ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 3

Вісник Київського університету, випуск №3, 2009
Серія: фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142-95-2
ISSN 1812-5409

УДК 517.9

Маринець К. В., студентка.

Дослідження розв'язків триточкових задач типу Коші–Ніколетті та зведення їх до двоточкових .

Отримані результати при дослідженні триточкової нелінійної крайової задачі типу Коші–Ніколетті. Показано доцільність зведення вихідної задачі до відповідної їй двоточкової та параметризацію одержаної крайової задачі. Для дослідження перетвореної крайової задачі розроблено модифікацію чисельно–аналітичного методу, який і використовується при побудові наближених розв'язків.

Ключові слова: чисельно–аналітичний метод, триточкова крайова задача, регулюючий параметр.

Marynets K. V., student.

The investigation of the Cauchy–Nicoletti type three point boundary value problem.

We obtain some results concerning the investigation of the Cauchy–Nicoletti type three point boundary value problem. We show that it is useful to reduce the given boundary value problem to the two point one and to parametrize the last one. To study the transformed problem, we made the modification of numerical–analytic method that is used for getting approximations.

Key Words: numerical–analytic method, three point boundary value problem, regulatins parameter.

*E-mail: katya_marinets@ukr.net

Статтю представив член редколегії академік Перестюк М. О.

Вступ

На сьогоднішній день теорія крайових задач є одним з розділів диференціальних рівнянь, що широко використовується у прикладних задачах. Існують різні методи, які дозволяють встановити розв'язність досліджуваної задачі. Одним з найбільш універсальних являється чисельно–аналітичний метод послідовних наближень [1, 2]. Суть методу полягає в тому, що вихідна крайова задача зводиться до відповідної їй збуреної крайової задачі, яка містить невідомі параметри. Розв'язок одержаної задачі шукається у аналітичній формі, використовуючи послідовні наближення спеціального вигляду. Крім того, збурена задача розглядається разом із, так званою, визначальною алгебраїчною або трансцендентною системою рівнянь, яка дозволяє чисельно обчислити початкові значення розв'язків та параметри, що їм відповідають. Вивчаючи цю систему рівнянь, встановлюються необхідні та достатні умови існування розв'язку вихідної крайової задачі.

Схема побудови послідовних наближень на основі чисельно–аналітичного методу суттєво залежить від типу заданих диференціального рівняння та крайових умов.

У даній роботі досліджується триточкова крайова задача типу Коші–Ніколетті. Обґрунтовано доцільність зведення цієї задачі до задачі з більш простими крайовими умовами, а саме — двоточковими, за допомогою спеціальної параметризації. Для встановлення розв'язності перетвореної крайової задачі розроблено відповідну модифікацію чисельно–аналітичного методу послідовних наближень.

Постановка задачі та її зведення до двоточкової

Розглядаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \ , t \in [0,T] \qquad (1)$$

з розділеними крайовими умовами типу Коші–Ніколетті

$$x_1(0) = x_{10},$$
$$\dots$$
$$x_p(0) = x_{p0},$$
$$x_{p+1}(t_1) = d_{p+1}.$$

$$\begin{gathered} \ldots \\ x_{p+q}(t_1) = d_{p+q}, \\ x_{p+q+1}(T) = d_{p+q+1}, \\ \ldots \\ x_n(T) = d_n, \end{gathered} \tag{2}$$

де $t_1 \in (0,T)$, $f \in C([0,T] \times D, R^n)$, $D \subset R^n$, D — замкнена обмежена область.

Триточкові крайові умови *(2)* можна записати у матричній формі

$$Ax(0) + A_1 x(t_1) + C_1 x(T) = d, \tag{3}$$

де $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(p+q)} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \ldots \\ x_{p0} \\ d_{p+1} \\ \ldots \\ d_{p+q} \\ d_{p+q+1} \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}, I_p, I_q,$$

$I_{n-(p+q)}$ — одиничні матриця розмірності $p \times p$, $q \times q$, $n-(p+q) \times n-(p+q)$ відповідно. Очевидно, що матриці, які входять у крайові умови *(3)*, є виродженими. У зв'язку з цим зауважимо, що безпосереднє застосування відомих схем чисельно-аналітичного методу [1, 2] неможливе або пов'язане зі значними труднощами обчислювального характеру [3, 4].

