

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Операції над множинами

- Чи вірно, що
 - $\{1, 4, 5\} = \{5, 1, 4\}$;
 - $\emptyset = \{\emptyset\}$; $\emptyset \subset \{\emptyset\}$; $\emptyset \subset \emptyset$; $\emptyset \subseteq \emptyset$;
 - $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}\} = \{a, b, c, d, e\}$; $\{a, c, e\} \subset \{a, \{b, c\}, d, e\}$.
- Чи вірно, що
 - $\{1, 3\} \in \{3, 2, 4, 5, 1\}$;
 - $a = \{a\}$; $a \subseteq \{a\}$; $\emptyset \subset \{a\}$; $(\{a\} \setminus \emptyset) \subset (\{a\} \cup \emptyset)$;
 - Для довільних множин A та B $A \cap B \subset A \cup B$.
- Знайти $A \Delta (\bar{B} \cap C)$ за умови, що $A = \{x - 2 \mid x \in U, 5x + 1 - \text{квадрат цілого числа}\}$,
 $B = \{x \mid x^2 > 60\}$, $C = \{x \mid (3x - 1) - \text{просте число}\}$, $U = \{1, 2, \dots, 20\}$.
- Нехай $U = \{5, 6, \dots, 30\}$ — універсальна множина, $A = \{5, 7, 8, 10, 11, 14, 20, 21, 22, 26\}$,
 $B = \{2x - 7 \mid x - \text{непарне ціле число}\}$, $C = \{x \mid x^2 + 1 - \text{просте число}\}$. Вказати перелік елементів множини $D = B \Delta (\bar{A} \cup C)$.
- На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини
 - $\overline{A \Delta \bar{C}} \setminus (B \cup A)$.
 - $(\bar{A} \cap B) \cup (B \Delta C)$.
- Довести, що для довільних множин A, B та C справджуються рівності
 - $\bar{C} \Delta ((A \cup \bar{B}) \cap \bar{C}) = B \setminus (A \cup C)$.
 - $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$.
- Нехай A — множина трикутників, B — множина чотирикутників, C — множина правильних багатокутників, D — множина багатокутників, які мають принаймні один прямий кут, E — множина рівносторонніх багатокутників. Вказати множини:
 - $((D \cap A) \setminus (C \cap B)) \Delta (A \cap E)$.
 - $\overline{B \cap (C \cup D)} \cap E \cap B$.
- Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усіх прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних багатокутників площини. Вказати множини
 - $(L \setminus S) \cap (R \setminus \bar{P})$.
 - $(P \setminus S) \cup (R \setminus \bar{L})$.
- Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
 - $\bar{A} \setminus B = A \cup \bar{A} \cap B$;
 - $(B \setminus A) \cup \bar{A} = \overline{C \setminus \bar{A}} \setminus A$;
- Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

- a. $\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A) = \overline{A \setminus B}$;
 b. $(A \Delta (A \cap \bar{B})) \cap (\bar{B} \Delta \bar{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.2. Потужність множини

11. Нехай $U = \{0, 1, \dots, 12\}$, $A_1 = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$, $A_2 = \{x \mid x^2 : 12\}$. Знайти $|\mathcal{P}(A_1 \cap \bar{A}_2)|$.
12. Нехай $U = \{3, 4, \dots, 15\}$, $A_1 = \{5, 7, 9, 11, 12, 14\}$, $A_2 = \{x \mid (x^2 - x) : 6\}$. Знайти кількість власних підмножин множини $A_1 \Delta A_2$.
13. У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які
- Не отримали жодної п'ятірки;
 - Отримали рівно одну п'ятірку.
14. Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.
15. Нехай $|U| = 50$, $|A| = 20$, $|\overline{A \cup B}| = 15$, $|A \cap B| = 11$. Знайти
- $|B \setminus A|$;
 - $|A \cup \bar{B}|$.
16. Нехай $|U| = 60$, $|A| = 25$, $|\overline{A \cap B}| = 45$, $|B \setminus A| = 18$. Знайти
- $|A \cup B|$;
 - $|B \Delta \bar{A}|$.

1.3. Метод математичної індукції

1. Довести тотожності

- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$
- $(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

- Довести, що для довільного натурального n число $n^3 - 7n$ ділиться на 6.
- Довести, що для довільного натурального n число $6^{2n-1} + 1$ ділиться на 7.
- Довести, що число $2^{2^n} + 1$ закінчується цифрою 7 ($n > 1$).
- Довести, що $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

6. Знайти суму $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$ за умови, що $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

2. ТЕОРІЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

2.1. Операції над відношеннями

1. Нехай $A = \{k, l, m, n\}, B = \{1, 2, 5, 7, 8\}, C = \{a, b, c, d, e\}$,
 $R = \{(k, 1), (n, 2), (n, 1), (l, 5), (l, 8), (m, 2), (m, 8), (k, 7)\}, S = \{(2, b), (7, c), (8, b), (5, e)\},$
 $T = S \circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти
 $(A \setminus T^{-1}[\{c, e\}]) \times (C \setminus \text{pr}_2 T)$.

