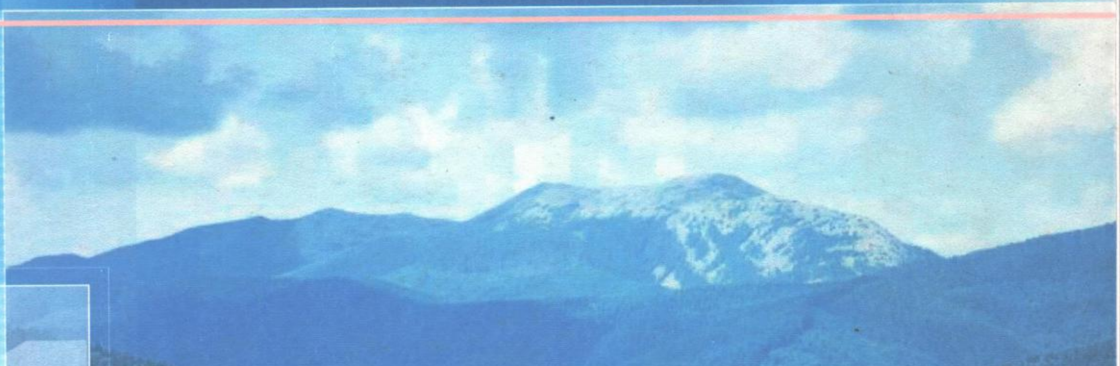
ПОСТУП В НАУКУ

Матеріали міжнародної проблемно-наукової міжгалузевої конференції

"ІНФОРМАЦІЙНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ, ЮРИСПРУДЕНЦІЇ, ЕНЕРГЕТИКИ, ЕКОНОМІКИ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ" (ПНМК - 2011)



Випуск №7

Бучач 2011

Поступ в науку. Збірник наукових праць Бучацького інституту менеджменту і аудиту . - Бучач. - 2011. - №7. 447 с. ББК 65.050 (4 УКР)

Адреса редакції:

Бучацький інститут менеджменту і аудиту
вул. Б. Хмельницького 8, м. Бучач, Тернопільська обл., Україна, 48400

Контактний телефон
тел. (803544) 2-63-92
e-mail: konf_buch@hotmail.com
e-mail: bima@buc.tr.ukrtel.net

УДК 517.927

М. Ронто, К. В. Маринець
Institute of Mathematics, University of Miskolc, matronto@gold.uni-miskolc.hu
Ужгородський національний університет, katya_marinets@ukr.net

Про дослідження крайової задачі з двоточковими нелінійними граничними умовами

Одержано деякі результати, що стосуються дослідження розв'язків нелінійних крайових задач певного типу, підпорядкованих двоточковим нелінійним граничним умовам. Показана ефективність зведення даної задачі до параметризованої крайової задачі з лінійними граничними умовами, які містять деякі штучно введені параметри. Для вивчення перетвореної двоточкової задачі обґрунтовано метод, який базується на спеціального типу наближеннях, побудованих в аналітичної формі. Доведена рівномірна збіжність цих апроксимацій до параметризованої граничної функції та встановлено її зв'язок з точним розв'язком. Дана техніка приводить до певної системи алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких дають нам ті чисельні значення параметрів, які відповідають розв'язку заданої двоточкової нелінійної крайової задачі. Подібні задачі розглядалися в [1, 2].

Постановка задачі. Розглядається нелінійна двоточкова крайова задача з нелінійними граничними умовами наступного вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Ax(0) + Cx(T) + g(x(0), x(T)) = d, \quad d \in R^n, \quad \det C \neq 0, \tag{2}$$

де функції $f : [0,T] \times D \to R^n$, $g : D \times D \to R^n$ $(n \geq 2)$ неперервні, а множина $D \subset R^n$ — замкнена обмежена область, A, C — задані квадратні n–вимірні матриці, d — заданий n–вимірний вектор.

Задача полягає у знаходженні неперервно–диференційовного на проміжку $[0,T]$ розв'язку системи диференціальних рівнянь (1), який задовольняє нелінійні граничні умови (2). Покажемо, що замість крайової задачі (1), (2) доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (1) при певних параметризованих двоточкових крайових умовах, до яких треба приєднати відповідну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь для визначення числових значень введених параметрів.

