ISSN 1025-6415

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

4 2012

Засновник — Національна академія наук України

Свідоцтво про державну реєстрацію журналу — серія КВ № 8889, видане 21 червня 2004 р.

Адреса редакції:
Україна, 01601, Київ, 1, вул. Терещенківська, 3
Тел. (044) 235-12-16

Інтернет-сторінка:
http://www.nbuv.gov.ua/portal/all/reports/

ікують короткі повідомлення про оригінальні і ніде не надруковані
ıиродознавства і техніки, авторами яких є дійсні члени та члени-коре-
ублікує також повідомлення інших авторів, подані дійсними членами
'країни з відповідної спеціальності, які тим самим беруть на себе від-
. поданої статті.

КРАЇНИ» полягає перш за все в публікації повідомлень про нові наукові
й характер.

блікують статті полемічні, класифікаційні і вузькоспеціальні, що мі-
статті описові, оглядові та методичні (якщо метод не є принципово
, тварин і мікроорганізмів; статті, в яких викладаються окремі етапи
на кілька послідовних публікацій; статті про рядові дослідження, що
не містять значущих висновків.

КРАЇНИ» не перешкоджає опублікуванню розширеного варіанта статті

Доповіді Національної академії наук України

4 • 2012

Науково-теоретичний журнал Президії Національної академії наук України

Заснований у 1939 р.

Виходить щомісяця

УДК 517.927

Н. И. Ронто, Е. В. Маринец

Применение параметризации при численно-аналитическом исследовании решений нелинейных краевых задач

(Представлено академиком НАН Украины Н. А. Перестюком)

Демонстрируется один из возможных подходов для избежания проблем, связанных с использованием численно-аналитической схемы для исследования приближенных решений нелинейных краевых задач. С этой целью предлагается использовать оригинальную идею параметризации и перехода к трансформированным линейным параметризованным краевым условиям, которые не содержат сингулярностей. Для исследования преобразованной краевой задачи обосновывается соответствующая численно-аналитическая схема.

Для исследования существования и приближенного построения решений разных типов краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений широко используются так называемые численно-аналитические методы, основанные на последовательных приближениях [1]. Однако определенные трудности может порождать вырожденность матриц, фигурирующих в линейных двухточечных и трехточечных краевых условиях. В настоящей работе показано, что неудобства такого характера могут быть успешно преодолены с использованием идеи параметризации.

Проанализируем несколько задач с типовыми краевыми условиями.

Пусть требуется исследовать решение системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, x_3)$, функция $f\colon [0, T] \times D \to \mathbb{R}^3$ непрерывна, а множество $D \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ограниченная область, подчиненных двухточечным краевым условиям типа Коши–Николетти:

$$x_1(0) = x_{10}, \qquad x_2(0) = x_{20}, \qquad x_3(T) = x_{3T}. \tag{2}$$

Граничные условия (2) допускают матричную форму записи:

$$Ax(0) + C_1 x(T) = d, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{3T} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица C_1 является вырожденной.

Для того чтобы обойти сингулярность матрицы C_1, заменим значение первых двух компонент решения краевой задачи (1), (3) в точке T параметрами λ_1, λ_2:

$$x_1(T) = \lambda_1, \qquad x_2(T) = \lambda_2. \tag{4}$$

Учитывая равенства (4), краевые условия (3) перепишем в виде

$$Ax(0) + x(T) = d(\lambda) = \mathrm{col}(x_{10} + \lambda_1, x_{20} + \lambda_2, x_{3T}). \tag{5}$$

Здесь, в отличие от (3), матрица при $x(T)$ уже невырожденная.

Заметим, что задача с краевыми условиями типа Коши–Николетти (1), (3) эквивалентна двухточечной краевой задаче (1), (5), рассматриваемой вместе с условиями (4). В результате такой параметризации решение этой краевой задачи может быть изучено на основании однозначно задаваемой последовательности функций $\{x_m(\cdot, z, \lambda)\}_{m=0}^{\infty}$ [2], которая удовлетворяет краевым условиям (5) при произвольных значениях параметров z и λ. Предельная функция этой последовательности будет решением краевой задачи (1), (5) тогда и только тогда, когда неизвестные параметры z и λ будут решением соответствующей системы определяющих уравнений [2].

