МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

О. О. СИНЯВСЬКА,
Г. І. СЛИВКА-ТИЛИЩАК,
П. В. СЛЮСАРЧУК

РЯДИ ФУР'Є

Навчальний посібник

для студентів математичних та технічних спеціальностей

Ужгород – 2024

УДК 517.443(075.8)
С-38

Ряди Фур'є: навчальний посібник для студентів математичних та технічних спеціальностей. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі О. О. Синявська, Г. І. Сливка-Тилищак, П. В. Слюсарчук. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2024. 84 с.

У навчальному посібнику зібрано основні теоретичні відомості до розділу «Ряди Фур'є» з математичного аналізу для студентів математичних, технічних та споріднених спеціальностей. Також наведено навчальні задачі з детальним розв'язанням, набір індивідуальних домашніх завдань та додаткові задачі для самостійної роботи студентів.

Рекомендовано Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 22 лютого 2024 року, протокол № 1.

Рецензенти:

Курченко О. О., доктор фіз.-мат. наук, доцент, професор кафедри математичного аналізу Київського національного університету ім. Т. Шевченка;

Рейтій О.К., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь Державного вищого навчального закладу "Ужгородський національний університет".

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Одним із важливих розділів математичного аналізу є «Ряди Фур'є». Ці тригонометричні ряди відіграють важливу роль у математичній фізиці, теорії пружності, обробці сигналів, теорії випадкових процесів та полів, теорії керування, теорії зображень, фізиці та інших галузях науки та інженерії. До вивчення цих рядів історично призвели деякі задачі фізики, наприклад задача про коливання струни, задача про закономірності в явищах теплопровідності та інші.

Цей розділ названий на честь французького математика Жана Батіста Жозефа Фур'є (1768-1830). Перші його роботи відносились до алгебри. У лекціях 1796 р. він виклав теорему про число дійсних коренів алгебраїчного рівняння, що лежать між даними границями (опублікована 1820 р.), яку назвали його ім'ям; повне вирішення питання про число дійсних коренів алгебраїчного рівняння було одержане у 1829 р. Ж. Ш. Ф. Штурманом. У 1818 р. Ж. Фур'є досліджував умови застосування розробленого І. Ньютоном методу числового розв'язання рівнянь, не знаючи про одеражні аналогічні результати, у 1768 р. французьким математиком Ж. Р. Мурайлем. Підсумком робіт Фур'є з чисельних методів рівнянь є «Аналіз визначених рівнянь», виданий посмертно у 1831 р.

До основної галузі занять Ж. Фур'є належала математична фізика. У 1807 і 1811 роках він представив Паризький Академії Наук свої перші відкриття з теорії поширення тепла у твердому тілі, а у 1822 р. опублікував роботу «Аналітична теорія тепла», що зіграла велику роль у подальшій історії математики. Ця робота стала джерелом всіх сучасних методів математичної фізики. У ній автор вивів диференціальне рівняння теплопровідності і розвинув ідеї, наведені раніше тільки у загальному Д. Бернуллі, розробив метод відокремлення змінних для розв'язання рівняння теплопровідності при тих чи інших заданих граничних умовах, який він застосовував у ряді частинних випадків. В основі цього методу лежить зображення функцій тригонометричними рядами Фур'є, які розглядались іноді раніше, але стали важливою частиною математичної фізики лише при Ж. Фур'є.

Метод відокремлення змінних отримав подальший розвиток у працях С. Пуассона, М. В. Остроградського та інших математиків XIX ст. «Аналітична теорія тепла» стала відправним пунктом створення теорії тригонометричних рядів і розробки деяких загальних проблем математичного аналізу. Ж. Фур'є навів перші приклади розкладу в тригонометричні ряди Фур'є функцій, які задані на різних ділянках з різноманітними аналітичними виразами. Його спроба довести можливість розкладу в тригонометричний ряд Фур'є будь-якої функції була невдалою, але започаткувала великий цикл дослідження, присвячених проблемі зображення функцій у вигляді тригонометричних рядів (П. Діріхле, М. І. Лобачевський, Б. Ріман та інші). З цими дослідженнями було в значній мірі пов'язане виникнення теорії множин та теорії функції дійсної змінної.

Отже, тригонометричні ряди Фур'є та інтеграли Фур'є складають невід'ємну частину у багатьох фізико-математичних та технічних галузях, є необхідними складовими при розв'язанні багатьох задач.

Запропонований навчальний посібник містить основні теоретичні відомості з розділу «Ряди Фур'є» та призначений для студентів математичних, технічних та спеціальностей. Також до кожної теми наведено навчальні задачі з детальним розв'язанням, а в кінці посібника – набір індивідуальних завдань та додактові задачі для самостійної роботи студентів.

1. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ ФУР'Є

1.1. Поняття про тригонометричний ряд Фур'є. Постановка задачі. Знаходження коефіцієнтів

Розглянемо функцію вигляду $y = A\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi\right)$, графіком такої функції є синусоїда, що задає гармонійні коливання. Число A називається *амплітудою*, $\omega = \frac{2k\pi}{T}$, $k \in \mathbb{N}$, – *частотою*, φ – *початковою фазою* гармонійного коливання.

Розглянемо тепер суму $A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right)$, яка буде суперпозицією гармонійних коливань. Цю функцію можна розглядати як частинну суму ряду

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right).$$

Сума $A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right) = f(x)$ є періодичною з періодом T функцією. Оскільки

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin\frac{2\pi k}{T}x\cos\varphi_k + A_k\cos\frac{2\pi k}{T}x\sin\varphi_k\right),$$

і позначаючи

$$\frac{a_0}{2} = A_0, A_k\cos\varphi_k = b_k, A_k\, sin\,\varphi_k = a_k, k \geq 1, T = 2l,$$

отримаємо ряд вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x + b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\right). \qquad (1.1)$$

Означення 1.1. Функціональний ряд, що міститься у правій частині рівності (1.1), називається *тригонометричним*, сталі a_0, a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, – *коефіцієнтами* тригонометричного ряду, а система (послідовність) функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \dots$$

називається *основною тригонометричною системою функцій*.

Якщо рівність (1.1) справедлива, то її називатимемо *розкладом функції* $f(x)$ *в ряд Фур'є*.

Властивості

1. Якщо рівність (1.1) має місце, то функція $f(x)$ періодична з періодом $T = 2l$.

2. Якщо ряд (1.1) рівномірно збіжний на $[-l, l]$, то функція $f(x)$ буде інтегрованою на цьому відрізку і ряд можна почленно проінтегрувати на відрізку $[-l, l]$.

Виникають наступні задачі: як періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$ можна розкласти в ряд вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x\right);$$

як знаходять коефіцієнти $a_0, a_k, b_k,\ k \in \mathbb{N}$, якщо цей розклад можливий; яка залежність між властивостями функцій і збіжністю ряду.

Для знаходження коефіцієнтів ряду (1.1), обчислимо наступні інтеграли:

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\,dx = l;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0,\ \int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l + \frac{1}{2}\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = l;$$

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = l;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n+m)\pi x}{l} - \sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-l}{(n+m)\pi}\cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{l}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}\right) = 0,\ m \neq n;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n+m)\pi x}{l} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{(n+m)\pi}\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}+\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}\right)=0,\ m\neq n;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-l}{(n-m)\pi}\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}\right)=0,\ m\neq n.$$

Отже, справедливі наступні рівності

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}; \tag{1.2}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0,\forall m,n\in\mathbb{Z}; \tag{1.3}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0,m\neq n,\\ l,m=n;\end{cases} \tag{1.4}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0,m\neq n,\\ l,m=n.\end{cases} \tag{1.5}$$

Будемо вважати, що ряд (1.1) рівномірно збіжний на $[-l,l]$, тоді ряд можна почленно інтегрувати на $[-l,l]$.

Проінтегруємо рівність (1.1) на відрізку $[-l,l]$, використовуючи рівності (1.2):

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=a_0l.$$

Звідси

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx.$$

Помножимо співвідношення (1.1) на $\cos\frac{m\pi x}{l}$ та проінтегруємо отриману рівність на відрізку $[-l,l]$, враховуючи при цьому рівності (1.2)-(1.5):

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=a_ml.$$

Тоді

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx,\ m=1,2,\ldots$$

Аналогічно, помножимо (1.1) на $\sin\frac{m\pi x}{l}$ і проінтегруємо рівність на відрізку $[-l, l]$, враховуючи при цьому рівності (1.2)-(1.5):

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = b_m l.$$

Звідси

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx, m = 1,2, ...$$

Таким чином, для будь-якої періодичної функції $f(x)$ з періодом $T = 2l$ та інтегровної на відрізку $[-l, l]$ можна знайти коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbb{N}. \qquad (1.6)$$

Ці коефіцієнти називаються *коефіцієнтами Фур'є* для функції $f(x)$ за основною тригонометричною системою функцій на відрізку $[-l, l]$.

Означення 1.2. Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

коефіцієнти якого знаходяться за формулами (1.6), називається *тригонометричним рядом Фур'є* для функції $f(x)$ на відрізку $[-l, l]$.

Отже, кожній інтегровній на відрізку $[-l, l]$ функції $f(x)$ можна поставити у відповідність її тригонометричний ряд Фур'є, тобто

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right).$$

1.2. Ряд Фур'є для парної, непарної функції. Розклад на відрізку [-π, π]. Розклад на довільному відрізку

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, визначену на відрізку $[-l, l]$, $l > 0$, називають *парною*, якщо для довільного $x \in [-l, l]$:

$$f(-x) = f(x).$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Якщо для довільного $x \in [-l, l]$ виконується умова:

$$f(-x) = -f(x),$$

то таку функцію $f(x)$ називають *непарною*. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Із властивостей визначеного інтегралу, якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[-l, l]$ і є парною, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

а якщо є непарною, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0.$$

Відзначимо також ще одну властивість періодичної функції. Якщо функція $f(x)$ – визначена на $\mathbb{R}$, періодична з періодом T та інтегровна на будь-якому скінченному проміжку, то $\forall a \in \mathbb{R}$ має місце рівність:

$$\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{a}^{a+T} f(x)dx. \quad (1.7)$$

Для доведення цієї властивості розглянемо інтеграл

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx.$$

Використовуючи періодичність функції $f(x)$, після введення заміни змінної у другому інтегралі

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = T + y \\ dx = dy \\ T \le x \le a + T \end{matrix} \right| = \int_{0}^{a} f(T + y)dy = \int_{0}^{a} f(y)dy,$$

одержимо

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_a^T f(x)dx.$$

Нехай $f(x)$ – парна, інтегровна на відрізку $[-l, l]$. Тоді функція $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ буде також парною, а $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – непарною. Застосовуючи згадані вище властивості інтегралу Рімана від парних і непарних функцій на симетричному проміжку, із формул (1.6) для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ отримаємо наступе:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Отже, *ряд Фур'є парної інтегровної на відрізку* $[-l, l]$ *функції* $f(x)$ *має вигляд*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

де коефіцієнти визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Нехай $f(x)$ – непарна, інтегровна на відрізку $[-l, l]$. Тоді функція $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ буде також непарною, а $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – парною. Аналогічно, за допомогою властивостей інтегралу Рімана від парних і непарних функцій на симетричному проміжку, із формул (1.6) коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$ будуть мати наступний вигляд:

$$a_0 = 0, a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Отже, *ряд Фур'є непарної інтегровної на відрізку* $[-l, l]$ *функції* $f(x)$ *має вигляд*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

де коефіцієнти b_n визначаються за формулою (1.9).

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$. Цю функцію можна періодично продовжити на всю числову вісь з періодом $T=b-a=2l$ і тоді, використовуючи рівність (1.7), для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ отримаємо:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,n\in\mathbb{N}.$$

Отже, *функцію* $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$ *можна розвинути у ряд Фур'є*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x\right),$$

де коефіцієнти Фур'є знаходяться за наступними формулами для $2l=b-a$:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)dx\,,a_n=\frac{1}{l}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\tfrac{1}{l}\textstyle\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,n\in\mathbb{N}. \qquad (1.10)$$

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l,l]$ і має місце рівність (1.1). У рівностях (1.1) та (1.6) введемо заміну $\frac{\pi x}{l}=t$, $-l\le x\le l$. Тоді $x=\frac{tl}{\pi}$, $-\pi\le t\le\pi$. Звідки

$$f_1(t)=f\left(\tfrac{lt}{\pi}\right)=\tfrac{a_0}{2}+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,t+b_n\sin n\,t), \qquad (1.1^*)$$

а для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ отримаємо

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)dt,$$

$$a_n=\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)\cos nt\,dt,\ b_n=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)\sin nt\,dt. \qquad (1.6^*)$$

Отже, рівність (1.1*) є розкладом в ряд Фур'є функції $f_1(t)$, що задана на відрізку $[-\pi,\pi]$ із коефіцієнтами виду (1.6*). Враховуючи рівності (1.10), у формулах (1.6*) інтеграли можна знаходити за будь-яким проміжком довжиною

2π. Якщо ж в рівностях (1.1*) і (1.6*) виконаємо заміну $\frac{\pi x}{l} = t,\ -l \le x \le l$, то отримаємо рівності (1.1) і (1.6). Це означає, що можна вивчати також властивості тригонометричних рядів для функцій, заданих на відрізку $[-\pi, \pi]$. Ці властивості переносяться на випадок функцій, що задані на довільному проміжку.