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, замінимо значення перших $(p+q)$ компонент розв'язку крайової задачі *(1)*, *(3)* в точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+q}$:

$$\begin{gathered} x_1(T) = \lambda_1, \\ \ldots \\ x_p(T) = \lambda_p, \\ x_{p+1}(T) = \lambda_{p+1}, \\ \ldots \\ x_{p+q}(T) = \lambda_{p+q}. \end{gathered} \tag{4}$$

Використовуючи рівності *(4)*, перепишемо триточкові крайові умови *(3)* у вигляді двоточкових

$$Ax(0) + Cx(T) = d - A_1 x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_p \\ \lambda_{p+1} \\ \ldots \\ \lambda_{p+q} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $C = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(p+q)} \end{pmatrix} = I_n$.

Введемо позначення

$$d(\lambda) := d - A_1 x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_p \\ \lambda_{p+1} \\ \ldots \\ \lambda_{p+q} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} + \lambda_1 \\ \ldots \\ x_{p0} + \lambda_p \\ \lambda_{p+1} \\ \ldots \\ \lambda_{p+q} \\ d_{p+q+1} \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda := col(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+q})$.

Перетворені крайові умови (5) можна подати у вигляді

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda). \tag{6}$$

У рівності *(6)*, на відміну від *(3)*, замість виродженої матриці C_1, фігурує невироджена матриця C.

Зауваження 1. Нелінійна задача з триточковими крайовими умовами типу Коші–Ніколетті *(1)*, *(2)* еквівалентна двоточковій крайовій задачі *(1)*, *(6)* разом з умовою *(4)*.

Для дослідження одержаної крайової задачі *(1)*, *(6)* застосуємо відповідну модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

Збіжність послідовних наближень

Припустимо, що для крайової задачі *(1)*, *(2)* виконуються наступні умови :

А) функція $f(t,x)$ неперервна в області $[0,T]\times D$ і задовольняє умову Ліпшиця вигляду

$$\left|f(t,x)-f(t,y)\right|\le K\left|x-y\right|, \tag{7}$$

для всіх $t\in[0,T]$, $\{x,y\}\subset D$, де $K=\left(k_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами, $\left|f(t,x)\right|=col(\left|f_1(t,x)\right|,\left|f_2(t,x)\right|,\ldots,\left|f_n(t,x)\right|)$, а також нерівності та операції максимуму та мінімуму між векторами, тут і надалі, розуміються покомпонентно;

В) множина

$$D_\beta:=\{z\in D: B(z,\beta(z,\lambda))\subset D,\forall\lambda\in I_1\times \times I_2\times\ldots\times I_{p+q}\}$$

є непорожньою, де область

$$B(z,\beta(z,\lambda)):=\{x\in R^n:\left|x-z\right|\le\beta(z,\lambda),\forall\lambda\in I_1\times \times I_2\times\ldots\times I_{p+q}\},$$

де

$$\beta(z,\lambda):=\frac{T}{2}\delta_D(f)+\left|d(\lambda)-(A+E)z\right|, \tag{8}$$

де I_n — одинична матриця і

$$\delta_D(f):=\frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D}f(t,x)-\right. \left.-\min_{(t,x)\in[0,T]}f(t,x)\right] \tag{9}$$

де $\Lambda:=\{\lambda=col(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_{p+q})\in R^{p+q}:$ $col(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{p+q},d_{p+q+1},\ldots,d_n)\in D_\beta\}$;

С) найбільше власне значення $\lambda_{\max}(K)$ матриці K задовольняє нерівність $\lambda_{\max}(K)<\dfrac{10}{3T}$.

Визначимо множину $U\subset R^{n-p}$ наступним чином:

$$U:=\{u\in R^{n-p}:col(x_{10},\ldots,x_{p0},u_1,u_2\ldots u_{n-p})\in D_\beta\}.$$

Розглянемо послідовність функцій $\{x_m(t,u,\lambda)\}$, задану формулою:

$$x_m(t,u,\lambda):=z+\int_0^t f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))ds- -\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))ds+ +\frac{t}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right], \tag{10}$$

де $m=1,2,3,\ldots$, $x_0(t,u,\lambda)=col(x_{10},\ldots,x_{p0},u_1,u_2,\ldots u_{n-p}):=z\in D_\beta$, $u\in U$, $\lambda=col(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{p+q})$.

Зауваження 2. Легко бачити, що функції послідовності *(10)* містять $n+q$ невідомих скалярних параметрів: u_1, $u_2,\ldots$, u_{n-p}, λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_{p+q}$. Крім того, функції $x_m(t,u,\lambda)$ задовольняють двоточкові крайові умови *(6)* при довільних значеннях перерахованих вище параметрів.