Идея параметризации полезна и при исследовании задач с многоточечными линейными краевыми условиями, с помощью которой можно осуществить переход к более простого вида двухточечным граничным условиям [3].

Отметим, что рассматриваемый в настоящей работе подход удобно использовать и при исследовании двухточечных краевых задач с нелинейными краевыми условиями. Так, например, в случае краевой задачи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \qquad t \in [0, T], \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$Ax(0) + Cx(T) + g(x(0), x(T)) = d, \qquad d \in \mathbb{R}^n, \qquad \det C \neq 0, \tag{7}$$

где функции $f\colon [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$, $g\colon D \times D \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, а множество $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область, A, C — заданные n-мерные матрицы, d — заданный n-мерный вектор, с помощью параметризации

$$x(T) = \mathrm{col}(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = \mathrm{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

приходим к линейным краевым условиям

$$Ax(0) + Cx(T) = d(z, \lambda), \tag{8}$$

где $d(z, \lambda) := d - g(z, \lambda)$, $z := x(0)$, $\lambda := x(T)$.

Случай нелинейных двухточечных краевых условий. Исследуем более подробно решение системы дифференциальных уравнений (6), подчиненных нелинейным краевым условиям

$$g(x(0), x(T)) = 0, \tag{9}$$

где функция $g\colon D \times D \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, а множество $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область.

Краевую задачу (6), (9) с помощью параметризации вида

$$x(0) = z, \qquad x(T) = \lambda$$

удобно привести к задаче с упрощенными линейными условиями (8), которые в случае рассматриваемой задачи выглядят следующим образом:

$$x(T) = \lambda + g(z, \lambda) = d(z, \lambda). \tag{10}$$

Для исследования решений параметризованной краевой задачи (6), (10) обоснуем соответствующую численно-аналитическую схему.

Сходимость последовательных приближений. На основании заданной функции f в правой части системы дифференциальных уравнений (6) определим векторы

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right],$$

$$\beta := \frac{T}{2}\delta_D(f).$$

Предположим, что для краевой задачи (6), (9) выполняются условия:

A) функция f непрерывна в области $[0,T]\times D$ и удовлетворяет условию Липшица вида

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant K|u - v|,$$

для всех $t \in [0,T]$, $\{u, v\} \subset D$, где $K = (k_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — некоторая постоянная матрица с неотрицательными компонентами;

B) множество

$$D_\beta := \left\{z \in D\colon B\left(z + \frac{t}{T}(d(z,\lambda) - z), \beta\right) \subset D, \forall\, \lambda \in D \text{ и } t \in [0,T]\right\}$$

не пустое;

C) спектральный радиус $r(Q)$ матрицы

$$Q = \frac{3T}{10}K$$

удовлетворяет неравенству

$$r(Q) < 1.$$

Для исследования решений трансформированной краевой задачи (6), (10) введем в рассмотрение последовательность функций

$$x_m(t,z,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))\,ds + \frac{t}{T}[d(z,\lambda) - z], \tag{11}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$, $x_0(t,z,\lambda) = z + (t/T)\cdot(d(z,\lambda) - z) \in D_\beta$, а z и λ рассматриваются как параметры.

Теорема 1. *Пусть для системы дифференциальных уравнений* (6) *выполнены условия A–C. Тогда при всех фиксированных* $\lambda \in D$, $z \in D_\beta$:

1. Все функции последовательности (11) *непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют параметризованным краевым условиям* (10).

2. Последовательность функций (11) *равномерно сходится относительно* $t \in [0, T]$ *при* $m \to \infty$ *к предельной функции*

$$x^*(t, z, \lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z, \lambda). \tag{12}$$

3. Предельная функция x^* *удовлетворяет начальным условиям*

$$x^*(0, z, \lambda) = z,$$

и краевым условиям (10).

