

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

В.В. Рубіш, Р.М. Плекан

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Навчально-методичний посібник

УЖГОРОД–2024

Рубіш В.В., Плекан Р.М. Цифрова обробка сигналів: навчально-методичний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2024. – 46 с.

Навчально-методичний посібник містить традиційні теми для базового курсу з цифрової обробки сигналів: лінійні дискретні системи; ефекти квантування у цифрових системах з фіксованою точкою; опис дискретних сигналів у частотній області, включаючи алгоритми дискретного та швидкого перетворень Фур'є.

Посібник створено для студентів фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ» спеціальностей 125 «Кібербезпека» та 172 «Електронні комунікації та радіотехніка».

Розробники:

Рубіш Василь Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ».
Плекан Руслан Мар'янович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник відділу електронних процесів і
елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

*Рекомендовано до друку методичною комісією фізичного факультету
(протокол № 7 від 07 травня 2024 року)*

©Рубіш В.В., Плекан Р.М., 2024 р.
©ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 2024 р.

ЗМІСТ

1	ВСТУП	4
2	ЛІНІЙНІ ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ	5
2.1	Основні поняття та означення	5
2.2	Імпульсна характеристика	7
2.3	Формула згортки	7
2.4	Різницеве рівняння	12
2.5	Рекурсивні та нерекурсивні системи	14
2.6	Властивість пам'яті ЛДС	15
2.7	Системи з скінченною та нескінченною імпульсною характери- стикою	16
2.8	Стійкість лінійних дискретних систем	18
3	ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ	19
3.1	Вступ	19
3.2	Ряд Фур'є та його властивості	19
3.3	Перетворення Фур'є	20
3.4	Дискретне перетворення Фур'є	21
3.5	Властивості ДПФ	25
3.6	Обчислювальна складність ДПФ	26
3.7	Алгоритм швидкого перетворення Фур'є з децимацією в часо- вій області	27
3.8	Обернене швидке перетворення Фур'є	35
3.9	Інші дискретні перетворення	35
3.9.1	Дискретне косинус-перетворення	35
3.9.2	Перетворення Уолша	36
3.9.3	Перетворення Адамара	38
4	ДОДАТОК. ТИПОВІ ДИСКРЕТНІ СИГНАЛИ	41
	РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	45

1 ВСТУП

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) останні п'ятдесят років зазнає бурхливого розвитку. За цей час створені ефективні алгоритми обробки сигналів, прогресивні технології виробництва цифрових сигнальних процесорів [1, 2]. Вже традиційними областями застосування цифрових методів та пристроїв обробки сигналів є радіотехніка, телекомунікації, автоматизоване управління, телеметрія, робототехніка, гідроакустика, сейсмологія і т.д. Але з кожним роком їх перелік розширюється: розпізнавання та синтез мови, цифрові аудіосистеми, редагування і компресія аудіо- та відеосигналів, машинний зір, покращення зображень, фільтрації завад, спектральний аналіз [3–10]. Для підготовки до занять додатково можна використовувати навчальні посібники [11–14].

2 ЛІНІЙНІ ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ

2.1 Основні поняття та означення

Системою обробки сигналів (системою) називається об'єкт, який виконує перетворення вхідного сигналу у вихідний за певним алгоритмом [3].

Вхідний сигнал системи називають *впливом*, а вихідний – *реакцією*. В загальному випадку взаємозв'язок між вхідними і вихідними сигналами системи з декількома входами і виходами – співвідношення вхід/вихід – описується рівнянням в операторній формі:

$$Y = F \{X\}, \quad (2.1)$$

де X, Y – вектори, елементами яких є, відповідно, впливи та реакції (функції часу); F – оператор, що визначає математичне перетворення (лінійне, нелінійне, алгебраїчне, диференціальне та інші). Для систем з одним входом та одним виходом рівняння (2.1) набуває вигляду:

$$y = F \{x\}, \quad (2.2)$$

де x, y – вплив та реакція відповідно. В подальшому ми будемо розглядати системи з одним входом і одним виходом.

