

УДК 658.562:621

В.М. Горкавенко¹, Ю.О. Ситенко², О.Б. Степанов²

¹Фізичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка
01601, Київ, вул. Володимирська, 64

e-mail: gorka@univ.kiev.ua

²Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова Національної Академії наук України,
03680, Київ, вул. Метрологічна, 14-б

e-mail: yusitenko@bitp.kiev.ua, stepalex86@ukr.net

ГУСТИНА ВАКУУМНОЇ ЕНЕРГІЇ, ІНДУКОВАНА НЕПРОНИКНИМ МАГНІТНИМ ВИХОРОМ СКІНЧЕНОГО ПОПЕРЕЧНОГО РОЗМІРУ

У роботі досліджено узагальнену на випадок простору-часу довільної розмірності задачу про вплив зовнішнього магнітного поля, розташованого в трубці скінченного радіуса, на вакуум зарядженого масивного скалярного поля. Трубка є непроникливою для скалярного поля та має на поверхні граничні умови типу Діріхле. Показано, що в частковому випадку простору-часу розмірності 2+1 індукована густина енергії вакууму ззовні трубки може бути знайдена чисельними методами без застосування процедури регуляризації. Отримано залежність індукованої густини енергії вакууму від відстані від трубки при різних значеннях її поперечного радіуса.

Ключові слова: ефект Казимира, ефект Ааронова-Бома, поляризація вакууму, космічні струни.

Вступ

Виникнення вакуумної енергії в результаті накладання зовнішніх граничних умов на квантоване поле було передбачене Казиміром більш ніж 60 років тому [1]. З тих пір було розглянуто велику кількість різноманітних конфігурацій граничних умов [2-4]. Зазвичай многовид, на якому задані граничні умови обирають некомпактним незв'язним (наприклад дві нескінченні паралельні площини) або компактним замкненим (наприклад сфера).

У цій роботі розглянуто граничні умови, задані на некомпактному зв'язному многовиді, що має вигляд нескінченної трубки у 3-вимірному просторі. Як було показано вперше Аароновим та Бомом [5] в рамках квантової механіки, магнітний потік, замкнений у трубці, впливає на властивості матерії поза нею, тобто в області, де напруженість магнітного поля відсутня. Цей ефект, названий пізніше їхніми іменами, немає аналогів у класичній фізиці та характеризується періодичною

залежністю від величини магнітного потоку.

В рамках вторинного квантування було б цікаво розглянути ефекти поляризації вакууму ззовні трубки, в якій замкнене магнітне поле. Питання постає в тому, чи буде впливати магнітне поле на цей вакуум. Якщо це буде мати місце, то можна буде говорити про ефект Казимира-Ааронова-Бома [6].

Раніше було зазначено [5], що ефект Ааронова-Бома розглядався з урахуванням припущення сингулярності магнітного вихора. Важливе значення має розгляд скінчених розмірів трубки, оскільки реальний соленоїд має певний діаметр. Ця задача була розглянута в [7, 8]. Однак, на відміну від випадку сингулярного вихору проблема вихору скінченого радіуса не має на сьогодні точного розв'язку.

Повертаючись до квантової теорії поля, і, відповідно, до ефекту Казимира-Ааронова-Бома, варто зазначити, що він також був розглянутий тільки для випадку сингулярного магнітного вихору [6, 9-11].

Тому метою цієї роботи є дослідження залежності поляризації вакууму від товщини непроникної трубки, що містить магнітний вихор. Ефекти поляризації вакууму, індуковані магнітним вихором були розглянуті різними авторами [12-16]. Однак їхні результати, отримані для випадку відсутності граничних умов на зовнішнє поле (тобто трубка є проникною для квантованого поля матерії), не мають

стосунку до ефекту Казимира. В цій роботі розглядається ефект Казимира-Ааронова-Бома для скалярного зарядженого масивного поля.

