

Рого В. Л., Варга Я. В., Король І. І., Сливка-Тилищак Г. І.

**Навчальний посібник
із курсу «Диференціальні рівняння»**

**ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ
ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

Частина III

Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Рого В. Л., Варга Я. В., Король І. І., Сливка-Тилищак Г. І.

Навчальний посібник
із курсу «Диференціальні рівняння»

**ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ
ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

Частина III

Ужгород – 2024

Навчальний посібник є методичною розробкою з основ теорії стійкості для звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем рівнянь першого порядку, а також диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) першого порядку. Розглянуто поняття стійкості розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, обґрунтовано основні критерії дослідження на стійкість, класифікацію особливих точок динамічних систем та їх фазові портрети. Для ДРЧП першого порядку викладено базові методи їх інтегрування, а також способи побудови розв'язку задачі Коші для лінійних та квазілінійних ДРЧП.

Поданий теоретичний матеріал широко ілюструється прикладами з детально викладеними розв'язаннями. Посібник містить також індивідуальні завдання для самостійної роботи.

Рецензенти:

Станжицький О. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Малик І. В. – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 7 березня 2024 року, протокол №3.

Рекомендовано до друку Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 22 лютого 2024 року, протокол №1.

§ 1 Теорія стійкості

1.1. Основні поняття та означення

Динамічні явища і процеси, що відбуваються в природі, дуже часто призводять до математичних моделей у вигляді задач Коші для систем диференціальних рівнянь. У математичній моделі початковий стан динамічної системи описується початковими умовами. Із практичних міркувань доцільно домагатися, щоб малі відхилення в початковому стані не мали суттєвого впливу на динамічний процес, тобто щоб за перебігу цього процесу система залишалася стійкою. Найбільш широко застосовну на практиці математичну теорію стійкості динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями та їх системами, розробив наприкінці XIX сторіччя видатний математик і механік О. М. Ляпунов (1857-1918).

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), & i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(t_0) = x_{i,0}, \end{cases}$$

тобто у векторній формі

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$f : B_{t_\infty X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, де $B_{t_\infty X} = I_\infty \times D$, $I_\infty = [t_0, \infty)$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.1 (про неперервну залежність розв'язку від початкових умов).

Нехай для правої частини системи (1.1) в області $B_{t,X} = I_a \times D$, де $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$, $D = \{X \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_{i,0}| \leq b\}$ виконуються умови:

1) функція f неперервна, а отже, й обмежена: $|f_i(t, X)| \leq M$, $i = \overline{1, n}$ ($M = \text{const} > 0$);

$$2) \left| \frac{\partial f_i(t, X)}{\partial x_j} \right| \leq K, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (K = \text{const} > 0).$$

Тоді для «збуреної» задачі Коші

$$\dot{X} = f_i(t, X), \quad X(\tilde{t}_0) = \tilde{X}_0$$

існує єдиний розв'язок $X = X(t, \tilde{t}_0, \tilde{X}_0)$ на інтервалі $I_{\frac{\alpha}{2}-\omega} = \left[t_0 - \left(\frac{\alpha}{2} - \omega \right), t_0 + \left(\frac{\alpha}{2} - \omega \right) \right]$, де $\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$, $0 \leq \omega < \frac{\alpha}{4}$. Цей розв'язок є неперервною функцією початкових даних $\tilde{t}_0, \tilde{X}_0$, якщо

$$|\tilde{t}_0 - t_0| \leq \omega < \frac{\alpha}{4}, \quad |\tilde{x}_{i,0} - x_{i,0}| \leq \frac{b}{2}.$$

Окрім того, $X = X(t, \tilde{t}_0, \tilde{X}_0)$ відносно змінної t є рівномірно неперервною функцією початкових даних $\tilde{t}_0, \tilde{X}_0$.

Із Теорема 1.1 випливає, що на певному скінченному інтервалі розв'язок задачі Коші (1.1) $X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$ мало змінюється за малого збурення в початкових умовах. Однак така властивість ще не означає стійкості цього розв'язку. Із практичних міркувань доцільно вимагати, щоб розв'язок мало змінювався і на нескінченно великому інтервалі. Зрозуміло, що дослідження стійкості розв'язку має практичний зміст лише тоді, коли цей розв'язок існує на інтервалі I_∞ .

Означення 1.1 (стійкість за Ляпуновим). Розв'язок задачі Коші (1.1)

$$X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$$

називається **стійким за Ляпуновим**, якщо

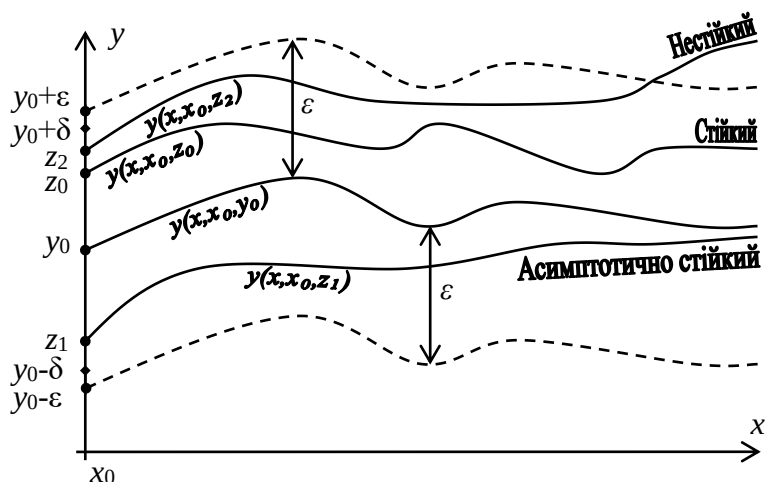
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \quad \|X_0 - \tilde{X}_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in I_\infty,$$

де $X = X(t, t_0, \tilde{X}_0) = \tilde{\varphi}(t)$ розв'язок системи (1.1) за початкових умов $X(t_0) = \tilde{X}_0$.

Якщо при цьому $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ не залежить від t_0 , тобто $\delta = \delta(\varepsilon)$, то розв'язок називається **рівномірно стійким**.

Якщо розв'язок не є стійким, то його називають **нестійким**.

Геометрична інтерпретація стійкості у випадку скалярного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ наведена на мал. 1.



Мал. 1. Геометрична інтерпретація стійкості розв'язків

Означення 1.2 (асимптотична стійкість). Розв'язок задачі Коші (1.1)

$$X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$$

називається **асимптотично стійким**, якщо

1) він є стійким за Ляпуновим;

$$2) \exists \delta_0 > 0 \quad \|X_0 - \tilde{X}_0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - X(t, t_0, \tilde{X}_0)\| = 0.$$

Означення 1.3 (поняття атрактивного розв'язку). Розв'язок $X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$ називається **атрактивним**, якщо

$$\forall t_0 \geq 0 \quad \exists \delta(t_0) > 0 \quad \|X_0 - \tilde{X}_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - X(t, t_0, \tilde{X}_0)\| = 0.$$

Якщо при цьому $\delta(t_0)$ не залежить від t_0 , то розв'язок називається **рівномірно атрактивним**. Розв'язок називається **глобально атрактивним**, якщо

$$\forall t_0 \geq 0 \quad \forall \tilde{X}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - X(t, t_0, \tilde{X}_0)\| = 0.$$

Зауваження 1.1 Дослідження стійкості нетривіального розв'язку задачі Коші (1.1) $X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t) \neq 0$ завжди можна за допомогою підстановки $Y = X - \varphi$ звести до дослідження стійкості тривіального розв'язку $Y(t, t_0, 0) \equiv 0$ системи

$$\dot{Y} = F(t, Y),$$

де $F(t, Y) = f(t, Y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$, $F(t, 0) = 0$.

Тому в нелінійному випадку достатньо проводити дослідження стійкості нульового розв'язку $X = X(t, 0, 0) = \varphi(t) \equiv 0$ задачі

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(t, X), \quad f(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ X(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2. Стійкість розв'язків лінійних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (1.3)$$

Дослідимо на стійкість розв'язки системи (1.3) $X(t, 0, 0) = \varphi(t) \equiv 0$ (тривіальний розв'язок) та $X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$. Зауважимо, що права частина системи (1.3) задовольняє умову $f(t, 0) = 0$, що вимагається в рівнянні (1.2).

Позначимо через $\Phi = \Phi(t)$ фундаментальну матрицю системи (1.3), нормовану в точці $t = t_0$, для якої виконується рівність $\Phi(t_0) = E$ (де E – одинична матриця).

Теорема 1.2 (необхідні й достатні умови стійкості). Довільний розв'язок $X(t, t_0, X_0)$ лінійної однорідної системи (1.3) за початкових умов $X(t_0) = X_0$ тоді й тільки тоді

1) **стійкий**, якщо фундаментальна матриця $\Phi(t)$ [$\Phi(t_0) = E$] є обмеженою на інтервалі $I_\infty = [t_0, \infty)$, тобто $\|\Phi(t)\| \leq M$, $t \geq t_0$;

2) **асимптотично стійкий**, якщо $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$ (нульова матриця);

3) **нестійкий**, якщо $\Phi(t)$ не обмежена зверху.

Зауваження 1.2 Зважаючи на те, що в Теоремі 1.2 йде мова про будь-який розв'язок $X(t, t_0, X_0)$, можна стверджувати, що розв'язки лінійної однорідної

системи всі одночасно є стійкими, асимптотично стійкими чи нестійкими. На підставі цього лінійну однорідну систему (1.2) загалом називають стійкою, асимптотично стійкою чи нестійкою. У випадку нелінійної системи це не має місця, оскільки може трапитися, що одні розв'язки є стійкими, а інші – нестійкими.

Теорема 1.3 (стійкість лінійної неоднорідної системи). Система

$$\dot{X} = A(t)X + f(t)$$

за будь-якого неперервного на інтервалі $[t_0, +\infty)$ вільного члена f стійка тоді й тільки тоді, коли є стійкою відповідна однорідна система (1.3).

1.3. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

Критерії асимптотичної стійкості

Теорема 1.4 (необхідні й достатні умови стійкості лінійної системи зі сталими коефіцієнтами). Усякий розв'язок $X(t, t_0, X_0)$ лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами n -го порядку

$$\dot{X} = AX \tag{1.4}$$

тоді й тільки тоді

1) стійкий, якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матриці A мають недодатні дійсні частини, і всі корені характеристичного рівняння кратності m_j із нульовою дійсною частиною ($\operatorname{Re} \lambda_j = 0$) є власними значеннями тієї ж кратності, тобто для них виконується рівність $n - \operatorname{rang}(A - \lambda_j E) = m_j$;

2) асимптотично стійкий, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A є від'ємними;

3) нестійкий, якщо хоча б одне з власних значень λ_j має додатну дійсну частину, або коли хоча б один корінь характеристичного рівняння кратності m_j із нульовою дійсною частиною ($\operatorname{Re} \lambda_j = 0$) є власним значенням меншої кратності, тобто $n - \operatorname{rang}(A - \lambda_j E) < m_j$.

На підставі Теорема 1.4 стійкість системи (1.4) визначається коренями характеристичного рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$, яке має вигляд

$$p_n(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (1.5)$$

Від'ємність дійсних частин коренів цього рівняння у випадку дійсних коефіцієнтів можна встановити без їх вирахування із застосуванням відповідних критеріїв. Необхідною умовою у всіх наведених нижче критеріях є додатність усіх коефіцієнтів полінома $p_n(\lambda)$: $a_i > 0$, $i = \overline{0, n}$. Зауважимо, що у випадку $n \leq 2$ ця умова є також і достатньою.

Теорема 1.5 (критерій Рауса-Гурвіца від'ємності дійсних частин полінома n -го степеня). Для того, щоб усі корені полінома n -го степеня

$$p_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

з додатними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб були додатними всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$H[p_n(\lambda)] = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

де $a_j = 0$, якщо $j > n$, тобто виконувалися нерівності

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0; \quad \dots \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n > 0.$$

Приклад 1.1. За допомогою критерію Рауса-Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 5y = 0. \quad (1.7)$$

Розв'язання. Зауважимо, що критерій Рауса-Гурвіца дає необхідні й достатні умови від'ємності дійсних частин усіх коренів полінома

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1.8)$$

з додатними коефіцієнтами. Якщо (1.8) – характеристичний поліном лінійного однорідного рівняння чи системи, то критерій Рауса-Гурвіца дає можливість зробити висновок щодо асимптотичної стійкості нульового розв’язку відповідного рівняння чи системи.

Щоб застосувати критерій Рауса-Гурвіца до рівняння (1.7), немає потреби виписувати характеристичний поліном (1.8), адже його коефіцієнти співпадають із коефіцієнтами самого рівняння. Маємо: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 5$. Усі ці числа додатні, отже, необхідна умова критерію виконується. Складаємо матрицю Гурвіца – квадратну матрицю розмірності $n \times n$ (у нашому випадку $n = 4$), у рядки якої коефіцієнти a_i , $i = \overline{0,4}$ вписуються в оберненому порядку, починаючи з пари a_1, a_0 , причому так, щоб на головній діагоналі стояли числа a_1, a_2, a_3, a_4 :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Критерій асимптотичної стійкості виконується, якщо всі головні діагональні мінори матриці H є строго додатними. Перевіримо виконання цієї умови:

$$\Delta_1 = 2 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

а це означає, що нульовий розв’язок рівняння (1.7) не є асимптотично стійким. Для визначення стійкості чи нестійкості розв’язку потрібно застосувати додаткові критерії.

Відповідь. Нульовий розв’язок рівняння (1.7) не є асимптотично стійким.

Приклад 1.2. За допомогою критерію Рауса-Гурвіца визначити, при яких значеннях параметрів a та b є асимптотично стійким нульовий розв'язок рівняння

$$y''' + ay'' + 2y' + by = 0. \quad (1.9)$$

Розв'язання. Аналогічно до Прикладу 1.1 маємо: $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = 2$, $a_3 = b$. Усі ці числа повинні бути додатними, отже, необхідна умова критерію виконується при $a > 0$, $b > 0$. Складаємо матрицю Гурвіца розмірності 3×3 за згаданими в попередньому прикладі правилами:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Критерій асимптотичної стійкості виконується, якщо всі головні діагональні мінори матриці H є строго додатними. Випишемо ці умови:

$$\Delta_1 = a > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2a - b > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b(2a - b) > 0.$$

Усі три нерівності справджуються за одночасного виконання умов $a > 0$, $b > 0$, $2a - b > 0$, які можна записати у вигляді однієї нерівності $0 < b < 2a$.

Відповідь. Нульовий розв'язок рівняння (1.9) є асимптотично стійким при значеннях параметрів a та b , для яких виконується нерівність $0 < b < 2a$.

Приклад 1.3. Із застосуванням критерію Рауса-Гурвіца дослідити на асимптотичну стійкість нульовий розв'язок системи другого порядку з параметром $\alpha = \text{const}$

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння для матриці A має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 3 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha + 1)\lambda + \alpha + 6 = 0.$$

Складаємо матрицю Гурвіца:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 6 \end{pmatrix}.$$

Критерій асимптотичної стійкості виконується, якщо всі головні діагональні мінори матриці H є строго додатними. Випишемо ці умови:

$$\Delta_1 = -\alpha - 1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\alpha - 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 6 \end{vmatrix} = -(\alpha^2 + 7\alpha + 6) > 0.$$

Останні нерівності справджуються за одночасного виконання умов $\alpha < -1$, $\alpha^2 + 7\alpha + 6 < 0$, що має місце при $-6 < \alpha < -1$.

Відповідь. Нульовий розв'язок системи (1.10) є асимптотично стійким при $-6 < \alpha < -1$.

Теорема 1.6 (критерій Льєнара-Шипара від'ємності дійсних частин полінома n -го степеня). Для того, щоб усі корені полінома n -го степеня $p_n(\lambda)$ з додатними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб для головних діагональних мінорів матриці (1.6) виконувалися нерівності

$$\Delta_n > 0; \quad \Delta_{n-3} > 0; \quad \Delta_{n-5} > 0, \quad \dots$$

Умови Льєнара-Шипара рівносильні умовам Рауса-Гурвіца, але зручніші, тому що містять менше детермінантів.

Теорема 1.7 (критерій Михайлова від'ємності дійсних частин полінома n -го степеня). Для того, щоб усі корені полінома n -го степеня $p_n(\lambda)$ з додатними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб на комплексній площині точка $p(i\omega)$ за зміни ω від 0 до $+\infty$ не проходила через початок координат і зробила поворот навколо нього на кут $n\pi/2$ в додатному напрямі.

Інше (еквівалентне) формулювання критерію Михайлова: необхідно й достатньо, щоб $a_n a_{n-1} > 0$ і щоб усі корені многочленів

$$q(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \dots, \quad r(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \dots$$

були додатними, різними і чергувалися, починаючи з кореня ξ_1 , тобто

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots$$

Принагідно зауважимо, що при $\lambda = i\omega$ $p(\lambda) = q(\omega^2) + i\omega r(\omega^2)$.