Відповідно до означення, системою можна назвати як фізичний пристрій, так і оператор F (математичне перетворення). *Лінійною* називають систему, що відповідає двом умовам [9]:

- однорідності – впливу, помноженому на ваговий коефіцієнт, відповідає реакція, помножена на той самий коефіцієнт

$$F \{a x\} = a F \{x\}; \quad (2.3)$$

- адитивності – сумі впливів відповідає сума реакцій на кожен з впливів (принцип суперпозиції)

$$F \{x_1 + x_2 + \dots\} = F \{x_1\} + F \{x_2\} + \dots \quad (2.4)$$

Лінійна система ототожнюється з лінійним оператором F .

Дискретною називають систему, що перетворює вхідний дискретний сигнал $x(nT)$ у вихідний дискретний сигнал $y(nT)$ коли співвідношення вхід/вихід (2.2) набуває вигляду

$$y(nT) = F \{x(nT)\}. \quad (2.5)$$

Лінійною дискретною системою (ЛДС) називають дискретну систему з лінійним оператором F (див. рис. 2.1).

Лінійний оператор F (2.5) має дві універсальні форми подання: згортку та лінійне різнищеве перетворення.

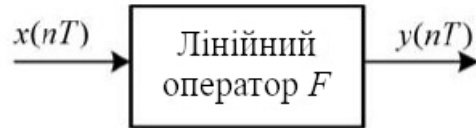


Рис. 2.1. До означення лінійної дискретної системи

Стационарною називають систему, що володіє властивістю *інваріантності в часі*. Це означає, що реакція системи не залежить від моменту надходження впливу, і затримка надходження впливу призведе до затримки реакції на той же самий час:

$$x(nT) \Rightarrow y(nT); \quad x(nT - mT) \Rightarrow y(nT - mT). \quad (2.6)$$

Параметри стаціонарної системи не змінюються з часом.

Початкові умови, що характеризують стан ЛДС до початку впливу, можуть бути нульовими або ненульовими. *Нульові початкові умови* (НПУ) означають, що всі значення впливу та реакції, які може пам'ятати система до початку впливу ($n = 0$), дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} x[(n-i)T] \big|_{n-i < 0, i=1,2,\dots} = 0; \\ y[(n-k)T] \big|_{n-k < 0, k=1,2,\dots} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

де iT і kT – відповідно значення затримок впливу та реакції. Ознакою нульових початкових умов є відсутність реакції за відсутності впливу:

$$x(nT) = 0 \Rightarrow y(nT) = 0, \quad (2.8)$$

а ненульових – наявність ненульових відліків реакції (вільних коливань) за відсутності впливу.

Фізично реалізовною називають систему, що відповідає умовам фізичної реалізованості, які відображають причинно-наслідковий зв'язок (принцип причинності), і для дискретної системи формулюються наступним чином:

- при НПУ реакція не може передувати впливу;
- при НПУ значення реакції $y(nT)$ у кожний момент часу nT залежать від поточного значення впливу $x(nT)$ та попередніх значень $x[(n-m)T]$, $m \geq 1$, і не залежать від його наступних відліків $x[(n+m)T]$ (тих, які ще не надійшли).

Математичний опис лінійної дискретної системи включає задання її імпульсної характеристики та співвідношення вхід/вихід.

2.2 Імпульсна характеристика

Основною характеристикою лінійної дискретної системи у часовій області є імпульсна характеристика (ІХ).

Імпульсною характеристикою $h(nT)$ лінійної дискретної системи називається її реакція на цифровий одиничний імпульс $u_0(nT)$ при нульових початкових умовах [9] (див. рис. 2.2).



Рис. 2.2. До визначення імпульсної характеристики

У випадку лінійної аналогової системи імпульсна характеристика $h(t)$ визначається як її реакція на $\delta(t)$ при нульових початкових системах. В обох випадках імпульсна характеристика є основною характеристикою лінійної системи, тому що, знаючи її, можна визначити реакцію системи на будь-який вхідний сигнал.