Навчальні задачі

1.1. Знайти ряд Фур'є для функції $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Дана функція парна, її графік симетричний відносно осі Oy. Наведемо її графік на $[-\pi, \pi]$ та її періодичне продовження на всю числову вісь (рис. 1.1):

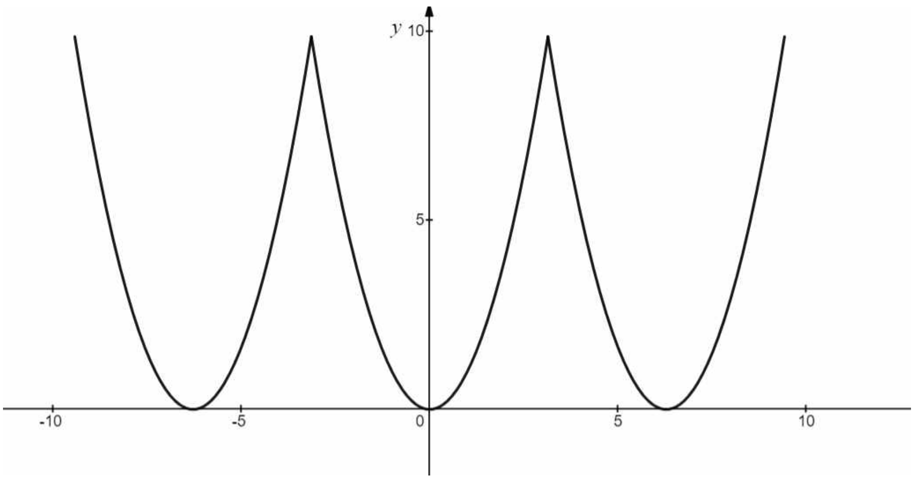

Рисунок 1.1

Всі коефіцієнти $b_n = 0$, а коефіцієнти a_0 та a_n знаходимо за формулами (1.8) при $l = \pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}2xdx\right) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx\,,\ -\pi \le x \le \pi.$$

1.2. Знайти ряд Фур'є для функції $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Дана функція непарна, наведемо її графік на $[-\pi, \pi]$ та її періодичне продовження на всю числову вісь (рис. 1.2):

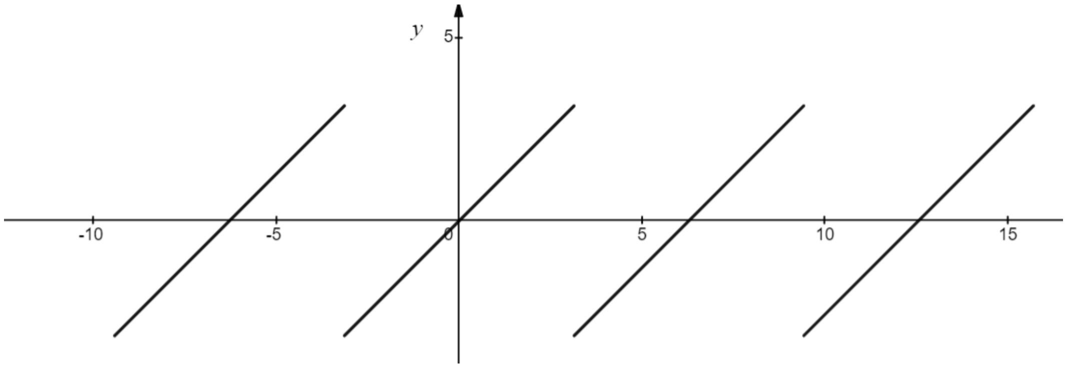

Рисунок 1.2

Знайдемо коефіцієнти Фур'є, враховуючи непарність функції $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$:

$$a_0 = 0, a_n = 0\ \forall n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(x\cos nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = -\frac{2}{n}\cos\pi n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\,,\ -\pi \le x \le \pi.$$

1.3. Розкласти $f(x) = x^2$, $x \in (0, 2\pi)$ в ряд Фур'є.

Розв'язання. Для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x) = x^2$ для $l = \pi$ за формулами (1.10) маємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} 2xdx\right) = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-x^2 \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} 2xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx\right) = \frac{2}{\pi n}\left(-2\pi^2 + x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-2\pi^2 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{4\pi}{n}, n \in \mathbb{N}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

1.3. Лема Рімана

Лема 1.1 (Рімана). *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[a; b]$ (можливо у невласному розумінні, функція може бути необмежена або проміжок нескінченний), тоді:*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x) \sin px\, dx = 0, \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x) \cos px\, dx = 0.$$

Доведення. Обидва твердження доводяться однаково. Розглянемо перше.

I) Нехай $f(x)$ – інтегровна на відрізку $[a, b]$. Розглянемо його розбиття $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ і позначимо $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}; x_k]} f(x), M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}; x_k]} f(x)$.

Тоді

$$\int_a^b f(x)\sin px\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\sin px\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-m_k)\sin px\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin px\,dx.$$

Розглянемо інтеграл по модулю:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,dx\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-m_k)\sin px\,dx\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin px\,dx\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-m_k)dx + \left|\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{1}{p}(\cos px_{k-1}-\cos px_k)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k + \frac{2}{|p|}\sum_{k=1}^{n}|m_k|.$$

Нехай задано довільне $\varepsilon > 0$. Тоді із інтегровності $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ випливає, що можна вибрати розбиття, для якого $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо таке розбиття, тому і $\sum_{k=1}^{n}|m_k|$ буде фіксованою. Оскільки $\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}|m_k| \to 0$ при $p \to \infty$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists p_0 = \frac{4}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}|m_k|\ \forall p$, де $|p| > p_0$:

$$\frac{2}{|p|}\sum_{k=1}^{n}|m_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тобто, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке p_0, що для всіх p, для яких $|p| \ge p_0$: $\left|\int_a^b f(x)\sin px\,dx\right| < \varepsilon$. А це означає, що

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,dx = 0.$$

II) Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[a,b)$ у невласному розумінні, b – особлива точка. Тоді $\int_a^b |f(x)|dx$ – збіжний і для довільного $c \in [a,b)$:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,dx\right| \le \left|\int_a^c f(x)\sin px\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\sin px\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^c f(x)\sin px\,dx\right| + \int_c^b |f(x)|dx.$$

Із абсолютної збіжності інтеграла випливає, що $\lim\limits_{c \to b-0} \int_c^b |f(x)| dx = 0$. Нехай задано довільне $\varepsilon > 0$. Тоді $\exists c' \in (a, b)$ таке, що $\forall c \in (c', b)$ виконується $\int_c^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо таке c. На відрізку $[a, c]$ функція $f(x)$ інтегровна у власному розумінні, тому $\lim\limits_{p \to \infty} \int_a^c f(x) \sin px \, dx = 0$, а це означає, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p_0 > 0$ $\forall |p| \geq p_0$: $\left| \int_a^c f(x) \sin px \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке p_0, що для всіх p , для яких $|p| \geq p_0$: $\left| \int_a^b f(x) \sin px \, dx \right| < \varepsilon$, а звідси

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b f(x) \sin px \, dx = 0.$$

III) Нехай тепер $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[a, +\infty)$. Тоді

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) \sin px \, dx \right| \leq \left| \int_a^c f(x) \sin px \, dx \right| + \left| \int_c^{+\infty} f(x) \sin px \, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^c f(x) \sin px \, dx \right| + \int_c^{+\infty} |f(x)| dx,$$

де $\int_c^{\infty} f(x) dx \to 0$, $c \to +\infty$. Тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c' > a$ $\forall c \geq c'$:

$$\int_c^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Знову зафіксуємо таке c. На відрізку $[a, c]$ функція $f(x)$ інтегровна у невласному розумінні, тому

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^c f(x) \sin px \, dx = 0.$$

А це означає, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p_0 > 0$ $\forall |p| \geq p_0$: $\left| \int_a^c f(x) \sin px \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке p_0, що для всіх p , для яких $|p| \geq p_0$: $\left| \int_a^b f(x) \sin px \, dx \right| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{p \to \infty} \int_a^{+\infty} f(x) \sin px \, dx = 0$. Лему доведено.

Наслідок 1.1. *Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегровна на $[-l, l]$, то для функції $f(x)$ коефіцієнти Фур'є $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Навчальні задачі

1.4. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos^3 nx\,dx$, де $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$.

Розв'язання. За допомогою тригонометричних формул, знайдемо:

$$\cos^3\alpha=\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha=\cos\alpha\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{4}(\cos\alpha+\cos 3\alpha).$$

Тоді за лемою Рімана

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos^3 nx\,dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx+\frac{1}{4}\int_a^b f(x)\cos 3nx\,dx\right)=0.$$

1.4. Інтеграл Діріхле. Принцип локалізації

Нехай $f(x)$ – періодична з періодом 2π функція, абсолютно інтегровна на відрізку $[-\pi,\pi]$ (можливо і у невласному розумінні), а отже і на будь-якому скінченному проміжку. Тоді їй можна поставити у відповідність ряд Фур'є

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

з відповідними коефіцієнтами Фур'є

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,,b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\,n\in\mathbb{N}.$$

Для дослідження поведінки ряду Фур'є в будь-якій точці x_0, розглянемо часткову суму цього ряду

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0+b_m\sin mx_0).\qquad(1.11)$$

Так як, $S_n(x)$ – періодична з періодом 2π функція, то достатньо розглянути випадок $x_0\in[-\pi,\pi]$.

Підставимо значення коефіцієнтів Фур'є у суму (1.11):

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos mx\cos mx_0+\sin mx\sin mx_0)dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos m(x-x_0)\,dx\right) =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\tfrac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(x-x_0)\right)dx. \qquad (1.12)$$

За допомогою тотожності

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos m\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left(\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

із (1.12) одержимо рівність:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{(x-x_0)}{2}}dx.$$

Цей інтеграл називають *інтегралом Діріхле*.

Виконаємо підстановку $x - x_0 = t$, тоді

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Функції $f(t)$ і $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ є періодичними з періодом 2π, тому за властивістю (1.7):

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

У першому інтегралі із останньої рівності введемо заміну $t = -x$. Тоді проміжок інтегрування зведеться до проміжку $[0, \pi]$ і отримаємо наступний вигляд часткової суми ряду Фур'є

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx. \qquad (1.13)$$

Інтеграл у правій частині рівності (1.13) називається *інтегралом Діріхле*, а сама рівність називається *інтегральним зображенням часткової суми ряду Фур'є*.

Для дослідження збіжності ряду Фур'є необхідно дослідити поведінку інтегралу Діріхле. Нехай задано $0 < \delta < \pi$. Тоді

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx. \qquad (1.14)$$

Для $0 < \delta < \pi$ функція $\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{\sin\frac{x}{2}}$ інтегровна на $[\delta, \pi]$, тому за лемою Рімана другий доданок в (1.14)

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx \to 0,\ n \to \infty.$$

Отже, другий доданок в (1.14) прямує до нуля при $n \to \infty$, а для першого доданку із (1.14) $x \in [0, \delta]$, тому поведінка часткової суми ряду Фур'є в точці x_0 визначається тільки значеннями функції на проміжку $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Цей факт називається *«принципом локалізації»* і полягає в наступному: поведінка ряду Фур'є функції $f(x)$ в деякій точці x_0 залежить виключно від значень цієї функції у як завгодно малому околі цієї точки.

Отже, якщо взяти дві функції, значення яких в довільному малому околі точки x_0 співпадають, то як би вони не відрізнялись зовні цього околу, відповідні цим функціям ряди Фур'є поводять себе в точці x_0 однаково: або обидва збігаються і мають одну і туж суму, або обидва розбігаються.

Необхідно відзначити, що коефіцієнти Фур'є для даних функцій, залежать від всіх їх значень, можуть бути зовсім різними.

1.5. Умови збіжності ряду Фур'є

Нехай $f(x)$ – інтегровна на відрізку $[-\pi, \pi]$ функція, періодична з періодом $T = 2\pi$. Тоді цій функції можна поставити у відповідність ряд Фур'є:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, x \in [-\pi, \pi]. \tag{1.15}$$

Позначимо через $S_n(x_0)$ часткову суму ряду Фур'є в точці x_0. Оскільки, $S_n(x)$ – періодична з з періодом 2π, то достатньо розглянути випадок $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Тоді із виразу (1.14)

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\big)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx. \tag{1.16}$$

Проінтегруємо на проміжку $[-\pi, \pi]$ тотожність

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Враховуючи, що $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx = 0$, отримаємо:

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Звідси

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Зауважимо, що цю рівність можна отримати із (1.14), якщо на проміжку $[-\pi, \pi]$ покласти $f(x) \equiv 1$, тоді і $S_n(x) \equiv 1$.

Нехай S_0 – деяке фіксоване число. Помножимо останню тотожність на S_0 та віднімемо від (1.16):

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x_0+x)+f(x_0-x)\big)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx -$$

$$-S_0\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi}(f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S_0)\tfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx. \qquad (1.17)$$

Теорема 1.1. *Для того, щоб ряд Фур'є (1.4) для функції* $f(x)$ *збігався в точці* x_0 *і мав суму* S_0, *тобто щоб* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S_0$, *необхідно й достатньо, щоб існувало* $\delta \in (0,\pi)$ *таке, що*

$$\textstyle\int_0^{\delta}\varphi(x)\tfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx \to 0, n\to\infty, \qquad (1.18)$$

де $\varphi(x) = f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S_0$.

Доведення. Для будь-якого $\delta \in (0,\pi)$ із співвідношення (1.17) маємо

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx.$$

Для будь-якого $\delta \in (0,\pi)$ функція $\frac{\varphi(x)}{\sin\frac{x}{2}}$ інтегровна на проміжку (δ,π), тому за лемою Рімана

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx \to 0, n\to\infty.$$

Отже, умова: існує таке $\delta \in (0,\pi)$, для якого

$$\int_0^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx \to 0,\ n\to\infty,$$

рівносильна умові $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S_0$. Теорема доведена.

Покладемо

$$S_0 = \frac{1}{2}\big(f(x_0+x)+f(x_0-x)\big)$$

при $x_0 \in (-\pi,\pi)$, а для $x_0 = \pi$ або $x_0 = -\pi$

$$S_0 = \frac{1}{2}\big(f(\pi - 0) + f(-\pi + x)\big).$$

Якщо $x_0 \in (-\pi, \pi)$ є точкою непервності функції $f(x)$, то $S_0 = f(x_0)$. При такому виборі S_0

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0.$$

Теорема 1.2 (ознака Діні). *Нехай $f(x)$ – інтегровна, періодична з періодом $T = 2\pi$ функція та існує $\delta \in (0, \pi)$ таке, що*

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(x)|}{x} dx < +\infty. \tag{1.19}$$

Тоді ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається в точці x_0 і має суму S_0, тобто $S_n(x) \to S_0, n \to \infty$.

Доведення. Із існування інтеграла (1.19) та інтегровності функції $f(x)$ випливає існування інтеграла $\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$, тому і функція $\frac{|\varphi(x)|}{x} \frac{x}{sin\frac{x}{2}}$ буде абсолютно інтегровною на проміжку $[-\pi, \pi]$ та із (1.17) випливає

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(x)}{x} \frac{x}{2\, sin\frac{x}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\, dx.$$

За лемою Рімана права частина попередньої рівності прямує до 0 при $n \to \infty$. А це означає, що ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається в точці x_0 і його сума дорівнює S_0. Теорема доведена.

Оскільки,

$$\varphi(x) = f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2S_0 =$$
$$= f(x_0 + x) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - x) - f(x_0 - 0).$$

Тоді

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(x)|}{x} dx \le \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + x) - f(x_0 + 0)|}{x} dx + \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - x) - f(x_0 - 0)|}{x} dx$$

і умова (1.19) буде виконуватись, якщо обидва інтеграли в правій частині існують. Тому справедливий наступний наслідок.

Наслідок 1.1. *Якщо існують інтеграли*

$$\int_0^\delta \frac{f(x_0+x) - f(x_0+0)}{x} dx,\ \int_0^\delta \frac{f(x_0-x) - f(x_0-0)}{x} dx, \tag{1.20}$$

тоді $S_n(x_0) \to S_0, n \to \infty$.

Теорема 1.3 (ознака Ліпшица). *Нехай функція* $f(x)$ *в точці* x_0 *задовольняє для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *умові:* $\exists L > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (-\delta, \delta)$: $|f(x_0 + x) - f(x_0)| \le L|x|^\alpha$. *Тоді* $S_n(x_0) \to f(x_0), n \to \infty$.

Доведення. Із умови цієї теореми випливає, що для $S_0 = f(x_0)$

$$|\varphi(x)| = \frac{1}{2}|f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)| \le L|x|^\alpha,$$

якщо $x \in (-\delta, \delta)$. Тому умова (1.19) теореми Діні виконується для числа $S_0 = f(x_0)$.