Густина вакуумної енергії

Оператор квантованого зарядженого скалярного поля можна представити у вигляді:

$$\psi(x^0, \vec{x}) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\lambda}}} \left[e^{-iE_{\lambda}x^0} \varphi_{\lambda}(\vec{x}) a_{\lambda} + e^{iE_{\lambda}x^0} \varphi_{-\lambda}(\vec{x}) b_{\lambda}^{\dagger} \right], \quad (1)$$

де a_{λ}^{\dagger} і a_{λ} (b_{λ}^{\dagger} і b_{λ}) – оператори народження та знищення частинки (античастинки); хвильові функції $\varphi_{\lambda}(x)$ утворюють повний набір розв'язків стаціонарного рівняння Клейна-Гордона

$$(-\Delta + m^2)\varphi_{\lambda}(\vec{x}) = E_{\lambda}^2 \varphi_{\lambda}(\vec{x}), \quad (2)$$

де λ – набір параметрів (квантових чисел), що визначають стан системи.

У циліндричній системі координат в присутності магнітного поля серед

потенціалів V_{μ} залишається тільки одна ненульова компонента (кутова) $V_{\varphi} = \Phi/2\pi$, Φ – магнітний потік, φ – кут в полярних координатах площини, перпендикулярної до магнітного вихору. На межі вихору накладені граничні умови на скалярне поле

$$\phi_{\lambda} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (3)$$

Розв'язок рівняння (2) при умові непроникності трубки (3) з урахуванням умови ортонормування має вигляд:

$$\phi_{nkk_z}(\vec{x}) = (2\pi)^{-1} \beta_n(kr_0) e^{in\varphi} e^{ik_z z} \left\{ Y_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr_0) J_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr) - J_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr_0) Y_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr) \right\}, \quad (4)$$

де z – координата вздовж осі вихору,

$$\beta_n(kr_0) = \left[Y_{|n-e\Phi/2\pi|}^2(kr_0) + J_{|n-e\Phi/2\pi|}^2(kr_0) \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

$n \in \mathbb{Z}$, $0 < k < \infty$, $-\infty < k_z < \infty$, J_{μ} , і Y_{μ} – функції Беселя та Неймана μ -го порядку.

Густина вакуумної енергії є вакуумним середнім нульової компоненти тензора енергії-імпульсу:

$$\varepsilon = \langle vac | (\partial_0 \psi^{\dagger} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi \partial_0 \psi^{\dagger}) | vac \rangle = \sum_{\lambda} E_{\lambda} \varphi_{\lambda}^* \varphi_{\lambda}. \quad (6)$$

Ренормалізована густина вакуумної енергії, узагальнена на випадок простору-часу розмірності $d+1$ має вигляд.

$$\varepsilon_{ren} = (2\pi)^{1-d} \int d^{d-2} k_z \int_0^{\infty} dk k (k_z^2 + k^2 + m^2)^{1/2} [S(kr, kr_0) - S(kr, kr_0) \Big|_{\Phi=0}], \quad (7)$$

де, враховуючи (4), отримаємо:

$$S(kr, kr_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n^2(kr_0) \left\{ Y_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr_0) J_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr) - J_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr_0) Y_{|n-e\Phi/2\pi|}(kr) \right\}. \quad (8)$$

Оскільки в останньому виразі сумування проводиться по всім цілим значенням, то по відношенню до магнітного потоку Φ він є періодичним з періодом $2\pi e^{-1}$, отже залежить від величини

$$F = \frac{e\Phi}{2\pi} - \left[\left[\frac{e\Phi}{2\pi} \right] \right], \quad (9)$$

$$S_0(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} [J_{n+F}^2(kr) + J_{n+1-F}^2(kr)] = \int_0^{kr} d\tau [J_F(\tau)J_{-1+F}(\tau) + J_{-F}(\tau)J_{1-F}(\tau)]. \quad (11)$$