2.3 Формула згортки

Одержимо співвідношення вхід/вихід, що зв'язує вихідний $y(nT)$ та вхідний $x(nT)$ сигнали ЛДС за відомої імпульсної характеристики $h(nT)$. Будемо послідовно записувати відповідності вхід/вихід лінійної дискретної системи, що вказуються стрілкою:

- згідно означення, вхідному сигналу у вигляді цифрового одиничного імпульсу (див. Додаток А, вираз 41) відповідає реакція, яка називається імпульсною характеристикою:

$$u_0(nT) \Rightarrow h(nT);$$

- відповідно до властивості інваріантності в часі (2.6), затримці впливу на час mT відповідає затримка реакції на той же час:

$$u_0[(n-m)T] \Rightarrow h[(n-m)T];$$

- згідно з властивістю однорідності (2.3), домноженню впливу на константу $x(mT)$ відповідає реакція, помножена на ту ж константу:

$$x(mT)u_0[(n-m)T] \Rightarrow x(mT)h[(n-m)T];$$

- згідно з властивістю адитивності (2.4), реакції на суму впливів відповідає сума реакцій на ці впливи:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)u_0[(n-m)T] \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)h[(n-m)T];$$

- згідно фільтруючої властивості цифрового одиничного імпульсу (4.2), зліва маємо вплив

$$x(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)u_0[(n-m)T],$$

а праворуч – реакцію

$$y(nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)h[(n-m)T];$$

- при нульових початкових умовах (2.7)

$$\begin{cases} x(mT)|_{m<0} = 0; \\ h[(n-m)T]|_{n-m<0} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

реакція визначається за формулою

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)h[(n-m)T]. \quad (2.10)$$

Лінійне рівняння (2.10) називають *формулою згортки*. Згортка відповідає першій універсальній формі подання лінійного оператора F у співвідношенні вхід/вихід (2.5). У цьому випадку параметри оператора F (коефіцієнти в лінійному перетворенні) повністю визначаються імпульсною характеристикою лінійної дискретної системи.

Формула згортки (2.10) має тотожний запис

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)x[(n-m)T]. \quad (2.11)$$

У лінійних аналогових системах лінійний оператор F визначається інтегралом згортки [8]:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau;$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

При довільному вхідному сигналі $x(t)$ реакція лінійної системи обчислюється з допомогою одного з методів (алгоритмів) числового інтегрування. Усі подібні методи є наближеними, тобто вносять методичну похибку.

У формулі згортки (2.10) або (2.11) обчислення відліків реакції $y(nT)$, $n = 0, 1, \dots$, виконується методом прямої підстановки при нульових початкових системах, при цьому методична похибка відсутня. Отже, формула згортки (2.10) (або (2.11)) безпосередньо описує алгоритм обчислення реакції при відомій імпульсній характеристиці, що стало можливим завдяки переходу від неперервного часу до дискретного $t \rightarrow nT$.

У шкалі дискретного нормованого часу (див. Додаток А) формули (2.10) та (2.11) набувають вигляду:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m), \quad (2.12)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (2.13)$$

Приклад 2.1. Визначити перші три відліки реакції за формулою згортки (2.12) при нульових початкових системах.

Розв'язок. Відповідно до формули (2.12) для $n = 0, 1, 2$ будемо мати:

$$y(0) = x(0)h(0) + x(0)h(-1) + \dots = x(0)h(0);$$

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + \dots = x(0)h(1) + x(1)h(0);$$

$$\begin{aligned} y(2) &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(-1) + \dots = \\ &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0). \end{aligned}$$

Тут враховано НПП (2.9): $h(-1) = h(-2) = \dots = 0$. ◀

З розглянутого прикладу 2.2 випливає, що лінійна дискретна система, співвідношення вхід/вихід якої описується формулою згортки, відповідає умовам фізичної реалізованості, зокрема:

- при нульових початкових умовах реакція не може виникнути раніше за вплив. Якщо вплив надійшов у час $n = 0$, значення реакції у всі попередні моменти часу будуть нульовими; наприклад, з (2.12) випливає:

$$y(-1) = x(0)h(-1) = 0 \quad \text{і т.д.};$$

- при нульових початкових умовах значення реакції в кожний момент часу n залежать від поточного та попередніх відліків вхідного сигналу і не залежать від його наступних $n + 1, n + 2, \dots$ відліків.