Теорема 1. Нехай функція $f:[0,T]\times D\to R^n$ задовольняє умови А) — С). Тоді :

1) послідовність функцій вигляду *(10)* рівномірно збігається до граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$ при $m\to\infty$ для всіх $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times\Lambda$;

2) гранична функція

$$x^*(t,u,\lambda):=\lim_{m\to\infty}x_m(t,u,\lambda) \tag{11}$$

є єдиним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t)=z+\int_0^t f(s,x(s))ds-\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds+ \frac{t}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right] \tag{12}$$

або, що те ж саме, розв'язком збуреної двоточкової крайової задачі

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\Delta(u,\lambda), \tag{13}$$
$$Ax(0)+Cx(T)=d(\lambda)$$

з початковою умовою при $t=0$:

$$x^*(0,u,\lambda) = z = col(x_{10},\dots,x_{p0},u_1,u_2,\dots u_{n-p}),$$

де

$$\Delta(u,\lambda) := -\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,u,\lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right] \quad (14)$$

3) справедлива оцінка відхилення функції $x^*(t,u,\lambda)$ від її m-того наближення $x_m(t,u,\lambda)$ для всіх значень параметрів $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$

$$\left|x^*(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)\right| \le \le \frac{20}{9} t\left(1-\frac{1}{T}\right) Q^{m-1}(I_n - Q^{-1})h, \quad (15)$$

де $Q := \frac{3T}{10}K$ і $h := Q\delta_D(f) + K\left|d(\lambda)-(A+I_n)z\right|$.

Доведення. Доведемо, що послідовність *(10)* є послідовністю Коші у банаховому просторі $C([0,T],R^n)$. Спочатку покажемо, що $x_m(t,u,\lambda) \in D$, для всіх $(t,u,\lambda) \in [0,T]\times U \times \Lambda$, $m \in N$.

Справді, використовуючи оцінку леми 4 з [5]

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right]d\tau\right| \le \le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right], \quad (16)$$

де $\alpha_1(t) := 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)$, $|\alpha_1(t)| \le \frac{T}{2}$, $t \in [0,T]$, (17)

співвідношення *(10)* при $m = 0$ отримуємо:

$$|x_1(t,u,\lambda)| \le \left|\int_0^t \left[f(t,z) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,s)ds\right]dt\right| + + \left|d(\lambda)-(A+I_n)z\right| \le \alpha_1(t)\delta_D(f) + + \beta_1(z,\lambda) \le \beta(z,\lambda), \quad (18)$$

де $\beta_1(z,\lambda) := \left|d(\lambda) - (A+I_n)z\right|$. (19)

Виходячи з *(8)*, бачимо, що $x_1(t,u,\lambda) \in D$, коли $(t,u,\lambda) \in [0,T]\times U \times \Lambda$.

За індукцією можна показати, що всі функції *(10)* також належать множині D, $m = 1,2,\dots$, $t \in [0,T]$, $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$.

Розглянемо різницю функцій

$$x_{m+1}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda) = \quad (20)$$
$$= \int_0^t \left[f(s,x_m(s,u,\lambda)) - f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))\right]ds - - \frac{t}{T}\int_0^T \left[f(s,x_m(s,u,\lambda)) - f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))\right]ds,$$

$m = 1,2,\dots$.

Позначимо

$d_m(t,u,\lambda) := \left|x_m(t,u,\lambda) - x_{m-1}(t,u,\lambda)\right|$, $m = 1,2,\dots$.

Використовуючи оцінку леми 2.3 з [2] та беручи до уваги умову Ліпшиця, отримаємо

$$d_{m+1}(t,u,\lambda) \le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t d_m(s,u,\lambda)ds + + \frac{t}{T}\int_t^T d_m(s,u,\lambda)ds\right], \ \forall m = 0,1,2,\dots \quad (21)$$

На підставі нерівності *(18)*

$$d_1(t,u,\lambda) = \left|x_1(t,u,\lambda) - z\right| \le \le \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z,\lambda) \quad (22)$$

де $\beta_1(z,\lambda)$ задано формулою *(19)*.