Наслідок 1.2. *Нехай існують скінченні границі:*

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{|f(x_0+x)-f(x_0+0)|}{x};\ \lim_{x\to 0-0} \frac{|f(x_0-x)-f(x_0-0)|}{-x}. \qquad (1.21)$$

Тоді ряд Фур'є в точці x_0 *буде збіжним і матиме суму* S_0. *З цих умов також випливає існування інтегралів (1.6).*

Означення 1.3. Функція $f(x)$ називається *кусково-диференційовною* на відрізку $[a, b]$, якщо його можна розбити на скінченну кількість відрізків, в кожній внутрішній точці якого функція $f(x)$ буде диференційованою, а на кінцях відрізків існують скінченні границі типу (1.21).

Наслідок 1.3. *Якщо функція* $f(x)$ *– періодична з періодом* $T = 2\pi$ *кусково-диференційовна на відрізку* $[-\pi, \pi]$. *Тоді ряд Фур'є буде збіжним в кожній точці* x_0 *до* S_0.

Навчальні задачі

1.5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 2, -\pi < x \le 0, \\ -1, 0 < x \le \pi \end{cases}$ і знайти його суму.

Розв'язання. Зобразимо задану функцію та її періодичне продовження на всю числову вісь (рис. 1.3):

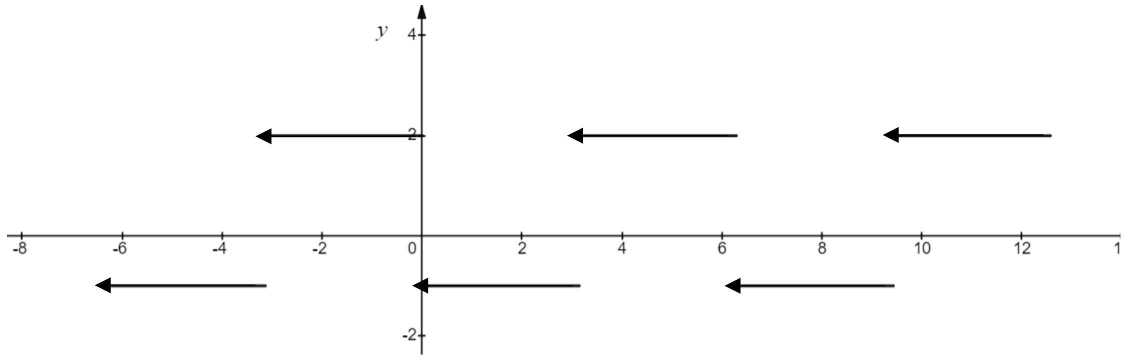

Рисунок 1.3

Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на проміжку $[-\pi, \pi]$, тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до цієї функції.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2dx + \int_{0}^{\pi}(-1)dx\right) = 2 - 1 = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi}(-1)\cos nx\, dx\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi}(-1)\sin nx\, dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\cos nx|_{0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) + \frac{1}{\pi n}((-1)^n - 1) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ -\dfrac{6}{\pi n}, n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$b_{2n} = 0, b_{2n-1} = -\frac{6}{\pi(2n-1)}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти і отримаємо ряд Фур'є, суму якого позначимо $S(x)$:

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

Сума ряду $S(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π, тому достатньо знайти її значення на відрізку $[-\pi, \pi]$. Тоді $S(x) = f(x)$, $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, де

x – точка неперервності. У точці $x = 0$, що є точкою розриву першого роду функції $f(x)$,

$$S(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2},$$

а на кінцях проміжку маємо

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\,, x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

1.6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ на проміжку $[-\pi, \pi]$. Знайти його суму.

Розв'язання. Наведемо графік функції $f(x)$, одержаної її періодичним продовженням на всю числову вісь (рис. 1.4).

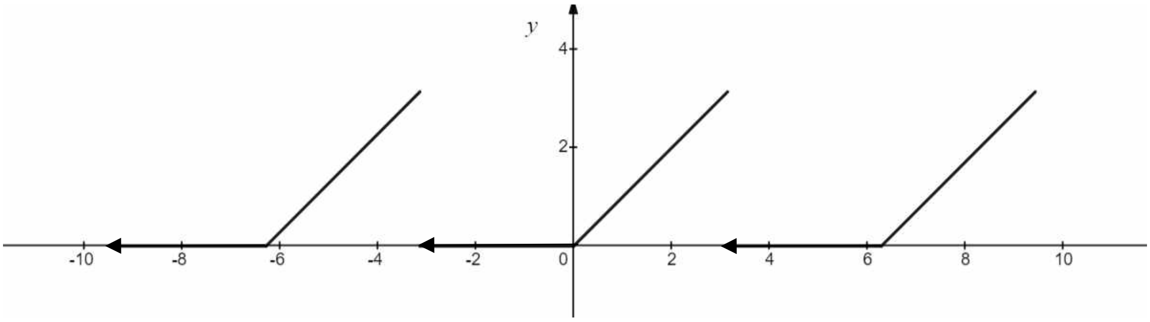

Рисунок 1.4

Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на проміжку $[-\pi, \pi]$, тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до цієї функції. Сума ряду $S(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π, тому достатньо знайти її значення на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\, dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ -\dfrac{2}{n^2\pi}, n = 2k-1. \end{cases}$$

Тоді

$$a_{2n} = 0, a_{2n-1} = -\frac{2}{\pi(2n-1)^2}.$$

Далі,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\, dx\right) =$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right).$$

Сума ряду співпадає з функцією $f(x)$ у всіх точках неперервності, а на кінцях проміжку $x = \pm\pi$ сума ряду $S(x)$ має вигляд:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

1.7. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку [0,3] функцію $f(x) = \begin{cases} 3x, x \in [0,2], \\ 1, x \in (2,3]. \end{cases}$ Знайти суму ряду Фур'є.

Розв'язання. Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на проміжку [0,3], тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до $f(x)$. Сума ряду $S(x)$ – періодична функція з періодом 3, тому досить знайти її значення на відрізку [0,3].

Оскільки функцію $f(x)$ задано на відрізку $[a, b]$, де $a = 0, b = 3$, то у формулах (1.10) покладемо $l = \frac{b-a}{2} = \frac{3}{2}$ та обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 3xdx + \int_2^3 dx\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\Big|_0^2 + 1\right) = \frac{14}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^2 f(x)\cos\frac{2\pi nx}{3}dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 3x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx + \int_2^3 \cos\frac{2\pi nx}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{9x}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{9}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}dx + \frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3} + \frac{9}{2\pi n}\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2 - \frac{3}{2\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}\right) =$$

$$= \frac{5}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3} - \frac{9}{2\pi^2 n^2} + \frac{9}{2\pi^2 n^2}\cos\frac{4\pi n}{3},$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^2 f(x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 3x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx + \int_2^3 \sin\frac{2\pi nx}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{-9x}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{9}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}dx - \frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{-9}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{9}{2\pi n}\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2 + \frac{3}{2\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3}\right) =$$

$$= -\frac{5}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{9}{2\pi^2 n^2} + \frac{9}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{4\pi n}{3}.$$

Отже,

$$f(x) \sim \frac{7}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3} + \frac{9}{2\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{4\pi n}{3} - 1\right)\right)\cos\frac{2\pi nx}{3} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3} + \frac{9}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{4\pi n}{3}\right)\sin\frac{2\pi nx}{3}, 0 \le x \le 3.$$

У всіх точках $x \in (0,2) \cup (2,3)$ сума ряду співпадає з функцією $f(x)$, а у точках розриву сума ряду така:

$$S(2) = \frac{f(2-0) + f(2+0)}{2} = \frac{7}{2},$$

$$S(0) = S(3) = \frac{f(3-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

1.6. Розклад тільки по синусах і тільки по косинусах

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,l]$ є інтгерованою на цьому відрізку. Довизначимо цю функцію на проміжку $[-l,0)$, так щоб вона була парною на $[-l,l]$. Тоді

$$b_n = 0,\, a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Функції $f(x)$, заданій на $[0,l]$, буде відповідати ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad (1.22)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx\,, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. \quad (1.23)$$

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,l]$ є кусково-диференційовна на цьому відрізку. Сума $S(x)$ відповідного ряду Фур'є буде періодичною із періодом $2l$ функцією. Із наслідку 1.3 випливає, що в точці неперервності $x \in (0,l)$ функції $f(x)$ сума ряду $S(x) = f(x)$. Якщо $x_0 \in (0,l)$ є точкою розриву функції $f(x)$, то сума ряду

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+0) - f(x_0-0)\big).$$

У точках $x = 0$ і $x = l$ відповідно $S(0) = f(0+0)$ і $S(l) = f(l-0)$.

Нехай функція $f(x)$ задана на $(0,l]$. Довизначимо тепер функцію $f(x)$ на $[-l,0]$, так щоб вона була непарною. Тоді

$$a_0 = 0,\, a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Із (1.9) отримаємо, що функції $f(x)$, заданій на $(0,l]$, буде відповідати ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (1.24)$$

де

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \quad (1.25)$$

Нехай функція $f(x)$ задана на проміжку$(0,l]$ є кусково-диференційовна на цьому проміжку. Сума $S(x)$ відповідного ряду Фур'є буде періодичною із періодом $2l$ функцією. Із наслідку 1.3 випливає, що в точці неперервності $x \in (0, l)$ функції $f(x)$ сума ряду $S(x) = f(x)$. Якщо $x_0 \in (0, l)$ є точкою розриву функції $f(x)$, то сума ряду

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+0) - f(x_0-0)\big).$$

У точках $x = 0$ і $x = l$ відповідно $S(0) = 0$ і $S(l) = 0$.

Навчальні задачі

1.8. Розкласти функцію $f(x) = \pi - x, 0 \le x \le \pi$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

Розв'язання. а) Розкладемо спочатку задану функцію в ряд Фур'є по косинусах. Продовжимо функцію $f(x) = \pi - x$ на відрізок $[-\pi, 0]$, щоб була парною, та періодично продовжимо отриману функцію на числову вісь (рис. 1.5).

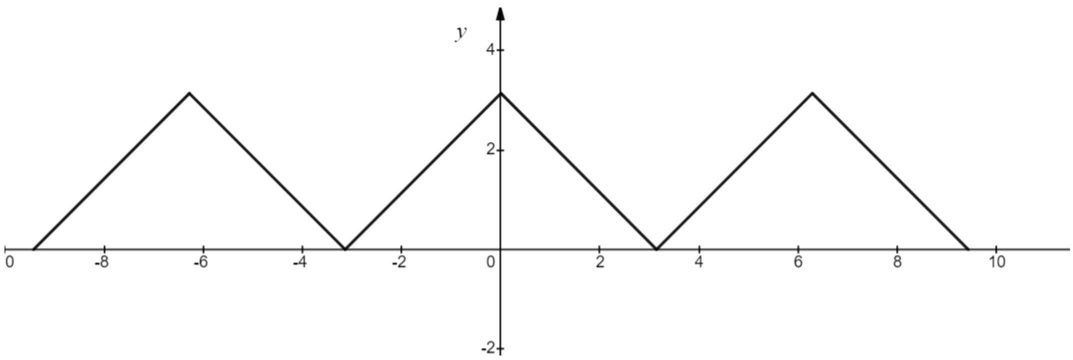

Рисунок 1.5

Тоді ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де за формулами (1.23) при $l = \pi$ коефіцієнти Фур'є рівні:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)dx = -\frac{1}{\pi}(\pi - x)^2\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left((\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k, \\ \dfrac{4}{n^2\pi}, n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n} = 0, a_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)^2\pi}.$$

Тоді ряд Фур'є тільки по косинусах для заданої функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ 0 \le x \le \pi.$$

б) Розкладемо тепер дану функцію в ряд Фур'є по синусах. Продовжимо функцію $f(x) = \pi - x$ на відрізок $[-\pi, 0]$, щоб довизначена функція була непарною, та періодично продовжимо отриману функцію на числову вісь (рис. 1.6).

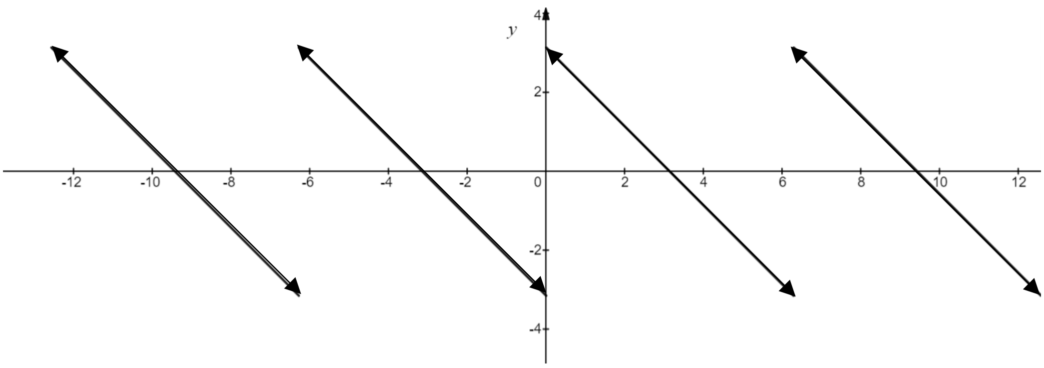

Рисунок 1.6

Тоді ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n}.$$

Отже,

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ 0 \le x \le \pi.$$

У точці $x = 0$ сума ряду $S(x)$ рівна

$$S(0) = \frac{f(0+0) - f(0-0)}{2} = 0.$$

1.9. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

Розв'язання. Розклад по косинусах в ряд Фур'є функції $f(x)$ має вигляд (1.22), де коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами (1.23) і $l = \pi$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0dx\right) = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{\pi n}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k, \\ \frac{2}{n\pi}(-1)^{n-1}, n = 2k-1. \end{cases}$$

Тоді функції $f(x)$ буде відповідати ряд

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\cos(2n-1)x\,, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

В точках $x = 0$, $x = \pi$ сума рівна $S(0) = 1, S(\pi) = 0$, а в $x = \frac{\pi}{2}$ маємо $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

1.10. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x) = \begin{cases} 3x, x \in [0,2], \\ 1, x \in (2,3]. \end{cases}$

Розв'язання. Ряд Фур'є по косинусах для даної функції має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{3},$$

де, враховуючи, що $l = 3$, коефіцієнти Фур'є рівні:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 3xdx + \int_2^3 1dx\right) = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{3}x|_2^3 = \frac{14}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{2}{3}\left(3\int_0^2 x\cos\frac{\pi n x}{3}dx + \int_2^3 \cos\frac{\pi n x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{9x}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^2 - \frac{9}{\pi n}\int_2^3 \sin\frac{\pi n x}{3}dx + \frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{18}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{9}{\pi n}\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^2 - \frac{3}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}\right) =$$

$$= \frac{10}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{18}{\pi^2 n^2}\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{18}{\pi^2 n^2}.$$

Тоді функції $f(x)$ буде відповідати ряд

$$f(x) \sim \frac{7}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{10}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{18}{\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - 1\right)\right) cos\frac{\pi n x}{3}\right), x \in (0,2) \cup (2,3).$$

У точках $x = 0$ та $x = 3$ сума ряду рівна $S(0) = 0, S(3) = 1$, а в $x = 2$: $S(2) = \frac{7}{2}$.