Більш детально розглянемо суть операції згортки на наступному прикладі.

Приклад 2.2. Обчислити реакцію лінійно дискретної системи $y(n)$ за формулою згортки (2.12) при дії $x(n) = \{x_0; x_1; x_2\} = \{1; 2; 2\}$ довжини $N_1 = 3$ та імпульсної характеристики $h(n) = \{h_0; h_1\} = \{2; 1\}$ довжини $N_2 = 2$. Визначити довжину згортки.

Розв'язок. Формула згортки (2.12) для $n = 0, 1, 2, 3, 4$ дає:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(0-m) = x(0)h(0) + x(0)h(-1) + \dots = x_0h_0 = \\ &= 1 \cdot 2 = 2; \\ y(1) &= y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(1-m) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + \dots \\ &= x_0h_1 + x_1h_0 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5; \\ y(2) &= y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(2-m) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + \\ &+ x(3)h(-1) + \dots = x_0h_2 + x_1h_1 + x_2h_0 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6; \\ y(3) &= y_3 = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(3-m) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + \\ &+ x(3)h(0) + x(4)h(-1) + \dots = x_2h_1 = 2 \cdot 1 = 2; \\ y(4) &= y_4 = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(4-m) = x(0)h(4) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + \\ &+ x(3)h(1) + x(4)h(0) + x(5)h(-1) + \dots = 0. \end{aligned}$$

При розрахунках враховано, що $x_3 = x_4 = \dots = 0$ та $h(2) = h(3) = \dots = 0$ згідно умов задачі, а $h(-1) = h(-2) = \dots = 0$ відповідно до НПП. ◀

Проаналізуємо одержаний результат (див. рис. 2.3). Згідно виразу (2.12), реакція $y(n)$ дорівнює сумі добутків локальних відліків фіксованого впливу $x(m)$ (рис. 2.3, а) і зміщеної вдовж осі часу імпульсної характеристики $h(n-m)$, де $h(0-m)$ – дзеркальне відображення імпульсної характеристики $h(m)$ (рис. 2.3, б, в), а $h(n-m)$, $n = 1, 2, 3, 4$ – результати його послідовного ковзання зліва направо (рис. 2.3, г–е). Відліки імпульсної характеристики $h(n-m)$, які збігаються в часі з відліками вхідного сигналу $x(m)$, позначені жирними чорними лініями і крапками, а ті, що не збігаються – сірими. З представлених результатів розрахунку реакції $y(n)$ випливає, що у кожний момент часу n її значення рівне сумі локальних добутків відліків вхідного

