Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

Присвячується 40-річчю I Симпозіуму
та літньої математичної школи
з питань точності й ефективності
обчислювальних алгоритмів
(м. Київ, м. Одеса; 1969 рік)

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО СИМПОЗІУМУ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ (ПОО - XXXV)

Том 2

Київ – 2009

УДК 517:518:519:533:534

Праці міжнародного симпозіуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV)", присвяченого 40-річчю 1-го симпозіуму та літньої математичної школи з питань точності й ефективності обчислювальних алгоритмів (м. Київ, м. Одеса; 1969 рік). – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. – Т. 2. – 447 с.

Розглядаються питання побудови оптимальних за складністю (та близьких до них) алгоритмів розв'язання наступних класів задач обчислювальної та прикладної математики: цифрова обробка сигналів, відновлення функцій і функціоналів, розв'язування різних класів рівнянь, системний аналіз і математичне програмування, методи захисту інформації.

Відмінною рисою праць симпозіуму є їх спрямованість на побудову ефективних за різними критеріями алгоритмів, оцінок їх характеристик, порівняльний аналіз за цими характеристиками та розв'язання широкого спектра прикладних задач. Певна увага приділена комп'ютерній технології розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики із заданими значеннями характеристик якості.

Для спеціалістів у галузі обчислювальної та прикладної математики.

Рецензент: член-кореспондент НАН України А.О. Чикрій

ISBN 978-966-02-5230-1
ISBN 978-966-02-5232-5

УДК 517.9

К.В. МАРИНЕЦЬ

Ужгородський національний університет, katya_marinets@ukr.net

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ТРИТОЧКОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ КОШІ – НІКОЛЕТТІ ТА ЗВЕДЕННЯ ЇХ ДО ДВОТОЧКОВИХ

Вступ. На сьогоднішній день теорія крайових задач є одним з розділів диференціальних рівнянь, що активно розвивається. Цей факт пояснюється насамперед тим, що дослідження багатьох реальних процесів та явищ, які мають місце у природі, зводиться до необхідності розв'язування крайових задач і найчастіше нелінійних.

Існують різні методи, які дозволяють встановити розв'язність досліджуваної задачі. Серед цих методів своєю універсальністю виділяється чисельно-аналітичний метод послідовних наближень [1, 2]. Згідно із основною ідеєю цього методу, вихідна крайова задача зводиться до певної збуреної крайової задачі, яка містить невідомі параметри. Розв'язок цієї модифікованої задачі шукається в аналітичній формі, використовуючи послідовні наближення спеціального вигляду. Крім того, збурена задача розглядається разом із, так званою, визначальною алгебраїчною або трансцендентною системою рівнянь, яка дозволяє чисельно обчислити початкові значення розв'язків та параметри, що їм відповідають. Вивчаючи цю визначальну систему рівнянь, встановлюються необхідні та достатні умови існування розв'язку вихідної крайової задачі.

Необхідно відмітити, що схема побудови послідовних наближень на основі чисельно-аналітичного методу істотно залежить від типу заданих диференціального рівняння та крайових умов. Так, наприклад, у випадку триточкових лінійних крайових умов вигляду

$$Ax(0) + A_1x(t_1) + C_1x(T) = d$$

виродженість матриць A, A_1, C_1 суттєво впливає на можливість побудови наближених розв'язків, які задовольняють крайові умови при всіх значеннях невідомих параметрів.

У даній роботі досліджується триточкова крайова задача типу Коші – Ніколетті вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x,\ f \in R^3,\ t \in [0,T],$$

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$x_2(t_1) = x_{2t_1},$$

$$x_3(T) = x_{3T}.$$

Обгрунтовано доцільність зведення цієї задачі до задачі з більш простими крайовими умовами, а саме – двоточковими, за допомогою спеціальної параметризації. Для встановлення розв'язності перетвореної крайової задачі розроблено відповідну модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

1. Постановка задачі та її зведення до двоточкової. Розглядаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\ ,t \in [0,T] \tag{1}$$

з розділеними крайовими умовами типу Коші – Ніколетті

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(t_1) &= x_{2t_1}, \\ x_3(T) &= x_{3T}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $t_1 \in (0,T)$, $f \in C([0,T] \times D,\ R^3)$, $D \subset R^3$ – замкнена обмежена область.