Зауваження 1.3 Якщо в Теоремах 1.5-1.7 $p_n(\lambda)$ – характеристичний поліном матриці A із (1.5), то ці твердження можна розглядати як критерії асимптотичної стійкості системи (1.4) зі сталими коефіцієнтами.

1.4. Стійкість за першим наближенням

Повернемося до дослідження стійкості тривіального розв'язку $X = X(t, 0, 0) \equiv 0$ нелінійної задачі (1.1). Припустимо, що вільний член рівняння подається у вигляді

$$f(t, X) = BX + \Psi(t, X), \quad (1.11)$$

де $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ стала матриця, $\Psi: \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ неперервна функція, і для залишкового члена справджується рівність

$$\lim_{\|X\| \rightarrow 0} \frac{\|\Psi(t, X)\|}{\|X\|} = 0. \quad (1.12)$$

Зауважимо: якщо для $\Psi(t, X)$ справджуються умови $\Psi(t, 0) = 0$ і $\frac{\partial \Psi(t, 0)}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$, то (1.12) завжди виконується. Вигляд (1.11) для функції $f(t, X)$ можна отримати, наприклад, за формулами Тейлора в околі вектора $X = 0$.

Означення 1.4 (перше наближення для нелінійної системи). Першим наближенням для нелінійної системи

$$\dot{X} = f(t, X) = BX + \Psi(t, X) \quad (1.13)$$

є лінійна система диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = BX. \quad (1.14)$$

За виконання певних умов поведінка розв'язків систем (1.13) і (1.14) в околі вектора $X = 0$ є подібною.

Теорема 1.8 (Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням).

Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то за виконання (1.12) нульовий розв'язок $X = 0$ системи (1.13) асимптотично стійкий. Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину, то за виконання (1.12) нульовий розв'язок системи (1.13) є нестійким.

Зауваження 1.4 Якщо дійсна частина хоча б одного власного значення матриці B , що фігурує в нелінійній системі (1.13), рівна нулеві, а інші від'ємні, то нульовий розв'язок системи (1.13) може бути як стійким, так і нестійким, тобто перше наближення не вирішує стійкості нелінійної системи.

Приклад 1.4. Проілюструємо алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку за першим наближенням на прикладі нелінійної системи третього порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z} = P(x, y, z), \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x + y) = Q(x, y, z), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x) = R(x, y, z). \end{cases} \quad (1.15)$$

Побудуємо систему першого наближення (1.14). Розклад (1.11) для вільних членів можна отримати за формулами Тейлора. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= e^x, & \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial P}{\partial z} &= 3e^{-3x}; \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -3\cos(x + y), & \frac{\partial Q}{\partial y} &= -3\cos(x + y), & \frac{\partial Q}{\partial z} &= 4; \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= -\frac{3}{1 + z - 3x}, & \frac{\partial R}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{1}{1 + z - 3x}. \end{aligned}$$

Тоді в околі нульового розв'язку отримаємо систему (1.13) у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot x + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot y + \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot z + \psi_1(x, y, z), \\ \dot{y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot y + \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot z + \psi_2(x, y, z), \\ \dot{z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot x + \frac{\partial R}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot y + \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \cdot z + \psi_3(x, y, z), \end{cases}$$

Вирахувавши коефіцієнти, запишемо систему першого наближення (1.14):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці B рівні $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i$. Комплексні власні значення мають додатні дійсні частини, отже, за Теоремою 1.8 нульовий розв'язок системи (1.15) є нестійким.

Приклад 1.5. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь із параметром $a = \text{const}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1 - 4y). \end{cases} \quad (1.16)$$

Розв'язання. Очевидно, що точка фазової площини $(x, y) = (0, 0)$ є розв'язком системи (1.16). Щоб дослідити цей розв'язок на стійкість, побудуємо для нелінійної системи (1.16) систему першого наближення шляхом виділення лінійної частини з функцій $P(x, y) = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}$ та $Q(x, y) = \sin ax + \ln(1 - 4y)$ в околі точки $(0, 0)$ за формулою Тейлора. Маємо:

$$P(x, y) = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y + \psi_1(x, y) = -2x - y + \psi_1(x, y),$$

$$Q(x, y) = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y + \psi_2(x, y) = ax - 4y + \psi_2(x, y),$$

де функції $\psi_1(x, y)$ і $\psi_2(x, y)$ рівні $O(x^2 + y^2)$, а отже, задовольняють умови теореми Ляпунова, згідно з якою висновку про стійкість нульового розв'язку системи (1.16) можна дійти шляхом дослідження системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = ax - 4y. \end{cases} \quad (1.17)$$

Лінійна однорідна система (1.17) зі сталими коефіцієнтами задається матрицею $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні значення цієї матриці:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}$.

При $a > 1$ корені комплексні, причому $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -3 < 0$, а при $-8 < a \leq 1$ корені дійсні й від'ємні. Отже, згідно з теоремою Ляпунова у цих випадках нульовий розв'язок системи (1.16) асимптотично стійкий.

При $a < -8$ один із коренів додатний, а тому нульовий розв'язок є нестійким.

При $a = -8$ маємо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$. У цьому випадку питання про стійкість не вирішується з застосуванням теореми Ляпунова.

Відповідь. Нульовий розв'язок системи (1.16) асимптотично стійкий при $a > -8$, і нестійкий при $a < -8$.

Приклад 1.6. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - \ln(1+y) + \sin x, \\ \dot{y} = e^x + \sin(x+y) - \cos^2 y. \end{cases} \quad (1.18)$$

Розв'язання. Очевидно, що точка фазової площини $(x, y) = (0, 0)$ є розв'язком системи (1.18). Щоб дослідити цей розв'язок на стійкість, побудуємо для нелінійної системи (1.18) систему першого наближення шляхом виділення лінійної частини з функцій $P(x, y) = 2x - \ln(1+y) + \sin x$ та $Q(x, y) = e^x + \sin(x+y) - \cos^2 y$ в околі точки $(0, 0)$ за формулою Тейлора. Аналогічно до Прикладу 1.5 маємо:

$$P(x, y) = (2 + \cos x)|_{(0,0)} \cdot x - (1+y)^{-1}|_{(0,0)} \cdot y + \psi_1(x, y) = 3x - y + \psi_1(x, y),$$

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= [e^x + \cos(x+y)]|_{(0,0)} \cdot x + [\cos(x+y) + 2\sin 2y]|_{(0,0)} \cdot y + \psi_2(x, y) = \\ &= 2x + y + \psi_2(x, y), \end{aligned}$$

де функції $\psi_1(x, y)$ і $\psi_2(x, y)$ рівні $O(x^2 + y^2)$, а отже, задовольняють умови теореми Ляпунова. Звідси отримуємо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases}$$

яка задається матрицею $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні значення цієї матриці:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Оскільки $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 2 > 0$, то згідно з теоремою Ляпунова нульовий розв'язок системи (1.18) є нестійким.

Відповідь. Нульовий розв'язок системи (1.18) нестійкий.

1.5. Метод функцій Ляпунова

До цього часу для дослідження стійкості ми використовували розв'язки систем диференціальних рівнянь. Сукупність таких методів прийнято називати першим методом Ляпунова. Натомість другий (прямий) метод Ляпунова не вимагає відшукування розв'язків для дослідження на стійкість, зате використовує властивості побудованої певним чином скалярної функції багатьох змінних

Означення 1.5 (поняття знаковизначеної функції). Розглянемо скалярну функцію $V: \mathbb{R}_0^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$, де $D \subset \mathbb{R}^n$ відкрита, зв'язна область, $0 \in D$ і V неперервно диференційовна, $V \in C^1$, а також $V(t, 0) = 0$ для довільного $t \in \mathbb{R}_0^+ = (0, +\infty)$.

Функцію V назвемо **додатно (від'ємно) напіввизначеною**, якщо $V(t, X) \geq 0$ (≤ 0) для $\forall (t, X) \in \mathbb{R}_0^+ \times D$.

Функцію V назвемо **додатно (від'ємно) визначеною**, якщо можна знайти таку функцію $W: D \rightarrow \mathbb{R}$, $W \in C$, що для $\forall (t, X) \in \mathbb{R}_0^+ \times D$, $X \neq 0$ $V(t, X) \geq W(X) > 0$ [$V(t, X) \leq -W(X) < 0$] і $V(t, 0) = W(0) = 0$, а також $W(X) = 0$ і $V(t, X) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $X = 0$.

Наприклад: функція $V(t, X) = (-2 + \sin t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ – від’ємно визначена в області $t \in \mathbb{R}_0^+$, $X \in D \subset \mathbb{R}^3$ ($0 \in D$), для неї $W(X) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$; функція $V(t, X) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ – додатно напіввизначена в просторі $\mathbb{R}^3$; функція $V(t, X) = \sin t \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ – знакозмінна (не належить до знаковизначених).

З Означення 1.5 випливає, що для будь-якого фіксованого $t \geq t_0 > 0$ у точці $X = 0$ додатно визначена функція V має абсолютний мінімум, тоді як від’ємно визначена функція V має абсолютний максимум.

Означення 1.6 (похідна скалярної функції за системою диференціальних рівнянь). Похідною неперервно-диференційовної скалярної функції $V: \mathbb{R}_0^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ за системою диференціальних рівнянь (1.2) будемо називати наступну функцію:

$$V'_{(1.2)}(t, X) := \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(t, X),$$

де $f_j(t, X)$, $j = \overline{1, n}$ – компоненти вектор-функції $f(t, X)$.

Означення 1.7 (поняття функції Ляпунова). Неперервно-диференційовну функцію $V: \mathbb{R}_0^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ назовемо **функцією Ляпунова** системи (1.2), якщо V додатно (від’ємно) визначена, а її похідна за згаданою системою $V'_{(1.2)}(t, X)$ від’ємно (додатно) напіввизначена.

Із Означення 1.7 можна витлумачити, що V і $V'_{(1.2)}$ – функції, протилежні за знаковизначеністю та відповідно напіввизначеністю.

Відомі наступні критерії стійкості.

Теорема 1.9 (перша теорема Ляпунова про стійкість). Якщо для нелінійної системи (1.2) існує функція Ляпунова, то її нульовий розв’язок $X = 0$ стійкий.

Теорема 1.10 (друга теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість). Якщо для системи (1.17) існує додатно (від’ємно) визначена функція Ляпунова, причому така, що при $X \rightarrow 0$ рівномірно прямує до нуля за змінною t , тобто

$\lim_{X \rightarrow 0} V(t, X) = 0$, а її похідна за системою (1.17) від'ємно (додатно) визначена, тоді

нульовий розв'язок $X = 0$ системи (1.17) асимптотично стійкий.

Теорема 1.11 (третья теорема Ляпунова про нестійкість). Якщо для системи (1.17) можна побудувати таку векторно-скалярну функцію $V(t, X)$ похідна якої за заданою системою $V'_{(1.2)}$ додатно (від'ємно) визначена, однак функція $V(t, X)$ не є напіввизначеною з протилежним знаком, тоді нульовий розв'язок $X = 0$ згаданої системи нестійкий.

Теорема 1.12 (Четаєва). Нехай система (1.13) має нульовий розв'язок, і в деякій області $D \subset \mathbb{R}^n$ існує диференційовна функція $V(x_1, \dots, x_n)$ така, що

1) точка $X = 0$ належить границі області D ;

2) $V = 0$ на границі області D при $\|X\| < \varepsilon_0$;

3) при $t > t_0$ в області D маємо: $V > 0$, $V'_{(1.13)}(X) \geq W(X) > 0$, де $W(X)$

неперервна функція.

Тоді нульовий розв'язок системи (1.13) нестійкий.

Приклад 1.7. Проілюструємо застосування наведених критеріїв на прикладі нелінійної системи з параметром $\alpha = \text{const}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^3 + \alpha x_1^5, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + \alpha x_2^5. \end{cases} \quad (1.19)$$

Введемо функцію Ляпунова у вигляді $V(t, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$. Очевидно, що ця функція додатно визначена. Її похідна за системою (1.19) рівна

$$V'_{(1.19)}(t, x_1, x_2) = 4x_1^3(-x_2^3 + \alpha x_1^5) + 4x_2^3(x_1^3 + \alpha x_2^5) = 4\alpha(x_1^8 + x_2^8). \quad (1.20)$$

Легко бачити, що функція (1.20) від'ємно визначена, коли $\alpha < 0$. Тоді за Теоремою 1.10 положення рівноваги $X = 0$ системи (1.19) асимптотично стійке.

Якщо $\alpha = 0$, то можемо вважати $V'_{(1.19)}(t, x_1, x_2)$ від'ємно напіввизначеною, а тоді за Теоремою 1.9 нульовий розв'язок системи (1.19) стійкий.

Якщо $\alpha > 0$, тоді $V'_{(1.19)}(t, x_1, x_2)$ додатно визначена, тож у цьому випадку за Теоремою 1.11 положення рівноваги $X = 0$ системи (1.19) нестійке.

1.6. Автономні системи диференціальних рівнянь

Одним із важливих частинних випадків нормальної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.21)$$

є так звана **автономна** (яку також називають **динамічною**) система, у якій функції в правій частині рівнянь не залежать явно від змінної t :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

або у векторному вигляді

$$\dot{X} = f(X), \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.22)$$

Зауважимо, що неавтономну систему (1.21) підвищенням її порядку на одиницю шляхом введення нової змінної $x_{n+1} = t$ завжди можна звести до автономної системи вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Припустимо, що в замкнутій, обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функція $f(X)$ задовольняє умову Ліпшиця. Відповідну до системи (1.21) область Ω називають **«фазовим простором»** системи.

Нехай функція

$$X = U(t), \quad I_t \subset \mathbb{R} \quad (1.23)$$

є розв'язком системи (1.22) на інтервалі I_t . Зрозуміло, що функція (1.23) – графік якої називають інтегральною кривою – визначає у фазовому просторі Ω деяку t -параметричну криву для довільного $t \in I_t$:

$$\{U(t)\} \in \Omega,$$

яку називають *траєкторією (фазовою кривою)* автономної системи. Отже, функція розв'язку (1.23) (інтегральна крива) належить необмеженому циліндру

$$G = \{(X, t) | X \in \Omega, t \in \mathbb{R}\}.$$

Таким чином, інтегральна крива належить прямому добутку осі t та фазового простору, тож фазова крива (траєкторія) є нічим іншим, як паралельною до осі t проекцією інтегральної кривої (1.23) на фазову площину. Подібним чином можна інтерпретувати фазовий простір і траєкторії неавтономної системи (1.21).

Наведемо деякі властивості, характерні тільки для автономних систем.

Лема 1.1 (властивість зсуву розв'язку). Якщо $X = U(t)$, $t \in I_t \subset \mathbb{R}$ розв'язок системи (1.22), то $X = V(t) = U(t + c)$, $t \in I_t \subset \mathbb{R}$ також буде розв'язком для будь-якого значення $c \in \mathbb{R}$.

Лема 1.2 (властивість перетину траєкторій). Якщо дві траєкторії автономної системи (6.2) $X = U(t)$, $t \in I_1 \subset \mathbb{R}$ і $X = V(t)$, $t \in I_2 \subset \mathbb{R}$ проходять через спільну точку $X^0 = U(t_1) = V(t_2)$ відповідно до значень аргументу t_1 і t_2 , то справджується наступна рівність:

$$V(t) = U(t + t_1 - t_2) \quad (1.24)$$

при всіх t , для яких є визначеними ліва і права частини (1.24).

Із цієї леми можна зробити висновок, що дві траєкторії автономної системи (1.22) або не перетинаються, або співпадають, тобто єдиність справедлива і для траєкторій також. Зауважимо, що у випадку загальної неавтономної системи (1.21) через будь-яку точку $(n + 1)$ -вимірного простору (t, X) проходить одна і тільки одна інтегральна крива. Однак при цьому траєкторії неавтономної системи в n -вимірному фазовому просторі можуть перетинатися.

Приклад 1.8. Проілюструємо алгоритм відшукування траєкторій на прикладі задачі Коші для неавтономної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2t, \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \quad (1.25)$$

із початковими умовами

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \quad (1.26)$$

Загальний розв'язок системи (1.25)

$$x_{13.}(t) = t^2 + C_1, \quad x_{23.}(x) = t + C_2.$$

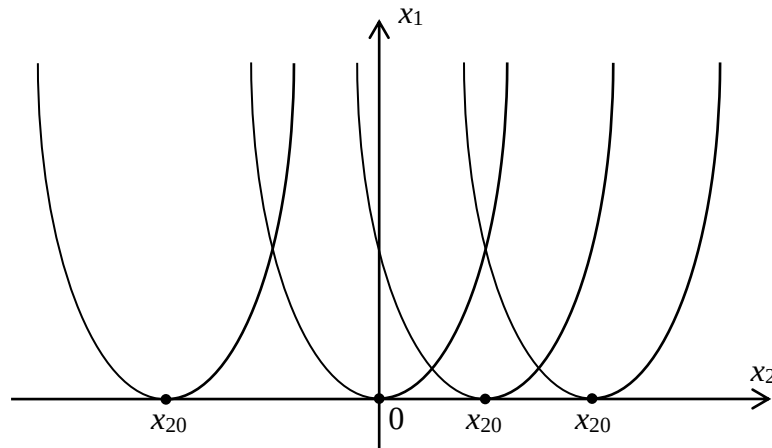
Звідси розв'язок, що відповідає початковим умовам (1.26):

$$x_1(t, x_{10}, x_{20}) = t^2 + x_{10}, \quad x_2(t, x_{10}, x_{20}) = t + x_{20}.$$

Виключивши з останніх рівностей параметр t , отримаємо рівняння траєкторій:

$$x_1(t, 0, x_{10}, x_{20}) = [x_2(t, 0, x_{10}, x_{20}) - x_{20}]^2 + x_{10}.$$

Наприклад, у випадку $x_{10} = 0$ рівняння траєкторій дає сім'ю парабол, зображених на мал. 2.