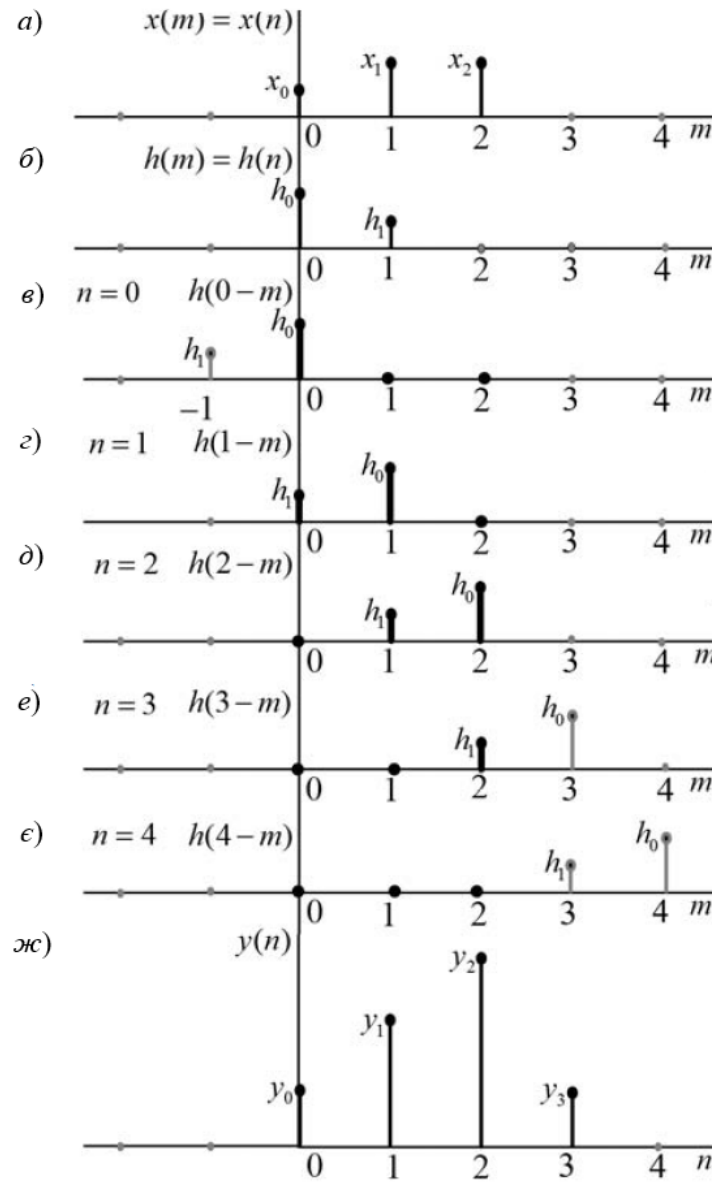


Рис. 2.3. Ілюстрація обчислень за формулою згортки

сигналу $x(m)$ на зміщені значення імпульсної характеристики $h(n - m)$, що збігаються в часі. Зрозуміло, що обчислення слід припинити, коли всі локальні добутки виявляться рівними нулю. Це станеться в момент часу $n = 4$, коли зміщена імпульсна характеристика $h(4 - m)$ і вхідний сигнал $x(m)$ «розійдуться», і в них не буде жодного збігу відліків. На рис. 2.3, ж представлено результат обчислення згортки $y(n)$ довжини $L = N_1 + N_2 - 1 = 4$.

Узагальнивши одержаний результат, будемо мати, що для впливу $x(n)$ довжини N_1 та імпульсної характеристики $h(n)$ довжини N_2 довжина згортки $y(n)$ дорівнюватиме

$$L = N_1 + N_2 - 1. \quad (2.14)$$

і формули (2.12) – (2.13) набудуть вигляду:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(m)h(n-m); \quad (2.15)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m). \quad (2.16)$$

Операцію згортки, що дається виразами (2.15) та (2.16) називають *лінійною згорткою*. На практиці довжину реакції лінійної системи обмежують до довжини вхідного сигналу.

2.4 Різницеве рівняння

У лінійних аналогових системах лінійний оператор F представляється лінійним диференціальним перетворенням, і лінійне диференціальне рівняння має вигляд:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=1}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k},$$

де b_i , a_k – коефіцієнти рівняння (дійсні константи), пов'язані зі значеннями опорів, індуктивностей та ємностей в аналоговому електричному колі. При переході від неперервного часу до дискретного, похідні замінюються скінченими різницями, а лінійні диференціальні перетворення – лінійними різницевиими перетвореннями [15]. Таким чином, другою універсальною формою представлення лінійного оператора F у (2.5) є лінійне різницеве перетворення, якому відповідає співвідношення вхід/вихід лінійної дискретної системи у вигляді різницевого рівняння (РР)

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T]; \quad (2.17)$$

де:

- b_i , a_k – коефіцієнти різницевого рівняння (дійсні константи), які називаються *параметрами ЛДС*;
- iT , kT – значення затримок вхідного сигналу та реакції відповідно;
- $(N-1)$ та $(M-1)$ – константи, що визначають максимальну затримку вхідного сигналу та реакції відповідно, причому

$$(N-1) \leq (M-1). \quad (2.18)$$

Співвідношення вхід/вихід лінійно дискретної системи задане у вигляді різницевого рівняння зазвичай називають її *математичною моделлю*.