2. РЯДИ ФУР'Є ПО ОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ФУНКЦІЙ

2.1. Ортогональні системи функцій

Позначимо через $\mathbb{R}([a,b])$ множину всіх дійсних функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$. Нагадаємо, що неперервна на відрізку $[a,b]$ функція є інтегрованою на цьому відрізку. Сума і добуток функцій із $\mathbb{R}([a,b])$ є функцією із $R([a,b])$.

Будемо використовувати також наступні властивості. Якщо функція $f \in R([a,b])$ така, що для всіх $x \in [a,b]$: $f(x) \geq 0$ і $\int_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ у всіх точках неперервності. Якщо $f \in \mathbb{R}([a,b])$ і дорівнює нулю у всіх точках неперервності, то $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тому покладемо $f(x) = 0$ для $f \in \mathbb{R}([a,b])$, якщо рівність $f(x) = 0$ правильна у всіх точках неперервності $x \in [a,b]$.

Означення 2.1. Нехай $f \in \mathbb{R}([a,b])$ і $g \in \mathbb{R}([a,b])$. *Скалярним добутком* функцій f і g називається число

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Із властивостей визначеного інтеграла випливають наступні властивості скалярного добутку.

Властивості скалярного добутку

1) $\forall f \in R([a,b])$: $(f,f) \geq 0$ та $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$;

2) $\forall \{f,g\} \subset R([a,b])$: $(f,g) = (g,f)$;

3) $\forall \{f,g\} \subset R([a,b])$ і $\forall \alpha \in R$: $(\alpha f, g) = \alpha(f,g)$;

4) $\forall \{f_1, f_2, g\} \subset R([a,b])$: $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$;

5) $\forall \{f,g\} \subset R([a,b])$: $(f,g)^2 \leq (f,f) \cdot (g,g)$ (нерівність Коші).

Нагадаємо, що нерівність Коші для визначених інтегралів має вигляд:

$$(f,g)^2 = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) = (f,f) \cdot (g,g).$$

Означення 2.2. *Нормою* функції $f \in \mathbb{R}([a,b])$ називається число

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Із означення норми і властивостей скалярного добутку випливають наступні властивості норми:

Властивості норми

1) $\forall f \in R([a,b])$: $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$;

2) $\forall f \in R([a,b])$ і $\forall \alpha \in R$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3) $\forall \{f,g\} \subset R([a,b])$: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Функція f називається *нормованою*, якщо $\|f\| = 1$.

Означення 2.3. *Середньоквадратичною віддалю* між функціями f і g називається число

$$\rho = \|f-g\| = \left(\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx\right)^{1/2}.$$

Середньоквадратична віддаль має всі властивості метрики, тому $(R([a,b]),\rho)$ є метричним простором.

Означення 2.4. Нехай $\{f,g\} \subset \mathbb{R}([a,b])$. Функції f і g називаються *ортогональними* на $[a;b]$, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Означення 2.5. Нехай $\varphi_i \in \mathbb{R}([a,b])$, $i = 1,2,\dots,n$. Система функції $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ називаються *ортогональною*, якщо

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \begin{cases} 0, i \neq j; i,j = 1,2,\dots,n, \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, i = j. \end{cases}$$

Система функції $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ називається *ортонормованою*, якщо

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Послідовність функцій $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\dots,\varphi_i \in \mathbb{R}([a,b])$, $i = 1,2,\dots,n$ називається *послідовністю ортогональних функцій*, якщо $(\varphi_i,\varphi_j) = 0$ для будь-яких $i \neq j$, де $i \geq 1, j \geq 1$, а $\|\varphi_i\| \neq 0$, $i = 1,2,\dots,n$.

Означення 1.7. Функції $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ з $\mathbb{R}([a,b])$ при $n \geq 2$ називаються *лінійно залежними* на $[a;b]$, якщо існують дійсні $c_1, \dots, c_n$, такі, що $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$, а $\|c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n\| = 0$.

Функції $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ називаються *лінійно незалежними* на $[a;b]$, якщо рівність $\|c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n\| = 0$ можлива тільки тоді, коли $|c_1| + \dots + |c_n| = 0$.

Якщо функції $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ лінійно незалежні на $[a;b]$, то $\|\varphi_i\| \neq 0,\ i = 1,2, \dots, n$.

Послідовність функції $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots, \varphi_i \in \mathbb{R}([a,b]),\quad i = 1,2, \dots, n$ називається послідовністю *лінійно незалежних* функцій, якщо будь-який скінченний набір цих функцій є лінійно незалежним.

Відзначимо також, що будь-яка система ортогональних функцій є лінійно незалежною, будь-який скінченний набір лінійно незалежних функцій можна ортогоналізувати.

Наведемо без обґрунтування важливий приклад ортогональної системи. Многочлени Лежандра:

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \quad (n = 1,2, \dots),$$

є ортогональною послідовністю на $[-1,1]$.

Навчальні задачі

2.1. Довести, що основна тригонометрична послідовність функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots$$

є ортогональною на відрізку $[-l, l]$, а послідовність функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \dots$$

– ортонормованою на $[-l, l]$.

Розв'язання. Члени першої послідовності попарно ортогональні. Це випливає із рівностей (1.2)-(1.5):

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0\,, \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0\,, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0,\forall n,m\in\mathbb{Z};$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0,n\neq m,\\ l,n=m;\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0,n\neq m,\\ l,n=m.\end{cases}$$

Друга послідовність є ортогональною, бо її члени відрізняються від відповідних членів першої сталими множниками, а це не змінює ортогональності. Із (1.4) і (1.5) знаходимо норму кожної із функцій другої послідовності:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2l}}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{\sqrt{2l}}\right)^2dx=\frac{1}{2l}2l=1,$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=1,$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=1.$$

Тобто, друга послідовність функцій буде ортонормованою.

2.2. Довести ортогональність послідовностей функцій на вказаних проміжках:

а) $\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\dots,\cos nx,\sin nx,\dots,x\in[-\pi,\pi]$;

б) $\frac{1}{2},\cos x,\dots,\cos nx,\dots,x\in[0,\pi]$;

в) $\sin x,\dots,\sin nx,\dots,x\in[0,\pi]$;

Розв’язання. Члени послідовності а) є частинним випадком послідовності із попереднього прикладу при $l=\pi$. Тому послідовність а) є ортогональною.

Ортогональність послідовності б) випливає із рівностей для інтегралів

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,n\geq 1,$$

$$\int_0^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_0^{\pi}\right)=0,$$

$$n\geq 1,m\geq 1,n\neq m.$$

Ортогональність послідовності в) випливає із рівностей

$$\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = 0, n \geq 1,$$

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{\cos(n-m)x}{n+m}\Bigg|_0^{\pi}\right) = 0,$$

$$n \geq 1, m \geq 1, n \neq m.$$

2.3. Довести, що система $\sin\frac{\xi_1 x}{l}, \ldots, \sin\frac{\xi_n x}{l}, \ldots$ є ортогональною на $[0, l]$, якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – послідовність додатних коренів рівняння $\operatorname{tg} x = lx$, $l > 0$.

Розв'язання. Дане рівняння дійсно має нескінченну множину додатних коренів $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$. Графічно вони одержуються, як абсциси точок перетину графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ та прямої $y = lx$.

Нехай $\alpha = \frac{\xi_n}{l}, \beta = \frac{\xi_m}{l}, \alpha \neq \beta, m \neq n.$ Тоді

$$\int_0^{l} \sin\alpha x \sin\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{l} (\cos(\alpha-\beta)\,x - \cos(\alpha+\beta)\,x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)\,l}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)\,l}{\alpha+\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha l\cos\beta l - \cos\alpha l\sin\beta l}{(\alpha-\beta)} - \frac{\sin\alpha l\cos\beta l + \cos\alpha l\sin\beta l}{(\alpha+\beta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha l\cos\beta l\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha l - \operatorname{tg}\beta l}{\alpha-\beta} - \frac{\operatorname{tg}\alpha l + \operatorname{tg}\beta l}{\alpha+\beta}\right) =$$

$$= \cos\alpha l\cos\beta l\ \frac{\beta\ \operatorname{tg}\alpha l - \alpha\ \operatorname{tg}\beta l}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Враховуючи, що $\operatorname{tg} x = lx, \alpha = \frac{\xi_n}{l}, \beta = \frac{\xi_m}{l}, \quad m \neq n,$ одержуємо

$$\int_0^{l} \sin\frac{\xi_n}{l}x\sin\frac{\xi_m}{l}x\,dx = \cos\xi_n\cos\xi_n\frac{\frac{\xi_m}{l}l\ \xi_n - \frac{\xi_n}{l}l\ \xi_m}{\left(\frac{\xi_n}{l}\right)^2 - \left(\frac{\xi_m}{l}\right)^2} = 0,$$

а це означає, що задана послідовність функцій є ортогональною на $[0, l]$.

2.2. Ряди Фур'є по ортогональних системах функцій

Нехай $f \in R([a,b])$, а система функцій $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ – ортогональна на $[a,b]$. Нехай функцію $f(x)$ можна розкласти на $[a,b]$ в ряд за функціями $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Якщо ряд у правій частині рівномірно збіжний, то його можна інтегрувати. Помножимо попередню рівність на $\varphi_m(x)$ та проінтегруємо на відрізку $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Оскільки, система функцій $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ – ортогональна на $[a,b]$, то

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ \|\varphi_m\|^2, n = m. \end{cases}$$

Тоді

$$(f, \varphi_m) = a_m \|\varphi_m\|^2, a_m = \frac{(f, \varphi_m)}{\|\varphi_m\|^2}.$$

Означення 2.7. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\varphi_n(x), \qquad (2.1)$$

де

$$a_n(f) = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, n = 1,2, \dots, \qquad (2.2)$$

називається *рядом Фур'є функції f по ортогональній системі функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$* на $[a,b]$, а коефіцієнти, визначені формулою (2.2), називаються *коефіцієнтами Фур'є функції f по ортогональній системі функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$*.

Отже, кожній функції $f \in \mathbb{R}([a,b])$ можна поставити у відповідність ряд Фур'є виду (2.1) із коефіцієнтами (2.2):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\varphi_n(x).$$

2.3. Задача про найкраще середньоквадратичне наближення функції. Тотожність і нерівність Бесселя

Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ – ортогональна на $[a, b]$ послідовність функцій з $\mathbb{R}([a, b])$. Розглянемо деяке фіксоване натуральне число n та лінійну комбінацію

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) = P_n(x),$$

де $\alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$.

$P_n(x)$ називається *многочленом* n *-го порядку по ортогональній системі функцій* $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$. Множина функцій $H_n(x) = \{P_n(x)\}$ є n-вимірним підпростором $\mathbb{R}([a, b])$. Нехай $f \in \mathbb{R}([a, b])$ – фіксована функція.

Знайдемо такий многочлен $P_n^* \in H_n$, що для будь-якого $P_n \in H_n$

$$\|f - P_n^*\| \le \|f - P_n\|.$$

Многочлен P_n^* називається *проекцією* функції f на підпростір H_n.

Теорема 2.1. *Для будь-якого* $P_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k \in H_n$ *має місце рівність:*

$$\|f - P_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, \varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k\|\varphi_k\| - \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}\right)^2. \qquad (2.3)$$

Доведення. Використовуючи властивості скалярного добутку і ортогональність на $[a, b]$ послідовності функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$, одержимо:

$$\|f - P_n\|^2 = (f - P_n, f - P_n) = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\|\varphi_k\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k^2\|\varphi_k\|^2 - 2\alpha_k\|\varphi_k\|\frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|} + \frac{(f, \varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2} - \frac{(f, \varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2}\right) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, \varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k\|\varphi_k\| - \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}\right)^2.$$

Наслідок 2.1. *Для будь-якого многочлена* $P_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k \in H_n$ *має місце нерівність:*

$$\|f - P_n\|^2 \ge \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, \varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2},$$

у якій знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)$,

$$\alpha_n = a_n(f) = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, n = 1,2, \dots$$

є коефіцієнтами Фур'є для функції $f(x)$ *по ортогональній системі функцій* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Многочлен $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)$, *де* $a_n(f), n = 1,2, \dots$ *є коефіцієнтами Фур'є, називають многочленом Фур'є для функції* $f(x)$ *по ортогональній системі функцій* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Доведення. Перші два доданки у рівності(2.3) не залежать від α_k. Тому віддаль $\|f - P_n\|$ буде найменшою, якщо α_k вибрати так, щоб $\alpha_k\|\varphi_k\| - \frac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|} = 0$, тобто коли α_k є коефіцієнтами Фур'є: $\alpha_k = a_k(f) = \frac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$. Тобто

$$\min_{P_n \in H_n} \|f - P_n\|^2 = \|f - P_n^*\|,$$

де $P_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)$, , $a_k(f)$ – коефіцієнти Фур'є, $P_n^*(x)$ – многочлен Фур'є.

Крім того,

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(f,\varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|\varphi_k\|^2. \quad (2.4)$$

Рівність (2.3) називається *тотожністю Бесселя*.

Оскільки норма невід'ємна, то із рівності (2.4) випливає що $\forall n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2 \geq 0$ або

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Перейдемо в останній нерівності до границі при $n \to \infty$. Отримаємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2, \quad (2.5)$$

яка називається *нерівністю Бесселя*. Із цієї нерівності випливає, що $\forall f \in R([a,b])$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2$$

збігається.

Нехай задано основну тригонометричну систему функцій на відрізку $[-l, l]$

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{nx}{l}, \sin\frac{nx}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots..$$

Із рівностей (1.4) та (1.5)

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}2l = \frac{l}{2},$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = l,$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = l.$$

Тому можна записати тотожність Бесселя:

$$\left\|f - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right\|^2 = \|f\|^2 - \left(a_0^2\frac{l}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)l\right)$$

і нерівність Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx. \qquad (2.6)$$

Оскільки $f(x)$ інтегровна на $[-l, l]$, то ряд в лівій частині нервіності (2.6) збігається, тому $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Навчальні задачі

2.3. Для функції $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, $x \in [0,2\pi]$ і заданого $n \in \mathbb{N}$ знайти тригонометричний многочлен вигляду

$T_n = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)$, де α_k, β_k – дійсні, $x \in [0,2\pi]$, що мінімізує віддаль $\|f - T_n\| = \sqrt{(f - T_n, f - T_n)}$.

Розв'язання. Із доведення наслідку випливає, що віддаль $\|f - T_n\|$ буде найменшою, якщо коефіцієнти α_k, β_k є коефіцієнтами Фур'є: $\alpha_k = a_k, k = 0,1, \dots, n, \beta_k = b_k, k = 1, \dots, n$.