Мал. 2. Траєкторії системи (1.25)

Означення 1.8 (положення рівноваги автономної системи). *Положенням рівноваги*, або *стаціонарною точкою*, автономної системи диференціальних рівнянь (1.22) називається будь-який її сталий розв'язок $X = U(t) = X^* \in \Omega$.

За означенням 1.8 очевидно, що $X^* \in \Omega$ буде положенням рівноваги автономної системи (1.22) тоді й тільки тоді, коли

$$f(X^*) = 0. \quad (1.27)$$

Таким чином, положення рівноваги автономної системи (1.22) визначаються як розв'язки системи алгебраїчних (чи трансцендентних) рівнянь (1.27).

Означення 1.9 (поняття циклу). Нехай $X = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – T -періодичний розв’язок автономної системи (1.21) $[U(t) = U(t + T), t \in \mathbb{R}]$. Відповідну періодичному розв’язку замкнену траєкторію в фазовому просторі називають **циклом**.

Теорема 1.13 (типи траєкторій автономної системи диференціальних рівнянь). Для автономної системи диференціальних рівнянь (1.21) можуть існувати траєкторії тільки трьох типів:

- 1) траєкторії, що відповідають положенням рівноваги;
- 2) замкнуті траєкторії (цикли), що відповідають періодичним розв’язкам;
- 3) траєкторії без самоперетинів.

1.7. Класифікація положень рівноваги динамічних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь (ЛОСДР) зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

або у векторному вигляді

$$\dot{X} = AX. \quad (1.28)$$

Побудуємо фазові траєкторії системи (1.28). Для цього потрібно вирізнити кілька випадків, оскільки «фазовий портрет» суттєво залежить від власних значень матриці системи (1.28)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Очевидно, що тривіальний (нульовий) розв’язок $X(t) = \text{col}(0,0) = U(t) = 0$, $\forall t \in I_t$ завжди буде положенням рівноваги для системи (1.28), причому ця стаціонарна точка буде єдиною тоді й тільки тоді, коли матриця (1.29) є невинродженою, тобто $\det A \neq 0$. Зауважимо, що систему (1.28) можна подати у вигляді звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}, \quad (1.30)$$

Розв'язки рівняння (1.30) на фазовій площині $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ безпосередньо визначають траєкторії системи (1.28). Оскільки в точці $X = \text{col}(0,0)$ (1.30) є невизначеним, тому жодна з траєкторій автономної ЛОСДР (1.28) не проходить через початок координат.

Положення рівноваги системи (1.28) класифікуються залежно від власних значень матриці (1.28), а також визначника цієї матриці.

Випадок невинродженої матриці ($\det A \neq 0$).

1. Дійсні різні власні значення ($\lambda_{1,2} \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Без обмеження загальності надалі будемо припускати, що $|\lambda_2| > |\lambda_1|$.

Згідно з формулами методу Ейлера загальний розв'язок системи (1.28) можна записати у вигляді

$$X_{\text{з.}}(t) = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.31)$$

де h_1, h_2 дійсні власні вектори, що відповідають власним значенням λ_1, λ_2 . (h_1, h_2 утворюють загалом не ортогональний базис в $\mathbb{R}^2$).

Лінійне перетворення

$$X = s_1(t)h_1 + s_2(t)h_2,$$

вірніше лінійний дифеоморфізм

$$H : \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow X \in \mathbb{R}^2, \text{ col}(s_1, s_2) \rightarrow X = s_1(t)h_1 + s_2(t)h_2\}$$

розкладає автономну ЛОСДР на два взаємно незалежні рівняння

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = \lambda_1 s_1, \\ \dot{s}_2 = \lambda_2 s_2. \end{cases} \quad (1.32)$$

Загальний розв'язок системи (1.32)

$$s_{1\text{з.}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad s_{2\text{з.}}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Отже, на підставі (1.31) координати загального розв'язку (s_1, s_2) в системі координат із базисом, утвореним векторами h_1, h_2 , будуть наступними:

$$s_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad s_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.32)$$

що дає водночас t -параметричне рівняння фазових траєкторій. Виключивши з (1.33) параметр t , отримаємо рівняння так званих «узагальнених парабол»

$$s_2 = k s_1^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad k = c_2 \cdot c_1^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (1.34)$$

Після цього можемо детально описати фазову картину для ЛОСДР (1.28) залежно від знаків власних значень λ_1, λ_2 .

Стійкий вузол ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$). Якщо λ_1, λ_2 від'ємні і $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, то початок координат є **стійким вузлом** системи (1.28).

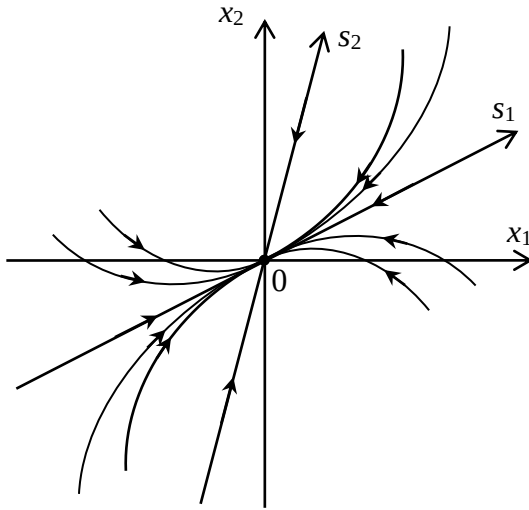
Зауважимо, що у випадку $c_1 = 0, c_2 = 0$ із (1.33) та (1.31) отримаємо положення рівноваги $X = (0,0)$, тоді як значенням $c_2 = 0, c_1 \neq 0$ та $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ відповідають осі s_1 та s_2 . Із (1.33) також очевидно, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s_2(t) = 0.$$

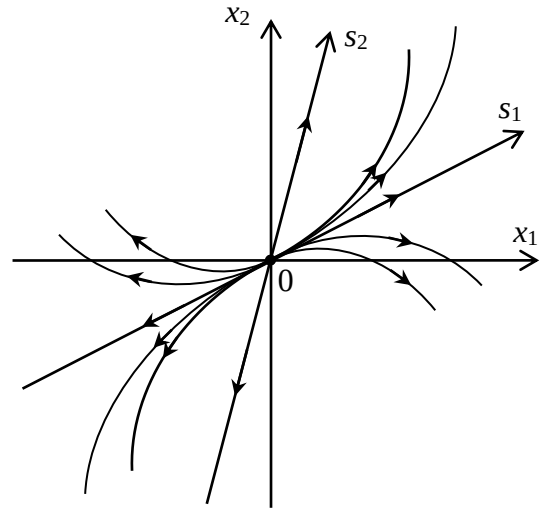
У цьому випадку початок координат є так званим стійким вузлом. За цього типу положення рівноваги рухома точка уздовж будь-якої траєкторії асимптотично наближається до початку координат. У цій точці траєкторії дотикаються до осі абсцис s_1 [тієї осі, яка в (1.33) відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню], оскільки з (1.33) і (1.34)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ds_2}{ds_1} = k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} s_1^{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right)}(t) = 0.$$

Загалом у випадку $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ і $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ сукупність фазових траєкторій ЛОСДР (1.28) являє собою сім'ю кривих типу парабол, до яких додаються ще п'ять особливих траєкторій, а саме – одне положення рівноваги і чотири координатні півосі s_1, s_2 (див. мал. 3). Рух уздовж будь-якої траєкторії відбувається з наближенням до початку координат (на малюнку показано стрілками).



Мал. 3. Стійкий вузол



Мал. 4. Нестійкий вузол

Нестійкий вузол ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$). Оскільки в цьому випадку на підставі (1.33)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |s_1(t)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |s_2(t)| = \infty,$$

то положення рівноваги ЛОСДР (1.28) $X = 0$ називають **нестійким вузлом**. Сукупність фазових траєкторій та їх розміщення в системі координат s_1, s_2 аналогічні до зображених на мал. 3, тільки напрям руху вздовж траєкторій змінюється на протилежний (див. мал. 4).

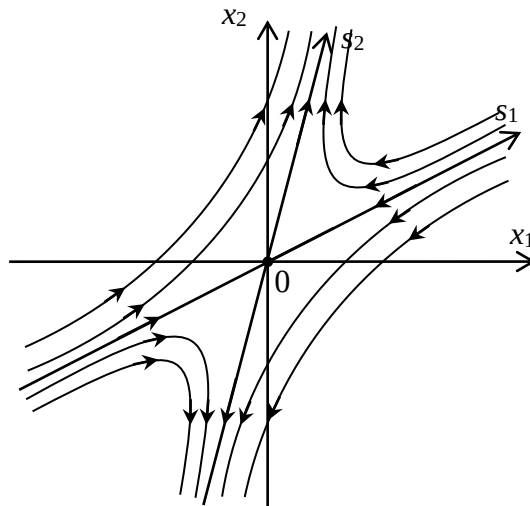
Нестійке сідло ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$). Якщо $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то із (1.34) отримуємо наступне рівняння траєкторій:

$$s_2 = k s_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = k s_1^{-q}, \quad q = \frac{\lambda_2}{|\lambda_1|},$$

тобто сім'ю так званих «узагальнених гіпербол». Із (1.33) очевидно, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |s_2(t)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |c_2 e^{\lambda_2 t}| = \infty. \quad (1.36)$$

Таким чином, згідно з (1.36) рух по осі s_1 напрямлений до початку координат, тоді як уздовж осі s_2 – від нього. Такий «портрет» фазових траєкторій називають **сідлом**, а сам початок координат (положення рівноваги) – **сідловою точкою**. У випадку сідла уздовж будь-якої траєкторії рухома точка наближається до початку координат поблизу осі s_1 і віддаляється поблизу осі s_2 , тобто маємо сім'ю кривих типу гіпербол. Крім того, існують ще п'ять траєкторій інших типів: положення рівноваги $(0,0)$ і координатні півосі s_1 , s_2 , які водночас є асимптотами сім'ї гіпербол (див. мал. 5). Ці асимптоти зазвичай називають також сепаратрисами. Зауважимо, що сідлова точка завжди нестійка, оскільки у випадку цього типу одне з власних значень завжди додатне.



Мал. 5. Сідло (завжди нестійке)

2. Випадок комплексних власних значень. Центр, фокус ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$).

Нехай власні значення матриці (1.29) комплексні, тобто

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

а

$$h_1 = \operatorname{Re} h_1 + i \operatorname{Im} h_1 = u_1 + i v_1 \quad (1.37)$$

відповідний власному значенню λ_1 комплексний власний вектор. Тоді згідно з алгоритмом методу Ейлера

$$X_3(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) = [c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t] \cdot u_1 + \\ + [-c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t] \cdot v_1. \quad (1.38)$$

Оскільки у (1.37) вектори u_1, v_1 лінійно незалежні, то в утвореній ними як базисом косокутній системі координат із (1.38) одержимо наступні координати загального розв'язку s_1, s_2 :

$$s_1(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \\ s_2(t) = -c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t. \quad (1.39)$$

Рівності (1.39) водночас задають t -параметричне рівняння фазових траєкторій.

Ввівши підстановки

$$c_1 = d \cos \varphi, \quad c_2 = d \sin \varphi, \quad |d| \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

і скориставшись позначенням полярної координати

$$\rho = |d| e^{\alpha t},$$

одержимо, що рівності (1.39) у «косокутній» полярній системі координат (ρ, t) відповідають кривій, що задається рівнянням

$$\rho(t) = |d| e^{\alpha t}. \quad (1.40)$$

Звідси випливає:

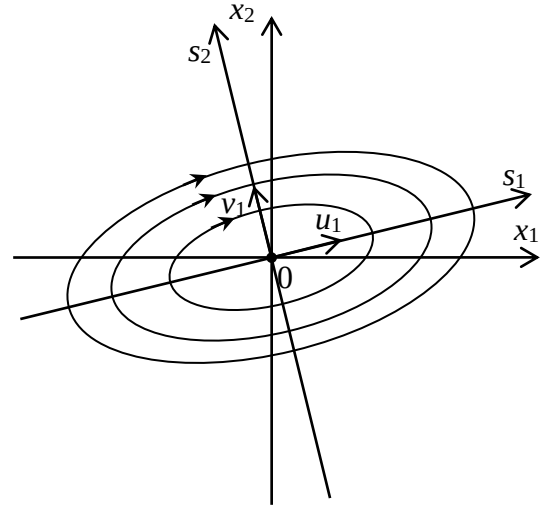
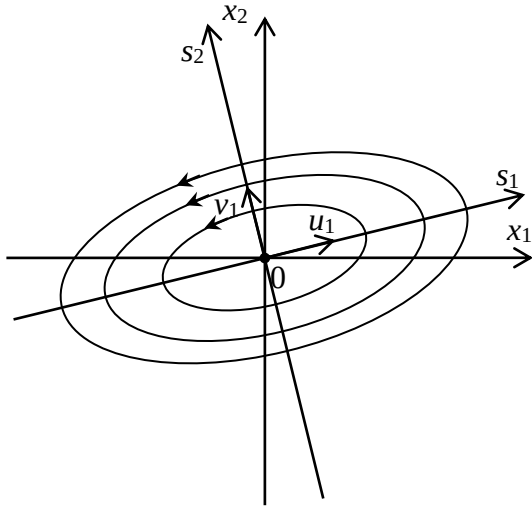
1) якщо $\alpha \neq 0$ і $d \neq 0$, тоді (1.40) задає рівняння логарифмічної спіралі;

2) якщо $\alpha = 0$ і $|d| > 0$, тоді (1.40) відповідає рівнянню еліпса $\rho(x) = |d|$

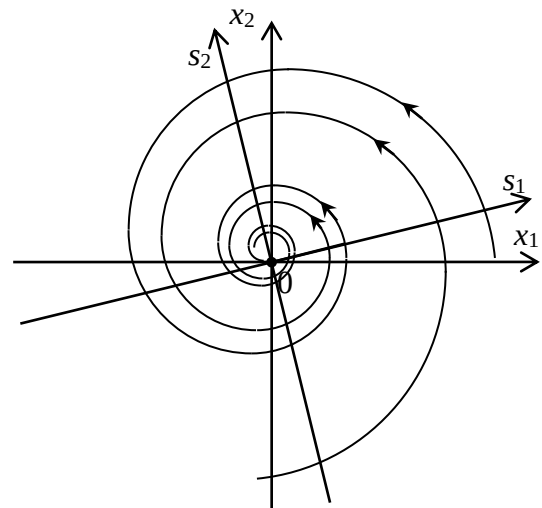
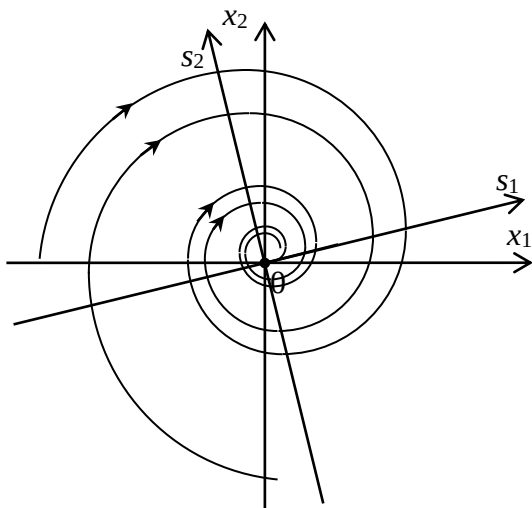
(оскільки система координат косокутна: див. малюнки 6 та 7, що відрізняються лише напрямом обходу інтегральних кривих);

3) у випадку $\alpha = 0, d = 0$ отримуємо початок координат – стаціонарну точку.

В останніх двох випадках (коли дійсна частина власних значень рівна нулеві, тобто характеристичне рівняння має чисто уявні корені) початок координат є стійким, але не асимптотично стійким, положенням рівноваги, який називають *центром*. У випадку центра замкнутим траєкторіям у вигляді еліпсів на фазовій площині відповідають періодичні інтегральні криві.