Триточкові крайові умови (2) можна записати у матричній формі

$$Ax(0) + A_1x(t_1) + C_1x(T) = d, \tag{3}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{2t_1} \\ x_{3T} \end{pmatrix}$.

Очевидно, що матриці, що входять у крайові умови (3) є виродженими.

При цьому зауважимо, що безпосереднє застосування відомих схем чисельно-аналітичного методу [1, 3, 4] неможливе або пов'язане зі значними труднощами обчислювального характеру [3].

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, замінимо значення перших двох компонент розв'язку крайової задачі (1), (3) у точці T параметрами λ_1 і λ_2:

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \lambda_1, \\ x_2(T) &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Використовуючи рівності (4), перепишемо триточкові крайові умови (3) у вигляді доточкових:

$$Ax(0) + Cx(T) = d - A_1 x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Введемо позначення $d(\lambda) := d - A_1 x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_{3T} \end{pmatrix}$, де $\lambda := col(\lambda_1, \lambda_2)$.

Перетворені крайові умови (5) можна подати у вигляді

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda). \tag{6}$$

У рівності (6), на відміну від (3), замість виродженої матриці C_1, фігурує невироджена матриця C.

Зауваження. Нелінійна задача з триточковими крайовими умовами типу Коші – Ніколетті (1), (2) еквівалентна двоточковій крайовій задачі (1), (6) разом з умовою (4).

Для дослідження одержаної крайової задачі (1), (6) застосуємо відповідну модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

2. Збіжність послідовних наближень. Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) виконуються такі умови :

а) функція $f(t,x)$ неперервна в області $[0,T] \times D$ і задовольняє умові Ліпшиця вигляду

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le K|x - y|, \text{ для всіх } t \in [0,T], \ \{x,y\} \subset D, \tag{7}$$

де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^3$ – деяка стала матриця з невід'ємними компонентами, $|f(t,x)| = col(|f_1(t,x)|, |f_2(t,x)|, |f_3(t,x)|)$, а також нерівності та операції максимуму та мінімуму між векторами, тут і надалі, розуміються покомпонентно;

б) множина $D_\beta := \{z \in D : B(z, \beta(z,\lambda)) \subset D, \forall \lambda \in I_1 \times I_2\}$ є непорожньою,

де область $B(z, \beta(z,\lambda)) := \{x \in R^3 : |x - z| \le \beta(z,\lambda), \forall \lambda \in I_1 \times I_2\}$, де

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + |d(\lambda) - (A + E)z|, \tag{8}$$

де E – одинична матриця і

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]} f(t,x)\right], \tag{9}$$

де $I_1 \times I_2 := \{\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2) \in R^2 : col(\lambda_1, \lambda_2, x_{3T}) \in D\}$;

в) найбільше власне значення $\lambda_{\max}(K)$ матриці К задовольняє нерівність $\lambda_{\max}(K) < \dfrac{10}{3T}$.

Визначимо множину $U \subset R^2$ наступним чином:

$$U := \{u \in R^2 : col(x_{10}, u_1, u_2) \in D_\beta\}.$$

Розглянемо послідовність функцій $\{x_m(t,u,\lambda)\}$, задану формулою:

$$x_m(t,u,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right], \quad (10)$$

де m=1,2,3,..., $x_0(t,u,\lambda) = col(x_{10}, u_1, u_2) = z \in D_\beta$, $u \in U$, $\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2)$.

Зауваження. Легко бачити, що функції послідовності (10) містять чотири невідомі скалярні параметри : u_1, u_2, λ_1, λ_2. Крім того, функції $x_m(t,u,\lambda)$ задовольняють двоточковим крайовим умовам (6) при довільних значеннях вищеперерахованих параметрів.