Коефіцієнти Фур'є знаходимо за формулами (1.10) при $a = 0, b = 2\pi, l = \pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left((\pi - x)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx\right) = -\frac{1}{2\pi k^2}\cos kx|_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k}.$$

Тригонометричний многочлен $T_n(x)$, що мінімізує віддаль $\|f - T_n\|$, має вигляд:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx.$$

2.4. Довести, що збіжний на $\mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$, $x \in \mathbb{R}$, не є рядом Фур'є для функцій із $\mathbb{R}([-\pi, \pi])$.

Розв'язання. Припустимо протилежне, що існує $f(x)$ – інтегровна на $[-\pi, \pi]$ та

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Із вигляду ряду знайдемо коефіцієнти

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{1}{\ln n}.$$

Із нерівності Бесселя (2.6)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx$$

при $l = \pi$, одержуємо

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

а це означатиме, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ має збігатися, але він розбіжний. Розбіжність випливає із ознак порівняння рядів і нерівності

$$\ln x \leq \sqrt{x}, x \geq 4.$$

Звідки $\ln n \leq \sqrt{n},\ n \geq 4$. Тоді $\frac{1}{\ln^2 n} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний, тому ряд з більшими членами також розбіжний.

Припущення неправильне, ми одержали протиріччя. Отже, заданий ряд не є рядом Фур'є для функцій із $\mathbb{R}([-\pi, \pi])$.

3. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ ФУР'Є

3.1. Рівномірна збіжність ряду Фур'є

Нехай задано основну тригонометричну систему функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{nx}{l}, \sin\frac{nx}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots . x \in [-l, l].$$

Якзо функція $f(x)$ буде інтегровною на $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.1. *Нехай* $f(x)$ *– неперервна на* $[-l, l]$, *виконується умова* $f(-l) = f(l)$ *і* $f(x)$ *– кусково-диференційовна на* $[-l, l]$. *Тоді ряд Фур'є для функції* $f(x)$ *буде рівномірно збігатися на відрізку* $[-l, l]$ *до* $f(x)$.

Доведення. Із кускової диференційованості $f(x)$ випливає, що $f'(x)$ буде інтегровною на $[-l, l]$. Позначимо

$$a_n' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

– коефіцієнти Фур'є для $f'(x)$ на відрізку $[-l, l]$.

Із формул (1.6) після інтегрування частинами, одержимо

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left(\left(f(x)\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}} \right)\Bigg|_{-l}^{l} - \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \right) =$$

$$= -\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}b_n'.$$

Аналогічно,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left(\left(-f(x)\frac{\cos\frac{n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}}\right)\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right) = \frac{l}{n\pi}a'_n.$$

Отже,

$$a_n = -\frac{l}{n\pi}b'_n, b_n = \frac{l}{n\pi}a'_n.$$

З нерівності $|ab| \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ випливають наступні нерівності:

$$|a_n| = \frac{l}{\pi}\frac{1}{n}|b'_n| \le \frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2} + (b'_n)^2\right), |b_n| = \frac{l}{\pi}\frac{1}{n}|a'_n| \le \frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2} + (a'_n)^2\right),$$

тому

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{l}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2} + (a'_n)^2 + (b'_n)^2\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний. Із інтегровності $f'(x)$ на відрізку $[-l, l]$ і нерівності Бесселя випливає, що для функції $f'(x)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}((a'_n)^2 + (b'_n)^2)$ буде збіжним. Тому за ознакою порівняння одержимо, що буде збігатися ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$. Крім того, для довільного x виконується нерівність:

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \le |a_n| + |b_n|.$$

Тому за теоремою Вейєрштраса ряд Фур'є буде рівномірно збіжним до $f(x)$ на $[-l, l]$.Теорему доведено.

Оскільки сума $S(x)$ даного ряду Фур'є періодична з періодом $2l$, то $S(-l) = S\,(l)$. Тому умова теореми $f(-l) = f(l)$ є і необхідною умовою рівномірної збіжності ряду Фур'є на відрізку $[-l, l]$. Члени ряду Фур'є є неперервними функціями, тому умова неперервності $f(x)$ на відрізку $[-l, l]$ є також необхідною умовою рівномірної збіжності ряду Фур'є на відрізку $[-l, l]$. Із інтегровності функції $f'(x)$ і нерівності Бесселя випливає, що для функції $f'(x)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}((a'_n)^2 + (b'_n)^2)$ буде збіжним.

Наслідок 3.1. *Нехай* $f(x)$ *– періодична з періодом* $2l$*, неперервна на* $\mathbb{R}$*, кусково-диференційовна на* $[-l, l]$*. Тоді ряд Фур'є для функції* $f(x)$ *буде рівномірно збігатися на* $\mathbb{R}$ *до* $f(x)$*.*

Тобто, для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

3.2. Зв’язок між диференційованістю функції і швидкісті збіжності ряду Фур’є

Теорема 3.2. *Нехай* $f(x)$ *– неперервна і має неперервні похідні до* m*-го порядку* ($m\geq 0$) *на відрізку* $[-l,l]$. *Виконуються умови:* $f(-l)=f(l)$, $f'(-l)=f'(l),\dots,f^{(m)}(-l)=f^{(m)}(l)$, $f^{m+1}(x)$ *– кусково-неперервна на* $[-l,l]$. *Тоді*

$$a_n=o\left(n^{-(m+1)}\right), b_n=o\left(n^{-(m+1)}\right), n\to\infty,$$

при цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^k(|a_n|+|b_n|)$ *збіжний для будь-якого* $k=0,1,..,m$.

Доведення. Аналогічно до доведення попередньої теореми, із формул (1.6) після інтегрування частинами і умов теореми, одержимо:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(f(x)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l}-\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=-\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=$$

$$=-\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\left(\left(-f'(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}f''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=-\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\cdots=$$

$$=\pm\left(\frac{l}{n\pi}\right)^{m+1}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^{(m+1)}(x)\left(\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right)\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (3.2)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(-f(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)$$

$$=\cdots=\mp\left(\frac{l}{n\pi}\right)^{m+1}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^{(m+1)}(x)\left(\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\right)\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (3.3)$$

Нехай $a_n^{(m+1)}$ і $b_n^{(m+1)}$ – коефіцієнти Фур’є для $f^{(m+1)}(x)$. Оскільки, функція $f^{(m+1)}(x)$ є інтегровною, то із леми Рімана випливає, що

$$a_n^{(m+1)}\to 0,\ b_n^{(m+1)}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

тому із (3.2) і (3.3)

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),\ n \to \infty.$$

Із рівностей (3.2) і (3.3) нерівність

$$|a_n| + |b_n| = \left(\frac{l}{n\pi}\right)^{m+1}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right| + \left|b_n^{(m+1)}\right|\right), m = 1, \dots, n. \qquad (3.4)$$

Тоді

$$n^m(|a_n| + |b_n|) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{n}\left|a_n^{(m+1)}\right| + \frac{1}{n}\left|b_n^{(m+1)}\right|\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_n^{(m+1)}\right|^2 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Оскільки, функція $f^{(m+1)}(x)$ – кусково-неперервна на $[-l, l]$, тому вона інтегрована на цьому відрізку. З нерівності Бесселя для функції $f^{(m+1)}(x)$ випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_n^{(m+1)}\right|^2\right)$$

є збіжним. Тому із попередньої нерівності випливає, що збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n| + |b_n|)$, а із його збіжності випливає і збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n| + |b_n|)$, $\forall k = 0,1,..,m$. Теорема доведена.

Зауваження 3.1. Якщо виконуються умови теореми при $m > 0$, *то тригонометричний ряд Фур'є можна почленно диференціювати не менше m разів:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)^{(k)}, 1 \leq k \leq m, x \in [-l, l].$$

Нехай виконуються умови теореми 3.2. Оцінимо похибку від заміни суми ряду Фур'є її частинною сумою. Розглянемо різницю $f(x) - S_n(x)$, де

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

тоді із (3.4) і нерівності $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ маємо оцінку:

$$|f(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)\leq$$

$$\leq\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|+\left|b_k^{(m+1)}\right|\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}}\sqrt{2}\left(\left(a_k^{(m+1)}\right)^2+\left(b_k^{(m+1)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

За нерівністю Коші-Буняковського і нерівністю Бесселя для функції $f^{(m+1)}(x)$:

$$|f(x)-S_n(x)|\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m+2}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\left(a_k^{(m+1)}\right)^2+\left(b_k^{(m+1)}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sqrt{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\int_n^{\infty}\frac{1}{x^{2m+2}}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f^{(m+1)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{n^{m+1/2}}\sqrt{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{2m+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f^{(m+1)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=C\frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}},$$

де C – деяка стала.

Отже, ми показали, що при виконанні умови теореми 3.2, похибка від заміни суми ряду Фур'є її частинною сумою

$$|f(x)-S_n(x)|=\ C\frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}},$$

де C – деяка стала.

3.3. Теореми Вейєрштраса про рівномірне наближення функції многочленами

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ задані на $[a,b]$. Якщо для довільного $\varepsilon>0$ і для довільного $x\in[a,b]$: $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, то будемо говорити, що функція $g(x)$ рівномірно наближує функцію $f(x)$ на $[a,b]$ з точністю ε.

Лема 3.1. *Нехай $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ функція. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує неперервна, кусково-диференційовна на $[a, b]$ функція $g_\varepsilon(x)$ така, що для $x \in [a, b]$: $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$, $f(a) = g_\varepsilon(a)$, $f(b) = g_\varepsilon(b)$.*

Доведення. Неперервна на $[a, b]$ функція є рівномірно неперервною на $[a, b]$. Тому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x', x'' \in [a, b]$ $|x' - x''| < \delta$ має місце $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Розглянемо розбиття $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ таке, щоб довжина кожного проміжку не перевищувала δ. Визначимо функцію $g_\varepsilon(x)$:

$$g_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n.$$

Тоді $g_\varepsilon(x)$ буде неперервною і кусково-диференційовною на $[a, b]$. Крім того, для будь-якого $x \in [a, b]$ існує $i = 1, \ldots, n$ таке, що $x \in [x_{i-1}, x_i]$, а також існує $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ для якого $g_\varepsilon(x) = f(x')$. Тоді для будь-якого $x \in [a, b]$

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Лема доведена.

Теорема 3.3 (друга теорема Вейєрштраса). *Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує тригонометричний многочлен $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ такий, що для всіх $x \in [a, b]$:*

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

Доведення. Виберемо l таким чином, щоб виконувалася умова $\max(|a|, |b|) < l$ $([a, b] \subset [-l, l])$. Функція $f(x)$ задана тільки на $[a, b]$. Довизначимо її на $[-l, l]$ так, щоб довизначена функція на $[a, b]$ співпадала з $f(x)$, $f(-l) = 0, f(l) = 0$, і на проміжках $[-l, a]$ і $[b, l]$ була лінійною і неперервною на $[-l, l]$.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне задане число. За лемою, існує неперервна і кусково-диференційовна на $[-l, l]$ функція $g_\varepsilon(x)$, що для $x \in [-l, l]$: $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Довизначена функція неперервна, кусково-диференційовна і виконується умова $g_\varepsilon(-l) = g_\varepsilon(l)$, тоді за теоремо 3.1 ряд Фур'є для функції $g_\varepsilon(x)$ буде рівномірно збіжним на $\mathbb{R}$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=g_\varepsilon(x).$$

Тоді $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0$: $|g_\varepsilon(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо n, тоді $\forall\varepsilon>0$ і $\forall x\in[-l,l]$:

$$|f(x)-T_n(x)|\leq|f(x)-g_\varepsilon(x)|+|g_\varepsilon(x)-T_n(x)|<\varepsilon,\forall x\in[-l,l].$$

Звідки, для всіх $x\in[a,b]$: $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$. Теорему доведено.

Многочлен $T_n(x)$ побудований для функції $g_\varepsilon(x)$ не є многочленом Фур'є для функції $f(x)$. Нехай ε_n – спадна послідовність, що прямує до 0 при $n\to\infty$, тоді для кожної послідовності ε_n (із теореми 3.3) існує $T_n(x)$, такий що для всіх $x\in[a,b]$:

$$|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon_n.$$

Теорема 3.4 (перша теорема Вейєрштраса). *Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ існує такий многочлен $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ такий, що для всіх $x\in[a,b]$:*

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon.$$

Доведення. За теоремою 3.3 для будь-якого $\varepsilon>0$ існує тригонометричний многочлен

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

такий, що для всіх $x\in[a,b]$:

$$|f(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ряди

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots;\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

є рівномірно збіжні на будь-якому відрізку.

Зафіксуємо n і розкладемо кожну із функцій $\cos\frac{k\pi x}{l},\sin\frac{k\pi x}{l}$ у степеневі ряди, підставимо ці розклади у (3.5). Оскільки кількість доданків у $T_n(x)$ скінченна, то одержимо розклад $T_n(x)$ у степеневий ряд, який буде рівномірно збіжним на відрізку $[a,b]$.

Тоді для заданого $\varepsilon > 0$ існує m_0, що для всіх $m \geq m_0$ і всіх $x \in [a,b]$ має місце

$$|T_n(x) - P_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, показано, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_m(x)$ такий, що для всіх $x \in [a,b]$: $|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon$. Теорема доведена.

Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, послідовність додатних чисел $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді існують послідовності многочленів $T_n(x)$ і $P_n(x)$, які рівномірно збігаються до $f(x)$ на $[a,b]$.

Навчальні задачі

3.1. Нехай $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$. Довести, що $f(x)$ – неперервна на $\mathbb{R}$, причому ряд для $f'(x)$ можна одержати почленним диференціюванням.

Розв'язання. Врахуємо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ – збіжний, отже заданий ряд за ознакою Вейєрштраса рівномірно збігається на всій числовій осі. Оскільки, члени ряду неперервні на всій числовій осі функції, тому і $f(x)$ – неперервна функція на всій осі за властивостями рівномірно збіжних функціональних рядів.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$, члени ряду із похідних від членів заданого ряду

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний, тому за ознакою Вейєрштраса ряд, утворений з похідних його членів рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$. Тоді, оскільки заданий ряд з неперервно диференційованими членами збігається на всій числовій осі, заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

4. ПОВНОТА І ЗАМКНЕНІСТЬ ОРТОГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ФУНКЦІЇ

4.1 Повнота і замкненість ортогональної системи функції. Рівність Парсеваля

Означення 4.1. Ортогональна послідовність функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ називається *замкненою* в $R([a,b])$, якщо для будь-якої функції $f \in \mathbb{R}([a,b])$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\,, n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$ такий, що $\|f - P_n\| < \varepsilon$.

Означення 4.2. Ортогональна послідовність функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ називається *повною* в $\mathbb{R}([a,b])$, якщо для будь-якої функції $f \in \mathbb{R}([a,b])$ із рівностей $(f, \varphi_n) = 0,\ n = 1,2, \dots$, випливає, що $\|f\| = 0$ (будь-яка інтегровна функція, що ортогональна до всіх функцій заданої послідовності, є нульовим елементом в $\mathbb{R}([a,b])$).

Теорема 4.1. *Для того,щоб ортогональна послідовність функцій* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *була замкненою в* $\mathbb{R}([a,b])$ *необхідно і достатньо, щоб для будь-якої функції* $f \in \mathbb{R}([a,b])$ *її ряд Фур'є* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *збігався в середньоквадратичному до функції* $f(x)$.