Мал. 6, 7. Центр (стійкий, але не асимптотично)



Мал. 8, 9. Асимптотичний фокус

Якщо $\alpha < 0$, $d \neq 0$, тоді з (1.40)

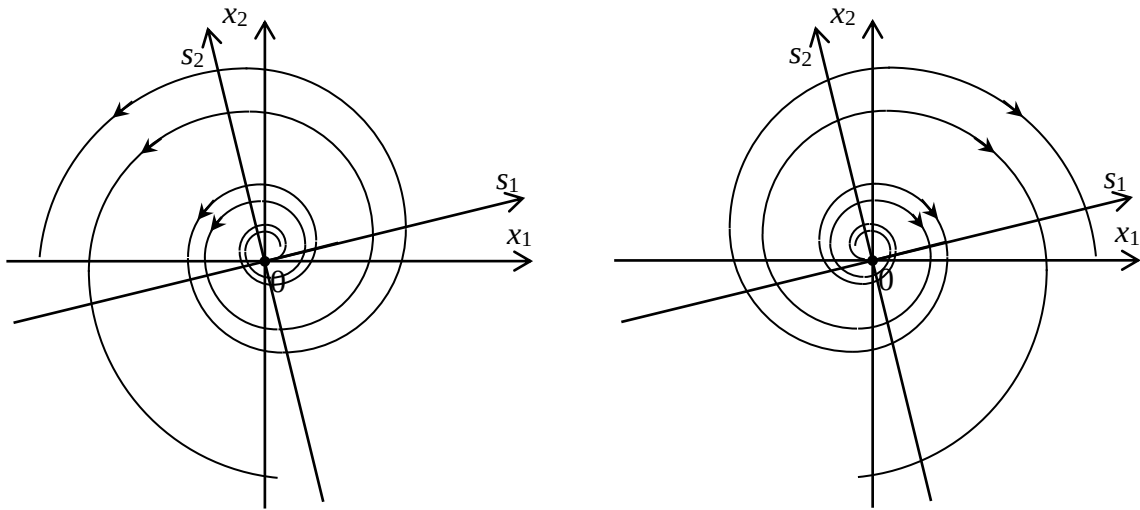
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |d| e^{\alpha t} = 0,$$

тобто з ростом t точка, що рухається на фазовій площині, наближається до початку координат, описуючи логарифмічну спіраль. У такому випадку положення рівноваги називають **асимптотичним фокусом** (див. мал. 8, 9). Напрямок руху по спіралі залежить від фазової швидкості $A\dot{X}$.

Якщо $\alpha > 0$, $d \neq 0$, тоді з (1.40)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |d| e^{\alpha t} = \infty,$$

і цього разу положення рівноваги називають **нестійким фокусом** (див. мал. 10, 11, що відрізняються лише напрямом руху по спіралях).



Мал. 10, 11. Нестійкий фокус

3. Випадок двократних дійсних коренів характеристичного рівняння.

Дикритичний вузол: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\text{rang}(A - \lambda E) = 0$. Цей випадок можливий тільки тоді, коли в (1.29)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Тоді будь-який вектор на площині буде власним для матриці A , а тому аналогічно до (1.31)

$$X_3(t) = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.42)$$

де h_1, h_2 – два лінійно незалежні власні вектори матриці (1.41). У системі координат із базисом h_1, h_2 із (1.42) одержимо t -параметричне рівняння фазових траєкторій:

$$s_1(t) = c_1 e^{\lambda t}, \quad s_2(t) = c_2 e^{\lambda t},$$

звідки

$$s_2(t) = \frac{c_2}{c_1} s_1(t), \quad s_1, s_2 \neq 0. \quad (1.43)$$

Півпрямі виду (1.43) можна отримати і з заданої системи (1.28), яка з матрицею (1.41) набуває вигляду

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

звідки

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}, \quad (1.44)$$

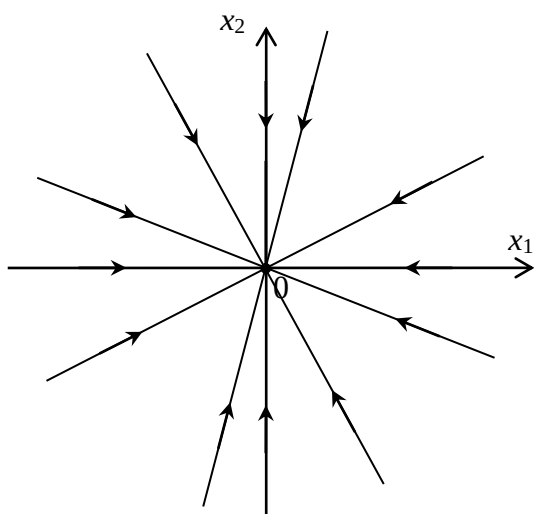
або

$$x_2 = kx_1, \quad k = \frac{c_2}{c_1}.$$

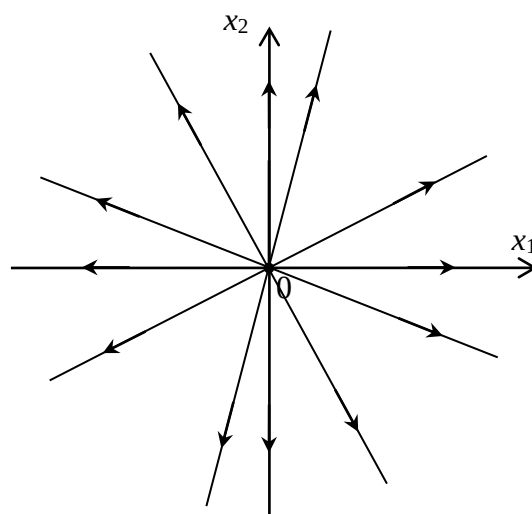
Отже, рух по півпрямим на фазовій площині на підставі (1.42) або (1.43) відбувається:

а) у напрямі до початку координат, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\text{rang}(A - \lambda E) = 0$ (**стійкий дикритичний вузол**, див. мал. 12), і

б) у протилежному напрямі, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, $\text{rang}(A - \lambda E) = 0$ (**нестійкий дикритичний вузол**, див. мал. 13).



Мал. 12. Стійкий
дикритичний вузол



Мал. 13. Нестійкий
дикритичний вузол

Вироджений вузол ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$). Тоді за правилами методу Ейлера можемо виписати відповідну до двократного кореня характеристичного рівняння λ фундаментальну систему частинних розв'язків, а також загальний розв'язок системи (1.28):

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} h_1, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t} (th_1 + h_2),$$

$$X_{\text{з.}}(t) = c_1 e^{\lambda t} h_1 + c_2 e^{\lambda t} (th_1 + h_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.45)$$

де h_1 відповідний власному значенню λ власний вектор, h_2 – приєднаний до нього вектор.

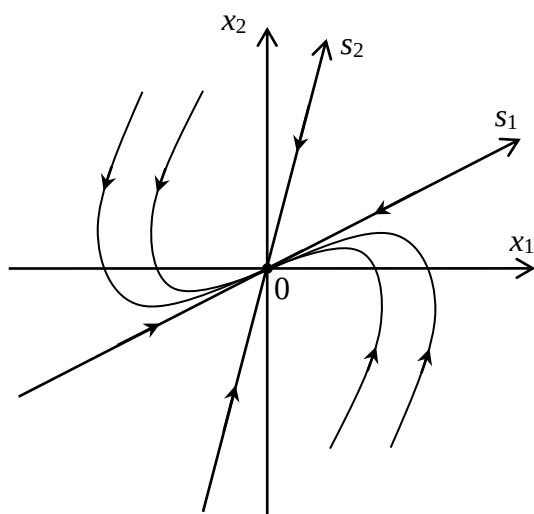
Оскільки вектори h_1 і h_2 лінійно незалежні, то в утвореній ними як базисом косокутній системі координат із (1.45) одержимо наступні координати загального розв'язку s_1, s_2 :

$$s_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, \quad s_2(t) = c_2 e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.46)$$

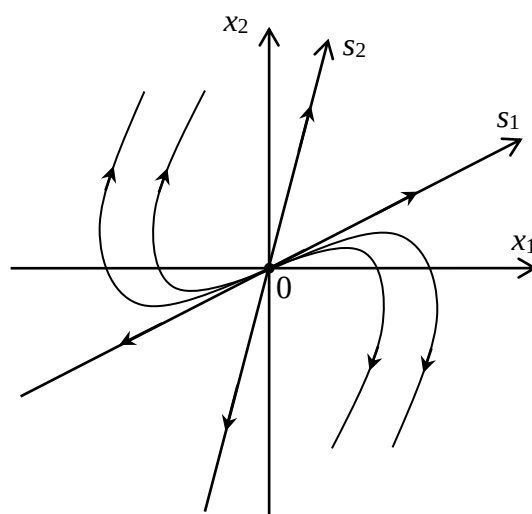
Із (1.46) отримуємо «фазові портрети», зображені на мал. 14, 15.

Якщо $\lambda < 0$, $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$, тоді положення рівноваги називають **стійким виродженим вузлом** (див. мал. 14).

Якщо $\lambda > 0$, $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$, то положення рівноваги називають **нестійким виродженим вузлом** (див. мал. 15).



Мал. 14. Стійкий
вироджений вузол



Мал. 15. Нестійкий
вироджений вузол

Отже, якщо $\det A \neq 0$, тоді для системи (1.28) на фазовій площині можуть існувати 13 типів фазових картин (див. малюнки 3-15).

Дослідимо тепер випадок виродженої матриці, коли $\det A = 0$.

Випадок виродженої матриці ($\det A = 0$).

Пряма положень рівноваги ($\det A = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ і $\lambda_2 = 0$). У цьому випадку за правилами методу Ейлера загальний розв'язок системи (1.28) має вигляд

$$X_{\text{з.}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 h_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

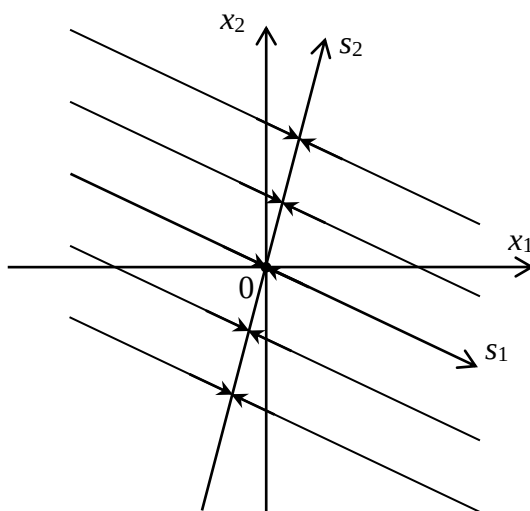
координати якого у системі координат із базисом h_1, h_2

$$s_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad s_2(t) = c_2. \quad (1.47)$$

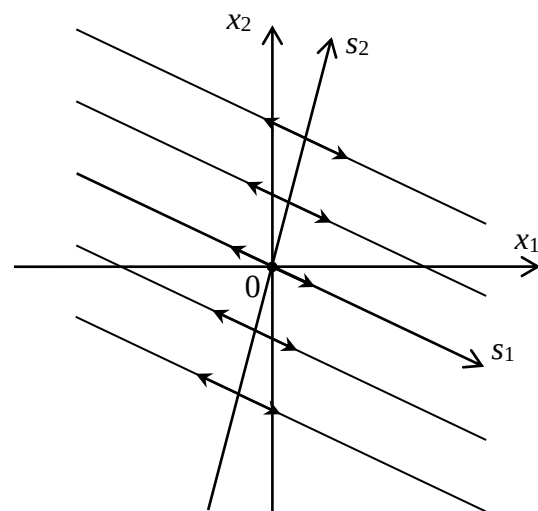
Із (1.47) випливає, що положеннями рівноваги будуть усі точки прямої $s_1 = 0$ ($c_1 = 0$, c_2 довільна стала), тобто початок координат є неізольованою особливою точкою, а траєкторії задаються рівностями

$$s_2 = c_2, \quad s_1 \neq 0,$$

а отже, в цьому випадку траєкторіями будуть півпрямі, напрям руху по яких визначається знаком ненульового власного значення λ_1 (див. мал. 16, 17).



Мал. 16. $s_1 = 0$ – стійка пряма
положень рівноваги, $\lambda_1 < 0$

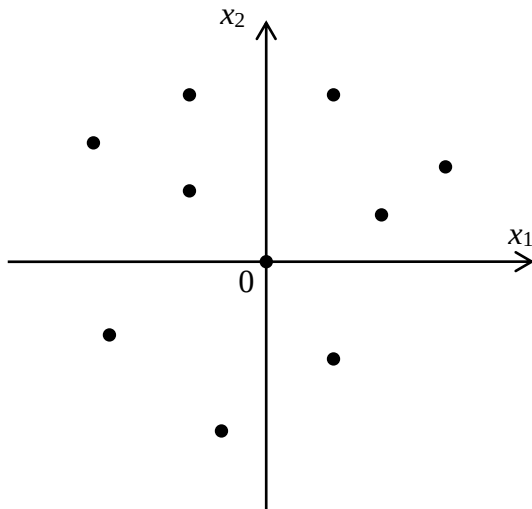


Мал. 17. $s_1 = 0$ – нестійка пряма
положень рівноваги, $\lambda_1 > 0$

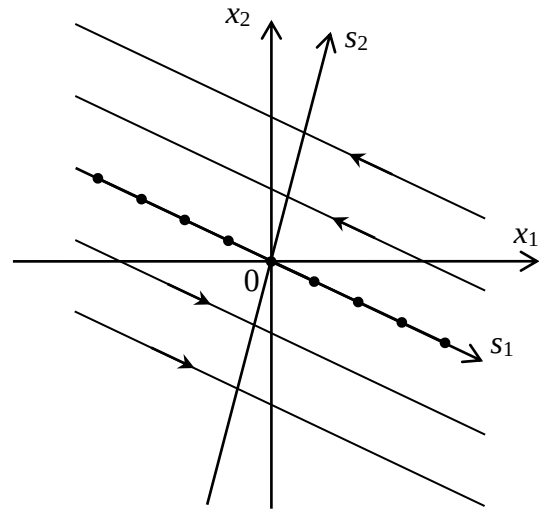
Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і матриця A складається з самих нулів, тоді положеннями рівноваги системи

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

будуть усі точки площини R^2 (див. мал. 18).



Мал. 18. Неізолювані
стаціонарні точки



Мал. 19. $s_2 = 0$ – пряма
положень рівноваги, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Якщо матриця A не тотожно нульова, і при цьому $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тоді за правилами методу Ейлера загальний розв'язок системи (1.28)

$$X_{\Sigma}(t) = c_1 h_1 + c_2 (t h_1 + h_2) = (c_1 + c_2 t) h_1 + c_2 h_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

де h_1 відповідний нульовому власному значенню власний вектор, h_2 – приєднаний до нього вектор.

Таким чином, у базисі h_1, h_2 координати загального розв'язку будуть такими:

$$s_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad s_2(t) = c_2.$$

Очевидно, що пряма $s_2 = 0$ є положенням рівноваги ЛОСДР (1.28), тобто початок координат знову є неізолюваною особливою точкою, і при цьому

траєкторії задаються прямими $s_2 = c$, напрям руху по яких показаний на мал. 19 (якщо $s_2 < 0$, то зліва направо, якщо $s_2 > 0$, то навпаки, справа наліво).

Таким чином, у випадку $\det A = 0$ можуть існувати тільки чотири типи фазових картин.

Наостанок, підсумовуючи сказане вище, дамо кілька практичних рекомендацій для побудови «фазових портретів» положень рівноваги для ЛОСДР (1.28).

Щоб накреслити траєкторії на фазовій площині у випадках сідла, вузла та виродженого вузла, слід найперше знайти ті розв'язки, які зображаються прямими, що проходять через стаціонарну точку. Ці прямі завжди напрямлені уздовж власних векторів матриці (1.29), складеної з коефіцієнтів заданої системи. У випадку вузла криві дотикаються до прямої, напрямленої уздовж власного вектора, що відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню.

У випадку стаціонарної точки типу фокус слід визначити напрям закручування траєкторій. Для цього потрібно, по-перше, дослідити стійкість цієї точки за знаком $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}$, і по-друге, визначити, в якому напрямі відбувається спіральний рух навколо особливої точки по траєкторіях. Для цього досить побудувати в якійсь точці (x_1, x_2) фазової площини вектор швидкості $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, що визначається з рівнянь системи (1.28).

Аналогічно досліджується напрям руху у випадку виродженого вузла.

Приклад 1.9. Визначити тип положення рівноваги заданої системи диференціальних рівнянь та побудувати його фазовий портрет:

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \quad (1.48)$$

Розв'язання. Особливою точкою системи (1.48), або положенням рівноваги динамічної системи, є точка $(0,0)$. Для визначення типу особливої точки знайдемо

власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ системи (1.48):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Корені дійсні, різні й одного знаку, причому обидва додатні. Отже, тип положення рівноваги – **нестійкий вузол**.