Теорема 1. Нехай функція $f : [0,T] \times D \to R^3$ задовольняє умовам *а*) – *в*). Тоді :

послідовність функцій вигляду (10) рівномірно збігається до граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$ при $m \to \infty$ для всіх $(t,u,\lambda) \in [0,T] \times U \times I_1 \times I_2$;

гранична функція

$$x^*(t,u,\lambda) := \lim_{m\to\infty} x_m(t,u,\lambda) \quad (11)$$

є єдиним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right] \quad (12)$$

або, що те ж саме, розв'язком збуреної двоточкової крайової задачі

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(u,\lambda), \\ &Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda) \end{aligned} \quad (13)$$

з початковою умовою при $t = 0$: $x^*(0,u,\lambda) = z = col(x_{10}, u_1, u_2)$,

де

$$\Delta(u,\lambda) := -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s,u,\lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right] \quad (14)$$

справедлива оцінка відхилення функції $x^*(t,u,\lambda)$ від її m–тового наближення $x_m(t,u,\lambda)$ для всіх значень параметрів $u \in U$, $\lambda \in I_1 \times I_2$

$$\left|x^*(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)\right| \le \frac{20}{9} t\left(1 - \frac{1}{T}\right) Q^{m-1}(E - Q^{-1})h, \quad (15)$$

де $Q := \dfrac{3T}{10}K$ і $h := Q\delta_D(f) + K\left|d(\lambda) - (A+E)z\right|$.

Доведення. Доведемо, що послідовність (10) є послідовністю Коші у банаховому просторі $C([0,T], R^3)$. Спочатку покажемо, що $x_m(t,u,\lambda) \in D$, для всіх $(t,u,\lambda) \in [0,T] \times U \times I_1 \times I_2$, $m \in N$.

Справді, використовуючи оцінку леми 4 з [5]

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right] d\tau\right| \le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right], \quad (16)$$

де

$$\alpha_1(t) := 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \ |\alpha_1(t)| \le \frac{T}{2}, \ t \in [0, T], \tag{17}$$

співвідношення (10) при $m = 0$ отримуємо:

$$|x_1(t,u,\lambda)| \le \left|\int_0^t \left[f(t,z) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,s)ds\right]dt\right| + |d(\lambda) - (A+E)z| \le \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z,\lambda) \le \beta(z,\lambda), \tag{18}$$

де

$$\beta_1(z,\lambda) = |d(\lambda) - (A+E)z|. \tag{19}$$

Виходячи з (8), бачимо, що $x_1(t,u,\lambda) \in D$, коли $(t,u,\lambda) \in [0,T] \times U \times I_1 \times I_2$.

За індукцією можна показати, що всі функції (10) також належать множині D, $\forall m = 1,2,\ldots$, $t \in [0,T]$, $u \in U$, $\lambda \in I_1 \times I_2$.

Розглянемо різницю функцій

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda) = \int_0^t [f(s, x_m(s,u,\lambda)) - f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))]ds - \\ - \frac{t}{T}\int_0^T [\ f(s, x_m(s,u,\lambda)) - f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))\ ]ds, \ m = 1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{20}$$

Позначимо $d_m(t,u,\lambda) := |x_m(t,u,\lambda) - x_{m-1}(t,u,\lambda)|$, $m = 1,2,\ldots$.

Використовуючи оцінку леми 2.3 з [2] та беручи до уваги умову Ліпшиця, отримуємо

$$d_{m+1}(t,u,\lambda) \le K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t d_m(s,u,\lambda)ds + \frac{t}{T}\int_t^T d_m(s,u,\lambda)ds\right], \ \forall m = 0,1,2,\ldots \tag{21}$$

На підставі нерівності (18)

$$d_1(t,u,\lambda) = |x_1(t,u,\lambda) - z| \le \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z,\lambda), \tag{22}$$

де $\beta_1(z,\lambda)$ задано формулою (19).