2. Нехай $A = \{k, l, m, n\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{x, y, z, t, u, v\}$,

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \{(1, u), (2, x), (2, z), (2, t), (4, x), (4, v)\}, T = S \circ R.$$

Задати відношення T за допомогою графу і знайти $(C \setminus T[\{l, n\}]) \times (A \setminus \text{pr}_2 T^{-1})$.

3. Нехай R — бінарне відношення " $<$ ", визначене на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^m , де $m \in \mathbb{N}$.
 4. Нехай R — бінарне відношення подільності на множині $\mathbb{Z}$. Знайти R^m , де $m \in \mathbb{N}$.
 5. Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.
 6. Навести приклад бінарного відношення R , такого що $R^2 \neq \emptyset, R^2 \cap R = \emptyset$.

2.2. Властивості бінарних відношень

1. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$. Вказати $R[\{-1, 2, 5\}]$.
 2. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$. Вказати $\text{pr}_1 R$.
 3. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2 \cup R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R .
 4. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2 \setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R .
 5. Для однорідного БВ $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, побудувати його замикання S , яке є симетричним та транзитивним. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1, 4\}]$.

6. Для однорідного БВ $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,b)\}$, визначеного на множині $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення S^{-1} та знайти $S[\{b,d,f\}]$.
7. Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$, визначеного на множині $\{a,b,c,d\}$.
8. Побудувати асиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R = \{(2,1), (1,3), (3,5), (5,2)\}$, визначеного на множині $\{1,2,3,4,5\}$.

2.3. Бінарні відношення еквівалентності

1. Які із наступних систем множин є а) покриттям; б) розбиттям множини $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:
 - а) $\{\{1,2,4,8\}, \{5\}, \{3,7\}\}$;
 - б) $\{\{1,2,6\}, \{4,5\}, \{2,3,7\}, \{4,8\}\}$;
 - в) $\{\{1,2,6\}, \{4,7\}, \{3,5,8\}\}$.
2. Які із наступних систем множин є а) покриттям; б) розбиттям множини $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$:
 - а) $\{\{b,e,g\}, \{a,d\}, \{b,c,h\}\}$;
 - б) $\{\{d,e\}, \{b,c,g\}, \{d,h\}, \{a,b,f\}\}$;
 - в) $\{\{c,e,h\}, \{a,b,f\}, \{d,g\}\}$.
3. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 1 в).
4. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 2 в).
5. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями толерантності, а які — відношеннями еквівалентності (та вказати для них класи еквівалентності):
 - а) паралельність площин у просторі;
 - б) відношення знайомства на множині людей;
 - в) відношення "одногрупник" на множині: а) людей; б) студентів;
 - г) відношення рівнопотужності.
6. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями толерантності, а які — відношеннями еквівалентності (та вказати для них класи еквівалентності):
 - а) перпендикулярність прямих на площині;
 - б) відношення "мати однаковий вік" на множині людей;
 - в) відношення "знаходитися у одній чверті" на множині точок координатної площини;
 - г) відношення "бути родичем" на множині людей.
7. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R = \{(t,v), (w,x), (w,z), (u,y), (x,z), (w,w), (x,x), (z,x), (v,v), (z,z), (z,w), (x,w), (y,u), (y,y), (u,u), (t,t), (v,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R . Вказати $(R^3 \cup R^{-2})^{100} \setminus R^{50}$.
8. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ бінарне відношення

$R = \{(b, f), (a, g), (b, b), (f, c), (d, d), (b, c), (g, a), (c, c), (g, g), (c, f), (f, f), (c, b), (e, e), (a, a), (f, b)\}$
 відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R . Вказати $(R^{-5} \cap R^3)^{20} \cup R^{-30}$.

9. Вказати визначене на відрізку $[0,1]$ бінарне відношення еквівалентності, яке має 5 класів еквівалентності, класи еквівалентності якого утворюють розбиття відрізка $[0,1]$.
10. Вказати визначене на множині $\mathbb{Z}$ бінарне відношення еквівалентності, яке має 13 класів еквівалентності і породжує розбиття множини цілих чисел.
11. Для бінарного відношення $R = \{(1,2), (3,2), (9,2), (10,5), (3,3)\}$, визначеного на множині $A = \{1,2,\dots,10\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$. Вказати класи еквівалентності множини A за відношенням S та знайти $|A/(S \setminus R)|$.
12. Для бінарного відношення $R = \{(b,a), (c,b), (f,b), (b,g), (d,k), (h,f), (i,j)\}$, визначеного на множині $A = \{a,b,\dots,k\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$.