Використовуючи оцінки леми 2.4 з [2]

$$\alpha_{m+1}(t) \le \left(\frac{3}{10}T\right)\alpha_m(t),$$
$$\alpha_{m+1}(t) \le \left(\frac{3}{10}T\right)^m \overline{\alpha_1}(t), \quad (23)$$

для послідовності функцій

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)ds. \quad (24)$$

$m = 0,1,2,\dots$, $\alpha_0(t) = 1$, $\alpha_1(t) = 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)$,

де $\overline{\alpha_1}(t) := \frac{10}{9}\alpha_1(t)$, а також нерівності *(22)* і рівність *(24)*, із *(21)* при $m = 1$ випливає

$$d_2(t,u,\lambda) \le K\delta_D(f)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \right.$$
$$\left. + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds\right] + K\beta_1(z,\lambda)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t ds + \frac{t}{T}\int_t^T ds\right] \le$$
$$\le K\left[\alpha_2(t)\delta_D(f) + \alpha_1(t)\beta_1(z,\lambda)\right].$$

За індукцією можна показати, що

$$d_{m+1}(t,u,\lambda) \le K^m\left[\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f) + \right.$$
$$\left. + \alpha_m(t)\beta_1(z,\lambda)\right] \quad (25)$$

$m = 0,1,2,\ldots$, де $\alpha_{m+1}(t), \alpha_m(t)$ обчислюються за формулою *(24)*, а $\delta_D(f)$, $\beta_1(z,\lambda)$ визначені згідно *(9)* і *(19)*.

Використовуючи другу оцінку в нерівності *(23)*, із співвідношення *(25)* одержимо:

$$d_{m+1}(t,u,\lambda) \le \overline{\alpha_1}(t)\left[Q^m\delta_D(f) + KQ^{m-1}\beta_1(z,\lambda)\right], \quad (26)$$

$m = 1,2,\ldots$, де матриця

$$Q = \frac{3}{10}TK \quad . \quad (27)$$

Тоді, використовуючи нерівність *(26)*, оцінимо наступну різницю

$$\left|x_{m+j}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)\right| \le$$
$$\le \left|x_{m+j}(t,u,\lambda) - x_{m+j-1}(t,u,\lambda)\right| +$$
$$+ \left|x_{m+j-1}(t,u,\lambda) - x_{m+j-2}(t,u,\lambda)\right| + \ldots +$$
$$\left|x_{m+1}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)\right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{j} d_{m+i}(t,u,\lambda) \le \overline{\alpha_1(t)}\left[\sum_{i=1}^{j}\left(Q^{m+i}\delta_D(f) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + KQ^{m+i-1}\beta_1(z,\lambda)\right)\right] = \overline{\alpha_1(t)}\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f) + \right.$$
$$\left. + KQ^{m-1}\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\beta_1(z,\lambda)\right]. \quad (28)$$

На підставі умови C), максимальне власне значення матриці Q вигляду *(27)* не перевищує 1. Тоді маємо

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i \le \left(I_n - Q\right)^{-1}, \quad \lim_{m\to\infty} Q^m = [0].$$

Тому із нерівності *(28)* можемо зробити висновок, що, згідно із критерієм Коші, послідовність $\{x_m(t,u,\lambda)\}$, що задається формулою *(10)*, рівномірно збігається в області $(t,u,\lambda) \in [0,T] \times U \times \Lambda$ до деякої граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$.

Оскільки функції $x_m(t,u,\lambda)$ послідовності *(10)* задовольняють крайові умови *(6)* при довільних значеннях параметрів, гранична функція $x^*(t,u,\lambda)$ також задовольняє ці умови. Переходячи у формулі *(10)* до границі при $m \to \infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння *(12)*, а отже, інтегро–диференціальне рівняння *(13)*.

Оцінка *(15)* є безпосереднім наслідком нерівності *(28)*.

Існування розв'язків

Виясним зв'язок граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$ з розв'язком крайової задачі *(1)*, *(3)*.

Теорема 2. Нехай виконуються всі умови теореми 1. Тоді розв'язок $x = x(t,u,\lambda)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu, \quad t \in [0,T], \quad \mu \in R^n \quad (29)$$
$$x(0) = z = col(x_{10},\ldots,x_{p0},u_1,\ldots,u_{n-p}) \quad (30)$$

задовольняє крайові умови *(6)* тоді і тільки тоді, коли контрольний параметр $\mu = \Delta(u,\lambda)$, де $\Delta : U \times \Lambda \to R^n$ відображення, визначене формулою *(14)*.