Використовуючи оцінки леми 2.4 з [2]

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}(t) &\le \left(\frac{3}{10}T\right)\alpha_m(t), \\ \alpha_{m+1}(t) &\le \left(\frac{3}{10}T\right)^m \overline{\alpha_1}(t), \end{aligned} \tag{23}$$

для послідовності функцій

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)ds, \ m = 0,1,2,\ldots, \tag{24}$$

$$\alpha_0(t) = 1, \ \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

де $\overline{\alpha_1}(t) := \dfrac{10}{9}\alpha_1(t)$,

а також нерівності (22) і рівність (24), із (21) при $m = 1$ випливає

$$d_2(t,u,\lambda) \le K\delta_D(f)\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds\right] + K\beta_1(z,\lambda)\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t ds + \frac{t}{T}\int_t^T ds\right] \le$$

$$\le K\left[\alpha_2(t)\delta_D(f)+\alpha_1(t)\beta_1(z,\lambda)\right].$$

За індукцією можна показати, що

$$d_{m+1}(t,u,\lambda)\le K^m\left[\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f)+\alpha_m(t)\beta_1(z,\lambda)\right],\quad m=0,1,2,..., \tag{25}$$

де $\alpha_{m+1}(t),\alpha_m(t)$ обчислюються за формулою (24), а $\delta_D(f)$, $\beta_1(z,\lambda)$ визначені згідно (9) і (8).

Використовуючи другу оцінку в нерівності (23), із співвідношення (25) одержимо:

$$d_{m+1}(t,u,\lambda)\le \overline{\alpha_1}(t)\left[Q^m\delta_D(f)+KQ^{m-1}\beta_1(z,\lambda)\right],\quad \forall m=1,2,..., \tag{26}$$

де матриця

$$Q=\frac{3}{10}TK. \tag{27}$$

Тоді, використовуючи нерівність (26), розглянемо наступну різницю:

$$\begin{aligned}
&\left|x_{m+j}(t,u,\lambda)-x_m(t,u,\lambda)\right|\le\left|x_{m+j}(t,u,\lambda)-x_{m+j-1}(t,u,\lambda)\right|+\\
&+\left|x_{m+j-1}(t,u,\lambda)-x_{m+j-2}(t,u,\lambda)\right|+...+\left|x_{m+1}(t,u,\lambda)-x_m(t,u,\lambda)\right|=\\
&=\sum_{i=1}^{j}d_{m+i}(t,u,\lambda)\le\overline{\alpha_1(t)}\left[\sum_{i=1}^{j}\left(Q^{m+i}\delta_D(f)+KQ^{m+i-1}\beta_1(z,\lambda)\right)\right]=\\
&=\overline{\alpha_1(t)}\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f)+KQ^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\beta_1(z,\lambda)\right].
\end{aligned} \tag{28}$$

На підставі умови в), максимальне власне значення матриці Q вигляду (27) не перевищує 1. Тоді маємо

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\le\left(I_n-Q\right)^{-1},\quad \lim_{m\to\infty}Q^m=[0].$$

Тому із нерівності (28) можемо зробити висновок, що згідно із критерієм Коші, послідовність $\{x_m(t,u,\lambda)\}$, що задається формулою (10), рівномірно збігається в області $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I_1\times I_2$ до деякої граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$.

Оскільки функції $x_m(t,u,\lambda)$ послідовності (10) задовольняють крайові умови (6) при довільних значеннях параметрів, гранична функція $x^*(t,u,\lambda)$ також задовольняє ці умови. Переходячи у формулі (10) до границі при $m\to\infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (12), а отже, інтегро-диференціальне рівняння (13).

Оцінка (15) є безпосереднім наслідком нерівності (28).

3. Існування розв'язків. Вияснимо зв'язок граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$ з розв'язком крайової задачі (1), (3).