2.4. Відношення порядку

1. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
 - а) відношення знайомства на множині людей; б) відношення "бути старшим"; в) відношення "бути сином"; г) відношення "бути предком" (вважати, що за домовленістю кожна людина є власним предком).
2. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
 - а) відношення "бути нащадком"; б) відношення "бути молодшим"; в) відношення "знаходитися на більшій відстані від початку координат" на множині точок площини; г) відношення "бути родичем" на множині людей.
3. Задати переліком елементів бінарне відношення строгого порядку R , якому відповідає впорядкована множина, діаграма Хассе якої наведена на рис. 2.1. Знайти екстремальні елементи впорядкованої множини. Вказати усі верхні грані множини $\{A, C, E\}$. Знайти $\sup\{C, E\}$, $\inf\{D, E\}$ та $\inf\{D, C\}$. Чи буде впорядкована множина ґраткою?

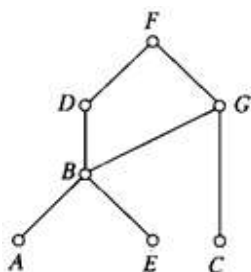


Рис. 2.1

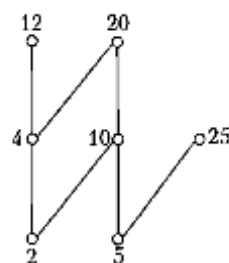


Рис. 2.2

4. Знайти $|R|$, де R — відношення часткового порядку на множині $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$, діаграма Хассе якого наведена на рис. 2.19. Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, R) . Знайти $\sup\{10, 12\}$ та $\inf\{10, 12\}$.

5. На рис 2.3. наведені діаграми Хасе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

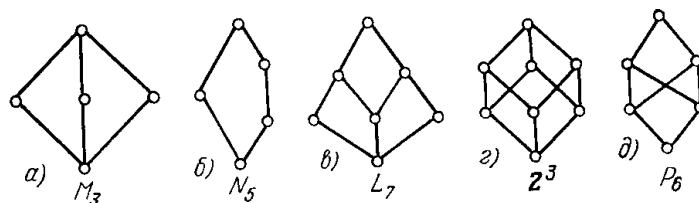


Рис. 2.3.

6. На рис 2.4. наведені діаграми Хасе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

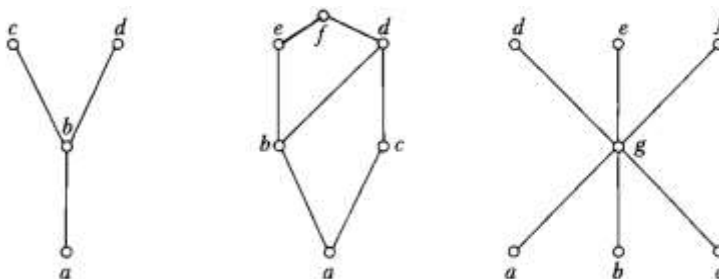


Рис. 2.4.

7. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$, яке було би відношенням:
- нестрогого порядку;
 - строгого порядку;
 - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.
8. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке було би відношенням:
- нестрогого порядку;
 - строгого порядку;
 - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.
9. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(c, a), (b, d), (d, c), (f, c)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке б містило у собі відношення R і було відношенням:
- часткового порядку;
 - строгого порядку;
 - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, S) .
10. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(7, 4), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (3, 4)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке б містило у собі відношення R і було відношенням:

- а) часткового порядку;
- б) строгого порядку;
- в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, S) .

11. Перевірити, чи є бінарне відношення $R = I_A \cup \{(2,1), (4,1), (1,3), (5,1), (4,3), (2,3)\} \cup \{(5,3), (5,4)\}$ відношенням часткового порядку на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини (A, R) та вказати її екстремальні елементи.
12. Перевірити, чи є бінарне відношення R з матрицею

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині $A = \{x, y, z, u, v\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення R та вказати екстремальні елементи множини A за відношенням нестрогого порядку, яке відповідає відношенню R .

13. Перевірити, чи є відношення $S = R \circ (R \cup I_A)$ відношенням строгого порядку на множині $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, де $R = \{(b, g), (a, e), (c, g), (b, c), (a, b), (c, e), (d, f)\}$. Якщо так, то
- а) зобразити діаграму Хассе відношення S ;
 - б) вказати екстремальні елементи множини A за відношенням S ;
 - в) знайти $\inf \{b, g, e\}$ та $\sup \{a, b, h\}$.

