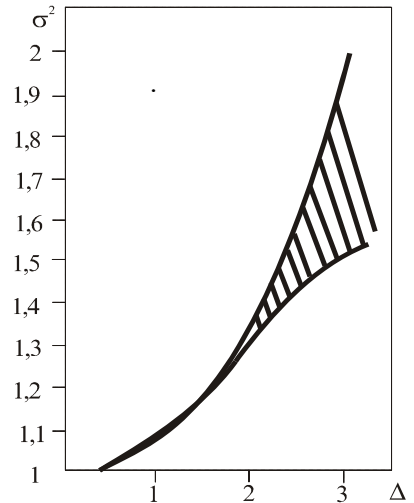


Рис. 3. Зависимость дисперсии оценки координаты объекта от размера дискрета

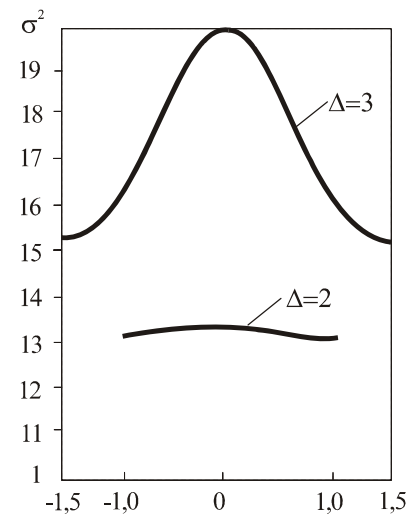


Рис. 4. Зависимость дисперсии оценки координаты объекта от его местоположения в картинной плоскости

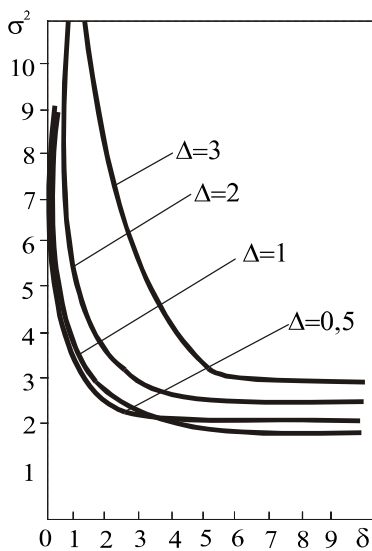


Рис. 5. Зависимость дисперсии оценки координат от расстояния между объектами

объекта от расстояния между объектами (δ) и размеров дискрет (Δ). Видно, что по мере приближения объектов друг к другу качество оценивания падает, особенно это заметно при достаточно больших размерах дискрет регистрирующей аппаратуры. Итак, получена совместно-оптимальная процедура оценивания (10)–(13) параметров положения объектов в условиях редкой дискретизации пространства наблюдений (по группированной выборке), являющейся двумерным “оптимальным” аналогом эвристической одномерной процедуры [5], которая использует вместо локальных математических ожиданий случайных величин в дискрете значения медиан этих дискретов. Анализ элементов соответствующей матрицы Фишера и, в частности, приведенных графиков позволяет оценить потенциальную точность предлагаемых оценок, а также область их целесообразного

использования в реальных информационных системах.

Литература: 1. Бодин Н.А. Оценка параметров распределения по группированным выборкам // Тр. ин-та им. Стеклова. Теоретические задачи математической статистики. 1970. № III. С. 110–150. 2. Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975. 776 с. 3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с. 4. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности: Справочное издание / Под ред. С.А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1989. 606 с. 5. Миленький А.В. Классификация сигналов в условиях неопределенности // М.: Сов. радио, 1975. 328 с.

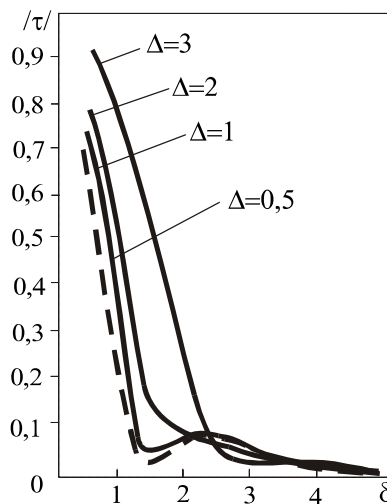


Рис. 6. Зависимость коэффициентов взаимной корреляции координат от расстояния между ними

Поступила в редколлегию 03.03.99

Рецензент: д-р техн. наук Поповский В.В.

Саваневич Вадим Евгеньевич, канд. техн. наук, доцент Харьковского военного университета. Адрес: Украина, 310086, Харьков, ул. Тобольская, 38-а, кв.33, тел. 32-16-38.

УДК 662.396.67:621.314.6

ВАРИАНТЫ АНАЛИЗА КПД СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ СВЧ ЛУЧОМ

ШОКАЛО В.М., РЫБАЛКО А.М., КОНОВАЛЬЦЕВ А.А.

Излагаются два варианта анализа КПД систем передачи энергии СВЧ-лучом (СПЭСЛ). Первый, более строгий, предполагает совместное рассмотрение процессов передачи, приема и выпрямления энергии в системе. Второй вариант допускает декомпозицию СПЭСЛ на автономные передающую и приемную подсистемы. Путем исследований доказывается практическая пригодность второго варианта анализа.

В настоящее время значительное внимание уделяется разработке систем передачи энергии с помощью СВЧ луча. Важнейшим требованием, предъявляемым к этим системам, является высокий результирующий КПД. Значение такого КПД во многом зависит, как показано в [1], от КПД перехвата и выпрямления. Последний, с учетом влияния нелинейных эффектов в ректенне (антенне-выпрямителе), определяется из соотношения

$$\eta = \frac{P_{0\max}}{P_{\Sigma}} = \frac{\int_0^a \int_0^a |F(u)J_0(\mu\rho)|^2 g(\rho) \rho d\rho}{\int_0^a \int_0^a F(u)^2 u du}, \quad (1)$$

где $P_{0\max}$ – суммарная мощность постоянного тока на выходах приемно-выпрямительных элементов

(ПВЭ) ректенны с апертурой радиуса R_2 ; P_{Σ} – мощность излучения передающей антенны с апертурой радиуса R_1 ; $a = \sqrt{k_0 R_2 R_1 / D}$, k_0 – волновой коэффициент; D – расстояние между апертурами; $F(u)$ – амплитудное распределение по апертуре передающей антенны; $J_0(\mu\rho)$ – функция Бесселя нулевого индекса; $g(\rho) = \eta[p(\rho)]$ – функция, описывающая нелинейную зависимость КПД выпрямления ПВЭ η от плотности потока p падающего поля; ρ – радиальная координата.

Однозначно вид функции $g(\rho)$ может быть определен только для ректенн, построенных из однотипных ПВЭ, соединенных с нагрузкой последовательной или параллельной схемой сбора и в приближении отсутствия побочного излучения. На практике возможно применение ректенн как с неоднотипными ПВЭ, так и с произвольной схемой сбора, для которых вид функции $g(\rho)$ определить весьма трудно. Поэтому имеет смысл найти более простой способ расчета КПД перехвата и выпрямления при допустимых потерях в точности вычислений.

С этой целью рассмотрим возможные пути упрощения записи функционала (1). Введем обозначение

$$g(\rho) = \eta_{\max} \cdot f[p(\rho), \mu], \quad (2)$$

где η_{\max} – КПД выпрямления при максимальном значении плотности потока мощности падающего на ректенну СВЧ пучка; $f[p(\rho), \mu]$ – нормированная функция, которая определяет зависимость КПД