Для побудови фазового портрета положення рівноваги типу вузол для початку треба знайти дві фазові траєкторії, які зображаються прямими лініями, що проходять через особливу точку. Ці прямі завжди напрямлені уздовж відповідних знайденим власним значенням власних векторів. Визначимо ці вектори за алгоритмом методу Ейлера:

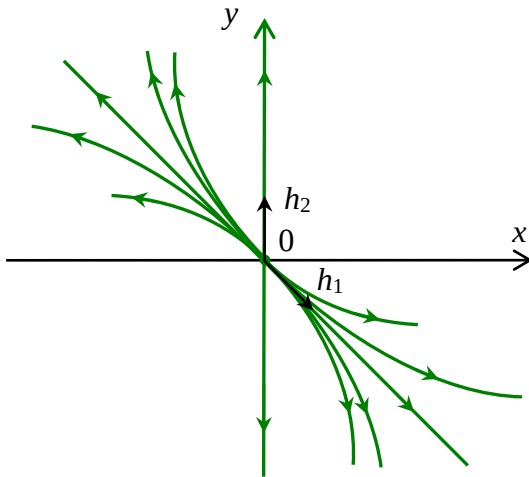
$$(A - \lambda_1 E)h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 E)h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

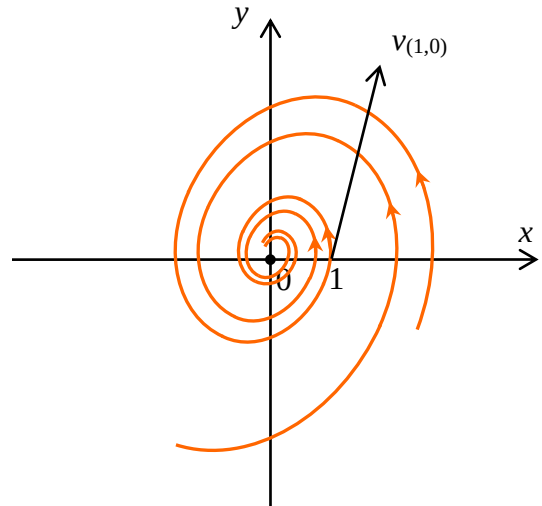
У випадку вузла маємо інтегральні криві типу парабол, які в особливій точці дотикаються до прямої, направленої уздовж власного вектора, що відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню, тобто числу $\lambda_1 = 1$, і перетинають іншу пряму, що відповідає другому власному значенню $\lambda_2 = 2$. Оскільки вузол нестійкий, то рух по траєкторіях відбувається в напрямі від положення рівноваги.

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки системи (1.48).

Відповідь. Положення рівноваги системи (1.48) – нестійкий вузол. Фазовий портрет зображений на мал. 20.



Мал. 20



Мал. 21

Приклад 1.10. Дослідити особливу точку $(0,0)$ заданого рівняння та побудувати фазовий портрет:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y}{x - 2y}. \quad (1.49)$$

Розв'язання. Рівнянню (1.49) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y, \end{cases} \quad (1.50)$$

що задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Корені комплексно спряжені, причому мають від'ємні дійсні частини. Отже, тип положення рівноваги – **асимптотичний фокус**.

Для визначення напрямку закручування траєкторій побудуємо вектор швидкості $v = (\dot{x}, \dot{y})$ у деякій точці фазової площини без початку координат (особливої точки), наприклад, у точці $(x, y) = (1, 0)$. На підставі (1.50) $v = (x - 2y, 4x - 3y)$. При значеннях $x = 1, y = 0$ отримуємо вектор $v_{(1,0)} = (1, 4)$.

Отже, росту t відповідає рух по траєкторіях проти годинникової стрілки. Оскільки дійсна частина коренів характеристичного рівняння $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -1 < 0$, то особлива точка асимптотично стійка, а тому з ростом t розв'язки необмежено наближаються до положення рівноваги. Отже, за руху проти годинникової стрілки інтегральні криві наближаються до початку координат.

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки рівняння (1.49).

Відповідь. Положення рівноваги рівняння (1.49) – асимптотичний фокус. Фазовий портрет зображений на мал. 21.

Приклад 1.11. Визначити тип особливої точки заданої системи диференціальних рівнянь та побудувати відповідний фазовий портрет:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = 1,5x - 3y. \end{cases} \quad (1.51)$$

Розв'язання. Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь

$$\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 1,5x - 3y = 0. \end{cases}$$

Остання система має безліч розв'язків вигляду $(2k, k)$, $k \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що система (1.51) має безліч особливих точок, геометричним місцем яких є пряма $x = 2y$.

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1,5 & -3 \end{pmatrix}$ системи (1.51):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1,5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

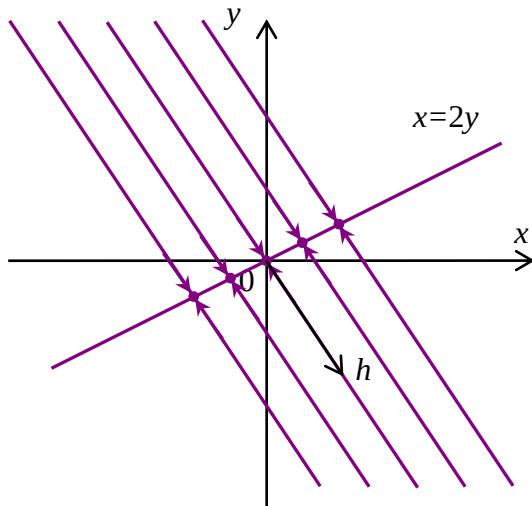
Звідси $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$. Один із коренів рівний нулеві, а другий – від'ємний. Отже, тип особливої точки – **стійка пряма положень рівноваги**. Оскільки ненульовий корінь $\lambda_2 < 0$, то росту t відповідає рух по траєкторіях у напрямі до

прямої положень рівноваги $x=2y$. Зауважимо, що ця пряма є тільки геометричним місцем особливих точок системи (1.51), а не розв'язком цієї системи. Траєкторії в цьому випадку зображаються прямими, паралельними до власного вектора h , що відповідає ненульовому власному значенню $\lambda_2 = -4$. Знайдемо цей вектор:

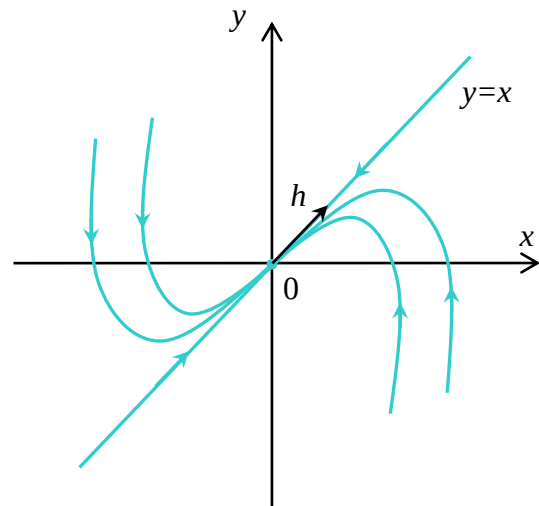
$$(A - \lambda_2 E)h = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки системи (1.51).

Відповідь. Тип особливої точки системи (1.51) – стійка пряма положень рівноваги. Фазовий портрет зображений на мал. 22.



Мал. 22



Мал. 23

Приклад 1.12. Дослідити особливу точку $(0,0)$ заданого рівняння та побудувати фазовий портрет:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 6y}{-4x - y}. \quad (1.52)$$

Розв'язання. Рівнянню (1.52) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y, \\ \dot{y} = x - 6y, \end{cases}$$

що задається матрицею $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$. Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ 1 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 5)^2 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = -5$. Маємо двократний від'ємний корінь $\lambda = -5$, причому матриця $A - \lambda E$ є ненульовою. Отже, тип положення рівноваги – **асимптотично стійкий вироджений вузол**.

Для побудови фазового портрета виродженого вузла найперше треба знайти фазову траєкторію, яка зображається прямою лінією, що проходить через особливу точку. Ця пряма завжди напрямлена уздовж відповідного знайденому власному значенню λ власного вектора. Визначимо цей вектор:

$$(A - \lambda E)h = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку виродженого вузла маємо інтегральні криві типу «півпарабол», які в особливій точці дотикаються до прямої, напрямленої уздовж власного вектора (тобто прямої $y = x$). Оскільки вироджений вузол стійкий, то рух по траєкторіях відбувається в напрямі до положення рівноваги.

Побудувавши вектори швидкості $v = (-4x - y, x - 6y)$ у різних точках фазової площини, за винятком особливої точки та точок прямої $y = x$, переконуємося, що «півпараболи» входять у положення рівноваги з першої координатної чверті в півплощині $y < x$ і з четвертої – у півплощині $y > x$.

Тепер ми маємо всі дані для схематичної побудови фазового портрета особливої точки рівняння (1.52).

Відповідь. Положення рівноваги рівняння (1.52) – асимптотично стійкий вироджений вузол. Фазовий портрет зображений на мал. 23.

1.8. Особливі точки нелінійних автономних систем

Особливою точкою автономної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.53)$$

де P, Q – неперервно-диференційовні функції, або рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (1.54)$$

називається точка (x_0, y_0) , в якій $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$.

Якщо знайдені особливі точки системи (1.53), то дослідження стійкості кожної з них окремо можна провести за першим наближенням.

Таким чином, для дослідження стійкості особливої точки системи (1.53) або рівняння (1.54) потрібно перенести початок координат у досліджувану особливу точку і розкласти функції P і Q в околі цієї точки за формулою Тейлора, обмежуючись членами першого порядку. Тоді система набуде вигляду (1.13), або конкретно в нашому випадку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + by_1 + \psi_1(x_1, y_1), \\ \dot{y}_1 = cx_1 + dy_1 + \psi_2(x_1, y_1), \end{cases} \quad (1.55)$$

де x_1, y_1 – нові координати (після переносу), a, b, c, d – сталі. Припустимо, що для деякого $\varepsilon > 0$ виконуються умови (1.12) у вигляді

$$\lim_{x_1, y_1 \rightarrow 0} \frac{\psi_i(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} = 0, \quad i=1,2,$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Ці умови очевидно виконуються (для будь-якого $\varepsilon < 1$), якщо функції P і Q в досліджуваній точці двічі диференційовні. Припустимо ще, що дійсні частини усіх власних значень матриці

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

відмінні від нуля. Тоді особлива точка системи (1.53) буде того ж типу, що й положення рівноваги системи першого наближення (1.14), яка отримується з

системи (1.55) шляхом відкидання залишкових членів, тобто має вигляд (зادля зручності запишемо її без індексів)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \quad (1.56)$$

і дослідження якої проводиться аналогічно до ЛОСДР (1.28).

Додамо, що кутові коефіцієнти напрямів, за якими траєкторії входять в особливу точку, для систем (1.53) і (1.56) ті самі [однак прямим $y = kx$ для системи (1.56) можуть відповідати криві для системи (1.53)], а у випадку фокуса – напрям закручування траєкторій той самий.

У тому випадку, коли для системи (1.53) особлива точка – центр, для системи (1.53) вона може бути фокусом або центром. Для наявності центра достатньо (але не необхідно), щоб траєкторії системи (1.53) мали вісь симетрії, що проходить через досліджувану точку. Вісь симетрії очевидно існує, коли рівняння вигляду (1.54), до якого можна звести систему (1.53), не змінюється після заміни x на $-x$ (або y на $-y$). Для наявності фокуса необхідно й достатньо, щоб нульовий розв'язок системи (1.53) був асимптотично стійким при $t \rightarrow +\infty$ або $t \rightarrow -\infty$. Дослідження на стійкість можна провести за допомогою функції Ляпунова. Однак зробити це нелегко, адже в розглядуваному випадку функцію Ляпунова часто доводиться брати у вигляді суми членів другого, третього й четвертого степенів відносно x, y .

Приклад 1.13. Знайти та дослідити особливі точки нелінійної автономної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + 3, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 10. \end{cases} \quad (1.57)$$

Розв'язання. Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь:

$$\begin{cases} P(x, y) \equiv xy + 3 = 0, \\ Q(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо чотири особливі точки системи (1.57): $M_1(-1,3)$, $M_2(-3,1)$, $M_3(1,-3)$, $M_4(3,-1)$. Проведемо дослідження стійкості кожної з отриманих особливих точок за першим наближенням.

1. $M_1(-1,3)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.57) систему першого наближення в околі цієї точки, користуючись формулою Тейлора. Маємо:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot x + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot y = 3x - y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(-1,3)} \cdot y = -2x + 6y.\end{aligned}\tag{1.58}$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ системи (1.58):}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 16 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$. Корені дійсні, різні й одного знаку, причому обидва додатні. Отже, тип особливої точки – **нестійкий вузол**.

2. $M_2(-3,1)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.57) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попереднього випадку. Маємо:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot x + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot y = x - 3y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(-3,1)} \cdot y = -6x + 2y.\end{aligned}\tag{1.59}$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ системи (1.59):}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 16 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2}$. Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло**. Сідло завжди є нестійким, оскільки у випадку цього типу один із коренів завжди додатний.

3. $M_3(1, -3)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.57) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попередніх випадків. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot y = -3x + y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,-3)} \cdot y = 2x - 6y. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ системи (1.60):}$$

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ 2 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 16 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$. Корені дійсні, різні й різних знаків, причому обидва від'ємні. Отже, тип особливої точки – **асимптотично стійкий вузол**.

4. $M_4(3, -1)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.57) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попередніх випадків. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot y = -x + 3y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(3,-1)} \cdot y = 6x - 2y. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ системи (1.61):}$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 6 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 16 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

Відповідь. Особливі точки системи (1.57): $(-1,3)$ – нестійкий вузол; $(-3,1)$, $(3,-1)$ – сідла; $(1,-3)$ – асимптотично стійкий вузол.

Приклад 1.14. Знайти та дослідити особливі точки нелінійної автономної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - x^3, \\ \dot{y} = -4x - 3y + 7y^5. \end{cases} \quad (1.62)$$

Розв’язання. Знайдемо особливі точки як розв’язки алгебраїчної системи рівнянь:

$$\begin{cases} P(x, y) \equiv -3x + 4y - x^3 = 0, \\ Q(x, y) \equiv -4x - 3y + 7y^5 = 0. \end{cases}$$

Очевидними розв’язками цієї системи є $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(-1,-1)$. Шляхом виключення змінних можна показати, що інших дійсних розв’язків система не має.

Проведемо дослідження стійкості кожної з отриманих особливих точок за першим наближенням.

1. $M_1(0,0)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.62) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = -3x + 4y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = -4x - 3y. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ системи (1.63):}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = -3 \pm 4i$. Корені комплексно спряжені з від'ємними дійсними частинами. Отже, тип особливої точки – **асимптотичний фокус**.

2. $M_2(1,1)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.62) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(1,1)} \cdot x + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(1,1)} \cdot y = -6x + 4y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(1,1)} \cdot x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(1,1)} \cdot y = -4x + 32y. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 32 \end{pmatrix} \text{ системи (1.64):}$$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ -4 & 32-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 26\lambda - 176 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = 13 \pm \sqrt{345}$. Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

3. $M_3(-1,-1)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.62) систему першого наближення в околі цієї точки аналогічно до попередніх випадків. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot x + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot y = -6x + 4y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(-1,-1)} \cdot y = -4x + 32y. \end{aligned}$$

Одержана система першого наближення аналогічна до (1.64). Тому, використовуючи результат попереднього дослідження, можемо стверджувати, що тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

Відповідь. Особливі точки системи (1.64): $(0,0)$ – асимптотичний фокус; $(1,1)$, $(-1,-1)$ – сідла.

Приклад 1.15. Дослідити особливі точки і накреслити на фазовій площині траєкторії нелінійної автономної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2xy, \\ \dot{y} = -4y + xy. \end{cases} \quad (1.65)$$

Розв'язання. Знайдемо особливі точки як розв'язки алгебраїчної системи рівнянь:

$$\begin{cases} P(x, y) \equiv 4x - 2xy = 0, \\ Q(x, y) \equiv -4y + xy = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є $M_1(0,0)$, $M_2(4,2)$. Проведемо дослідження стійкості кожної з отриманих особливих точок за першим наближенням.

1. $M_1(0,0)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.65) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = 4x, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(0,0)} \cdot y = -4y. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ системи (1.66):}$$

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 4) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$. Корені дійсні, різні й різних знаків. Отже, тип особливої точки – **сідло** (завжди нестійке).

Для побудови фазового портрета положення рівноваги типу сідло, як і у випадку вузла, найперше треба знайти дві фазові траєкторії, які зображаються прямими лініями, що проходять через особливу точку. Ці прямі завжди напрямлені уздовж відповідних знайденим власним значенням власних векторів. Визначимо ці вектори:

$$(A - \lambda_1 E)h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 E)h_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що прямими траєкторіями в фазовому портреті сідла є осі координат $y = 0$ та $x = 0$. Ці прямі будуть асимптотами інтегральних кривих, які у випадку сідла мають вигляд гіпербол. Оскільки $\lambda_1 = 4 > 0$, а $\lambda_2 = -4 < 0$, то рух по осі абсцис відбувається в напрямі від особливої точки, а по осі ординат – до особливої точки. Із цими напрямками узгоджується також і рух по вітках гіпербол.