Доведення. Нехай

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{4.1}$$

де $a_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ – коефіцієнти Фур'є.

Необхідність. Нехай послідовність $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ замкнена в $\mathbb{R}([a,b])$, тоді $\forall f \in \mathbb{R}([a,b])\ \forall \varepsilon > 0\ \exists P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\,, n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$:

$$\|f - P_n\| < \varepsilon.$$

Оскільки многочлен Фур'є $P_n^*(x)$ дає найкраще середньоквадратичне наближення функції, то

$$\|f - P_n^*\| \leq \|f - P_n\| < \varepsilon.$$

Тоді із тотожності Бесселя

$$\|f-P_n^*\|^2=\|f\|^2-\textstyle\sum_{k=1}^{n}a_k^2\,\|\varphi_k\|^2<\varepsilon^2. \tag{4.2}$$

Оскільки при зростанні n $\sum_{k=1}^{n}a_k^2\,\|\varphi_k\|^2$ є зростаючою, то для всіх $m\geq n$:

$$\|f-P_n^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\,\|\varphi_k\|^2<\varepsilon^2, \|f-P_m^*\|<\varepsilon.$$

Многочлен Фур'є $P_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$ є частковою сумою ряду Фур'є. Для будь-якої функції $f\in\mathbb{R}([a,b])$ і для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що для всіх $m\geq n$ виконується нерівність $\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\|<\varepsilon$. Це означає, що $\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\|\to 0,\ n\to\infty$, або $P_n^*(x)\to f(x)$ в середньому квадратичному при $n\to\infty$ (ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається в середньоквадратичному до функції $f(x)$). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $\forall f\in\mathbb{R}([a,b])$ ряд Фур'є збігається в середньоквадратичному до $f(x)$: $\|f-P_n^*\|\to 0, n\to\infty$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує n_0 таке, що для всіх $n\geq n_0$ має місце нерівність $\|f-P_n^*\|<\varepsilon$ або $\|f-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\|<\varepsilon$. Звідси одержуємо, що для будь-якої інтегрованої функції $f(x)$ і для довільного $\varepsilon>0$ існує $P_n(x)=P_n^*(x)$ – многочлен Фур'є, що виконується нерівність $\|f-P_n\|<\varepsilon$ Достатність доведена Теорема доведена.

Теорема 4.2. *Для того, щоб ортогональна послідовність* $\{\varphi_n : n\geq 1\}$ *була замкненою в* $\mathbb{R}([a,b])$ *необхідно і достатньо, щоб для довільної функції* $f\in R([a,b])$ *виконувалась рівність (тотожність Парсеваля):*

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_k^2\,\|\varphi_n\|^2.$$

Доведення. Для доведення необхідності використаємо тотожність Бесселя (4.2):

$$\|f-P_n^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\,\|\varphi_k\|^2.$$

Якщо ортонормована система замкнена, то за теоремою 4.1: $\|f-P_n^*\|\to 0, n\to\infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\,\|\varphi_k\|^2=\|f\|^2$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\,\|\varphi_n\|^2=\|f\|^2$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай має місце рівність Парсеваля, це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \, \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$. Звідки випливає $\|f - P_n^*\| \to 0,\ n \to \infty$. Тобто ряд Фур'є збігається в середньому квадратичному, а за теоремою 4.1 це означає, що послідовність $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – замкнена. Достатність доведена. Теорему доведено.

Теорема 4.3. *Замкнена в* $\mathbb{R}([a, b])$ *послідовність* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *повна в* $R([a, b])$.

Доведення. Дійсно, нехай для $f \in \mathbb{R}([a, b])$ $(f, \varphi_n) = 0$ для всіх $n \geq 1$. Оскільки $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ замкнена в $\mathbb{R}([a, b])$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\,(x), n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$ такий, що

$$\|f - P_n\| < \varepsilon.$$

Тоді

$$\|f\|^2 = (f, f) = (f, f - P_n) \leq \|f\| \cdot \|f - P_n\| < \varepsilon \cdot \|f\|.$$

Звідси випливає, що $\|f\| = 0$ ($f(x) = 0$ у всіх точках неперервності). Теорема доведена.

Наступне твердження випливає з рівності Парсеваля.

Наслідок 4.1. $\|f\| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти Фур'є* $a_k = 0$.

Теорема 4.4 (узагальнена рівність Парсеваля). *Нехай* $\{f, g\} \subset \mathbb{R}([a, b])$, *послідовність* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *замкнена в* $\mathbb{R}([a, b])$. *Тоді виконується рівність:*

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) a_n(g)\, \|\varphi_n\|^2,$$

яку називають узагальненою рівністю Парсеваля.

Доведення. Розглянемо $\|f - g\|^2 = (f - g, f - g) = \|f\|^2 - 2(f, g) + \|g\|^2$. Якщо f та g інтегровані на $[a, b]$, то і $f - g$ буде інтегрованою. Оскільки послідовність $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ замкнена в $\mathbb{R}([a, b])$, тому можна записати для $f - g$ рівність Парсеваля:

$$\|f - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f - g))^2 \, \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) - a_n(g))^2 \|\varphi_n\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f))^2 \|\varphi_n\|^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)a_n(g) \|\varphi_n\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(g))^2 \|\varphi_n\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)a_n(g) \|\varphi_n\|^2 + \|g\|^2,$$

а

$$\|f-g\|^2 = (f-g, f-g) = (f,f) - 2(f,g) + (g,g) =$$
$$= \|f\|^2 - 2(f,g) + \|g\|^2.$$

Ліві частини написаних рівностей рівні, тому рівні і праві, тоді має місце рівність:

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)a_n(g) \|\varphi_n\|^2.$$

Теорема доведена.

Теорема 4.5 (про почленне інтегрування ряду Фур'є). *Нехай* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *– замкнена в* $R([a,b])$, $f \in \mathbb{R}([a,b])$. *Тоді ряд Фур'є для* $f(x)$ *по ортогональній послідовності* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *можна почленно інтегрувати на* $[x_0, x]$ *і справедлива рівність:*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt,$$

де $x_0 \in [a,b]$ *– довільне фіксоване,* $x \in [a,b]$ *– довільне. При цьому ряд в правій частині буде рівномірно збіжним на* $[a,b]$.

Доведення. Нехай f – інтегровна, функції $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – інтегровні, тому $f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t)$ на $[x_0, x]$ буде інтегровною і

$$\int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t) \right) dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)\,dt.$$

Застосуємо до інтеграла нерівність Коші-Буняковського $\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$:

$$\left(\int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t) \right) dt \right)^2 \leq \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t) \right)^2 dt \right| \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \leq$$

$$\left|\int_a^b \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t)\right)^2 dt\right| \cdot (b-a).$$

Звідси одержуємо, що

$$\left|\int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t)\right) dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t)\right)^2 dt} \cdot \sqrt{b-a} \leq$$

$$= \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \right\| \sqrt{b-a},$$

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)\,dt\right| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \right\| \sqrt{b-a}.$$

Оскільки f – інтегрована, то за теоремою 4.1 ряд Фур'є збігається в середньому квадратичному до $f(x)$, тому:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \right\| \to 0, n \to \infty.$$

Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує n_0, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. А звідси одержуємо, що $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $\forall x \in [a,b]$ $\left|\int_{x_0}^{x}(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t))\,dt\right| < \varepsilon$. Тоді $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt$ рівномірно прямує до $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ на проміжку $[a,b]$ при $n \to \infty$. Тобто, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt$ є рівномірно збіжний на $[a,b]$ і має суму $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Теорема доведена.

4.2. Замкненість основної тригонометричної системи. Теорема Ляпунова

Теорема 4.16 (Ляпунова). *Послідовність* $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx,$ $\sin nx, \ldots$ *замкнена в* $\mathbb{R}([-\pi,\pi])$.

Доведення. Нехай $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$ функція. Тоді вона обмежена на $[a,b]$: існує $L>0$, що для $x\in[a,b]$: $|f(x)|\le L$. Для довільного $\varepsilon>0$ розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$: $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ таке, щоб $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon^2}{2L}$, де $\omega_k=M_k-m_k$, $m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]}f(x)$, $M_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]}f(x)$ (випливає із інтегрованості).

Визначимо функцію $g(x)$ таку, що $g(x_k)=f(x_k), k=0,1,\dots,n$, а для $x\in(x_{k-1},x_k)$

$$g(x)=f(x_{k-1})+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1}).$$

Для функції $g(x)$ виконуються умови $\forall x\in[a,b]:|g(x)|\le L$ і $|f(x)-g(x)|\le\omega_k$ для довільного $x\in[x_{k-1};x_k]$, $k=1,\dots,n$ (f і g приймають значення між m_k і M_k). Будемо вважати $f(a)=f(b)$. Нехай ε – довільне число, розглянемо норму

$$\|f-g\|^2=\int_a^b(f(x)-g(x))^2\,dx\le 2L\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx=$$

$$=2L\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-g(x)|dx\le 2L\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon^2.$$

Отже, якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists g_\varepsilon(x)$ – неперервна функція, така, що $\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon$.

Розглянемо тепер довільну функцію $f\in\mathbb{R}([-\pi,\pi])$, $f(-\pi)=f(\pi)$ (значення можна змінити, щоб ця умова виконувалась). За доведеним, для будьякого $\varepsilon>0$ існує неперервна функція $g(x)$ така, що

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

А за теоремою 3.3 (Вейєрштраса) існує многочлен $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ такий, що $\|g(x)-T_n(x)\|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$ для всіх $x\in[-\pi,\pi]$. Звідси одержимо, що

$$\|g-T_n\|\le\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\big(g(x)-T_n(x)\big)^2dx}\le\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon^2}{4\cdot 2\pi}dx}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді $\|f-T_n\|\le\|f-g\|+\|g-T_n\|<\varepsilon$. Теорема доведена.

Наслідок 4.2. *Якщо $f(x)$ інтегровна на $[-\pi,\pi]$, то має місце рівність Парсеваля*

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f)+b_n^2(f))=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Випливає із теореми 4.2.

Наслідок 4.3. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[-\pi,\pi]$, то має місце узагальнена рівність Парсеваля*

$$\frac{a_0(f)a_0(g)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g))=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

Випливає із теореми 4.4.

Наслідок 4.4. *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[-\pi,\pi]$. Тоді її ряд Фур'є $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ можна почленно інтегрувати по будь-якому проміжку $[0,x]$, $x\in[-\pi,\pi]$, при цьому отриманий ряд буде рівномірно збіжним на $[-\pi,\pi]$ до інтеграла $\int_0^x f(t)dt$, тобто буде мати місце рівність:*

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx}{n}+b_n\frac{1-\cos nx}{n}\right).$$

Якщо, крім того, $f(x)$ є періодичною з періодом 2π, то написана рівність буде справедливою для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Доведення. Рівномірна збіжність на $[-\pi,\pi]$ випливає із теорем 4.5 і 4.6. Нехай $f(x)$ періодична з періодом 2π. Розглянемо функцію $F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$. Підінтегральна функція інтегровна, тому інтеграл, як функція від верхньої межі, є неперервною функцією на $\mathbb{R}$. Крім того, $F(x)$ – періодична з періодом 2π:

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_0^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt-\int_0^{-\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=0,$$

а із (1.7)

$$F(x+2\pi)=\int_{o}^{x+2\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt+$$

$$+\int_x^{2\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=F(x)+\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=F(x).$$

Із періодичності функції $F(x)$ випливає справедливість рівності у наслідку на $\mathbb{R}$. Твердження доведено.

Навчальні задачі

4.1. Для функції $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}, x\in[-\pi,0),\\ \frac{\pi}{4}, x\in[0,\pi]\end{cases}$ знайти ряд Фур'є, його суму $S(x)$. Написати рівність Парсеваля. Довести, що $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ – непарна, то $a_0=0$, $a_n=0$, а

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx\right)=$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{4n}(1-(-1)^n)-\frac{1}{4n}((-1)^n-1)=$$

$$=\frac{1}{2n}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, n=2k,\\ \frac{1}{n}, n=2k-1.\end{cases}$$

Отже, $\forall x\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$ буде справедлива рівність:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

Сума цього ряду в точках $x=\pm\pi, x=0$, що є точками розриву, $S(0)=S(\pm\pi)=0$.

Запишемо тепер рівність Парсеваля

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f)+b_n^2(f))=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Для цього знайдемо

$$\|\varphi_n\|^2=\pi, \|f\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{\pi^2}{16}2\pi=\frac{\pi^3}{8}.$$

Отже, рівність Парсеваля має вигляд

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

У рівність $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x$ підставимо значення $x=\frac{\pi}{2}$. Тоді, оскільки за умовою $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, одержимо:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

4.2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x, x\in[0,2\pi]$. Знайти суму $S(x)$ та написати рівність Парсеваля.

Розв'язання. Знайдемо спочатку коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}(-2\pi)\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2\pi}\sin nx\bigg|_0^{2\pi}=-\frac{2}{n}.$$

Підставимо одержані коефіцієнти та отримаємо ряд Фур'є, сума $S(x)$ якого така:

$$S(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx.$$

Тоді $S(x)=f(x)=x, 0<x<2\pi$. В точках $x=0, x=2\pi$ сума ряду рівна $S(x)=\pi$.

Отже,

$$x=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx\,, 0<x<2\pi.$$

Використовуючи рівність $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$, отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}$$

та

$$\frac{(2\pi)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0^2 + \left(-\frac{2}{n}\right)^2\right) = \frac{8}{3}\pi^2.$$

Отже, рівність Парсеваля має вигляд:

$$2\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{8}{3}\pi^2.$$

Зауважимо, що з даної рівності випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.3. Використовуючи розклад в ряд Фур'є функції $f(x) = x$, $\boldsymbol{x} \in [-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$ і теорему про інтегрування ряду Фур'є, одержати розклад в ряд Фур'є функції $f(x) = x^2$, $\boldsymbol{x} \in [-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$.

Розв'язання. Використаємо розклад в ряд Фур'є функції $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, що одержаний у прикладі 1.1:

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Нехай $x \in [-\pi, \pi]$ і розглянемо проміжок $[0, x]$. За наслідком 4.3 справедлива рівність

$$\int_0^x t dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nt\, dt,$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{\cos nx - 1}{n}\right).$$

Отже,

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Оскільки,

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{a_0}{2},\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

і

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},x\in[-\pi,\pi].$$

5. РЯДИ ФУР'Є ПО ОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМАХ КОМПЛЕКСНИХ ФУНКЦІЙ. КОМПЛЕКСНА ФОРМА ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РЯДУ ФУР'Є

Нехай $f(x) = u(x) + iv(x)$ – комплексна функція, $\overline{f(x)} = u(x) - iv(x)$ та $|f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Функція $f(x)$ неперервна тоді і тільки тоді, коли $u(x)$, $v(x)$ – неперервні.

Зауважимо, що

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

З попередньої рівності випливає, що $f(x)$ буде інтегровною на $[a, b]$, якщо $u(x)$, $v(x)$ – інтегровні на $[a, b]$. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то $|f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)}$ також інтегровна на $[a, b]$.

