УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).146-154

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

ЕКВАЦІОНАЛЬНІ КЛАСТЕРИ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У роботі продовжується екваціональне дослідження в класі булевих алгебр. Розглядається клас алгебр, який включає в себе всі алгебри з нульарними, унарними та бінарними операціями. Вводяться нові поняття сигнатурних тотожностей та екваціонального кластеру. Це дає можливість розбити множину алгебр M_{11} на кластери. Алгебри, які знаходяться в першому кластері дають можливість виражати повну систему тотожностей однієї алгебри через іншу, використовуючи сигнатурні тотожності.

Ключові слова: повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, екваціональний кластер.

1. Вступ. У роботі проводяться дослідження класу універсальних булевих алгебр класу M_{11}. У роботі [1] дане повне описання класу нульарних алгебр, алгебр Булевого кубу та кубу Жегалкіна. У роботах [2, 3, 4] приведені екваціональні решітки функціонально повних і неповних алгебр класу M_{11}, знайдені повні системи тотожностей для класу алгебр M_6. Клас алгебр M_6 включає в себе всі алгебри сигнатура яких може мати тільки операції 0, 1, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$.

У даній роботі проводяться екваціональні дослідження функціонально неповних алгебр класу M_{11}, вивчено 22 кластери з 24.

2. Основні результати. Нехай задано клас універсальних булевих алгебр $M = \{U = \langle A, \Omega\rangle\,;\ A = \{0,1\}\,;\ \Omega$ — деяка множина булевих операцій$\}$. Позначимо через $R(U)$ множину всіх тотожностей алгебри U.

Означення 1. *Алгебри U_1 і U_2 називаються екваціонально еквівалентними, якщо $R(U_1) = R(U_2)$.*

Означення 2. *Алгебра U_1 екваціонально вкладається в алгебру U_2, якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$.*

Твердження 1. *Якщо алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1\rangle$ екваціонально вкладається в алгебру $U_2 = \langle A, \Omega_2\rangle$, то $\Omega_1 \subset \Omega_2$.*

Доведення. Якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$, а $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$, то в алгебрі U_1 можемо побудувати формулу $F(\varphi)$, яка містить операцію $\varphi \in \Omega_1 - \Omega_2$. У цьому випадку тотожність $F(\varphi) = F(\varphi) \notin R(U_2)$.

Нехай $R(U_1) \subset R(U_2)$.

Означення 3. *Тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$ називається сигнатурною, якщо $F_2(\varphi)$ — формула, яка реалізує операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$, а $F_1(\psi)$ — формула, яка належить алгебрі U_1.*

Наприклад, якщо $U_1 = \langle A, \neg, \vee, \wedge \rangle$, $U_2 = \langle A, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow \rangle$, то сигнатурні тотожності мають вигляд: $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$; $x \Leftrightarrow y = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy$.

Означення 4. *Алгебра $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ називається екваціональним розширенням алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$, якщо $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існує сигнатурна тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1)$.*

Множину таких сигнатурних тотожностей позначимо через $R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Означення 5. *Система тотожностей $H \subset R(U_1)$ називається повною в U_1, якщо використовуючи операцію суперпозиції можна довести довільну тотожність до лексикографічної рівності, використовуючи тільки тотожності з H.*

Твердження 2. *Якщо для алгебри U_1 знайдеться повна система тотожностей $H(U_1)$, а алгебра $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ є екваціональним розширенням U_1, то $H(U_2) = H(U_1) \bigcup R(\Omega_2 - \Omega_1)$.*

Доведення. Доведення твердження випливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ з формул алгебри U_2, звести їх до формул алгебри U_1, для якої знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$.

Означення 6. *Алгебри $U_1, U_2, \ldots, U_t \in M$ утворюють екваціональний кластер K, якщо в множині K існує така алгебра U^*, що $\forall U_i \in K$ існує така послідовність алгебр $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_l} \in K$, що $R(U_1) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \subset \ldots \subset R(U_{i_l}) = R(U^*)$, і $\forall U_t \notin K, R(U_t) \not\subset R(U^*)$.*

Означення 7. *Алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ називається екваціональним звуженням алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, якщо $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існує сигнатурна тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1)$.*

Якщо алгебра U_1 є екваціональним звуженням алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, і для алгебри U_2 знайдена повна система тотожностей $H(U_2)$, то за допомогою сигнатурних тотожностей можемо ввести в сигнатуру алгебри U_1 операції $\Omega_2 - \Omega_1$.