$$S_1(kr, kr_0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{n+F}(kr_0)Y_{n+F}(kr) \frac{J_{n+F}(kr_0)Y_{n+F}(kr) - J_{n+F}(kr)Y_{n+F}(kr_0)}{J_{n+F}^2(kr_0) + J_{n+F}^2(kr)} + J_{n+1-F}(kr_0)Y_{n+1-F}(kr) \frac{J_{n+1-F}(kr_0)Y_{n+1-F}(kr) - J_{n+1-F}(kr)Y_{n+1-F}(kr_0)}{J_{n+1-F}^2(kr_0) + J_{n+1-F}^2(kr)} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \left[J_{n+F}^2(kr_0) \frac{J_{n+F}^2(kr) + Y_{n+F}^2(kr)}{J_{n+F}^2(kr_0) + Y_{n+F}^2(kr_0)} + J_{n+1-F}^2(kr_0) \frac{J_{n+1-F}^2(kr) + Y_{n+1-F}^2(kr)}{J_{n+1-F}^2(kr_0) + Y_{n+1-F}^2(kr_0)} \right]. \quad (12)$$

Аналогічно за відсутності магнітного потоку в трубі маємо

$$S(kr, kr_0)|_{\Phi=0} = \tilde{S}_0(kr) + \tilde{S}_1(kr, kr_0), \quad (13)$$

$$\tilde{S}_0(kr) = J_0^2(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(kr) = 1, \quad (14)$$

$$\tilde{S}_1(kr, kr_0) = 2 \left[J_0(kr_0)Y_0(kr) \frac{J_0(kr_0)Y_0(kr) - J_0(kr)Y_0(kr_0)}{J_0^2(kr_0) + J_0^2(kr)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_0)Y_n(kr) \frac{J_n(kr_0)Y_n(kr) - J_n(kr)Y_n(kr_0)}{J_n^2(kr_0) + J_n^2(kr)} \right] - \left[J_0^2(kr_0) \frac{J_0^2(kr) + Y_0^2(kr)}{J_0^2(kr_0) + Y_0^2(kr_0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(kr_0) \frac{J_n^2(kr) + Y_n^2(kr)}{J_n^2(kr_0) + Y_n^2(kr_0)} \right]. \quad (15)$$

Звідси видно, що вираз (7) рівний нулю при $F=0$ і $F=1$, а також симетричний відносно заміни $F \rightarrow 1-F$. Отже, обчислення (7) значно спростяться, якщо ми оберемо $F=1/2$. Тоді отримаємо

$$S_1(kr, kr_0)|_{F=pe^{-1}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}^2(kr_0) \left[Y_{n+\frac{1}{2}}^2(kr) - J_{n+\frac{1}{2}}^2(kr) \right] - 2J_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)Y_{n+\frac{1}{2}}(kr_0)J_{n+\frac{1}{2}}(kr)Y_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{J_{n+\frac{1}{2}}^2(kr_0) + Y_{n+\frac{1}{2}}^2(kr_0)}. \quad (17)$$

При обчисленні величини (7) виникають принципові труднощі, пов'язані з розбіжністю інтеграла, однак вони

де $[[u]]$ – ціла частина величини u .

Запишемо (8) у вигляді

$$S(kr, kr_0) = S_0(kr) + S_1(kr, kr_0), \quad (10)$$

де $S_0(kr)$ відповідає випадку сингулярного вихору [11], а $S_1(kr, kr_0)$ – поправка, що виникає внаслідок скінченності його розмірів.

зникають у випадку $d=2$, коли ми отримуємо:

$$\varepsilon_{ren} = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dk k (k^2 + m^2)^{1/2} G(kr, kr_0), \quad (18)$$

де

$$G(kr, kr_0) = S(kr, kr_0) \Big|_{\Phi=\pi e^{-1}} - S(kr, kr_0) \Big|_{\Phi=0} . \quad (19)$$

Чисельний розрахунок

Перепишемо (19) у безрозмірній формі

$$r^3 \varepsilon_{ren} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty z dz \sqrt{z^2 + \left(\frac{mr_0}{\lambda}\right)^2} G(z, \lambda z) , \quad (20)$$

де $\lambda=r_0/r$, $\lambda \in [0, 1]$. Наведемо деякі аналітичні властивості підінтегрального виразу в (20): він рівний нулю на границі вихору