Скалярним добутком функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається число

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

причому $(f, g) = \overline{(g, f)}$.

Число $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ називають *нормою* $f(x)$.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *ортогональними*, якщо

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = 0.$$

Система функцій $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, ... називається *ортогональною* на $[a, b]$, якщо

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ \|\phi_i\|^2 > 0, i = j. \end{cases}$$

Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$. Для знаходження коефіцієнтів a_k, скалярно помножимо попередню рівність на $\varphi_n(x)$:

$$(f,\varphi_n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\varphi_k,\varphi_n).$$

Враховуючи ортогональність послідовності функцій $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$, одержуємо $(f,\varphi_n)=a_n\|\varphi_n\|^2$, тобто $a_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

Отже, кожній інтегровній на $[a,b]$ функції $f(x)$ можна поставити у відповідність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ по ортогональній послідовності функцій $\varphi_n(x), n\geq 1$. Такий ряд називається *рядом Фур'є по ортогональній послідовності комплексних функцій*, а $a_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi\|^2}$ – *коефіцієнтами Фур'є*.

Розглянемо послідовність $\varphi_n(x)=e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Така послідовність функцій є ортогональна на відрізку $[-l,l]$:

$$(\varphi_n,\varphi_m)=\int_{-l}^{l}\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}dx=\int_{-l}^{l}e^{i\frac{n\pi x}{l}}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx=\int_{-l}^{l}e^{i\frac{(n-m)\pi x}{l}}dx=$$

$$=\int_{-l}^{l}\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}dx+i\int_{-l}^{l}\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, n\neq m,\\ 2l, n=m.\end{cases}$$

Зокрема, $\|\varphi_n\|^2=2l$.

Нехай $f(x)$ – довільна інтегровна на $[-l,l]$ функція. Такій функції можна поставити у відповідність ряд:

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}, \tag{5.1}$$

$$c_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx. \tag{5.2}$$

Нехай $f(x)$ – дійсна інтегровна на $[-l,l]$ функція. Для такої функції можна побудувати ряд Фур'є:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\,sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{5.3}$$

де

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,\ldots;\\ b_n=\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,\ldots.\end{cases} \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Якщо $f(x)$ – дійсна інтегровна на $[-l,l]$ функція, то рівності (5.1)-(5.2), (5.3)-(5.4) – еквівалентні.*

У зв'язку з цим (5.1) називається *комплексною формою тригонометричного ряду Фур'є.*

Доведення. Дійсно, розглянемо ряд (5.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}}, \tag{5.5}$$

де

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}. \tag{5.6}$$

Нехай $n \geq 1$, $n \in N$, тоді з рівності (5.2) випливає:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Вираз для c_n і c_{-n} підставимо у (5.5) і одержимо:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Отже,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Теорема 5.1 доведена.

Із пункту 1.5 випливає наступне твердження.

Наслідок 5.1. Якщо функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на $[-l, l]$, періодична ($T = 2l$), то для будь-якого $x \in [-l, l]$ такого, що x є точкою неперервності $f(x)$, справедлива рівність:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}.$$

Якщо точка x_0 – точка розриву $f(x)$, то сума ряду $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ в цій точці дорівнює

$$S_0(x) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Навчальні задачі

5.1. Розкласти в комплексний ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ 1, 0 < x < \pi \end{cases}$ з періодом $T = 2\pi$.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти Фур'є для цієї функції, застосовуючи формули (5.2) і (5.6), а також формулу для показникової функції $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2},$$

а для $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n} + i\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= i\frac{\cos n\pi - 1}{2\pi n} = i\frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} = \begin{cases} 0, n = 2k, k \neq 0, \\ \dfrac{-i}{\pi n}, n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$c_0 = \frac{1}{2}, c_{2n} = 0, n \neq 0, c_{2n-1} = -\frac{i}{\pi(2n-1)}.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в ряд Фур’є у комплексній формі, отримаємо:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}, x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \; .$$

У точках $x = \pi, x = 0, x = -\pi$ сума ряду така:

$$S(0) = \frac{1}{2}, \; S(\pm\pi) = \frac{1}{2}.$$

6. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

6.1. Поняття про інтеграли Фур'є

Нехай функція $f(x)$ – інтегровна на $[-l, l]$ для будь-якого $l > 0$. При певних умовах, що містяться у пункті 1.5 (умови збіжності), функцію $f(x)$ на відрізку $[-l, l]$ можна зобразити у вигляді суми ряду Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{6.1}$$

При цьому

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du, n = 0,1,\dots; \\ b_n = \int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du, n = 1,2,\dots. \end{cases} \tag{6.2}$$

Підставимо коефіцієнти (6.2) в (6.1):

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{l}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}du +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{n\pi u}{l}du = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(u)\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi u}{l} + \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi u}{l}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi(u-x)}{l}du,\ x \in [-l, l] \tag{6.3}$$

Розглянемо функцію

$$g(t) = \int_{-l}^{l} f(u)\cos t(u-x)\,du\,, t \in [0, \infty).$$

Тоді (6.3) запишемо у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}g\left(\frac{n\pi}{l}\right). \tag{6.4}$$

Нехай $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$. Розглянемо розбиття додатної півосі набором точок $t_n = \frac{n\pi}{l}, n = 0,1,2, \dots$, $t_n - t_{n-1} = \Delta t_n = \frac{\pi}{l}, \Delta t_n \to 0, l \to \infty$. Другий доданок в рівності (6.4) є аналогом інтегральної суми для функції $g(t)$, що відповідає заданому розбиттю проміжка $[0, \infty)$:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}g\left(\frac{n\pi}{l}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}g(t_n)\Delta t_n.$$

Перший доданок в рівності (6.4) $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du\to 0$ при $l\to\infty$. Із абсолютної інтегрованості $f(x)$ на $(-\infty,+\infty)$ одержуємо, що

$$g(t)=\int_{-l}^{l}f(u)\cos t(u-x)\,du\to\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)\,du.$$

Тому, перейшовши в рівності (6.4) до границі при $l\to\infty$, можна чекати, що права частина збігається до інтеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)\,du.$$

Ці міркування приводять нас до рівності:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)\,du. \tag{6.5}$$

яку можна записати у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)(\cos tu\cos tx+\sin tu\sin tx)du=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\left(\cos tx\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos tu\,du+\sin tx\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin tu\,du\right)dt.$$

Позначимо

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos tu\,du\,, b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin tu\,du. \tag{6.6}$$

Тоді

$$f(u)=\int_{0}^{\infty}(a(t)\cos tx+b(t)\sin tx)dt. \tag{6.7}$$

Кожна із рівностей (6.5) і (6.7) називається *інтегральною формулою Фур'є для функції* $f(x)$. Інтеграли в правій частині рівностей (6.5) і (6.7) називаються *інтегралами Фур'є для функції* $f(x)$.

Кожній інтегрованій на $\mathbb{R}$ функції можна поставити у відповідність інтеграл Фур'є:

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)\,du,$$

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} (a(t)\cos tx + b(t)\sin tx)dt.$$

Постає питання, коли $f(x)$ є значенням свого інтегралу Фур'є.

Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du$ буде парною функцією, то

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,u.$

Якщо ми врахуємо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, sin\, t(u-x)\,du$, як функція від t є непарною, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin t(u-x)\,du = 0.$$

І тому рівність (6.5) можна записати у вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)(\cos t(u-x) + i\sin t(u-x))du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(u-x)}du. \qquad (6.8)$$

Інтеграл в правій частині рівності (6.8) називається *комплексною формою інтегралу Фур'є*.

6.2. Умови зображення функції інтегралом Фур'є

Показано, що якщо $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$, то

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du = \int_0^{\infty} (a(t)\cos tx + b(t)\sin tx)dt,$$

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tu\,du\,,\ b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tu\,du.$$

Виникає питання, коли можна поставити знак рівності, тобто $f(x)$ є значенням свого інтегралу Фур'є.

Зафіксуємо довільне $x_0 \in \mathbb{R}$ та позначимо

$$I(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du.$$

Тоді має місце співвідношення $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x_0)\,du = \lim_{A\to\infty} I(A).$

Вираз для $I(A)$ можна також записати у вигляді:

$$I(A)=\int_0^A (a(t)\cos tx_0 + b(t)\sin tx_0)dt.$$

Із абсолютної інтегрованості функції $f(x)$ випливає, що невласні інтеграли $a(t)$, $b(t)$ будуть рівномірно збіжні за ознакою Вейєрштраса. Оскільки функції $\cos tu$, $\sin tu$ – неперервні функції змінної t, то $a(t)$, $b(t)$ – неперервні, крім цього із леми Рімана випливає, що $a(t)\to 0$, $b(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Із цих умов випливає, що в інтегралі $I(A)$ можна змінити порядок інтегрування:

$$I(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du\int_0^A f(u)\cos t(u-x_0)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(\frac{\sin t(u-x_0)}{u-x_0}\bigg|_0^A\right)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du=\begin{vmatrix} u-x_0=z \\ du=dz\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+z)\frac{\sin Az}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x_0+z)\frac{\sin Az}{z}dz+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x_0+z)\frac{\sin Az}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin At}{t}dt. \qquad (6.9)$$

Позначимо $S_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Якщо точка x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то $S_0=f(x_0)$. Оскільки інтеграл Діріхле $\int_0^\infty \frac{\sin At}{t}dt=\frac{\pi}{2}$ при $A>0$, то має місце $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin At}{t}dt=1$. Помножимо цю рівність на S_0 і віднімемо від (6.9). Тоді:

$$I(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0)\frac{\sin At}{t}dt. \qquad (6.10)$$

Позначимо $\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$. Очевидно, що $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=0$, це випливає із визначення $\varphi(t)$.

Теорема 6.1 (Діні). *Нехай* $f(x)$ *– абсолютно інтегровна на* $(-\infty,+\infty)$, *існує* $\delta>0$ *таке, що інтеграл*

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}dt<\infty, \qquad (6.11)$$

тоді $\lim\limits_{A\to\infty} I(A)=S_0$ *або*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du\int_0^\infty f(u)\cos t(u-x_0)\,dt=S_0.$$

Доведення. Із рівності (6.10) одержимо:

$$|I(A) - S_0| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\sin At\,dt\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\sin At\,dt\right|.$$

Із умови теореми, збіжності інтеграла $\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ і леми Рімана маємо:

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\sin At\,dt \to 0, A \to \infty.$$

Тоді

$$\int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\sin At\,dt = \int_\delta^\infty \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt - 2S_0\int_\delta^\infty \frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \int_\delta^\infty \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt - 2S_0\int_{A\delta}^\infty \frac{\sin z}{z}dz.$$

Функція $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ – абсолютно інтегровна на $[\delta,+\infty)$. Функція $\frac{1}{t}$ на цьому проміжку неперервна. Тоді і функція $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}$ буде абсолютно інтегровною на $[\delta,+\infty)$. Тому за лемою Рімана

$$\int_\delta^\infty \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt \to 0, A \to \infty.$$

Оскільки $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}$, то для $\delta > 0$ при $A \to +\infty$ і $\delta A \to +\infty$, тому $\int_{A\delta}^\infty \frac{\sin z}{z}dz \to 0$ як залишок збіжного інтеграла Діріхле. Отже, $\lim\limits_{A\to\infty} I(A) = S_0$. Теорема доведена.

Теорема 6.2 (Ліпшица). *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$, існують $\delta > 0, L > 0, \alpha \in (0,1]$ такі, що при $|t| < \delta$ має місце $|f(x_0+t) - f(x_0)| < L|t|^\alpha$, тоді $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = f(x_0)$.*

Випливає із теореми Діні.

Наслідок 6.1. *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$ і в точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, тоді $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = f(x_0)$.*

Випливає із теореми 6.2.

Наслідок 6.1. *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$ і нехай існують скінченні границі $\lim\limits_{t\to0+0}\frac{f(x_0+0)-f(x_0+0)}{t}$, $\lim\limits_{t\to0-0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}$, тоді $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = S_0$.*

Доведення випливає із теореми Діні.

Навчальні задачі

6.1. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 1, |x| \le 1, \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$

Розв'язання. Інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ має вигляд

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du = \int_0^{+\infty} (a(t)\cos tx + b(t)\sin tx)dt,$$

де $a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tu\,du$, $b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tu\,du$.

Знайдемо функції $a(t)$ і $b(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos tu\,du = \frac{1}{\pi}\frac{\sin tu}{t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin t}{\pi t},$$

$$b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin tu\,du = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos tu}{t}\Big|_{-1}^{1}\right) = 0.$$

Отже,

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2\sin t}{\pi t}\cos tx\,dt.$$

У точках розриву $x = \pm 1$ інтеграл Фур'є дорівнює значенню

$$\frac{f(-1-0)+f(-1+0)}{2} = \frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = \frac{1}{2},$$

тобто, $\frac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{2\sin t}{\pi t}\cos t\,dt$.

6.2. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, |x| > 1, \\ 1, 0 < x < 1 \\ -1, -1 < x < 0. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки, функція $f(x)$ – непарна, то $a(t) = 0$ і

$$b(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\sin tu\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin tu\,du = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos tu}{t}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos t}{t}.$$

Інтеграл Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x) = \int_0^\infty b(t)\sin tx\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t}\sin tx\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \sin^2\frac{t}{2}\sin tx\frac{dt}{t}.$$

6.3. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} \sin x, |x| \le \pi, \\ 0, \quad |x| > \pi. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо функції $a(t)$ і $b(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin u \cos tu \, du = 0,$$

$$b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin u \sin tu \, du = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin u \sin tu \, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\cos u(1-t) + \cos u(1+t))du = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin u(1-t)}{1-t}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin u(1+t)}{1+t}\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2\sin \pi t}{\pi(1-t^2)}.$$

Функція $f(x)$ є неперервною, тому

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2\sin \pi t}{\pi(1-t^2)} \sin tx \, dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Означення 7.1. Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, тоді функція

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \tag{7.1}$$

називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$.

Теорема 7.1. *Нехай* $f(x)$ *– абсолютно інтегровна на* $\mathbb{R}$*, неперервна в точці* x *і задовольняє умовам теореми Діні в точці* x*, тоді справедлива рівність:*

$$f(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{-itx} F(t)dx.$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна в точці x, тоді за теоремою Діні:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{0}^{\infty} f(u)\cos t(u-x)\,dt = f(x).$$

Враховуючи (6.8) маємо:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(u-x)}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{itu}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}F(t)dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{-itx}F(t)dx.$$

Теорема доведена.

Інтеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}F(t)dx = f(x)$$

називається *оберненим перетворенням Фур'є.*

Нехай $f(x)$ – парна, тоді

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx,$$

а функцію

$$F_C(t) = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx$$

називають *прямим косинус-перетворенням Фур'є* функції $f(x)$. В цьому випадку $F_C(t)$ також є парною і

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_C(t)\cos tx\,dx.$$

Цю рівність називають *оберненим косинус-перетворенням Фур'є*.