4. Предельная функция (12) *для всех* $t \in [0, T]$ *является единственным непрерывно дифференцируемым решением интегрального уравнения*

$$x(t) = z + \int\limits_0^t f(s, x(s))\, ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x(s))\, ds + \frac{t}{T}[d(z, \lambda) - z]$$

или эквивалентной ему задачи Коши для модифицированной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(z, \lambda), \\ &x(0) = z, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\Delta(z, \lambda)\colon D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ — *отображение, задаваемое формулой*

$$\Delta(z, \lambda) := \frac{1}{T}[d(z, \lambda) - z] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x(s))\, ds.$$

5. Справедлива следующая оценка отклонения функции x^* *от ее* m*-го приближения* x_m *для всех* $t \in [0, T]$:

$$|x^*(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda)| \leqslant \frac{20}{9} t\left(1 - \frac{t}{T}\right) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f).$$

Связь предельной функции с решением нелинейной краевой задачи. Вместе с (6) будем рассматривать также уравнение с постоянным возмущением в правой части

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu, t \in [0, T] \tag{14}$$

с начальными условиями (13), где $\mu = \mathrm{col}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — управляющий параметр.

Теорема 2. *Пусть* $z \in D_\beta$ *и* $\lambda \in D$ — *произвольно заданные векторы. Предположим, что удовлетворяются все условия теоремы 1. Тогда решение* $x = x(t, z, \lambda, \mu)$ *начальной задачи* (14), (13) *удовлетворяет параметризованным краевым условиям* (10) *тогда и только* *тогда, когда $x = x(t, z, \lambda, \mu)$ совпадает с предельной функцией $x^* = x^*(t, z, \lambda, \mu)$ последовательности* (11), *и кроме того,*

$$\mu = \frac{1}{T}[d(z, \lambda) - z] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda))\, ds.$$

Теорема 3. *Пусть для краевой задачи* (6), (9) *выполняются условия A–C. Функция $x = x^*(\cdot, z^*, \lambda^*) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(\cdot, z^*, \lambda^*)$ является решением нелинейной краевой задачи* (6), (9) *тогда и только тогда, когда параметры z^*, λ^* удовлетворяют следующей системе алгебраических или трансцендентных уравнений:*

$$\Delta(z, \lambda) = \frac{1}{T}[d(z, \lambda) - z] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda))\, ds = 0, \qquad x^*(T, z, \lambda) = \lambda.$$

Исследования выполнены в рамках проекта TAMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 при поддержке ЕС совместно с Европейским социальным фондом.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Київ: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. *Ронто М. Й., Щобак Н. М., Маринець К. В.* Про параметризацію крайових задач типу Коші–Ніколетті // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2008. – № 16. – С. 163–173.
3. *Маринець К. В.* Дослідження розв'язків триточкових задач типу Коші–Ніколетті та зведення їх до двоточкових // Наук. вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 3. – С. 85–90.

Ужгородский национальный университет
Мишкольцский университет, Венгрия

Поступило в редакцию 04.06.2011

М. Й. Ронто, К. В. Маринець

Застосування параметризації при чисельно-аналітичному дослідженні розв'язків нелінійних крайових задач

Наводиться один з можливих підходів для усунення проблем, пов'язаних з використанням чисельно-аналітичної схеми для дослідження наближених розв'язків нелінійних крайових задач. З цією метою пропонується використовувати оригінальну ідею параметризації і переходу до трансформованих лінійних параметризованих граничних умов, які не містять сингулярностей. Для дослідження перетвореної крайової задачі обгрунтовується відповідна чисельно-аналітична схема.

M. J. Ronto, K. V. Marynets

The application of a parametrization for the numerical-analytic investigation of the solutions of non-linear boundary-value problems

We give one of the possible approaches to the removal of the difficulties that concern the use of the numerical-analytic method of investigation of the approximate solutions of non-linear boundary-value problems. We suggest to use the original idea of parametrization and to pass to the transformed linear parametrized boundary conditions which do not contain singularities. To study the transformed boundary-value problem, we justify a proper numerical-analytic scheme.