Таким чином, різницеве рівняння безпосередньо описує алгоритм обчислення реакції при відомих параметрах лінійної дискретної системи. У шкалі дискретного нормованого часу (див. Додаток А) різницеве рівняння (2.17) набуває вигляду

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (2.19)$$

Приклад 2.3. Визначити перші три відліки реакції різницевого рівняння (2.19).

Розв’язок. Методом прямої підстановки для $n = 0, 1, 2$, одержуємо:

$$y(0) = b_0 x(0) + b_1 x(-1) + \dots - a_1 y(-1) - \dots = b_0 x(0);$$

$$\begin{aligned} y(1) &= b_0 x(1) + b_1 x(0) + b_2 x(-1) + \dots - a_1 y(0) - a_2 y(-1) - \dots = \\ &= b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 y(0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2) &= b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_2 x(0) + b_3 x(-1) + \dots \\ &- a_1 y(1) - a_2 y(0) - a_2(-1) - \dots = \\ &= b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_2 x(0) - a_1 y(1) - a_2 y(0). \end{aligned}$$

Тут враховано НПП (2.7): $x(-1) = x(-2) = \dots = 0$ та $y(-1) = y(-2) = \dots = 0$. ◀

Як впливає з прикладу 2.3, ЛДС, співвідношення вхід/вихід якої описується різницеvim рівнянням, відповідає умовам фізичної реалізованості (див. стор. 6):

- при нульових початкових умовах реакція не може виникнути раніше за вплив. Якщо вхідний сигнал надійшов у момент часу $n = 0$, то всі значення реакції до цього моменту будуть нульовими:

$$y(-1) = b_0 x(-1) = 0 \quad \text{і т.д.};$$

- при нульових початкових умовах значення реакції у кожний момент часу n залежать від поточного та попередніх відліків впливу і залежить від його наступних відліків.

2.5 Рекурсивні та нерекурсивні системи

Лінійна дискретна система із співвідношенням вхід/вихід у вигляді різницевого рівняння (2.19):

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

називається *рекурсивною*, якщо хоча б один із коефіцієнтів $a_k, k = 1, 2, \dots, (M-1)$ не дорівнює нулю. Як впливає з прикладу 2.3, значення реакції рекурсивної системи в поточний момент часу визначається її значеннями в попередні моменти часу.

З урахуванням (2.18) *порядок* рекурсивної лінійно дискретної системи дорівнюватиме максимальній затримці реакції $(M-1)$. При нульових початкових умовах реакція $y(n)$ рекурсивної лінійної дискретної системи у кожний момент часу n визначається:

- поточним значенням вхідного сигналу $x(n)$;
- значеннями вхідного сигналу в попередні моменти часу $x(n-i), i = 1, 2, \dots, (N-1)$;
- значеннями реакції в попередні моменти часу $y(n-k), k = 1, 2, (M-1)$

Наведемо приклади різницевого рівняння найпростіших рекурсивних лінійно дискретної системи:

- першого порядку

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1); \quad (2.20)$$

- другого порядку

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2). \quad (2.21)$$

Лінійна дискретна система називається *нерекурсивною*, якщо всі коефіцієнти a_k різницевого рівняння (2.18) рівні нулю

$$a_k = 0, k = 1, 2, \dots, (M-1).$$

Для нерекурсивної лінійної дискретної системи різницевого рівняння (2.17) та (2.19) набувають вигляду:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i [x(n-i)T]; \quad (2.22)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (2.23)$$

Порядок нерекурсивної лінійно дискретної системи визначається максимальною затримкою впливу $(N-1)$.