Нехай $f(x)$ – непарна, тоді

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = 2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx,$$

а функцію

$$F_S(t) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx\,du$$

називають *прямим синус-перетворенням Фур'є* функції $f(x)$. В цьому випадку функція $F_S(t)$ також є непарною і

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_S(t)\sin tx\,dx$$

називають *оберненим синус-перетворенням Фур'є*.

Розглянемо деякі властивості перетворення Фур'є.

Властивості перетворення Фур'є

1) Функція $F(t)$ рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$, при цьому $\lim\limits_{t\to\pm\infty} F(t) = 0$.

Доведення. За означенням:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, f(x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx\, f(x)dx.$$

Оскільки $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, то за лемою Рімана $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, f(x)dx \to 0$ і $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx\, f(x)dx \to 0$ при $t \to \infty$. Це означає, що $F(t) \to 0, t \to \infty$. Функції $\cos tx$ та $\sin tx$ – неперервні як функції від t. За умовою $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ – збіжний, тому за ознакою Вейєрштраса попередні два інтеграли рівномірно збіжні на $\mathbb{R}$, тому є неперервними функціями від t. Отже, функція $F(t)$ неперервна на $\mathbb{R}$. Із неперервності на $\mathbb{R}$ і того, що $\lim\limits_{t\to\pm\infty} F(t) = 0$ випливає, що $F(t)$ – рівномірно неперервна.

2) Якщо існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n||f(x)|dx \tag{7.2}$$

збіжний, то функція $F(t)$ буде мати неперервні на $\mathbb{R}$ похідні всіх порядків, при цьому:

$$F^{(k)}(t) = (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} f(x)dx, \forall\, k = 1, \dots, n. \tag{7.3}$$

Доведення. Із збіжності інтегралу (7.2) випливає, що $\forall k = 1, \dots, n$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k||f(x)|dx < \infty$. Застосовуючи послідовно теорему про диференціювання невласного інтегралу по параметру одержуємо (7.3).

Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$ – абсолютно інтегровані на $\mathbb{R}$, тоді

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u) f_2(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(x-u) du$$

називається *згорткою функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$.*

3) Нехай $F_i(t)$ – перетворення Фур'є функції $f_i(x), i = 1, 2$, $f(x)$ – згортка функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$. Нехай $F(t)$ – перетворення Фур'є функції $f(x)$, тоді

$$F(t) = F_1(t) \cdot F_2(t)$$

Доведення. Оскільки $F(t)$ – перетворення Фур'є функції $f(x)$, то

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u) f_2(u) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_1(x-u) f_2(u) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_1(x-u) dx = \begin{vmatrix} x-u=z \\ dx = dz \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(z+u)} f_1(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} f_2(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} f_1(z) dz = F_1(t) \cdot F_2(t).$$

Навчальні задачі

7.1. Знайти перетворення Фур'є для функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, |x| \le a, \\ 0, |x| > a. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x > 0; \end{cases}$

в) $f(x) = e^{-\lambda|x|}$, $(\lambda > 0)$.

Розв'язання. Задані функції абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}$, тому за означенням перетворення Фур'є

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

а) Знаходимо перетворення Фур'є:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-a}^{a} e^{itx} \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \frac{e^{itx}}{it}\bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{1}{2ait}\left(e^{ita} - e^{-ita}\right) = \frac{\sin at}{at}.$$

б) Аналогічно, за формулою (7.1):

$$F(t) = \int_{0}^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{x(it-\lambda)} dx = \frac{\lambda e^{x(it-\lambda)}}{(it-\lambda)}\bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

в) Обчислимо

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{itx} e^{\lambda x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+\lambda)} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{x(it-\lambda)} dx = \frac{e^{x(it+\lambda)}}{it+\lambda}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{x(it-\lambda)}}{it-\lambda}\bigg|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{it+\lambda} - \frac{1}{it-\lambda} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Розкладіть в ряд Фур'є задані функції з періодом $T = 2\pi$:

(1.1) $f(x) = 1 + \frac{x}{2}, x \in [-\pi, \pi]$; (1.2) $f(x) = 2x - 3, x \in [-\pi, \pi]$;

(1.3) $f(x) = 5x + 2, x \in [-\pi, \pi]$; (1.4) $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$;

(1.5) $f(x) = x + 4, x \in (-\pi, \pi)$; (1.6) $f(x) = 2x + 3,\ x \in (-\pi, \pi)$;

(1.7) $f(x) = x - 2, x \in (-\pi, \pi)$; (1.8) $f(x) = \frac{x}{2} - 1, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.9) $f(x) = x - \pi, x \in (-\pi, \pi]$; (1.10) $f(x) = x^3, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.11) $f(x) = 3x - 4, x \in (-\pi, \pi)$; (1.12) $f(x) = \frac{x}{2} + 4, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.13) $f(x) = 2x - 2, x \in (-\pi, \pi)$; (1.14) $f(x) = 3x + 3, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.15) $f(x) = x + 2, x \in (-\pi, \pi)$; (1.16) $f(x) = 2x - 3,\ x \in (-\pi, \pi)$;

(1.17) $f(x) = 3x + 2, x \in (-\pi, \pi)$; (1.18) $f(x) = \frac{x}{2} + 3, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.19) $f(x) = x - 4, x \in (-\pi, \pi)$; (1.20) $f(x) = 3x - 3, x \in (-\pi, \pi)$.

2. Розкладіть в ряд Фур'є функції:

(2.1) $f(x) = \begin{cases} 1, -1 \le x < 0, \\ -1, 0 \le x < 1; \end{cases}$ (2.2) $f(x) = \begin{cases} 1, -1 \le x < 0, \\ -1, 0 \le x < 1; \end{cases}$

(2.3) $f(x) = \begin{cases} 0, -2 < x < 0, \\ -1, 0 \le x \le 2; \end{cases}$ (2.4) $f(x) = \begin{cases} -x, -2 < x < 0, \\ 0, 0 \le x \le 2; \end{cases}$

(2.5) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, -2 < x \le 1, \\ 1, 1 < x \le 2; \end{cases}$ (2.6) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, -2 < x \le -1, \\ -2, -1 < x \le 2; \end{cases}$

(2.7) $f(x) = \begin{cases} -2, -2 \le x \le 0, \\ 2x, 0 < x < 2; \end{cases}$ (2.8) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, -2 < x \le 1, \\ 2, -1 < x \le 2; \end{cases}$

(2.9) $f(x) = \begin{cases} -2, -2 < x < 0, \\ 3x - 1, 0 \le x < 2; \end{cases}$ (2.10) $f(x) = \begin{cases} 2, -2 \le x \le -1, \\ 2x, -1 < x < 2; \end{cases}$

(2.11) $f(x) = \begin{cases} -1, -2 \le x < 1, \\ 3x + 1, 1 \le x < 2; \end{cases}$ (2.12) $f(x) = \begin{cases} -2x, -1 < x < 0, \\ 1, 0 \le x < 1; \end{cases}$

(2.13) $f(x) = \begin{cases} -3, -3 < x < 0, \\ 2x, 0 \le x < 3; \end{cases}$ (2.14) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, -2 \le x < 0, \\ -3, 0 \le x < 2; \end{cases}$

(2.15) $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x \le 1, \\ 2, 1 \le x \le 2; \end{cases}$ (2.16) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, 0 \le x < 1, \\ x - 1, 1 \le x \le 2; \end{cases}$

(2.17) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, 0 \le x < 1, \\ 1,\ 1 \le x \le 4; \end{cases}$ (2.18) $f(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x < 4, \\ 2 - x, 2 \le x \le 4; \end{cases}$

(2.19) $f(x) = \begin{cases} -x, 0 \leq x < 1, \\ x - 2,\ 1 \leq x24; \end{cases}$ (2.20) $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$

3. Розкладіть задані функції в ряд Фур'є по косинусах на заданому проміжку:

(3.1) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$; (3.2) $f(x) = \sin x, x \in (0, \pi)$;

(3.3) $f(x) = 1 - x, x \in [0,1]$; (3.4) $f(x) = \pi - 2x, x \in (0, \pi)$;

(3.5) $f(x) = 4x - 2, x \in (0,2)$; (3.6) $f(x) = 2x - 1, x \in (0,1)$;

(3.7) $f(x) = \frac{2\pi}{3} - 2x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (3.8) $f(x) = \frac{x}{3} - 2, x \in (0,3)$;

(3.9) $f(x) = \frac{\pi}{3} - x, x \in (0, \pi)$; (3.10) $f(x) = 1 - x, x \in (0,2)$;

(3.11) $f(x) = \frac{x}{3} + 1, x \in (0,3)$; (3.12) $f(x) = \frac{x}{2} + 1, x \in (0,4)$;

(3.13) $f(x) = 2x + \pi, x \in (0, \pi)$; (3.14) $f(x) = x - 2, x \in (0,3)$;

(3.15) $f(x) = 2 - 2x, x \in (0,2)$; (3.16) $f(x) = \pi - x, x \in (0, \pi)$;

(3.17) $f(x) = 2 - x, x \in (0,3)$; (3.18) $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, x \in (0, \pi)$;

(3.19) $f(x) = \frac{\pi}{4} - x, x \in (0, \pi)$; (3.20) $f(x) = x - \pi, x \in (0,2\pi)$.

4. Розкладіть задані функції в ряд Фур'є по синусах на заданому проміжку:

(4.1) $f(x) = \frac{\pi}{8} x(\pi - x), x \in (0, \pi)$; (4.2) $f(x) = \cos 2x, x \in (0, \pi)$;

(4.3) $f(x) = 3x - 2, x \in (0,2)$; (4.4) $f(x) = 4 - 3x, x \in (0,2)$;

(4.5) $f(x) = 2x, x \in (0,1)$; (4.6) $f(x) = x - x^2, x \in (0, \pi)$;

(4.7) $f(x) = \frac{x}{2} + 1, x \in (0,4)$; (4.8) $f(x) = 2 - 2x, x \in (0,2)$;

(4.9) $f(x) = 3x - 1, x \in (0,2)$; (4.10) $f(x) = 2x - 1, x \in (0,2)$;

(4.11) $f(x) = x + 1, x \in (0,3)$; (4.12) $f(x) = 3x - 4, x \in (0,2)$;

(4.13) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (4.14) $f(x) = 2 + \frac{x}{3}, x \in (0,2\pi)$;

(4.15) $f(x) = \frac{3}{4} x, x \in (0, \pi)$; (4.16) $f(x) = x^2 + 1, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$;

(4.17) $f(x) = 2 - 3x, x \in (0,2)$; (4.18) $f(x) = \frac{x}{3} + 3, x \in (0,3)$;

(4.19) $f(x) = 1 - 3x, x \in (0,2)$; (4.20) $f(x) = 2x - 1, x \in (0,2)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos^2 nx\,dx$, де $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$.

2. Перевірити, чи буде ортогональною на $[0,\pi]$ система функцій $\cos\frac{3}{2}x\,,\cos\frac{5}{2}x\,,\cos\frac{7}{2}x\,,\ldots$

3. Довести ортогональність на системи функцій:

а) $\sin\frac{3}{2}x\,,\sin\frac{5}{2}x\,,\sin\frac{7}{2}x\,,\ldots,x\in[0,\pi]$;

б) $\cos\frac{3}{2}x\,,\sin\frac{3}{2}x\,,\cos\frac{5}{2}x\,,\sin\frac{5}{2}x\,,\cos\frac{7}{2}x\,,\sin\frac{7}{2}x\,,\ldots,x\in[0,\pi]$;

в) $\cos\pi x\,,\cos 2\pi x\,,\cos 3\pi x\,,\ldots,x\in[-1,1]$;

г) $\sin\pi x\,,\sin 2\pi x\,,\sin 3\pi x\,,\ldots,x\in[0,1]$;

4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}-1,-2<x<0,\\ 2,0\le x\le 2.\end{cases}$

5. Розкласти функцію $f(x)=|\cos x|$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ в ряд Фур'є з періодом $T=\pi$.

6. Розкласти функцію $f(x)=e^{ax}\ (a=\mathrm{const},a\neq 0)$ в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi,\pi]$.

7. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-4,0]$ функцію $f(x)=\begin{cases}3,x\in[-4,-1],\\ -2x,x\in(-1,0].\end{cases}$ Знайти суму ряду Фур'є.

8. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[0,5]$ функцію $f(x)=\begin{cases}3x,x\in[0,2],\\ 1,x\in(2,5].\end{cases}$ Знайти суму ряду Фур'є.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2,-2\pi\le x\le 0$. Побудувати графік $f(x)$ і суми ряду.

10. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}0,x\in[-\pi,0],\\ 1,x\in(0,\pi].\end{cases}$ Знайти суму ряду Фур'є. Написати рівність Парсеваля.

11. Розкласти функцію $f(x)=\pi-x,-\pi\le x\le 0$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

12. Розкласти функцію $f(x) = x - \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 2$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

13. Розкласти функцію $f(x) = \begin{cases} 0.3, 0 < x < 0.5, \\ -0.3, 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

14. Розкласти функцію $f(x) = x \cos x$ на проміжку $(0, \pi)$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}$.

15. Розкласти функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, x \in (0,2\pi), \\ 0, x = 0 \end{cases}$ в ряд Фур'є. Записати рівність Парсеваля.

16. Для функції $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [-\pi, 0], \\ x, x \in (0, \pi] \end{cases}$ знайти ряд Фур'є та його суму $S(x)$. Написати рівність Парсеваля.

17. Нехай $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$. Довести, що $f(x)$ – неперервна на $\mathbb{R}$, причому ряд для $f'(x)$ можна одержати почленним диференціюванням.

18. Довести, що збіжний на $\mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, не є рядом Фур'є для функцій із $\mathbb{R}([-\pi, \pi])$.

19. Зобразити інтегралом Фур'є функції:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x \leq 1, \\ 0.5, x = 0, x = 1, \\ 0, x < 0, x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, 0 < x < \infty, \\ e^{-x}, -\infty < x < 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2, \\ 0, x > 2. \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \cos x, |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leq 2, \\ 0, |x| > 2. \end{cases}$

20. Знайти перетворення Фур'є для функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ б) $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$;

в) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, |x| \leq \pi, \\ 0, |x| > \pi. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Авдєєва Т.В., Качаєнко О.Б. Ряди Фур'є. Практикум. К.: НТУУ «КПІ», 2016. 88 с.

2. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. К.: НТУУ «КПІ», 2013. 160 с.

3. Вища математика у прикладах та задачах / Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Харків: ХНУРЕ, 2002. 596 с.

4. Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. К.: ВПЦ «Київський університет», 2012. 276 с.

5. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Підручник. У двох частинах: Частина 2. К.: Либідь, 1994. 304 с.

6. Коляда В. І., Кореновський А. О., Шанін Р. В. Аналіз Фур'є у вправах: практикум. Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2021. 116 с.

7. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій. (ІІ курс IV семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 107 с.

8. Синявська О. О., Слюсарчук П. В. Ряди Фур'є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. Ужгород, 2015. 70 с.

9. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підручник : у 2 ч. Ч. 2. 3-е вид., випр. і доп. К. : Вища школа, 2005. 510 с.