У даній роботі проводяться екваціональні дослідження класу алгебр M_{11}, який включає в себе всі алгебри, сигнатури яких складаються з усіх унарних операцій арність яких не перевищує два.

0	xy	$x \Leftarrow y$	x	$y \Leftarrow x$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \uparrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$\overline{y}$	$y \Rightarrow x$	$\overline{x}$	$x \Rightarrow y$	$y \vert x$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Пари функцій $\bar{x}$ і $\bar{y}$; $y \Rightarrow x$ і $x \Rightarrow y$; $x \Leftarrow y$ і $y \Leftarrow x$ задають одну операцію. Таким чином, 16 функцій задають 11 операцій.

У даній роботі досліджується клас універсальних алгебр

$$M_{11} = \left\{ U = \langle A, \Omega \rangle \,, A = \{0, 1\} \,, \, \Omega = \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, |, \uparrow\} \right\}.$$

Клас алгебр M_{11} розіб'ємо на чотири підкласи $M_{11} = M_{11}^1 \bigcup M_{11}^2 \bigcup M_{11}^3 \bigcup M_{11}^4$, де M_{11}^1 — множина всіх алгебр в сигнатуру яких не входять стрілка Пірса та штрих Шеффера, M_{11}^2 — входить стрілка Пірса і не входить штрих Шеффера, M_{11}^3 — входить штрих Шеффера і не входить стрілка Пірса, M_{11}^4 — входить стрілка Пірса та штрих Шеффера.

Розглянемо клас алгебр

$$M_{11}^1 = \{U = \langle A, \Omega \rangle \,, A = \{0, 1\} \,, \Omega = \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus, \Rightarrow, \not\Rightarrow, \Leftrightarrow\}\} \,.$$

Алгебри цього класу утворюють дев'ятимірний сигнатурний куб. До складу цього кубу входять 512 алгебр. Кожна вершина кубу однозначно визначається сигнатурою, яку іноді позначають числом, що є розкладом за степенем двійки.

У роботі [1] детально вивчено структуру цього сигнатурного кубу. Розіб'ємо клас алгебр M_{11}^1 на два сигнатурні графи, які представляють функціонально неповні та функціонально повні алгебри, зображені на рис. 1, 2.

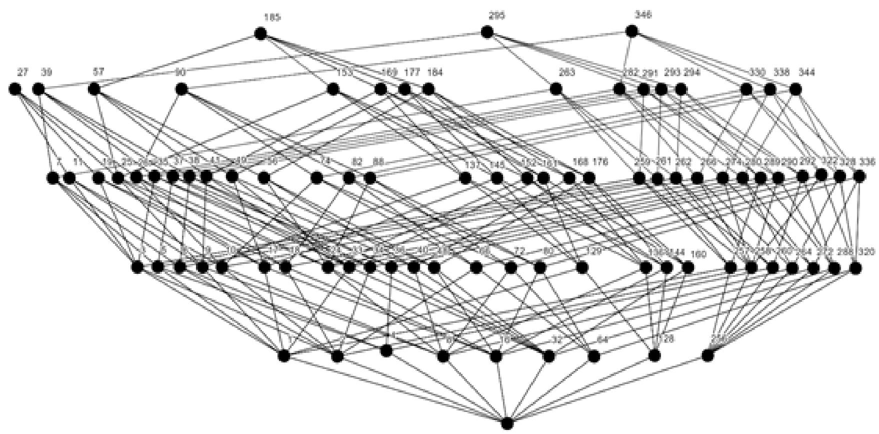

Рис. 1. Функціонально неповні алгебри класу M_{11}^1.