При нульових початкових умовах реакція $y(n)$ нерекурсивної лінійної дискретної системи у кожний момент часу n визначається:

- поточним значенням вхідного сигналу $x(n)$;
- значеннями вхідного сигналу в попередні моменти часу $x(n-i)$, $i = 1, 2, \dots, (N-1)$.

Наведемо приклад різницевого рівняння для найпростішої нерекурсивної лінійної дискретної системи другого порядку:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2). \quad (2.24)$$

2.6 Властивість пам'яті ЛДС

Властивість пам'яті системи полягає в її здатності «пам'ятати» попередню історію впливу» (тобто, пам'ятати значення вхідного сигналу в попередні моменти часу) при обчисленні реакції в даний момент часу. Тривалість передісторії (кількість попередніх відліків впливу) визначає *тривалість пам'яті*.

Розглянемо властивість пам'яті для нерекурсивних та рекурсивних ЛДС.

Відповідно до різницевого рівняння нерекурсивної ЛДС (2.23), при обчисленні реакції $y(n)$ у кожний момент часу система «пам'ятає» $(N-1)$ попередніх відліків впливу. Отже, нерекурсивна ЛДС володіє властивістю пам'яті, тривалість якої є *скінченною* і рівною $(N-1)$.

Відповідно до різницевого рівняння рекурсивної ЛДС (2.19), кожен поточний відлік реакції $y(n) = y_n$ можна виразити через попередні відліки вхідного сигналу $x(n) = x_n$ (див. прикладу 2.3):

$$\begin{aligned} y_0 &= b_0 x_0; \\ y_1 &= b_0 x_1 + b_1 x_0 - a_1 y_0 = b_0 x_1 + (b_1 - a_1 b_0) x_0; \\ y_2 &= b_0 x(2) + b_1 x(1) + b_2 x(0) - a_1 y(1) - a_2 y(0) = \\ &= b_0 x_2 + (b_1 - a_1 b_0) x_1 + (b_2 - a_1(b_1 - a_1 b_0) - a_2 b_0) x_0; \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

При обчисленні реакції $y(n)$ у кожен момент часу n , система «пам'ятає» всі попередні відліки вхідного сигналу. Отже, рекурсивна лінійна дискретна

система володіє властивістю пам'яті і її тривалість при $n \rightarrow \infty$ є нескінченною.

Ця властивість пам'яті рекурсивних ЛДС пояснюється наявністю зворотного зв'язку, завдяки чому будь-який ненульовий відлік вхідного сигналу циркулює в системі нескінченно довго. Хоча з часом він затухає (його вага зменшується і прямує з часом до нуля), але теоретично він залишається присутнім.

2.7 Системи з скінченною та нескінченною імпульсною характеристикою

Розглянемо питання імпульсної характеристики лінійних систем, що задаються за допомогою різницевого рівняння. Обчислення імпульсних характеристик рекурсивних та нерекурсивних лінійних дискретних систем проведемо на простих прикладах, а одержані результати узагальнимо.

Приклад 2.4. Обчислити імпульсну характеристику нерекурсивної лінійної дискретної системи другого порядку, співвідношення вхід/вихід якої описується різницеvim рівняння (2.24)

$$y(n) = b_0(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2).$$

Розв'язок. Згідно з означенням, імпульсна характеристика – це реакція системи на цифровий одиничний імпульс при нульових початкових умовах, тому виконавши заміну

$$\begin{cases} x(n) \rightarrow u_0(n); \\ y(n) \rightarrow h(n), \end{cases} \quad (2.25)$$