Теорема 2. Нехай виконуються всі умови теореми 1. Тоді розв'язок $x=x(t,u,\lambda)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\mu,\quad t\in[0,T],\ \mu\in R^3 \tag{29}$$

$$x(0)=z=col(x_{10},u_1,u_2) \tag{30}$$

задовольняє крайовим умовам (6) тоді і тільки тоді, коли контрольний параметр $\mu=\Delta(u,\lambda)$, де $\Delta:U\times I_1\times I_2\to R^3$ відображення, визначене формулою (14).

Доведення. Згідно із теоремою Пікара – Ліндельофа легко переконатися, що оскільки має місце умова Ліпшиця (7), то початкова задача (29), (30) має єдиний розв'язок для всіх $(\mu,u)\in R^3\times U$. З доведення теореми 1 бачимо, що для всіх $(u,\lambda)\in U\times I_1\times I_2$, гранична функція $x^*(t,u,\lambda)=\lim\limits_{m\to\infty}x_m(t,u,\lambda)$ послідовності (10) задовольняє інтегральне рівняння (12), а також крайові умови (6). Тобто $x = x^*(t,u,\lambda)$ вигляду (11) є єдиним розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \Delta(u,\lambda), \quad t \in [0,T], \tag{32}$$

$$x(0) = z, \tag{33}$$

де $\Delta(u,\lambda)$ задається формулою (14). Отже, (32), (33) збігається з (29), (30) при умові, що

$$\mu = \Delta(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right]. \tag{34}$$

Те, що функція (11) не є розв'язком (29), (30) ні при яких інших значеннях μ, не рівних (34), випливає з рівності $\mu = \Delta(u,\lambda)$, а це і доводить розглядувану теорему.

Наступне твердження показує відношення граничної функції $x = x^*(t,u,\lambda_1,\lambda_2)$ до розв'язку параметризованої крайової задачі (1), (6) або еквівалентної їй задачі (1), (2).

Теорема 3. Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови а) – в). Тоді трійка $\left(x^*(\cdot,u^*,\lambda^*),\lambda^*\right)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (6) тоді і тільки тоді, коли четвірка $(u^*,\lambda^*) = col(u_1^*,u_2^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)$ задовольнятиме системі рівнянь

$$\Delta(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s,u,\lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right] = 0. \tag{35}$$

Доведення. Достатньо застосувати теорему 2 і зауважити, що диференціальне рівняння (32) збігається з (1) тоді і тільки тоді, коли пара (u^*,λ^*) задовольняє рівнянню $\Delta(u^*,\lambda^*) = 0$, тобто, коли виконується рівність (35).

Зауваження. На практиці, фіксуємо деяке натуральне m і замість системи (35) розглядаємо наближену визначальну систему

$$\Delta_m(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,u,\lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right] = 0,$$

$$x_{m2}(t_1,u,\lambda) = z + \int_0^{t_1} f(s, x_{m-1,2}(s,u,\lambda))ds - \frac{t_1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1,2}(s,u,\lambda))ds + \frac{t_1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right] = x_{2t_1},$$

звідки можна отримати наближені значення невідомих параметрів $u^* \approx col(u_{m1},u_{m2})$, $\lambda^* \approx col(\lambda_{m1},\lambda_{m2})$ та m-тове наближення до точного розв'язку вихідної триточкової нелінійної крайової задачі $x^*(t,u^*,\lambda^*) \approx x_m(t,u_m,\lambda_m)$.

1. Самойленко А.М., Ронто М.Й. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. Ronto M., Samoilenko A.M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary value problems. – River Edge. NS: World Scientific Publishing Co. Inc, 2000. – 455 p.
3. Ronto M. and Savina T.V. Numerical-analytic method for three-point boundary-value problems // Math. Zh. – 1994. – N. 3. – P. 393–403.
4. Ronto M., Tégen R.M. Successive approximation method for investigating three point boundary value problem with singular matrices // Mathematica Pannonica. – 1994. – Vol. 5, 1. – P. 15–28.
5. Rontó M. On non-linear boundary value problems containing parameters // Arch. Math. (Brno). – 2000. –Vol. 36. – P. 585–593.