2.5. Функціональні відношення

1. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вказати область визначення, область значень та множину точок площини, які перебувають у цьому відношенні. Перевірити властивості функціональних відношень та вказати обернену функцію, якщо вона існує.
- а) $R_1 = \{(x, y) \mid xy = 2\}$;
 - б) $R_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$;
 - в) $R_3 = \{(x, y) \mid 2x > y\}$;
 - г) $R_4 = \{(x, y) \mid x = \sqrt{y-1}\}$;
 - д) $R_5 = \{(x, y) \mid y = \operatorname{tg} x\}$;
 - е) $R_6 = \{(x, y) : y - \sqrt[3]{x+2} = 0\}$.
2. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вказати область визначення, область значень та множину точок площини, які перебувають у цьому відношенні. Перевірити властивості відношень та вказати обернену функцію, якщо вона існує.
- а) $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$;

$$\text{б) } R_2 = \{(x, y) \mid y \geq -1, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\};$$

$$\text{в) } R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 1\};$$

$$\text{г) } R_4 = \{(x, y) \mid x^2 = |y|\};$$

$$\text{д) } R_5 = \{(x, y) \mid x = \sin y\}.$$

3. За бінарним відношенням $R = \{(2, b), (5, d), (4, b)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним;

4. За бінарним відношенням $R = \{(1, b), (3, d), (4, a)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d, e\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним;

5. За бінарним відношенням $R = \{(2, b), (5, d), (4, b), (1, a), (2, c), (5, a)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d\}$ побудувати таке максимальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним;

6. За бінарним відношенням $R = \{(b, 2), (d, 5), (a, 4), (e, 3), (c, 4), (d, 3), (a, 1)\} \subset \{a, b, c, d, e\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ побудувати таке максимальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним;

7. Перевірити, чи є функціональним відношення $F = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 16, y \geq 0\}$. Якщо так, то записати у відповідь значення виразу $10x + y$, де x — кількість цілих значень у множині $\text{Im } F$, y — найменший елемент множини $\text{Dom } F$. Інакше записати у відповідь 0.

8. Перевірити, чи є функціональним бінарне відношення $F = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, x < 0\}$. Якщо так, то записати у відповідь значення виразу $10x + y$, де x — кількість цілих значень у множині $\text{Dom } F$, y — найменший цілий елемент множини $\text{Im } F$. Інакше записати у відповідь кількість цілих елементів множини $F[-4]$.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

3.1. Формули логіки висловлювань.

1. Вказати порядок виконання операцій у формулі

$$\varphi = \left(\left(\neg A \right) \Rightarrow \left(B \Leftrightarrow \left(\neg \left((C \vee A) \wedge (\neg D) \right) \right) \right) \right)$$

та перейти від φ до відповідної їй формули за домовленістю.

2. Відновити дужки у формулі

$$\varphi = B \wedge \bar{A} \Rightarrow D \Leftrightarrow (\bar{C} \vee A) \wedge B \Rightarrow \bar{D}.$$

3. Розв'язати логічні рівняння

- a. $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 0.$

- b. $P \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge R = \bar{P} \vee R.$

4. Розв'язати логічні рівняння

- a. $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 1.$

- b. $P \Rightarrow R = \bar{P} \Leftrightarrow Q \vee \bar{R}.$

5. Побудувати таблицю істинності формули $\varphi = \bar{P} \vee Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \overline{R \vee \bar{P}} \wedge Q.$

6. Побудувати таблицю істинності формули $\varphi = (P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow R) \vee \overline{\bar{R} \Rightarrow P \wedge \bar{Q}}.$

7. Перевірити, чи є виконуваною формула $\varphi = \overline{\bar{A} \wedge C} \Leftrightarrow A \vee (\bar{B} \Rightarrow C).$

8. Перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = (A \wedge \bar{C} \Leftrightarrow B) \Rightarrow \overline{A \Rightarrow B} \vee (C \Rightarrow B).$

9. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є суперечливою формула

$$\varphi = A \wedge B \Rightarrow (A \vee \bar{A} \wedge C) \wedge B.$$

10. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є тотожно істинною фор-

$$\text{мула } \varphi = \overline{\bar{A} \Rightarrow B} \Rightarrow (\bar{A} \vee C \Leftrightarrow \bar{A}).$$

3.2. Рівносильні перетворення формул алгебри висловлювань

1. Для формули φ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми та символи операцій диз'юнкції і заперечення:

- a. $\varphi = (\bar{Q} \Leftrightarrow P) \Rightarrow P \wedge \bar{R};$

- b. $\varphi = \bar{P} \wedge R \Leftrightarrow Q \Rightarrow P.$

2. Для формули φ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми і символи операцій кон'юнкції та заперечення.