Доведення. Згідно із теоремою Пікара–Ліндельофа легко переконатися, що оскільки має місце умова Ліпшиця *(7)*, то початкова задача *(29)*, *(30)* має єдиний розв'язок для всіх $(\mu, u) \in R^n \times U$. З доведення теореми 1 бачимо, що для всіх $(u,\lambda) \in U \times \Lambda$, гранична функція $x^*(t,u,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,u,\lambda)$ послідовності *(10)* задовольняє інтегральне рівняння *(12)*, а також крайові умови *(6)*. Тобто $x = x^*(t,u,\lambda)$ вигляду *(11)* є єдиним розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)) + \Delta(u,\lambda), \quad t \in [0,T], \quad (32)$$
$$x(0) = z, \quad (33)$$

де $\Delta(u,\lambda)$ задається формулою *(14)*. Отже, *(32)*, *(33)* співпадає з *(29)*, *(30)* при умові, що

$$\mu = \Delta(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds +$$

$$+\frac{1}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right]. \qquad (34)$$

Те, що функція *(11)* не є розв'язком *(29)*, *(30)* ні при яких інших значеннях μ, не рівних *(34)*, випливає з рівності $\mu = \Delta(u,\lambda)$, а це і доводить розглядувану теорему.

Наступне твердження показує відношення граничної функції $x = x^*(t,u,\lambda)$ до розв'язку параметризованої крайової задачі *(1)*, *(6)* або еквівалентної їй задачі *(1)*, *(2)*.

Теорема 3. Нехай для крайової задачі *(1)*, *(2)* виконуються умови А) — С). Тоді функція $x^*(\cdot,u^*,\lambda^*)$ є розв'язком крайової задачі *(1)*, *(6)* з вектором параметрів λ тоді і тільки тоді, коли $u^* = col(u_1^*,\dots,u_{n-p}^*)$ задовольнятиме систему рівнянь

$$\Delta(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,u,\lambda))ds +$$

$$+\frac{1}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right]=0. \qquad (35)$$

Функція $x^*(\cdot,u^*,\lambda^*)$ буде розв'язком вихідної крайової задачі *(1)*, *(2)* тоді і тільки тоді, коли параметри (u^*,λ^*) задовольнятимуть умову *(35)* і, крім того,

$$x_{p+1}^*(t_1,u,\lambda) = d_{p+1},$$

$$\dots$$

$$x_{p+q}^*(t_1,u,\lambda) = d_{p+q},$$

Зауваження 3. На практиці, фіксуємо деяке натуральне m і замість системи *(35)* розглядаємо наближену визначальну систему

$$\Delta_m(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,u,\lambda))ds +$$

$$+\frac{1}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right]=0,$$

$$x_{m,p+1}(t_1,u,\lambda) = z + \int_0^{t_1} f(s,x_{m-1,p+1}(s,u,\lambda))ds -$$

$$-\frac{t_1}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1,p+1}(s,u,\lambda))ds +$$

$$+\frac{t_1}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right] = d_{p+1},$$

$$\dots$$

$$x_{m,p+q}(t_1,u,\lambda) = z + \int_0^{t_1} f(s,x_{m-1,p+q}(s,u,\lambda))ds -$$

$$-\frac{t_1}{T}\int_0^T f(s,x_{p+q}(s,u,\lambda))ds +$$

$$+\frac{t_1}{T}\left[d(\lambda)-(A+I_n)z\right] = d_{p+q},$$

звідки можна отримати наближені значення невідомих параметрів $u^* \approx col(u_{m1},\dots,u_{m,n-p})$, $\lambda^* \approx col(\lambda_{m1},\dots,\lambda_{m,p+q})$ та m–тове наближення до точного розв'язку вихідної триточкової нелінійної крайової задачі $x^*(t,u^*,\lambda^*) \approx x_m(t,u_m,\lambda_m)$.

Список використаних джерел

1. *Самойленко А. М., Ронто М. Й.*, Численно–аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Київ: Наукова думка, 1992. — 279 с.
2. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical analytic methods in the theory of boundary value problems.— River Edge. NS: World Scientific Publishing Co. Inc, 2000. — 455 p.
3. *Ronto M. and Savina T. V.* Numerical–analytic method for three–point boundary–value problems //Math. Zh. — 1994. — No. 3. — P. 393–403.
4. *Ronto M., Tëgen R. M.* Successive approximation method for investigating three point boundary value problem with singular matrices // Mathematica Pannonica. — 1994. — 5, 1. — P. 15–28.
5. *Rontó M.* On non–linear boundary value problems containing parameters //Arch. Math. (Brno).—2000. — **36**.— P. 585–593.

Надійшла до редколегії 02.06.2009