2. $M_2(4,2)$. Побудуємо для нелінійної системи (1.65) систему першого наближення в околі цієї точки. Маємо:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot y = -8y, \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x,y)=(4,2)} \cdot y = 2x. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Для визначення типу особливої точки знайдемо власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ системи (1.67):}$$

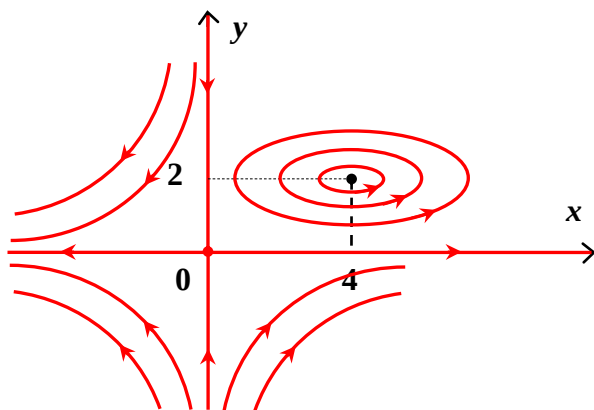
$$\begin{vmatrix} -\lambda & -8 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = \pm 4i$. Корені комплексно спряжені, причому чисто уявні. Отже, тип особливої точки – **центр** (завжди стійкий). Інтегральні криві у випадку центра є замкнутими траєкторіями у вигляді еліпсів із центром в особливій точці. Тепер, враховуючи результати дослідження особливих точок, можемо схематично зобразити траєкторії системи (1.65) на фазовій площині.

Зауважимо, що (1.65) є системою типу «хижак-жертва» (модель Лотки-Вольтерри), якими в екології описується співіснування двох біологічних популяцій з одним видом хижаків і одним видом жертв. У цій моделі $x(t)$ позначає число жертв, а $y(t)$ – число хижаків, що годуються жертвами. Замкнуті

траєкторії в першій чверті фазової площини ілюструють циклічність зміни чисельності популяцій.

Відповідь. Особливі точки системи (1.65): $(0,0)$ – сідло, $(4,2)$ – центр. Фазова картина схематично зображена на мал. 24.



Мал. 24

Завдання для індивідуальної роботи №7

Постановка завдань:

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи (за наявності в заданій системі параметрів a, b визначити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий).
2. За допомогою критерію Рауса-Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння (за наявності в заданому рівнянні параметрів a, b визначити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий).
3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет.
4. Знайти та дослідити особливі точки рівняння або системи.

Варіант 1

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$
2. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$
3. $y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$
4. $y' = \frac{2y^2 + x}{3x + 6}.$

Варіант 2

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$
2. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$
3. $y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$
4. $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$

Варіант 3

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$
2. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$
3. $y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$
4. $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$

Варіант 4

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$
2. $y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$
3. $y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$

$$4. y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 5

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0. \quad 3. y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

$$4. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 6

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0. \quad 3. y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

$$4. y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

Варіант 7

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0. \quad 3. y' = \frac{2x - y}{x - y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$$

Варіант 8

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0. \quad 3. y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 9

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0. \quad 3. y' = \frac{4y - 2x}{x + y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 10

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0. \quad 3. y' = \frac{y}{x}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$$

Варіант 11

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0. \quad 3. y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$$

Варіант 12

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Варіант 13

$$1. \begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

Варіант 14

$$1. \begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$$

Варіант 15

$$1. \begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 3y^{(4)} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \quad 4. y' = \frac{2y^2 + x}{3x + 6}.$$

Варіант 16

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 5y^{(4)} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases} \quad 4. y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

Варіант 17

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases} \quad 2. y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases} \quad 4. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 18

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases} \quad 2. y''' + ay'' + by' + 2y = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 19

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases} \quad 2. y''' + 3y'' + ay' + by = 0. \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$$

$$4. y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 20

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay}, \\ \dot{y} = \ln(1+9x+ay). \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0. \quad 3. y' = \frac{2x+y}{3x+4y}.$$

$$4. y' = \frac{y + \sqrt{1+2x^2}}{x+y+1}.$$

Варіант 21

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases} \quad 2. ay^{(4)} + y''' + y'' + y' + by = 0. \quad 3. y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$$

Варіант 22

$$1. \begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0. \quad 3. y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 23

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0. \quad 3. y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 24

$$1. \begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0. \quad 3. y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$$

Варіант 25

$$1. \begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases} \quad 2. y^{(4)} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0. \quad 3. y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$$

§ 2 Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

2.1. Системи в симетричній формі

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (СДР) у нормальній формі

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Визначивши dx із кожного з рівнянь СДР (2.1) і прирівнявши отримані значення, дістанемо еквівалентні до (2.1) співвідношення

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \quad (2.2)$$

Домноживши в (2.2) знаменники дробів на деякий коефіцієнт $\alpha(x, y_1, \dots, y_n) \neq 0$, ввівши нові змінні за формулами

$$z_1 = y_1, \quad \dots, \quad z_n = y_n, \quad z_{n+1} = x,$$

і позначивши

$$\begin{aligned} b_j(z_1, \dots, z_{n+1}) &= f_j(z_{n+1}, z_1, \dots, z_n) \cdot \alpha(z_{n+1}, z_1, \dots, z_n), \quad j = \overline{1, n}, \\ b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) &= 1 \cdot \alpha(z_{n+1}, z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

отримаємо так звану **симетричну форму** системи (2.1)

$$\frac{dz_1}{b_1(z_1, \dots, z_{n+1})} = \dots = \frac{dz_n}{b_n(z_1, \dots, z_{n+1})} = \frac{dz_{n+1}}{b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})}, \quad (2.3)$$

де немає явно визначених незалежних або залежних змінних.

Якщо потрібно перейти від симетричної форми (2.3) до системи в нормальному вигляді (2.1), то для цього в (2.3) одну зі змінних, наприклад, z_{n+1} , слід призначити незалежною змінною, і тоді з (2.3) отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dz_{n+1}} = \frac{b_1(z_1, \dots, z_{n+1})}{b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})}, \\ \vdots \\ \frac{dz_n}{dz_{n+1}} = \frac{b_n(z_1, \dots, z_{n+1})}{b_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})}. \end{cases}$$

Введемо поняття загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (2.1).

Означення 2.1 (поняття загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь). Система n довільних лінійно незалежних функцій, неперервно-диференційовних за змінною x , і залежних від n параметрів $c_1, c_2, \dots, c_n$ (сталих інтегрування)

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ \vdots \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \end{cases} \quad (2.4)$$

$\varphi_i : T_2 = I_x \times D_c \rightarrow \mathbb{R}$, $T_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $i = \overline{1, n}$ з обмеженою чи необмеженою областю визначення $(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \in I_x \times D_c = T_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, складає загальний розв'язок СДР (2.1) в області $T = I_x \times D_y$, якщо:

- 1) $(x, \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n)) \in T$ для $\forall (x, c_1, c_2, \dots, c_n) \in T_2$;
- 2) $\frac{\partial \varphi_i(x, c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial x} = f_i(x, \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n))$, $i = \overline{1, n}$;
- 3) для $\forall (x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in T$ система (2.4) однозначно розв'язна відносно $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ c_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ c_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.5)$$

Означення 2.2 (інтеграли та «перші інтеграли» СДР). Кожну з функцій $\psi_i : I_x \times D_y \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, що фігурують у правій частині рівнянь системи (2.5),

називають *інтегралом* СДР (2.1), а відповідне співвідношення $\psi_i = c_i$ називається *«першим інтегралом»* СДР (2.1).

Із (2.5) випливає: сукупність n лінійно незалежних «перших інтегралів» СДР (2.1) складає загальний інтеграл цієї системи.

Для відшукування «перших інтегралів» доцільно замінити СДР (2.1) еквівалентною системою в симетричній формі (2.2) або (2.3), і інтегрувати останню шляхом побудови лінійно незалежних інтегровних комбінацій.

Інтегровною комбінацією шуканих функцій та їх похідних називається будь-яке диференціальне рівняння, яке є наслідком системи і легко інтегрується. Побудувавши k лінійно незалежних інтегровних комбінацій для заданої СДР n -го порядку, можна понизити порядок останньої на k одиниць. Якщо вдалося побудувати n таких комбінацій, то з них можна отримати n лінійно незалежних «перших інтегралів» СДР, які складають загальний інтеграл у вигляді (2.5), і таким чином знаходження загального розв'язку (2.4) можна звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

Із метою побудови інтегровних комбінацій для систем у симетричній формі вигляду (2.2) або (2.3) найчастіше застосовують правило рівності дробів, яке задається співвідношеннями

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n}, \quad (2.6)$$

де $a_i, b_i, k_i = \text{const}, i = \overline{1, n}$.

Якщо побудовані кілька інтегровних комбінацій, то ними за потреби можна скористатися для відшукування наступних, шляхом виключення змінних із отриманих «перших інтегралів».

Приклад 2.1. Розв'язати нелінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = \frac{z}{x}, \\ z' = \frac{xz - (y - z)^2}{x^2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Розв'язання. Систему диференціальних рівнянь можна звести шляхом виключення змінних до одного рівняння (іноді до кількох рівнянь із однією невідомою функцією в кожному). Виключимо z із рівнянь (2.7). Із першого рівняння маємо $z = xy'$. Підстановка у друге рівняння після спрощення дає

$$x^3 y'' = -(y - xy')^2.$$

Таким чином, задана система рівнянь (2.7) зведена до одного рівняння другого порядку відносно невідомої функції $y(x)$. Це рівняння може бути розв'язане шляхом пониження порядку. Після того, як із цього рівняння знайдемо $y(x)$, другу невідому функцію $z(x)$ знаходимо з рівності $z = xy'$.

Зауважимо, що при розв'язуванні системи шляхом виключення змінних зазвичай отримується рівняння вищого порядку, тому в більшості випадків систему доцільніше розв'язувати шляхом відшукування інтегровних комбінацій. Для цього зручніше перейти від системи вигляду (2.7) до відповідної системи в симетричній формі.

Визначивши dx із обох рівнянь системи (2.7) і прирівнявши отримані співвідношення, дістанемо відповідну до (2.7) систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{1} = \frac{xdy}{z} = \frac{x^2 dz}{xz - (y - z)^2}. \quad (2.8)$$

Для розв'язання цієї системи, а отже, і системи (2.7), треба побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Першу з них знаходимо, скориставшись правилом рівності дробів:

$$\frac{dx}{1} = \frac{x^2 dy}{xz} = \frac{x^2 dz}{xz - (y - z)^2} = \frac{x^2 d(y - z)}{(y - z)^2},$$

звідси перша інтегровна комбінація

$$dx = \frac{x^2 d(y - z)}{(y - z)^2}. \quad (2.9)$$

Відокремивши змінні в (2.9), після інтегрування отримуємо:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{d(y - z)}{(y - z)^2} \Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y - z} + C_1,$$

тобто перший «перший інтеграл» системи (1.2) має вигляд

$$\frac{1}{y-z} - \frac{1}{x} = C_1, \quad (2.10)$$

де C_1 – довільна стала.

Рівність (2.10) дає змогу спростити відшукування другої інтегрованої комбінації. Дійсно, із (2.10) маємо:

$$y - z = \frac{x}{C_1 x + 1}. \quad (2.11)$$

Підставивши значення $y - z$ із (2.11) у друге з рівнянь системи (2.7), дістанемо:

$$z' = \frac{xz(C_1 x + 1)^2 - x^2}{x^2(C_1 x + 1)^2} \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{(C_1 x + 1)^2}.$$

Одержане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку відносно функції $z(x)$. Інтегруємо його за відомою формулою загального розв'язку:

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C_2 - \int e^{-\int \frac{dx}{x}} \frac{dx}{(C_1 x + 1)^2} \right) = x \left(C_2 - \int \frac{dx}{x(C_1 x + 1)^2} \right) = \\ &= x \left(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1| - \frac{1}{C_1 x + 1} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

де C_2 – довільна стала. Ця рівність дає другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно першого, і дозволяє визначити y як функцію змінної x із (2.11):

$$y = z + \frac{x}{C_1 x + 1} = x(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1|).$$

Відповідь. $y = x(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1|),$

$$z = x \left(C_2 - \ln |x| + \ln |C_1 x + 1| - \frac{1}{C_1 x + 1} \right).$$

Приклад 2.2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь, задану в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \quad (2.13)$$

Розв’язання. Перші два дробі утворюють інтегровну комбінацію

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

із якої після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл»

$$\frac{x}{y} = C_1. \quad (2.14)$$

Щоб знайти другу інтегровну комбінацію, скористаємося правилом рівності дробів. Із (2.13) маємо

$$\frac{ydx + xdy}{y \cdot xz + x \cdot yz} = \frac{dz}{-xy} \Rightarrow \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{-xy} \Rightarrow d(xy) = -2zdz.$$

Таким чином, другий «перший інтеграл» має вигляд

$$xy + z^2 = C_2. \quad (2.15)$$

Очевидно, що «перші інтеграли» (2.14) та (2.15) є незалежними. Їх сукупність дає загальний розв’язок системи (2.13) у неявному вигляді.

Зауваження 2.1 Для відшукування другої інтегровної комбінації можна також аналогічно до Прикладу 2.1 скористатися відомим «першим інтегралом» (2.14), який дає змогу виключити з системи (2.13) одне з невідомих, наприклад, x . Справді, із (2.14) маємо $x = C_1 y$. Підстановка у друге з рівнянь (2.13) дає

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1 y^2} \Rightarrow -C_1 y dy = z dz \Rightarrow z^2 = -C_1 y^2 + C_2.$$

Підставивши в останню рівність значення C_1 із (2.14), отримаємо той же «перший інтеграл» (2.15).

Визначивши з (2.14) та (2.15) y і z як функції змінної x , за потреби можна дістати загальний розв’язок системи (2.13) у явному вигляді.

Відповідь. $\frac{x}{y} = C_1, \quad xy + z^2 = C_2.$

Приклад 2.3. Знайти загальний розв’язок нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2 - t}{y}, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.16)$$

Розв'язання. Визначивши dt із обох рівнянь системи (2.16) і прирівнявши отримані співвідношення, перейдемо до відповідної системи в симетричній формі

$$\frac{dt}{1} = \frac{ydx}{x^2 - t} = \frac{dy}{-x}. \quad (2.17)$$

Для розв'язання цієї системи, а отже, і системи (2.16), треба побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Першу з них знаходимо, скориставшись правилом рівності дробів:

$$\frac{dt}{1} = \frac{ydx + xdy}{-t} \Rightarrow d(xy) = -tdt,$$

звідки після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл» системи (2.17)

$$2xy + t^2 = C_1. \quad (2.18)$$

Рівність (2.18) дає змогу спростити відшукування другої інтегровної комбінації. Дійсно, із (2.18) маємо:

$$x = \frac{C_1 - t^2}{2y}. \quad (2.19)$$

Підставивши значення x із (2.19) у друге з рівнянь системи (2.16), дістанемо:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{C_1 - t^2}{2y} \Rightarrow 2ydy = (t^2 - C_1)dt \Rightarrow y^2 = \frac{t^3}{3} - C_1t + C_2.$$

Замінивши в останній рівності сталу C_1 її значенням із (2.18), отримуємо другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно (2.18):

$$y^2 = \frac{t^3}{3} - (2xy + t^2) \cdot t + C_2 \Rightarrow y^2 + \frac{2t^3}{3} + 2txy = C_2.$$

Відповідь. $2xy + t^2 = C_1, y^2 + \frac{2t^3}{3} + 2txy = C_2.$

2.2. Основні поняття та означення теорії ДРЧП

Означення 2.3 (поняття диференціального рівняння з частинними похідними). Скалярна нетотожна рівність, яка пов'язує деякою функціональною залежністю незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$, невідому функцію цих змінних $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та її частинні похідні за цими змінними до певного порядку, називається **диференціальним рівнянням із частинними похідними** (ДРЧП).

Означення 2.4 (поняття порядку ДРЧП). ДРЧП називається **рівнянням m -го порядку**, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну m -го порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП m -го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

де $\sum_{i=1}^n k_i = m$, F – задана функція своїх аргументів, а

$$u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Серед диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) є такі класи рівнянь, а саме лінійні та квазілінійні рівняння першого порядку, розв'язки яких можна отримати шляхом розв'язування побудованих відповідним чином звичайних диференціальних рівнянь.

Означення 2.5 (поняття ДРЧП першого порядку). ДРЧП першого порядку для функції n змінних $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$ має загальний вигляд

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (2.20)$$

де $F: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ задана функція.

Рівняння вигляду

$$p_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (2.21)$$

називають **лінійним однорідним ДРЧП першого порядку**.