- a. $\varphi = \bar{P} \wedge R \Leftrightarrow Q \Rightarrow P;$

- b. $\varphi = (\bar{R} \vee P) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R).$

3. Для формули φ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.

- a. $\varphi = \bar{R} \vee P \Leftrightarrow Q \Rightarrow R \wedge \bar{P};$

- b. $\varphi = (\bar{P} \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R \wedge \bar{P}).$

4. Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) \vee (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})$ та $\varphi_2 = (Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R).$

5. Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = (Q \wedge P \Rightarrow R \vee Q) \wedge (\bar{P} \Leftrightarrow P \wedge Q)$ та $\varphi_2 = \overline{P \wedge \bar{Q} \Rightarrow R \Rightarrow P}$.
6. Перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \overline{P \Rightarrow \bar{R} \Rightarrow (P \vee \bar{Q} \Leftrightarrow P)}$.
7. Перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi = \overline{Q \wedge P \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R) \wedge P}$.
8. З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \overline{\bar{P} \Rightarrow P \wedge Q \Rightarrow \bar{R} \vee (\bar{P} \Leftrightarrow R)}$.
9. З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi = (R \Rightarrow (P \Leftrightarrow \bar{R})) \wedge (\bar{Q} \Rightarrow P)$.
10. Довести, що формула $\varphi = P \wedge \bar{Q} \Rightarrow R \wedge \bar{Q} \Leftrightarrow (\bar{R} \vee Q) \wedge P \Rightarrow Q$ є тотожно істинною.

3.3. Логічне слідування

1. Перевірити, чи є формула $\varphi = \bar{Q} \wedge R \vee \bar{P}$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = \bar{R} \Rightarrow \bar{Q}$ та $\varphi_2 = R \wedge P \Leftrightarrow \bar{P}$.
2. Перевірити, чи має місце логічне слідування $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi$, якщо $\varphi_1 = \bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$, $\varphi_2 = \bar{P} \Leftrightarrow Q$, $\varphi_3 = R \Rightarrow \bar{P} \wedge \bar{R}$, $\varphi = \overline{\bar{Q} \Leftrightarrow R}$.
3. Перевірити, чи є формула $\varphi = P \vee \bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R}$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = \bar{R} \wedge \bar{P} \Leftrightarrow P$ та $\varphi_2 = R \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$.
4. Перевірити, чи є формула $\varphi = \bar{R} \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \bar{Q}}$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = \bar{Q} \wedge \bar{R} \Leftrightarrow Q$ та $\varphi_2 = P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow Q \wedge R$.
5. Вказати структуру висловлювання "Якщо студент написав усі модульні роботи на 2, то він складе іспит на два, хіба що він ретельно вивчить усі питання".
6. Проаналізувати міркування
 - а) Якщо програміст володіє мовою PHP або мовою Java, то він може розробляти серверне ПЗ.
 - б) Програміст може підтримувати сайт тоді і тільки тоді, коли він може розробляти серверне ПЗ.
 - в) Програміст не може підтримувати сайт.
 Отже, програміст не володіє ні PHP, ні Java.
7. Проаналізувати міркування
 - а) Якщо Сергій оволодіє німецькою мовою, то він зможе читати твори Гете та Шіллера в оригіналі.
 - б) Сергій оволодіє німецькою мовою, якщо почне її вивчати.
 Отже, Сергій зможе читати твори Шіллера в оригіналі тоді і тільки тоді, якщо він почне вивчати німецьку мову.
8. Проаналізувати міркування
 - а) Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра рівна 0 або 5;
 - б) Рівність останньої цифри числа 0 є достатньою для його парності;
 - в) Число ділиться на 5 і є непарним.
 Отже, остання цифра цього числа не рівна 0.
9. Проаналізувати міркування
 - а) Якщо ціле число більше за одиницю, то воно є простим або складеним.

б) Якщо ціле число більше за два, то воно більше за один.

в) Якщо ціле число більше двох і парне, то воно складене.

Отже, якщо ціле число більше за два і парне, то воно є складеним.

10. Проаналізувати міркування

а) Якщо падає сніг або на дорозі ожеледиця, то машиною важко керувати.

б) Якщо машиною важко керувати, то я спізнюся або зовсім не приїду.

в) Сніг не падає.

Отже, я спізнюся або на дорозі ожеледиця.

4. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

4.1. Предикати. Операції над предикатами

1. Вказати, яким є (тотожно істинним, тотожно фальшивим, виконуваним чи спростованим) предикат $f(x): x^2 + 8x + 15 \geq 0$, визначений на множині:
 - а) натуральних чисел;
 - б) цілих чисел.
2. Вказати, яким є (тотожно істинним, тотожно фальшивим чи виконуваним) предикат $f(x): 3^x \leq \frac{1}{9}$, визначений на множині:
 - а) натуральних чисел;
 - б) цілих чисел.
3. Вказати, до якого типу (тотожно істинні, тотожно фальшиві, спростовні чи виконувані) належить однорідний двомісний предикат $f(x, y): x^2 + y^2 \geq 2$, визначений на множині:
 - а) $\mathbb{Z}$;
 - б) $\mathbb{N}$;
 - в) $[0, 1)$.
4. Вказати, до якого типу належить однорідний предикат $f(x, y): -2x \leq x^2 + y^2$, визначений на множині:
 - а) $\mathbb{Z}$;
 - б) $\mathbb{N}$;
 - в) $(0, 1)$.
5. Вказати множину істинності предиката $f(x, y) \Rightarrow \overline{g(y)} \wedge h(x)$, якщо предикати $f(x, y): x + y$ — просте число, $g(x): x^2 + 3$ кратне 4, $h(x): "x$ кратне 3" визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
6. Вказати множину істинності предиката $g(x) \vee h(y) \Leftrightarrow \overline{f(x, y)}$, якщо предикати $f(x, y): x^2 + y^2$ — просте число, $g(x): |x - 3| > 2$, $h(x): "x$ кратне 4" визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
7. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого, якщо $f(x): x$ — парне число, $g(x): x^2 - 14x + 24 = 0$.
8. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого, якщо $f(x): x$ — просте число, $g(x): x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
9. Вкажіть до якого типу (тотожно істинні, тотожно фальшиві чи виконувані) належать предикати, визначені на множині цілих чисел наступним чином:
 - а) $f(x, y): x^2 + y^2 > 0$;
 - б) $\exists x(x^2 < y)$;
 - в) $\forall y(5^{x+y} > 0)$;
 - г) $\forall y(x^2 + 4x + y^2 > 0)$;
 - д) $f(x): \log_{0,3}(1 + x^2) \geq 0$.

10. Вкажіть множину істинності наступних предикатів, визначених на множині натуральних чисел:
- $f(x, y): x^2 - y^2 \leq 0$;
 - $\forall y(x < y^2)$;
 - $\forall x(y^x > 2)$;
 - $\forall x \exists y(y + z > 3^x)$;
 - $\forall y(1 + \log_2 x \leq y)$.
11. Предикати $f(x, y): (y+1)/(x-1)$ — ціле число та $g(x): x^2 - 10x + 16 = 0$ визначені на множині $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 13\}$. Перевірити, чи є один із предикатів $\exists y f(x, y)$ та $g(x)$ наслідком іншого.
12. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого. Відповідь обґрунтувати.
- $f(x): x$ — просте число, $g(x): x^2 - 7x + 10 \leq 0$.
 - $f(x): x$ — число Фібоначчі, $g(x): x^3 \geq 125$.
 - $f(x): \exists y(3^y \leq x)$, $g(x): \forall y(y^2 + 1 > x)$.
13. Вказати множину істинності предиката $\overline{\exists z(f(z, y) \Leftrightarrow g(z))}$, якщо предикати $f(x, y): x^2 + y$ — складене число та $g(x): x^2 + 7 \equiv 3 \pmod{4}$ визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
14. Обчислити $\forall x(\exists y f(x, y) \Rightarrow \overline{g(x)})$, якщо предикати $f(x, y): x^2 + y^2$ — просте число, $g(x): 2x^2 + 3$ кратне 5 визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
15. Вказати множину істинності предиката $\exists z(f(z, y) \wedge g(z, y))$, якщо $f(x, y): x < y$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $g(x, y)$ — однорідний двомісний предикат на множині A , множина істинності якого рівна $\{(2, 5), (3, 2), (4, 7), (7, 7), (7, 8)\}$.
16. Вказати таблицю значень предиката $\exists x f(x, y) \Rightarrow \forall z \overline{g(x, z)}$, якщо двомісні предикати $f(x, y): y^2 > 2x + 10$ та $g(x, y): "x + y \text{ кратне } 6"$ визначені на множинах $A_1 = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ та $A_2 = \{-5, 0, 3, 5, 7\}$.

4.2. Аналіз міркувань засобами логіки предикатів

17. Вказати структуру міркування:
- Всі студенти крім першокурсників можуть розв'язати цю задачу, якщо хоча б один школяр може це зробити.
 - Петро — школяр і не може розв'язати цю задачу.
 - Іван — студент-першокурсник і також не може розв'язати цю задачу.
- Отже, задача не має розв'язку.
18. Вказати структуру міркування:
- Іван мало вчиться.