Екваціональні кластери зручно представляти у вигляді сигнатурно-еквіваціональних графів. Вершинами кластеру є алгебри, які входять до складу кластеру, а ребра позначають сигнатурними тотожностями, які з'єднують пари алгебр, одне з яких є екваціональним розширенням (звуженням) іншої. Всього в класі алгебр M_{11} побудовано двадцять п'ять кластерів. Вісімдесят вісім функціонально неповних алгебр розподілені по двадцяти чотирьох кластерах: чотирнадцять одноелементних, два двохелементних, один трьохелементний, два чотирьохелементних, один двадцятиелементний, два вісімнадцятиелементних. Отже 424 елементний кластер об'єднує всі функціонально повні алгебри.

Екваціональний кластер має алгебру, що має максимальну сигнатуру U^* і декілька елементів з мінімальною сигнатурою. Екваціональні кластери дають можливість:

А) знаходити повні системи тотожностей для алгебр екваціонального кластеру;
Б) передавати проблему $F_1 = F_2 \in R(U_1)$ для алгебри для якої не знайдено повну систему тотожностей алгебрі U_2, для якої повні системи тотожностей знайдені.

Екваціональні кластери поділяються на три типи:

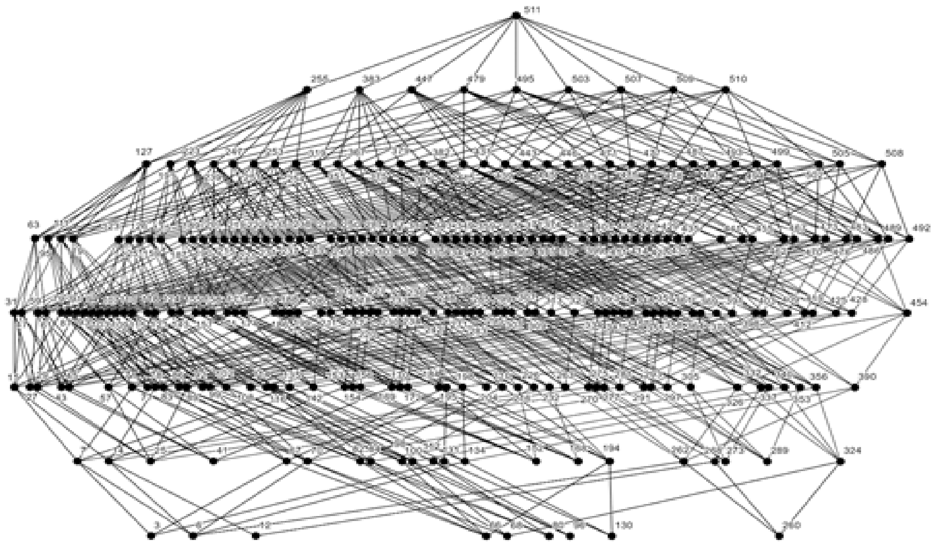

Рис. 2. Функціонально повні алгебри класу M_{11}^1.

1) Кластери для яких виконано повне екваціональне описання. У цих кластерах для кожної алгебри знайдено повні системи тотожностей.
2) Кластери в яких виконано часткове екваціональне описання. Знайдена повна система тотожностей принаймні для однієї алгебри кластеру.
3) Кластери, в яких виконано початкове екваціональне описання: знайдені сигнатурні тотожності кластеру. Не знайдено жодної повної системи тотожностей для алгебри цього кластеру.

У роботі [2] побудовані повні ситеми тотожностей для алгебр одноелементних кластерів. У цій же роботі знайдені повні системи тотожностей в першому двохелементному кластері, і в трьохелементному кластері. У класі M_{11} маємо два двохелементні кластери, один трьохелементний та два чотирьохелемнтних кластери.

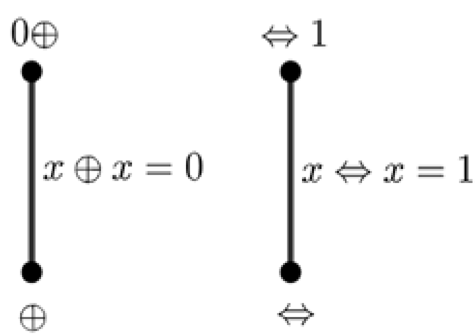

Рис. 3. Двохелементні кластери.