Рівняння вигляду

$$p_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = q(x_1, \dots, x_n, u) \quad (2.22)$$

називають **квазілінійним неоднорідним ДРЧП першого порядку**, де коефіцієнти $p_1, \dots, p_n$ – задані функції, неперервно-диференційовні в області визначення $(x_1, \dots, x_n, u) \in T \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Означення 2.6 (розв’язок ДРЧП першого порядку). Функція $u : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається розв’язком ДРЧП (2.22) в області D , якщо

- 1) $u(x_1, \dots, x_n)$ неперервно-диференційовна в області D ;
- 2) $(x_1, \dots, x_n, u) \in T$ для $\forall (x_1, \dots, x_n) \in D$;
- 3) $u(x_1, \dots, x_n)$ справджує рівняння (2.22) для $\forall (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Наприклад, для лінійного однорідного ДРЧП

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \quad (2.23)$$

функція $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + 2$ є розв’язком в області $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$,

тому що після підстановки її частинних похідних у (2.23) маємо

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 \frac{2x_1}{x_2^2} - x_2 \frac{2x_1^2 x_2}{x_2^4} + x_2 \frac{2x_2}{x_3^2} - x_3 \frac{2x_2^2 x_3}{x_3^4} \equiv 0;$$

тоді як функція $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_2 x_3$ не є розв’язком ДРЧП (2.23), оскільки в цьому випадку

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3 (x_1 + x_2) \neq 0.$$

Означення 2.7 (задача Коші для ДРЧП першого порядку). Задача Коші для ДРЧП першого порядку (2.20) полягає у знаходженні такого розв’язку

$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який справджує початкову умову $u(x_{1,0}, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, \dots, x_n)$, де φ – наперед задана функція.

Дамо геометричну інтерпретацію ДРЧП першого порядку на прикладі рівняння для функції двох змінних $z(x, y)$, яке має вигляд

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (2.24)$$

Постановка задачі Коші для ДРЧП (2.24): знайти такий розв'язок $z(x, y)$ ДРЧП (2.24), який справджує початкову умову $z(x_0, y) = \varphi(y)$ або $z(x, y_0) = \varphi(y_0)$.

Геометрична інтерпретація: ДРЧП (2.24) є співвідношенням, що пов'язує координати x, y, z деякої поверхні $z = z(x, y)$, яка називається **інтегральною поверхнею** ДРЧП (2.24), та кутові коефіцієнти дотичної площини до цієї поверхні. Початкова умова задає деяку просторову криву, через яку проходить інтегральна поверхня. Якщо через криву $z = \varphi(y)$ [або $z = \varphi(x)$] проходить нескінченна кількість інтегральних поверхонь, то таку криву називають **характеристикою** ДРЧП (2.24).

2.3. Лінійні однорідні ДРЧП першого порядку

Означення 2.8 (поняття характеристичної системи рівнянь). Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{p_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{p_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad (2.25)$$

яка у випадку $p_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ еквівалентна нормальній системі з $n-1$ рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{p_1(x_1, \dots, x_n)}{p_n(x_1, \dots, x_n)}, \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{p_{n-1}(x_1, \dots, x_n)}{p_n(x_1, \dots, x_n)}, \end{cases} \quad (2.26)$$

називають **характеристичною системою рівнянь** для лінійного однорідного ДРЧП (2.21).

Позначимо через

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \\ \psi_2(x_1, \dots, x_n) = c_2, \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1} \end{cases} \quad (2.27)$$

сукупність $n-1$ лінійно незалежних «перших інтегралів» характеристичної системи (2.25), а отже, і еквівалентної їй системи (2.26).

Теорема 2.1 (*про розв’язок однорідного ДРЧП першого порядку*). Будь-який інтеграл $\psi(x_1, \dots, x_n)$ характеристичної системи (2.15) є водночас розв’язком лінійного однорідного ДРЧП (2.21).

Доведення. Нехай $\psi(x_1, \dots, x_n) = c$ – деякий «перший інтеграл» системи (2.25). Тоді $d\psi = 0$ і з урахуванням того, що згідно з (2.25) $dx_i = kp_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, де $k \neq 0$ коефіцієнт пропорційності, одержимо:

$$d\psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = k \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} p_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} p_n \right\} = 0,$$

тобто функція $\psi(x_1, \dots, x_n)$ є розв’язком ДРЧП (2.21).

Теорема 2.2 (*про інтеграл характеристичної системи*). Будь-який розв’язок лінійного однорідного ДРЧП (2.21) $u = \psi(x_1, \dots, x_n) \neq \text{const}$ є водночас інтегралом характеристичної системи (2.25), а також еквівалентної їй системи (2.26).

У загальній теорії ДРЧП на відміну від теорії звичайних диференціальних рівнянь питання про визначення і побудову загального розв’язку не ставиться. Виняток становлять лінійні однорідні ДРЧП першого порядку, розв’язки яких, як буде показано нижче, містять довільну функцію.

Теорема 2.3 (*про загальний розв’язок лінійного однорідного ДРЧП першого порядку*). Нехай (2.27) – сукупність $n-1$ лінійно незалежних «перших інтегралів» характеристичної системи (2.25). Тоді співвідношення

$$u = u_3(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \quad (2.28)$$

де Φ довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів, визначає загальний розв'язок лінійного однорідного ДРЧП (2.21).

Доведення. Нехай $\psi_i(x_1, \dots, x_n) = c_i$, $i = \overline{1, n-1}$ – сукупність $n-1$ лінійно незалежних «перших інтегралів» характеристичної системи (2.25), а $\psi_0(x_1, \dots, x_n)$ деякий частинний розв'язок ДРЧП (2.21). Оскільки згідно з Теоремою 2.1 функції $\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$ також є розв'язками ДРЧП (2.21), то

$$\sum_{i=1}^n p_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (2.29)$$

Розглянемо систему (2.29) як лінійну однорідну алгебраїчну систему відносно функцій $p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, що така система (2.29) має нетривіальний розв'язок, а тому її визначник

$$\Delta = |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_0}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Оскільки якобіан J , складений для функцій $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, тотожно рівний нулеві, то ця система функцій є лінійно залежною, тобто існує функціональна залежність $F(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = 0$. Але функції $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ є лінійно незалежними, тому повинно бути $\psi_0 = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$. А оскільки ψ_0 – довільний частинний розв'язок ДРЧП (2.21), то функція $u = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ буде загальним розв'язком ДРЧП (2.21).

Зауваження 2.1 Із Теорем 2.1-2.3 випливає, що знаходження загального розв'язку (2.28) лінійного однорідного ДРЧП (2.21) зводиться до побудови $n-1$ лінійно незалежних розв'язків (інтегралів) характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь (2.25).

Приклад 2.4. Розв'язати лінійне однорідне ДРЧП

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad x_1, x_2, x_3 > 0. \quad (2.30)$$

Запишемо відповідну систему в симетричній формі (2.25)

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3}. \quad (2.32)$$

Очевидно, що інтегровну комбінацію можна утворити з будь-якої пари дробів. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \quad \Rightarrow \quad \ln x_1 = \ln x_2 + \ln c_1, \quad c_1 > 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = c_1, \\ \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_3}{x_3}, \quad \Rightarrow \quad \ln x_1 = \ln x_3 + \ln c_2, \quad c_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_3} = c_2. \end{aligned}$$

Одержані рівності є двома лінійно незалежними «першими інтегралами» характеристичної системи (2.31). Тоді на підставі Теорема 2.3 загальний розв'язок ДРЧП (2.30) запишеться за формулою (2.28) у вигляді

$$u(x_1, x_2, x_3) = \Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}\right),$$

де Φ довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів.

Приклад 2.5. Розв'язати однорідне ДРЧП

$$(xy + 1)\frac{\partial z}{\partial x} - y(x + y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2.33)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xy + 1} = \frac{dy}{-y(x + y)}. \quad (2.34)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.33) потрібно зінтегрувати звичайне диференціальне рівняння першого порядку (2.34), яке можна переписати у вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0. \quad (2.35)$$

Для цього рівняння виконується умова існування інтегрувального множника $\mu(y)$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{y - (x + 2y)}{y(x + y)} = -\frac{1}{y} = \varphi(y),$$

тоді $\mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy} = e^{-\int y^{-1}dy} = y^{-1}$. Домножимо рівняння (2.3) на $\mu(y)$, дістанемо:

$$M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy \equiv (x + y)dx + (x + y^{-1})dy = 0. \quad (2.36)$$

Для рівняння (2.36) виконується умова Ейлера: $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} = 1$, отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Знайдемо функцію $f(x, y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівняння (2.36), із системи ДРЧП

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M_1(x, y) = x + y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N_1(x, y) = x + y^{-1}. \end{cases}$$

Інтегруючи перше з рівнянь останньої системи, маємо $f(x, y) = 0,5x^2 + xy + \psi(y)$, підстановка в друге рівняння дає $\psi(y) = \ln |y|$. Звідси $f(x, y) = 0,5x^2 + xy + \ln |y|$, а загальний розв'язок рівняння (2.36), а отже, «перший інтеграл» системи (2.34), має вигляд

$$0,5x^2 + xy + \ln |y| = C,$$

де C – довільна стала. Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного ДРЧП першого порядку вигляду (2.21) загальний розв'язок ДРЧП (2.33) запишеться як $z = \Phi(0,5x^2 + xy + \ln |y|)$, де Φ – довільна функція свого аргументу.

Відповідь. Загальний розв'язок: $z = \Phi(0,5x^2 + xy + \ln |y|)$, де Φ – довільна функція.

Приклад 2.6. Знайти загальний розв'язок однорідного ДРЧП

$$(4x^2y + x)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2.37)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{4x^2y + x} = \frac{dy}{y}. \quad (2.38)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.37) потрібно зінтегрувати звичайне диференціальне рівняння першого порядку (2.38). Задля спрощення процесу інтегрування скористаємося правилом рівності дробів:

$$\frac{xdy - ydx}{-4x^2y^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow -\frac{1}{4y^2}d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dy}{y}.$$

Відокремивши змінні, після інтегрування дістанемо:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = -4ydy \Rightarrow \frac{y}{x} = -2y^2 + C.$$

Отже, «перший інтеграл» системи (2.38) має вигляд

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C,$$

де C – довільна стала. Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного ДРЧП першого порядку вигляду (2.21) загальний розв'язок ДРЧП

(2.37) запишеться як $z = \Phi\left(\frac{y}{x} + 2y^2\right)$, де Φ – довільна функція свого аргументу.

Відповідь. $z = \Phi\left(\frac{y}{x} + 2y^2\right)$, де Φ – довільна функція.

Означення 2.9 (задача Коші для лінійного однорідного ДРЧП). Задачу

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \Big|_{x_n=x_{n,0}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases} \quad (2.39)$$

де $x_{n,0}$ деяке фіксоване значення, а φ задана неперервно-диференційовна функція, називають **задачею Коші** (задачею з початковою умовою) для лінійного однорідного ДРЧП (2.21).

Зауважимо, що у задачі (2.39) фіксованою може бути будь-яка з незалежних змінних. Легко бачити: якщо у випадку звичайного диференціального рівняння задача Коші полягає у відшуванні розв'язку у вигляді рівняння кривої, яка проходить через задану точку, то у випадку ДРЧП шукаємо рівняння поверхні, яка проходить через задану криву.

Розв'язок задачі Коші (2.39) отримаємо з загального розв'язку (2.28) тоді, коли підберемо функцію Φ таким чином, щоб виконувалася задана початкова умова, тобто

$$\Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n,0}), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n,0})) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (2.40)$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n,0}) = \bar{\psi}_1, \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n,0}) = \bar{\psi}_{n-1}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Тоді (2.40) можна записати у вигляді

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Крім того, система (2.41) на деякій підмножині області визначення розв'язна відносно змінних $x_1, \dots, x_{n-1}$:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}). \end{cases}$$

Нехай довільна функція Φ надалі буде

$$\begin{aligned} & \Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) = \\ & = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})). \end{aligned}$$

Очевидно, що розв'язок у вигляді

$$u = u(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})) \quad (2.42)$$

справджує також задану початкову умову, коли замість x_n підставити значення $x_{n,0}$.

Проілюструємо застосування формули (2.42) на прикладі задачі Коші

$$\begin{cases} x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \\ u(x_1, x_2)|_{x_2=0} = \cos x_1 = \varphi(x_1). \end{cases} \quad (2.43)$$

Побудуємо перший інтеграл за характеристичною системою

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1} & \Rightarrow -x_1 dx_1 - x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \int x_1 dx_1 + \int x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = c = \psi_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Із формул (2.41)

$$\psi_1(x_1, x_2 = 0) = \bar{\psi}_1 \Rightarrow x_1^2 = \bar{\psi}_1 \Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{\bar{\psi}_1}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (2.43) можна записати за формулою (2.41):

$$u(x_1, x_2) = \varphi(\pm \sqrt{\psi_1}) = \cos(\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}).$$

Приклад 2.7. Розв'язати задачу Коші для лінійного ДРЧП

$$\frac{y}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^2}{8} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.44)$$

за початкових умов

$$y = 1,5\sqrt{x^3}, \quad u = 2x^4. \quad (2.45)$$

Розв'язання. Побудуємо спочатку загальний розв'язок однорідного ДРЧП (2.44). Запишемо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{3dx}{y} = \frac{8dy}{x^2}. \quad (2.46)$$

Звідси після відокремлення змінних та інтегрування маємо:

$$3x^2 dx = 8y dy \Rightarrow x^3 = 4y^2 + C.$$

Отже, «перший інтеграл» системи (2.46) має вигляд

$$x^3 - 4y^2 = C, \quad (2.47)$$

де C – довільна стала. Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку однорідного ДРЧП першого порядку вигляду (2.21) загальний розв'язок ДРЧП (2.44) запишеться у вигляді $u = \Phi(x^3 - 4y^2)$, де Φ – довільна функція свого аргументу.

Підставивши в (2.47) значення y із початкових умов (2.45), із урахуванням другої початкової умови маємо:

$$\begin{cases} u = 2x^4, \\ C = -8x^3. \end{cases}$$

Виключивши з останньої системи змінну x , дістанемо співвідношення

$$x = \sqrt[3]{-\frac{C}{8}} \Rightarrow u = \frac{\sqrt[3]{C^4}}{8}. \quad (2.48)$$

Розв'язок задачі Коші (2.44)-(2.45) отримується підстановкою в (2.48) значення C із (2.47), тоді

$$u = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 4y^2)^4}}{8}.$$

Задля перевірки правильності обчислень підставимо в отриманий розв'язок значення $y = 1,5\sqrt{x^3}$ із (2.45). Маємо:

$$u = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 9x^3)^4}}{8} = 2x^4,$$

тобто початкові умови справді виконуються.

Відповідь. $u = \frac{\sqrt[3]{(x^3 - 4y^2)^4}}{8}.$

2.4. Квазілінійні ДРЧП першого порядку

Покажемо, що розв'язання квазілінійного неоднорідного ДРЧП (2.22) можна звести до розв'язання лінійного однорідного ДРЧП вигляду (2.21).

Будемо шукати розв'язок ДРЧП (2.35) у неявному вигляді

$$V(x_1, \dots, x_n, u) = 0, \quad (2.49)$$

де функція V є неперервно-диференційовною. Диференціюванням за змінними x_k із (2.49) дістанемо:

$$\frac{\partial V(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial V(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Підставивши значення похідних у (2.22), одержимо лінійне однорідне ДРЧП відносно функції $n+1$ змінної $V(x_1, \dots, x_n, u)$:

$$p_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + q(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad (2.50)$$

розв'язок якого, побудований за формулою (2.28)

$$V = V_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n, u) = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

згідно з (2.49) визначає розв'язок квазілінійного ДРЧП (2.22) у неявному вигляді (загальний інтеграл)

$$\Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0, \quad (2.51)$$

де $\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)$ – n лінійно незалежних інтегралів характеристичної системи в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{p_1(x_1, \dots, x_n, u)} = \dots = \frac{dx_n}{p_n(x_1, \dots, x_n, u)} = \frac{du}{q(x_1, \dots, x_n, u)}, \quad (2.52)$$

що відповідає однорідному ДРЧП (2.50).

Теорема 2.4 (про загальний розв’язок неоднорідного ДРЧП першого порядку). Якщо $\psi_i(x_1, \dots, x_n, u) = c_i, i = \overline{1, n}$ – n лінійно незалежних інтегралів характеристичної системи (2.52), що відповідає неоднорідному ДРЧП (2.22) – або однорідному ДРЧП (2.50), – то співвідношення (2.51), де Φ довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів, визначає загальний інтеграл неоднорідного ДРЧП (2.22).

Зауваження 2.2 Якщо шукана функція $u(x_1, \dots, x_n)$ входить тільки в один із побудованих n лінійно незалежних інтегралів, наприклад, у ψ_1 , тоді загальний інтеграл зазвичай записують у вигляді

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n, u) = F(\psi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n)), \quad (2.53)$$

де F довільна неперервно-диференційовна функція своїх аргументів, звідки часто вдається виразити шукану функцію в явному вигляді.