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} G(z, \lambda z) = 0 ; \quad (21)$$

на великих відстанях від струни набуває вигляду, що відповідає виразу для сингулярної струни

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} G(z, \lambda z) = S_0(z) \Big|_{\Phi=\pi e^{-1}} - \tilde{S}_0 ; \quad (22)$$

при малих значеннях z має вигляд

$$G(z, \lambda z) \Big|_{z \rightarrow 0} = -[\ln \lambda / \ln(\lambda z)]^2 . \quad (23)$$

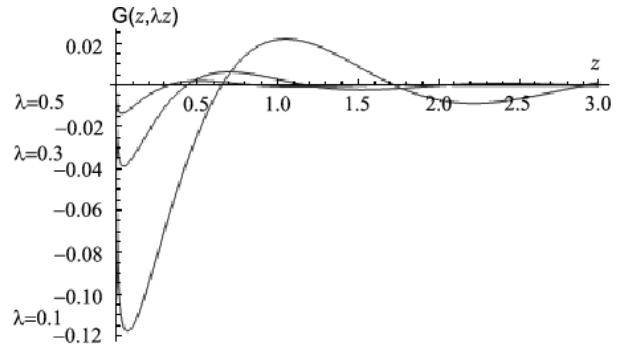


Рис. 1. Поведінка $G(z, \lambda z)$ при різних значеннях λ .

Функція $G(z, \lambda z)$ має осцилюючий характер. На рис. 1 зображені її графіки при деяких значеннях λ . Чисельний аналіз показав, що її огинаюча на великих відстанях має експоненційний характер. Тому для вихору скінченного радіусу ми можемо обчислити безрозмірну величину (20) при будь-яких значеннях λ . Значно ускладнюють обчислення слабка збіжність інтегралу (20) при малих значеннях λ та малість його підінтегральної функції.

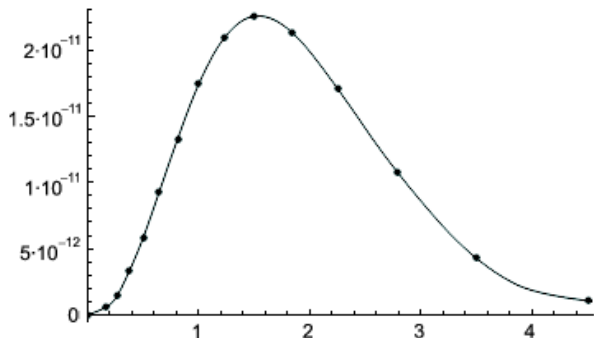


Рис. 2. Залежність $r^3 \varepsilon_{ren}$ від $x=m(r-r_0)$ при $mr_0=3/2$.

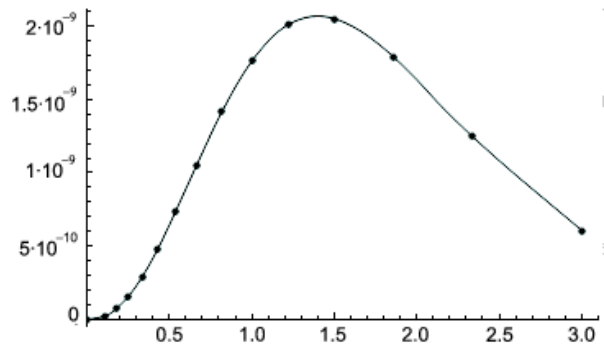


Рис. 3. Залежність $r^3 \varepsilon_{ren}$ від $x=m(r-r_0)$ при $mr_0=1$.

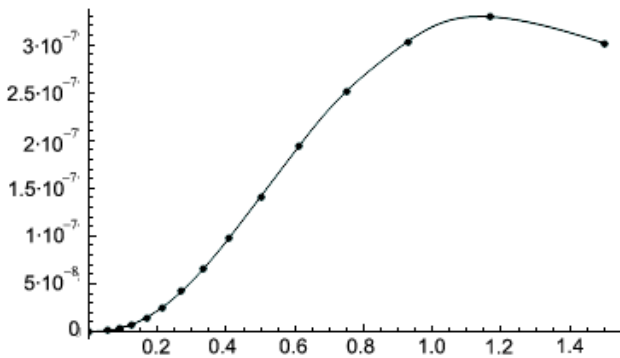


Рис. 4. Залежність $r^3 \varepsilon_{ren}$ від $x=m(r-r_0)$ при $mr_0=1/2$.