У чотирьохелементних кластерів виконано тільки початкове екваціональне описання, тобто не знайдена повна система тотожностей для жодної з восьми

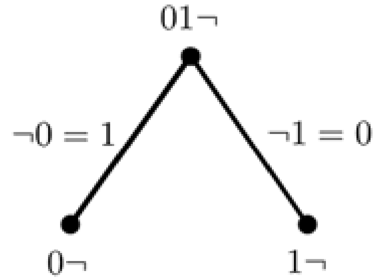

Рис. 4. Трьохелементний кластер.

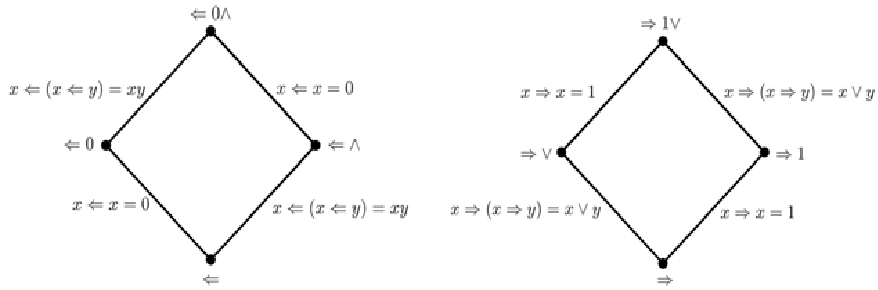

Рис. 5. Чотирьохелементні кластери.

алгебр. Знайдемо повні системи тотожностей для другого двохелементного кластеру. Перейдемо до знаходження повних систем тотожностей другого двохелементного кластеру.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle$. Повна система тотожностей:

1) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$;
2) $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
3) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
4) $x \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = y$;
5) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow x) = x \Leftrightarrow y$.

1. Тотожність (3) дає можливість опустити дужки у доданках алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle$.
2. З тотожностей (1), (5) випливає, що формула $x \Leftrightarrow x$ є окремою формулою, або вона поглинається іншими формулами. Тому довільна формула алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle$ або співпадає з формулою $x \Leftrightarrow x$ або має вигляд $x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k}$.

Нехай $F_1 = F_2 \in R(U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle)$. Покажемо, що $F_1 = x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k} = F_2 = x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{j_l}$, якщо вони лексикографічно співпадають. Допустимо, що $x_{i_1} \in F_1$, а $x_{j_1} \notin F_2$, тоді на наборі $x_{i_1} = 0$, а решта змінних рівна одиниці, формула $F_1 = 0$, а формула $F_2 = 1$. Тобто формула $F_1 = F_2 \notin R(U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle)$. Таким чином, знайдена повна ситема тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle$.

Повну систему тотожностей алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow, 1\rangle$ можемо отримати з $R(U = \langle A, \Leftrightarrow\rangle)$ через тотожність $1 = x \Leftrightarrow x$.

Випишемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow\rangle$:

1) $0 \Leftrightarrow 0 = x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
2) $0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 0 = x$;
3) $0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 0 = 0$;
4) $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$
5) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
6) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$.

За допомогою цих тотожностей для довільних формул F алгебри $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow\rangle$ можна побудувати тотожності формул, в яких кожна змінна і 0 будуть зустрічатися не більше одного разу. Тоді в цій алгебрі існують формули тільки двох типів:

$$0 \Leftrightarrow x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k}, \quad x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{j_l}.$$

Легко показати, що якщо лексикографічно приведені формули не співпадають, то існує набір, на якому вони приймають різні значення.

Покажемо, що повною системою тотожностей для алгебри $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow\rangle$ є така система рівностей:

1) $\bar{\bar{x}} = x$;
2) $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
3) $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$;
4) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
5) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$;
6) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{x} \Leftrightarrow y$;
7) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{x} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \overline{y}$;
8) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{y}$;
9) $x \Leftrightarrow \overline{x} = y \Leftrightarrow \overline{y}$;
10) $x_1 \Leftrightarrow \overline{x_2} \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \overline{x_4} = x_1 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \overline{x_2} \Leftrightarrow \overline{x_4}$;
11) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y = \bar{y}$.