Відзначимо, що твердження Теорема 2.4 справедливе і для інших типів ДРЧП першого порядку, які є частинними випадками квазілінійного ДРЧП (2.22), а саме:

1) лінійного однорідного ДРЧП, яке містить шукану функцію:

$$p_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} + b(x_1, \dots, x_n)u = 0$$

[тут беремо $q = -b(x_1, \dots, x_n)u$];

2) лінійного неоднорідного ДРЧП

$$p_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} + b_1(x_1, \dots, x_n)u = b_2(x_1, \dots, x_n)$$

[тут беремо $q = b_2(x_1, \dots, x_n) - b_1(x_1, \dots, x_n)u$];

3) так званого напівлінійного ДРЧП

$$p_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u)$$

[у цьому випадку $q = b(x_1, \dots, x_n, u)$].

Наостанок проілюструємо алгоритм інтегрування ДРЧП вигляду (2.22) на прикладі: в області $x_1, x_2, x_3, u > 0$ знайти загальний розв'язок заданого ДРЧП і розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 6u, \\ u(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=2} = 3x_1x_2 = \varphi(x_1, x_2). \end{cases} \quad (2.54)$$

Запишемо відповідну характеристичну систему (2.52)

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{du}{6u}.$$

Перший дріб утворює інтегровну комбінацію з кожним із інших. Після інтегрування дістанемо три незалежні «перші інтеграли»:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} &\Rightarrow c_1 = \frac{x_1}{x_2} = \psi_1(x_1, x_2, x_3, u), \\ \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_3}{x_3} &\Rightarrow c_2 = \frac{x_1}{x_3} = \psi_2(x_1, x_2, x_3, u), \\ \frac{dx_1}{x_1} = \frac{du}{6u} &\Rightarrow c_3 = \frac{x_1^6}{u} = \psi_3(x_1, x_2, x_3, u). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Отже, згідно з Теоремою 2.4 загальний розв'язок заданого ДРЧП записується в неявному вигляді (2.51)

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_1^6}{u}\right) = 0,$$

або, з огляду на те, що змінна u входить тільки в один інтеграл ψ_3 , можна застосувати формулу (2.53), тоді отримаємо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$\frac{x_1^6}{u} = F\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}\right) \Rightarrow u = x_1^6 F^{-1}\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}\right) = x_1^6 \bar{F}\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}\right).$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші. Для цього випишемо відповідну систему вигляду (2.46), враховуючи фіксоване значення $x_3 = 2$:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \bar{\psi}_1, \\ \frac{x_1}{2} = \bar{\psi}_2, \\ \frac{x_1^6}{u} = \bar{\psi}_3, \end{cases}$$

звідки отримуємо вирази для змінних x_1, x_2, u :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\bar{\psi}_2 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3), \\ x_2 &= \frac{2\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_1} = \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3), \\ u &= \frac{(2\bar{\psi}_2)^6}{\bar{\psi}_3} = \omega_3(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3). \end{aligned}$$

Згідно з формулою (2.47) випишемо розв'язок задачі Коші (2.54):

$$\begin{aligned} 2^6 \frac{\psi_2^6(x_1, x_2, x_3, u)}{\psi_3(x_1, x_2, x_3, u)} - 3\omega_1(\psi_1(x_1, x_2, x_3, u), \psi_2(x_1, x_2, x_3, u), \psi_3(x_1, x_2, x_3, u)) \times \\ \times \omega_2(\psi_1(x_1, x_2, x_3, u), \psi_2(x_1, x_2, x_3, u), \psi_3(x_1, x_2, x_3, u)) = 0, \end{aligned}$$

звідки з урахуванням (2.55)

$$2^6 \frac{\frac{x_1^6}{x_3^6}}{\frac{x_1^6}{u}} - 3 \cdot 2 \cdot \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{2 \cdot \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}} = 0,$$

або

$$2^4 \frac{u}{x_3^6} - 3 \frac{x_1 x_2}{x_3^2} = 0 \Rightarrow u(x_1, x_2, x_3) = 3 \frac{x_1 x_2 x_3^4}{2^4}.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що отримана функція справджує початкову умову задачі (2.54): $u(x_1, x_2, 2) = 3x_1 x_2$.

Приклад 2.8. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДРЧП

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + (xy + e^x) \frac{\partial z}{\partial y} = -z. \quad (2.56)$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy + e^x} = \frac{dz}{-z}. \quad (2.57)$$

Для побудови загального розв'язку ДРЧП (2.56) із системи (2.40) потрібно побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Перший і третій дроби утворюють очевидну інтегровну комбінацію

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z},$$

із якої після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл»

$$xz = C_1.$$

Перші два дроби також дають інтегровну комбінацію (очевидно незалежну відносно першої), яку можна записати у вигляді лінійного неоднорідного рівняння першого порядку

$$y' - y = \frac{e^x}{x}.$$

Його загальний розв'язок дається формулою

$$y = e^{\int dx} \left(C_2 + \int e^{-\int dx} \frac{e^x}{x} dx \right) = e^x (C_2 + \ln |x|).$$

Звідси отримуємо другий «перший інтеграл» системи (2.40)

$$e^{-x} \cdot y - \ln |x| = C_2.$$

Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного ДРЧП першого порядку вигляду (2.22) загальний розв'язок ДРЧП (2.56) у неявному вигляді дається співвідношенням $\Phi(xz, e^{-x} \cdot y - \ln |x|) = 0$, де Φ – довільна функція своїх аргументів. Однак, оскільки шукана функція $z(x, y)$ входить лише в один із побудованих «перших інтегралів», то її можна подати також в еквівалентному явному вигляді

$$xz = F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|) \Rightarrow z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|).$$

Відповідь. $z = x^{-1}F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|)$, де F – довільна функція.

Приклад 2.9. Знайти множину розв’язків квазілінійного ДРЧП першого порядку

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u) \frac{\partial u}{\partial y} = yu. \quad (2.58)$$

Розв’язання. Записуємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2u} = \frac{du}{yu}. \quad (2.59)$$

Для побудови загального розв’язку ДРЧП (2.58) із системи (2.59) потрібно побудувати дві лінійно незалежні інтегровні комбінації. Перший і третій дроби утворюють очевидну інтегровну комбінацію

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u},$$

із якої після інтегрування отримуємо перший «перший інтеграл»

$$x^{-1}u = C_1. \quad (2.60)$$

Другу інтегровну комбінацію можна отримати з першого й другого дроби, скориставшись отриманим співвідношенням для виключення змінної u . Із (2.60) маємо $u = C_1 x$, а отже,

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2C_1 x} \Rightarrow (1 - 2C_1)dx = ydy \Rightarrow 0,5y^2 = (1 - 2C_1)x + C_2.$$

Підставивши в останню рівність значення C_1 із (2.60), отримаємо другий «перший інтеграл», очевидно незалежний відносно першого:

$$0,5y^2 - x + 2u = C_2.$$

ДРЧП (2.58) є неоднорідним вигляду (2.22), тому його загальний розв’язок записується за тими ж правилами, що й у випадку Прикладу 2.7. Оскільки шукана функція $u(x, y)$ входить в обидва «перші інтеграли», то подамо множину розв’язків у неявному вигляді, а саме $\Phi(x^{-1}u, 0,5y^2 - x + 2u) = 0$, де Φ – довільна функція своїх аргументів.

Відповідь. $\Phi(x^{-1}u, 0,5y^2 - x + 2u) = 0$, де Φ – довільна функція.

Приклад 2.10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy \quad (2.61)$$

та інтегральну поверхню, що проходить через криву

$$y = x^2, \quad z = x^3. \quad (2.62)$$

Розв'язання. Складаємо відповідну систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

і знаходимо її «перші інтеграли» (див. Приклад 2.2)

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2. \quad (2.63)$$

Отже, загальний розв'язок ДРЧП (2.61) – неоднорідного типу (2.22) – можна записати в неявному вигляді

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \quad z^2 + xy\right) = 0,$$

де Φ – довільна функція своїх аргументів. Оскільки z входить тільки в один із «перших інтегралів» (2.63), то загальний розв'язок можна виписати і в явному вигляді. Тоді

$$z^2 + xy = F\left(\frac{x}{y}\right), \quad z = \pm \sqrt{F\left(\frac{x}{y}\right) - xy},$$

де F – довільна функція.

Щоб знайти інтегральну поверхню, що проходить через лінію (2.62), запишемо рівняння цієї кривої в параметричному вигляді, узявши за параметр, наприклад, змінну x :

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Підставивши ці вирази у (2.63), дістанемо

$$\frac{1}{x} = C_1, \quad x^6 + x^3 = C_2.$$

Виключивши з цих рівностей x , отримаємо:

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

Підставивши в останнє співвідношення замість C_1 і C_2 ліві частини «перших інтегралів» (2.63), знайдемо шуканий розв'язок задачі Коші (2.61)-(2.62)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

Відповідь. Загальний розв'язок: $z = \pm \sqrt{F\left(\frac{x}{y}\right) - xy}$, де F – довільна функція.

Шукана інтегральна поверхня: $\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$

Приклад 2.11. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння (2.39) за початкових умов

$$y = e^x \cdot \ln |x|, \quad z = 4x^{-1}. \quad (2.64)$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння, побудований у Прикладі 2.3, має вигляд

$$z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|), \quad (2.65)$$

де F – довільна функція. Зауважимо, що при підкладанні значень y і z із умов (2.64) у два «перші інтеграли» ДРЧП (2.39)

$$xz = C_1, \quad e^{-x} \cdot y - \ln |x| = C_2$$

їх ліві частини набувають сталих значень і отримуються рівності $4 = C_1$, $0 = C_2$, а це означає, що крива (2.64) є **характеристикою** рівняння (2.39), через яку проходять безліч інтегральних поверхонь. Знайдемо ці поверхні шляхом підстановки (2.64) у загальний розв'язок (2.65). Маємо:

$$4x^{-1} = x^{-1} F(e^{-x} \cdot e^x \cdot \ln |x| - \ln |x|) \Rightarrow F(0) = 4.$$

Остання рівність визначає умову, за якої інтегральні поверхні (2.65) проходять через криву (2.64).

Відповідь. Задача Коші має безліч розв'язків вигляду $z = x^{-1} F(e^{-x} \cdot y - \ln |x|)$, де F – довільна функція, для якої виконується умова $F(0) = 4$.

Завдання для індивідуальної роботи №8

Постановка завдань:

1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі.
2. Записати множину розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку.
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку.
4. Знайти поверхню, що задовольняє вказане рівняння і проходить через задану криву.

Варіант 1

1. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. 2. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 3. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1$.
4. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x$, $x = 0$, $z = y^2$.

Варіант 2

1. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$. 2. $(x+2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$.
4. $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = x^2$.

Варіант 3

1. $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$. 2. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
3. $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y^2$ при $x = 1$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$, $x = 2$, $z = y^2 + 1$.

Варіант 4

1. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$. 2. $(x-z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x = 1$. 4. $\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, $y = x$, $z = x^3$.

Варіант 5

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$. 2. $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

3. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z = 0$.

4. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$, $x = 1$, $yz + 1 = 0$.

Варіант 6

1. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$. 2. $2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y-x) \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$.

3. $(x - 2e^y) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x, 0) = x$. 4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$, $y = -2$, $z = x - x^2$.

Варіант 7

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. 2. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz$. 3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(x, 1, z) = xz$.

4. $yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$, $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Варіант 8

1. $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$. 2. $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z$.

3. $xy \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = y$, $u(x, 0) = x^2$. 4. $z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$, $x + y = 2$, $yz = 1$.

Варіант 9

1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$. 2. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$.

3. $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$, $u(1, y) = y + e^y$. 4. $z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0$, $y = x^2$, $z = 2x$.

Варіант 10

1. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$. 2. $2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2+1}$.

3. $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $u(x, x) = 1 + \frac{x}{3}$. 4. $(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z-x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, $z = y = -x$.

Варіант 11

1. $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. 2. $x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

$$3. y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2, u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1+y^4}. \quad 4. x \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial z}{\partial y} = z, x + y = 2z, xz = 1.$$

Варіант 12

$$1. \frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}. \quad 2. yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z.$$

$$3. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy, u(x, 2) = 1 + x^2. \quad 4. y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0, x - y = 0, x - yz = 1.$$

Варіант 13

$$1. -\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}. \quad 2. (z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

$$3. x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + 3z \frac{\partial u}{\partial z} = 4u, u(x, x, z) = z. \quad 4. x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y, y = 2z, x + 2y = z.$$

Варіант 14

$$1. \frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}. \quad 2. xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

$$3. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = 2x \text{ при } y = 1. \quad 4. (y + 2z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, x = z, y = x^2.$$

Варіант 15

$$1. \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}. \quad 2. y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = y \text{ при } x = 0.$$

$$4. (x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, x - y = 2, z + 2x = 1.$$

Варіант 16

$$1. \frac{dx}{2y - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}. \quad 2. e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$$

$$3. 2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = y^2 \text{ при } y = 1. \quad 4. xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z, x = -z^3, y = z^2.$$

Варіант 17

$$1. \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}. \quad 2. \sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z.$$

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x=1$. 4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $y = x$, $z = x^2$.

Варіант 18

1. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$. 2. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x+y$.

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z=0$. 4. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $x=1$, $z=1+y^2$.

Варіант 19

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$. 2. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1-z^2$.

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(x,1,z) = xz$. 4. $\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$, $y = 2x^2$, $z = x^2 + x$.

Варіант 20

1. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$. 2. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$.

3. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $u(x,0) = x^2$. 4. $y\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $x=0$, $z=-y^2$.

Варіант 21

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$. 2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$.

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x-y$, $u(1,y) = y + e^y$. 4. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y$, $x = 3y^2$, $z = 4y^3$.

Варіант 22

1. $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$. 2. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x+y$.

3. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $u(x,x) = 1 + \frac{x}{3}$. 4. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x^3z$, $x = 2y$, $z = e^{0,5y^2}$.

Варіант 23

1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$. 2. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, $u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1+y^4}$. 4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x^2$, $y = \frac{1}{4} - x^2$, $z = x$.

Варіант 24

1. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$. 2. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy$, $u(x,2) = 1 + x^2$. 4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $y = x + 1$,
 $z = x + y$.

Варіант 25

1. $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$. 2. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$. 4. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y} = y^3z$, $x = -z^3$, $y = z^2$.

Список рекомендованої літератури

1. Бугрій О. М., Процах Н. П., Бугрій Н. В. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі. – Львів: І. Чижиков [вид.], 2011. – 347 с.
2. Гаращенко Ф. Г., Харченко І. І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2004. – 162 с.
3. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник. – Вид. 2-ге, випр. та доп. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.
4. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2011. – 468 с.
5. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. – К.: Техніка, 1997. – 288 с.
6. Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Вид. 2-ге, перероб. і доп. – К.: Вища школа, 1972. – 156 с.
7. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник. – К.: Либідь, 2004. – 407 с.
8. Маринець К. В. Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння». Частина III: «Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку». – Ужгород: Говерла, 2017. – 52 с.
9. Перестюк М. О., Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Либідь, 1997. – 192 с.
10. Rontó Miklós, Raisz Péterné. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – 324 о.
11. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
12. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

13. *Strauss, Walter A. Partial Differential Equations. An Introduction (2nd edition).* – John Wiley & Sons, 2008. – 464 p.
14. *Щоголев С. А., Дрік Н. Г., Кореновський А. О. Диференціальні та інтегральні рівняння.* – Одеса: ОНУ, 2017. – 394 с.
15. https://en.wikipedia.org/wiki/First_order_partial_differential_equation
16. https://en.wikipedia.org/wiki/Stability_theory

ЗМІСТ

§ 1 Теорія стійкості.....	4
1.1. Основні поняття та означення	4
1.2. Стійкість розв'язків лінійних систем.....	7
1.3. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерії асимптотичної стійкості.....	8
1.4. Стійкість за першим наближенням	13
1.5. Метод функцій Ляпунова.....	17
1.6. Автономні системи диференціальних рівнянь	20
1.7. Класифікація положень рівноваги динамічних систем	23
1.8. Особливі точки нелінійних автономних систем.....	41
<i>Завдання для індивідуальної роботи №7</i>	<i>50</i>
§ 2 Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку	55
2.1. Системи в симетричній формі	55
2.2. Основні поняття та означення теорії ДРЧП.....	62
2.3. Лінійні однорідні ДРЧП першого порядку	64
2.4. Квазілінійні ДРЧП першого порядку.....	72
<i>Завдання для індивідуальної роботи №8.....</i>	<i>80</i>
Список рекомендованої літератури.....	85

Навчальне видання

**ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ
ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

Навчальний посібник

із курсу «Диференціальні рівняння»

Д-50 Теорія стійкості. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: навчальний посібник / В. Л. Рего, Я. В. Варга, Г. І. Сливка-Тилищак, І.І Король. – Ужгород: «УжНУ», 2024. – 88 с.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, канд. фіз.-мат. наук, доц. Рейтій О. К.

Автори: ст. викл. Рего В. Л.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Варга Я. В.,
д-р. фіз.-мат. наук, проф. Король І.І.,
д-р. фіз.-мат. наук, доц. Сливка-Тилищак Г. І.

Рецензенти: д-р. фіз.-мат. наук, проф. Станжицький О. М.,
д-р. фіз.-мат. наук, доц. Малик І. В.