Перехід за допомогою параметризації до задачі з лінійними крайовими умовами. Замінимо значення компонент розв'язку задачі (1), (2) у точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$x(T) = col(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = col(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{3}$$

Використовуючи параметризацію (3), нелінійні крайові умови (2) запишуться у вигляді:

$$Ax(0) + Cx(T) = d - g(x(0), \lambda). \tag{4}$$

Введемо позначення:

$$d(z, \lambda) := d - g(z, \lambda), \tag{5}$$

де

$$z := x(0), \quad \lambda := x(T). \tag{6}$$

Тоді параметризовані крайові умови (4) виглядатимуть так:

$$Ax(0) + Cx(T) = d(z, \lambda). \tag{7}$$

Врахувавши (7), замість крайової задачі (1), (2) розглядатимемо еквівалентну їй параметризовану крайову задачу з лінійними граничними умовами вигляду (1), (7).

Зауваження 1. Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (1), (2) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1), (7), які задовольняють додатковим умовам (3).

Для дослідження розв'язків модифікованої крайової задачі (1), (7) обґрунтуємо відповідну чисельно–аналітичну схему, яка базується на методі послідовних наближень [3].

Збіжність послідовних наближень. На основі заданої функції f у правій частині системи диференціальних рівнянь (1) визначимо вектор:

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right], \tag{8}$$

для якого справедлива нерівність:

$$\delta_D(f) \le \max_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f(t,x)|.$$

У рівності (8), а також в аналогічних співвідношеннях нижче,знаки $|\cdot|$, $\le$, $\ge$, операції *max, min* між векторами розуміються покомпонентно. Для $z \in D$, $\lambda \in D$ вигляду (6) введемо в розгляд вектор $\beta : D \times D \to R^n$:

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + \left|C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right|, \tag{9}$$

де I_n — одинична матриця розмірності n.

Припускаємо, що для крайової задачі (1), (2) виконуються наступні умови:

А) функція $f(t,x)$ неперервна в області $[0,T] \times D$ і задовольняє умову Ліпшиця вигляду:

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K|u - v|, \tag{10}$$

для всіх $t \in [0,T]$, $\{u,v\} \subset D$, де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^n$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами;

В) множина

$$D_\beta := \left\{z \in D : B(z, \beta(z,\lambda)) \subset D, \text{для всіх } \lambda \in D \subset R^n\right\}$$

є непорожньою, де β — окіл $B(z,\beta(z,\lambda))$ точки $z \in D$, що визначена наступним чином:

$$B(z,\beta(z,\lambda)) := \left\{x \in R^n : |x - z| \le \beta(z,\lambda), \text{ для всіх } \lambda \in D \subset R^n\right\};$$

С) спектральний радіус $r(K)$ матриці K задовольняє нерівність:

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{11}$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1), (7) вводиться послідовність функцій $\{x_m(t,z,\lambda)\}$, яка визначається рекурентним співвідношенням:

$$x_m(t,z,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds +$$
$$+ \frac{t}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] \tag{12}$$

де $m = 1,2,3,...$, $x_0(t,z,\lambda) = col(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n} = z \in D_\beta)$, $\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in D_\beta$, $x_m(t,z,\lambda) = col(x_{m,1}(t,z,\lambda), x_{m,2}(t,z,\lambda), ..., x_{m,n}(t,z,\lambda))$, а z і λ розглядаються як параметри.

Легко переконатися, що для всіх $m \ge 1$, $\lambda \in D$ та $z \in D_\beta$, функції $x_m(t,z,\lambda)$ задовольняють лінійні двоточкові крайові умови (7) та початкові умови

$$x_m(0,z,\lambda) = z.$$

Встановлена рівномірна збіжність послідовності функцій (12) та співвідношення її граничної функції до розв'язку вихідної нелінійної крайової задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай функція* $f : [0,T] \times D \to R^n$ *у правій частині системи диференціальних рівнянь (1), а також параметризовані крайові умови (7) задовольняють умови А)—С).*

Тоді при всіх фіксованих $\lambda \in D$, $z \in D_\beta$:

1. *Всі функції послідовності (12) неперервно−диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови (7):*

$$Ax_m(0,z,\lambda) + Cx_m(T,z,\lambda) = d(z,\lambda), \tag{13}$$

$m = 1,2,3,...$.