Використовуючи формули (1) і (6) отримаємо формули, у яких заперечення зустрічається тільки над змінними і не більше одного разу. Тотожність (10) дає можливість отримати формули, які мають не більше одного заперечення.

У даній алгебрі існує тільки три типи формул:

1) $x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k}$;
2) $\overline{x_{i_1}} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k}$;
3) $x_{i_1} \Leftrightarrow \overline{x_{i_2}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k}$.

Для кожної з цих формул можемо знайти набір, на якому вона приймає протилежне значення до формули з якою вона лексикографічно не співпадає.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus\rangle$. Повна система тотожностей:

1) $x \oplus x = y \oplus y$;
2) $x \oplus x \oplus x = x$;
3) $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \Leftrightarrow y$;
4) $(x \oplus x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \oplus y$;
5) $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \oplus y) = x \Leftrightarrow y$;
6) $x \Leftrightarrow x \oplus y = x \oplus x \Leftrightarrow y$;
7) $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$;
8) $(x \Leftrightarrow y) \oplus (x \Leftrightarrow z) = y \oplus z$;
9) $(x \Leftrightarrow y) \oplus z = x \Leftrightarrow (y \oplus z)$;

10) $x \oplus y \Leftrightarrow z \oplus u = x \oplus y \oplus z \Leftrightarrow u$;
11) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
12) $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$.

Тотожності (9), (11), (12) дають можливість опустити всі дужки у формулах цієї алгебри. Тотожності (3) і (5) опускають формулу $x \Leftrightarrow x$, а тотожності (2) і (4) формулу $x \oplus x$. Формула (10) дає можливість перенести доданки через операцію $\Leftrightarrow$.

У результаті використання цих тотожностей формулу F можна звести до вигляду: $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} \Leftrightarrow x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{i_k}$.

Тотожність (7) дає можливість отримати формули, в яких жодна змінна не може одночасно належати $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ і $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{i_k}\}$.

Легко показати, якщо у формулах F_1 і F_2, отриманих в результаті цих перетворень, $x_i \in F_1$ і $x_i \notin F_2$, то існує набір α, що $x_i = 0$, а всі інші змінні дорівнюють одиниці. На цьому наборі $F_1(\alpha) = 0$, а $F_2(\alpha) = 1$, тобто $F_1 = F_2 \in R(U)$, якщо вони лексикографічно співпадають.

Таким чином, знайдені повні системи тотожностей для всіх мінімальних алгебр кластера: $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$, $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$, $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$, $U = \langle A, \neg, \oplus \rangle$. Ми виконали повне екваціональне описання двадцятиелементного кластера.

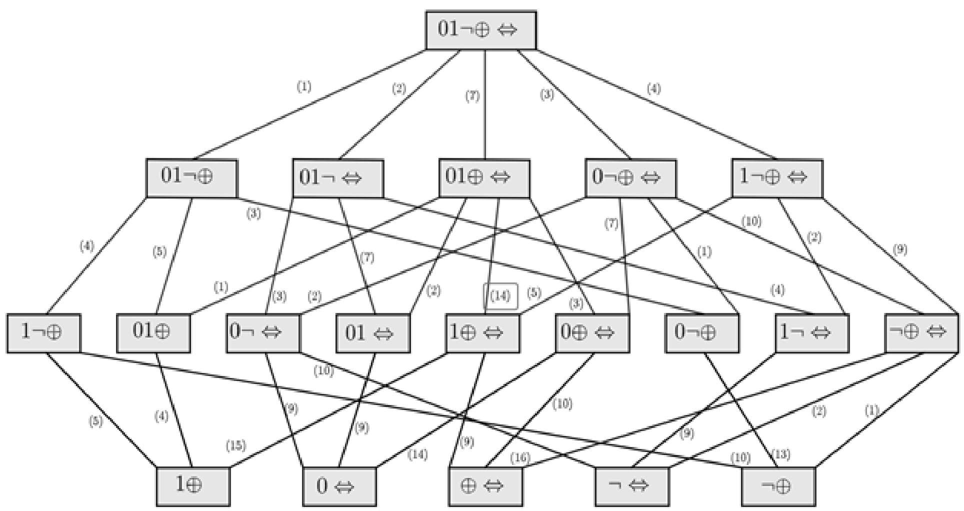

Рис. 6. Двадцятиелементний екваціональний кластер.