б) Кожний, хто мало вчиться, не зможе скласти іспит з вищої математики, хіба що йому пощастить або допоможе товариш.

в) Жодний товариш не допоможе Івану.

Отже, якщо Івану не пощастить, то він не зможе скласти іспит з вищої математики.

19. Проаналізувати міркування:

а) Деякі, але не усі люди щирі.

б) Не усі щирі люди багаті.

Отже, деякі люди не багаті.

20. Проаналізувати міркування:

а) Усі судді — юристи.

б) Деякі юристи — шахраї.

в) Степан — суддя.

Отже, якщо Степан не шахрай, то жоден суддя — не шахрай.

5. КОМБІНАТОРИКА

1. У чемпіонаті світу з футболу беруть участь 32 команди, 14 з яких з Європи. Підрахувати:
 - а) кількість способів розподілу нагород;
 - б) кількість способів розподілу нагород за умови, що хоча би два призові місця посіли команди з Європи;
2. Будівельна фірма формує бригаду з 6 робітників. На фірмі працює 5 малярів, 2 теслі та 3 штукатури. Підрахувати
 - а) кількість способів укомплектування бригади;
 - б) кількість способів укомплектування бригади за умови, що до її складу мають входити представники усіх трьох спеціальностей.
3. Для премій на конкурсі виділено 2 ноутбуки, 3 смартфони і 8 колонок. Скількома способами можна розділити ці премії між 20 учасниками, якщо будь-якому з них вручають не більше однієї премії?
4. Для премій на олімпіаді з дискретної математики виділено 3 примірника першої книги, 4 — другої і 8 — третьої. Скількома способами можна розділити ці премії між 30 учасниками, якщо будь-якому вручають не більше однієї книги?
5. Скількома способами із 20 шахістів можна скласти:
 - а) три пари (порядок пар не відіграє ролі);
 - б) чотири трійки (порядок трійок є суттєвим)?
6. Скількома способами із 30 студентів можна скласти:
 - а) три трійки (вважати, що порядок трійок є важливим);
 - б) чотири п'ятірки (порядок не є важливим)?
7. У групі навчається 5 дівчат та 10 хлопців. Підрахувати кількість способів вибору 5 студентів групи за умови, що серед вибраних студентів більшість мають становити дівчата.
8. У класі вчиться 9 дівчат та 11 хлопців. Підрахувати кількість способів побудови шеренги із 6 школярів групи за умови, що серед обраних у неї принаймні половина має бути чоловічої статі.
9. Потрібно обрати 5 видань із 6 підручників та 8 методичок і розташувати їх на полиці. Підрахувати, скільки є способів це зробити за умови, що серед вибраних видань підручники мають становити меншість і порядок об'єктів на полиці є суттєвим.
10. На столі лежить 6 книжок та 9 зошитів. Підрахувати кількість способів вибору 8 предметів за умови, що усі предмети різні і серед вибраних зошити мають становити меншість.
11. Студент має виконати 10 лабораторних з програмування. При цьому для кожної задачі він може обрати одну з мов C++, Java, JavaScript, C# чи Python. Підрахувати кількість способів вибору мов для задач за умови, що:
 - а) порядок задач важливий;
 - б) порядок задач не є суттєвим;
 - в) порядок задач не є суттєвим і при цьому принаймні половина лабораторних має бути написана на Python;
 - г) порядок задач не є суттєвим і при цьому принаймні третина лабораторних має бути виконана на C++ або Java.
12. Потрібно зробити 8 прикладів з дискретної математики. При цьому він можна обирати приклади з тем «Теорія множин», «Бінарні відношення» та «Комбінаторика». Підрахувати кількість способів вибору тем для прикладів за умови, що:

- а) порядок прикладів важливий;
 - б) порядок прикладів не є важливим;
 - в) порядок прикладів не є важливим і при цьому рівно 2 задачі має бути з теорії множин;
 - г) порядок прикладів не є важливим і при цьому менше половини задач має бути з комбінаторики.
13. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «метаморфоза» таким чином, щоб дві літери «а» не стояли поруч?
14. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «програма» таким чином, щоб літери «о» та «м» не розташовувалися поруч?
15. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «перестановка» таким чином, щоб отримана перестановка починалася або закінчувалася на літеру «а»?
16. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «комбінаторика» таким чином, щоб отримана перестановка не починалася і не закінчувалася на літеру «о»?
17. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a} + 2a^{-1}\right)^{16}$ визначити член, який не залежить від a .
18. У розкладі бінома $\left(3\sqrt{x} - x^{-1}\right)^{15}$ визначити коефіцієнт біля x^3 .
19. У розкладі $(a + b + c + d)^5$ вказати члени, числовий коефіцієнт біля яких є найбільшим.
20. У розкладі $(a + b + c - d)^3$ вказати члени, числовий коефіцієнт біля яких є найменшим.
21. Підрахувати кількість невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ за умови, що:
- а) x_i — цілі ($i = 1, \dots, 4$);
 - б) x_1, x_2 — парні, x_3, x_4 — непарні.
22. Підрахувати кількість додатних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ за умови, що:
- а) x_i — цілі ($i = 1, \dots, 4$);
 - б) x_1, x_2, x_3 — непарні.
23. Підрахувати кількість натуральних розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 < 20$.
24. Підрахувати кількість розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 18$ з парними невід'ємними значеннями невідомих $x_1, \dots, x_4$.
25. Скільки потрібно запросити людей, щоб:
- а) щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?
 - б) обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?
26. На заводі є 3 цехи, у кожному з яких працюють працівники однієї з 4-х професій. Кожного місяці обирають одного працівника для премії. Яка найменша кількість місяців має пройти, щоб серед обраних обов'язково знайшлося 7 працівників одного цеху з однаковими професіями.
27. У офісі працює 30 людей. Кожного ранку якісь четверо з них зустрічаються при вході. Яка найменша кількість днів має пройти, щоб гарантовано знайшлися такі працівники, які тричі зустрілися вранці у тому самому складі?

28. Нехай A — множина, яка містить 10 натуральних чисел, кожне з яких не більше 42. Довести, що знайдуться хоча би дві різні трьохелементні підмножини множини A , які мають однакові суми елементів.
29. Нехай A — множина, яка містить 15 натуральних чисел, кожне з яких менше за 54. Довести, що знайдуться хоча би дві різні двохелементні підмножини множини A , які мають однакові суми елементів.
30. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10000 елементів, кожна пара — 1000 спільних елементів, кожна трійка — 100, кожна четвірка — 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?
31. В школі вчиться 800 школярів. У олімпіаді з кожного із чотирьох предметів взяло участь по 200 школярів, у обох олімпіадах з кожної пари предметів — по 50 школярів, з кожних трьох — по 20, з усіх чотирьох — 10. Скільки школярів не брали участь у жодній олімпіаді?
32. У магістратуру прийняли 12 студентів. Скількома способами можна їх розподілити за трьома різними спеціалізаціями, якщо
- а) на першій спеціалізації є 5 місць, на другій — 3 місця, на третій — 4 місця;
 - б) обмеження по кількості студентів на спеціалізації відсутні;
 - в) на кожній спеціалізації має навчатися принаймні один студент;
 - г) обмеження по кількості студентів на спеціалізації відсутні і суттєвою є лише кількість студентів на кожній спеціалізації;
 - д) на кожній спеціалізації має бути не менше двох студентів і суттєвою є лише кількість студентів на кожній спеціалізації;
 - е) обмеження по кількості студентів на спеціалізації відсутні і суттєвим є порядковий номер, під яким був обраний студент на відповідну спеціалізацію;
33. На практику скерували 15 чоловік. Скількома способами можна їх розподілити за чотирма керівниками, якщо:
- а) у першого має бути 4 практиканти, у другого та третього — по 3, у четвертого — решта;
 - б) обмеження по кількості практикантів відсутні;
 - в) серед практикантів 8 дівчат та 7 хлопців, обмеження по кількості практикантів відсутні, а при розподілі важливою є лише стать практиканта;
 - г) у кожного керівника має спеціалізуватися принаймні один практикант.
 - д) те саме, що й у попередньому пункті, але порядок керівників не є суттєвим.
34. Скількома способами можна розмістити 10 білих і 6 чорних куль у 5 різних урн, якщо
- а) кулі одного кольору різні;
 - б) кулі одного кольору однакові;
 - в) кулі одного кольору різні і порядок куль в урні важливий;
 - г) кулі одного кольору різні і хоча би дві урни мають бути непорожні;
 - д) кулі одного кольору однакові і всі урни мають бути непорожні.
35. У сітці $\{0, 1, \dots, 7\} \times \{0, 1, \dots, 7\}$ дозволені кроки $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$ та $(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$. Скільки існує шляхів із точки $(0, 0)$ у точку $(7, 7)$, які складаються з дозволених кроків та жодного разу не проходять через точки, розташовані вище за пряму $y = x$, і:
- а) проходять через точку $(2, 0)$;
 - б) проходять через точку $(2, 2)$?