2. Послідовність функцій (12) рівномірно збігається відносно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$ до граничної функції

$$x^*(t,z,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\lambda). \tag{14}$$

3. Гранична функція $x^*(t,z,\lambda)$ задовольняє початкові умови

$$x^*(0,z,\lambda) = z,$$

а також параметризовані двоточкові лінійні крайові умови

$$Ax^*(0,z,\lambda) + Cx^*(T,z,\lambda) = d(z,\lambda).$$

4. Гранична функція (14) для всіх $t \in [0,T]$ є єдиним неперервно−диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_0^t f(s,x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds + \frac{t}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right], \tag{15}$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)) + \Delta(z,\lambda), \tag{16}$$

$$x(0) = z, \tag{17}$$

де $\Delta(z,\lambda): D_\beta \times D \to R^n$ — відображення, визначене формулою:

$$\Delta(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds. \tag{18}$$

5. Справедлива оцінка відхилення функції $x^*(t,z,\lambda)$ від її m−го наближення $x_m(t,z,\lambda)$ для всіх $t \in [0,T]$:

$$\left|x^*(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)\right| \le \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)Q^{m-1}(I_n - Q^{-1})h, \tag{19}$$

де

$$h = h(z,\lambda) := Q\delta_D(f) + K\left|C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right|, \tag{20}$$

$$Q := \frac{3T}{10}K. \tag{21}$$

Зв'язок граничної функції з розв'язком нелінійної крайової задачі. Поряд із системою (1) розглянемо також рівняння з постійним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)) + \mu, \quad t \in [0,T], \tag{22}$$

з початковими умовами

$$x(0) = z, \tag{23}$$

де $\mu = col(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ є керуючим параметром. Покажемо, що для довільного фіксованого $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$, параметр μ можна вибрати так, що розв'язок $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ початкової задачі (22), (23) в той же час є розв'язком двоточкової параметризованої крайової задачі (22), (7).

Теорема 2. *Нехай $z \in D_\beta \subset D$ та $\lambda \in D$ — довільно задані вектори. Припустимо, що виконуються всі умови Теореми 1.*

Тоді розв'язок $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ початкової задачі (22), (23) задовольняє крайові умови (7) тоді і тільки тоді, коли $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ співпадає з граничною функцією $x^*(t,z,\lambda)$ послідовності (12). Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x^*(s,z,\lambda)\right)ds. \tag{24}$$

З'ясуємо відношення граничної функції $x = x^*(t,z,\lambda)$ послідовності (12) до розв'язку параметризованої крайової задачі (1), (7) або еквівалентної їй задачі (1), (2).

Теорема 3. *Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови A)—C).*

Тоді пара $\left(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*\right)$ *є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (7) тоді і тільки тоді, коли* $z^* = \left(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*\right)$, $\lambda^* = \left(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*\right)$ *задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:*

$$\Delta(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x^*(s,z,\lambda)\right)ds = 0, \tag{25}$$

$$x^*(T,z,\lambda) = \lambda. \tag{26}$$

Зауваження 2. Основна складність реалізації даного методу пов'язана з відшуканням граничної функції $x^*(\cdot,z,\lambda)$. Однак у більшості випадків ця проблема може бути розв'язана, використовуючи властивості наближеного розв'язку $x_m(\cdot,z,\lambda)$, побудованого в аналітичній формі.

При деякому $m \geq 1$ визначимо функцію $\Delta_m : D_\beta \times D \to R^n$ згідно формули:

$$\Delta_m(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_m(s,z,\lambda)\right)ds, \tag{27}$$

де z та λ задаються співвідношеннями (6). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1), (7) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних рівнянь, що має вигляд:

$$\Delta_m(z,\lambda) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_m(s,z,\lambda)\right)ds = 0, \tag{28}$$

$$x_m(T,z,\lambda) = \lambda, \tag{29}$$

де $x_m(\cdot,z,\lambda)$ — вектор−функція, задана рекурентним співвідношенням (12). Із зростанням m системи (25), (26) та (28), (29) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься потрібна точність відшукання наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2).

Для крайової задачі (1), (2) були також доведені необхідні умови розв'язності та достатні умови існування розв'язків, а також наведені певні зауваження щодо практичної реалізації розглядуваного методу.

Доцільність використання даної методики, а також точність відшукання наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2) були перевірені на ілюстративному прикладі.

Список джерел

1. Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай. Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями// УМЖ—Том 42, №7.—1990.—951—957 с.
2. Ronto A., Ronto M. On the investigation of some boundary−value problems with non−linear boundary conditions // Miskolc: Math. Notes.— 2000.— Vol.1, No.1.— P. 43−55.
3. Ронто М. Й., Щобак Н. М., Маринець К. В. Про параметризацію крайових задач типу Коші−Ніколетті // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика.— № 16.— 2008.— 163−173 с.