Випишемо сигнатурні тотожності, якими позначені ребра двадцятиелементного кластера:

1) $x \Leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}$;
2) $x \oplus y = \overline{x} \Leftrightarrow y$;
3) $1 = \bar{0}$;
4) $0 = \bar{1}$;
5) $\bar{x} = x \oplus 1$;
6) $\bar{x} = y \Leftrightarrow (x \oplus y)$;
7) $\bar{x} = x \Leftrightarrow 0$;
8) $1 = x \vee \bar{x}$;
9) $1 = x \Leftrightarrow x$;

10) $0 = \overline{x \Leftrightarrow x}$;
11) $0 = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \oplus y)$;
12) $0 = 1 \oplus 1$;
13) $0 = x \oplus x$;
14) $x \oplus y = (0 \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y$;
15) $x \Leftrightarrow y = 1 \oplus E \oplus y$;
16) $\bar{x} = (x \oplus x) \Leftrightarrow x$.

Справді для того, щоб знайти, наприклад, повну систему тотожностей алгебри $U = \langle A,\, 0, 1, \Leftrightarrow, \oplus\rangle$ досить рухаючись по ребрах (використовуючи відповідні сигнатурні тотожності (11) перейти до сигнатури алгебри $U = \langle A,\, 1, \Leftrightarrow, \oplus\rangle$, а далі або за допомогою (9) перейти до алгебр $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus\rangle$ або за допомогою (12) до алгебр $U = \langle A,\, 1, \oplus\rangle$. Таким чином, алгебра $U = \langle A,\, 1, \Leftrightarrow, \oplus\rangle$ у двадцятиелементному екваціональному кластері має $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ повних систем тотожностей. Найбільше повних систем тотожностей має алгебра $U^* = \langle A,\, 0, 1, \neg, \Leftrightarrow, \oplus\rangle$, а найменше — по одній повній системі п'ять алгебр першого ярусу.

Рухаючись по ребрах екваціонального кластеру відбувається процес усунення «надлишкових» операцій.

3. Висновки. У даному дослідженні знайдені методи, які дозволяють:

1. Розбити множину алгебр M_{11} на 25 кластерів.
2. Для кожного кластеру визначити його тип. Це дає можливість знайти повні системи тотожностей у всіх алгебрах кластерів першого типу і повні системи тотожностей для частини алгебр другого типу.
3. Визначити класи алгебр, які належать до алгебр кластеру третього типу, для яких знаходження повних систем тотожностей виявилось досить складною задачею.

Список використаної літератури

1. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В., Денис В. С. Екваціональні дослідження нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2021. Вип. 2, № 37. С. 142–149. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149
2. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Екваціональне описання функціонально неповних алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2023. Вип. 42, № 1. С. 194–201. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201
3. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Екваціональне описання функціонально повних алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2023. Вип. 43, № 2. С. 136–143. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143
4. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 1, № 30. С. 79–86. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86
5. Мич І. А., Ніколенко В. В. Екваціональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 2, № 33. С. 109–113. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V. Equational clusters of Boolean Algebras.

The paper continues the equational research of the class of Boolean algebras. A class of algebras is considered, which includes all algebras with null, unary, and binary operations. New concepts of signature identities and equational clusters are introduced. This makes it possible to divide a set of algebras into clusters. Algebras in the first cluster make it possible to express the complete system of identities of one algebra through another, using signature identities.

Keywords: complete system of identities, signature identity, equational cluster.

References

1. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 2(37), 142–149. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149 [in Ukrainian].
2. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 42(1), 194–201. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201 [in Ukrainian].
3. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 43(2), 136–143. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143 [in Ukrainian].
4. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 1(30), 79–86. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86 [in Ukrainian].
5. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics,* 2(33), 109–113. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113 [in Ukrainian].

Одержано 29.04.2024