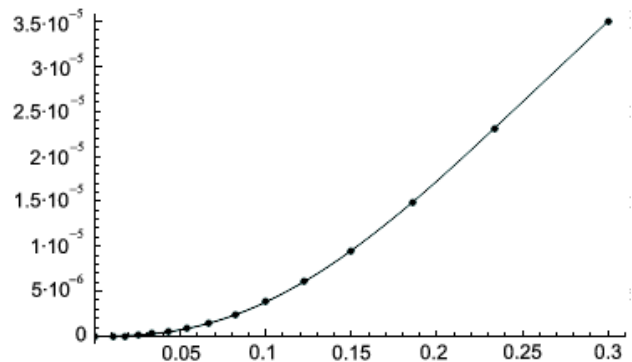


Рис. 5. Залежність $r^3 \varepsilon_{ren}$ від $x=m(r-r_0)$ при $mr_0=10^{-1}$.

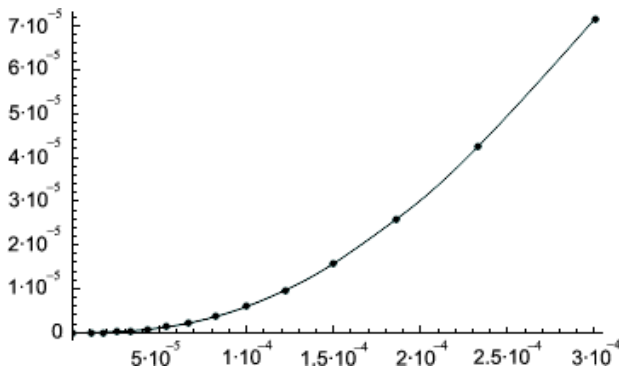


Рис. 6. Залежність $r^3 \epsilon_{ren}$ від $x=m(r-r_0)$ при $mr_0=10^{-4}$.

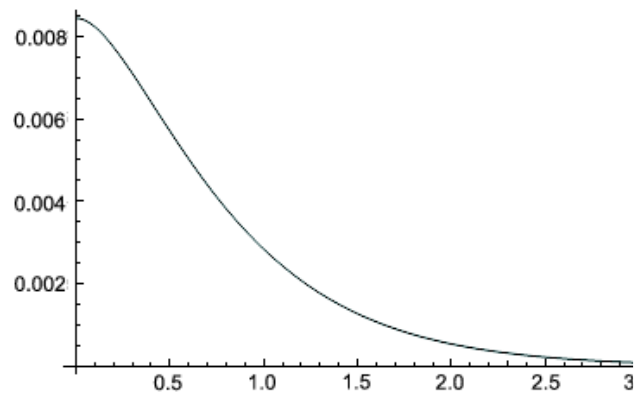


Рис. 7. Залежність $r^3 \epsilon_{ren}$ від $x=mr$ при $r_0=0$.

На рис. 2-6 зображено залежності $r^3 \epsilon_{ren}$ від безрозмірної відстані від границі вихору $x=m(r-r_0)$ при різних значеннях безрозмірного радіуса струни mr_0 . З них видно, що безрозмірна густина вакуумної енергії рівна нулю на границі вихору, монотонно зростає до свого максимального значення і далі теж монотонно спадає. Максимум функцій на рис. 5 - 6 не

показаний, що викликано вищезазначеною складністю обчислень при малих значеннях λ .

На рис. 7 зображено безрозмірну густину вакуумної енергії, індукованої сингулярним вихором як функцію mr [11]. Очевидно, що асимптотики функції зображеної на рис. 7 та рис. 2 - 6 повинні співпадати, що впливає з (22).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Casimir H. B. G 1948 Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap B 51 793.
2. Casimir H. B. G 1953 Physica. 19 846.
3. Elizalde E. 1995 Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions (Berlin: Springer).
4. Mostepanenko V. M. and Trunov N.N. 1997 The Casimir Effect and Its Applications (Oxford: Clarendon).
5. Bordag M. Mohideen U and Mostepanenko V. M. 2001 Phys. Rep. 353 1.
6. Aharonov Y and Bohm D 1959 Phys. Rev. 115 485.
7. Sitenko Yu. A. and Babansky A. Yu. 1998 Mod. Phys. Lett. A 13 379.
8. Olariu S. and Iovitzu Popescu I 1985 Rev. Mod. Phys. 57 339.
9. Skarzhinsky V. D. 1986 Trudy FIAN Proc. Lebedev. Inst. 167 139 (In Russian).
10. Sitenko Yu. A. and Babansky A. Yu. 1998 Phys. Atom. Nucl. 61 1594.
11. Sitenko Yu. A. and Gorkavenko V. M. 2003 Ukrainian J. Phys. 48 1286.
12. Sitenko Yu. A. and Gorkavenko V. M. 2003 Phys. Rev. D 67 085015.
13. Fry M. P. 1996 Phys. Rev. D 54 6444.
14. Dunne G. and Hall T. M. 1998 Phys. Lett. B 419 322.
15. Bordag M. and Kirsten K. 1999 Phys. Rev. D 60 105019.
16. Langfeld K., Moyaerts L. and Gies H. 2002 Nucl. Phys. B 646 158.
17. Graham N., Khemani V., Quandt M., Schroeder O. and Weigel H. 2005 Nucl. Phys. B 707 233.

Стаття надійшла до редакції 30.05.2011

V.M. Gorkavenko¹, Yu.A. Sitenko², O.B. Stepanov²

¹Department of Physics, Taras Shevchenko National University of Kyiv

64 Volodymyrs'ka Str., Kyiv, 01601

²Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine
03680, Kyiv, 14-b Metrolohichna Str.

VACUUM ENERGY DENSITY INDUCED BY IMPENETRABLE MAGNETIC VORTEX OF FINITE TRANSVERSE SIZE

We investigate the influence of an external magnetic field in a tube on the vacuum of a massive charged scalar field for arbitrary space-time dimensions. The tube is considered impenetrable for the scalar field which obeys the Dirichlet condition on the boundary surface. It was shown, that for a particular case of the 2+1 – dimensional space-time, the induced vacuum energy density of the scalar field outside the tube can be numerically calculated without regularization procedure. The dependence of the induced vacuum energy density on the distance from the tube at different values of its radius is analyzed.

Key words: Casimir effect, Aharonov-Bohm effect, vacuum polarization, cosmic strings.

В.Н. Горкавенко¹, Ю.А. Ситенко², А.Б. Степанов²

¹Физический факультет, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
01601, Киев, ул. Владимирская, 64

²Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины
03680, Киев, ул. Метрологическая, 14-б

ПЛОТНОСТЬ ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ, ИНДУЦИРОВАННАЯ НЕПРОНИЦАЕМЫМ МАГНИТНЫМ ВИХРЕМ КОНЕЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО РАЗМЕРА

В работе исследовано обобщенную на случай пространства-времени произвольной размерности задачу о влиянии внешнего магнитного поля, расположенного в трубке конечного радиуса, на вакуум заряженного массивного скалярного поля. Трубка является непроницаемой для скалярного поля и имеет на поверхности граничные условия типа Дирихле. Показано, что в частном случае пространства-времени размерности $2 + 1$ индуцированная плотность энергии-вакуума снаружи трубки может быть найдена численными методами без применения процедуры регуляризации. Получена зависимость индуцированной плотности энергии вакуума от расстояния от трубки при различных значениях ее поперечного радиуса.

Ключевые слова: эффект Казимира, эффект Ааронова-Бома, поляризация вакуума, космические струны.