перепишемо різницеве рівняння у вигляді

$$h(n) = b_0u_0(n) + b_1u_0(n-1) + b_2u_0(n-2).$$

Врахувавши означення цифрового одиничного імпульсу (див. Додаток А), методом прямої підстановки при нульових початкових умовах одержимо:

$$h(0) = b_0u_0(0) + b_1u_0(-1) + b_2u_0(-2) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = b_0;$$

$$h(1) = b_0u_0(1) + b_1u_0(0) + b_2u_0(-1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1;$$

$$h(2) = b_0u_0(2) + b_1u_0(1) + b_2u_0(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2;$$

$$h(3) = b_0u_0(3) + b_1u_0(2) + b_2u_0(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0;$$

$$h(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 3. \quad \blacktriangleleft$$

Узагальнивши одержані результати на нерекурсивну лінійну дискретну систему довільного порядку, приходимо до таких висновків:

- нерекурсивна лінійна дискретна система має *скінчену* імпульсну характеристику (CIX);
- нерекурсивна лінійна дискретна система та CIX-система – тотожні поняття;
- відліки імпульсної характеристики нерекурсивної лінійно дискретної системи рівні коефіцієнтам різницевого рівняння:

$$h(n) = b_i, n = i = 0, 1, \dots, (N - 1); \quad (2.26)$$

Приклад 2.5. Обчислити імпульсну характеристику рекурсивної лінійної дискретної системи першого порядку, співвідношення вхід/вихід якої описується різницеvim рівнянням (2.20)

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) - a_1y(n - 1).$$

Розв’язок. Виконавши в різницеvому рівнянні заміну (2.25), одержимо

$$h(n) = b_0u_0(n) + b_1u_0(n - 1) - a_1h(n - 1).$$

Розв’язуючи його методом прямої підстановки при нульових початкових умовах, будемо мати:

$$h(0) = b_0u_0(0) + b_1u_0(-1) - a_1h(-1) = b_0;$$

$$h(1) = b_0u_0(1) + b_1u_0(0) - a_1h(0) = b_1 - a_1b_0;$$

$$h(2) = b_0u_0(2) + b_1u_0(1) - a_1h(1) = -a_1(b_1 - a_1b_0);$$

$$h(3) = b_0u_0(3) + b_1u_0(2) - a_1h(2) = -a_1(-a_1(b_1 - a_1b_0)) = a_1^2(b_1 - a_1b_0);$$

$$\dots = \dots$$

$$h(n) = (-1)^{n-1}a_1^{n-1}(b_1 - a_1b_0), \quad n = 4, 5, \dots \blacktriangleleft$$

Узагальнивши одержані результати на рекурсивну лінійну дискретну систему довільного порядку, приходимо до висновків:

- рекурсивна лінійна дискретна система має нескінченну імпульсну характеристику (НІХ);
- рекурсивна лінійна дискретна система та НІХ-система є тотожними поняттями.

2.8 Стійкість лінійних дискретних систем

Лінійна дискретна система називається *стійкою*, якщо при обмеженому впливі

$$\max_n |x(n)| \leq R_x$$

та довільних, але обмежених початкових умовах реакція буде обмеженою:

$$\max_n |y(n)| \leq R_y,$$

де R_x, R_y – довільні як завгодно великі додатні числа, не рівні нескінченності.

Існує два критерії стійкості лінійної дискретної системи. У даному розділі, присвяченому опису лінійної дискретної системи у часовій області, приведемо перший критерій, що дозволяє оцінити стійкість лінійної дискретної системи за її імпульсною характеристикою. Другий критерій стійкості використовують при розгляді лінійних дискретних систем у z -області.

Перший критерій стійкості формулюється наступним чином: для того, щоб лінійна дискретна система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова абсолютної збіжності ряду відліків імпульсної характеристики:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (2.27)$$

Перший критерій дозволяє класифікувати ЛДС за ознакою стійкості:

- нерекурсивні ЛДС (СІХ-системи) є стійкими за означенням:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| \neq \infty;$$

- рекурсивні ЛДС (НІХ-системи) потребують перевірки на стійкість.

3 ДИСКРЕТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ

3.1 Вступ

Із всіх відомих перетворень дискретних даних з часової області у частотну, самим відомим і важливим є дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) і алгоритм його швидкого обчислення – швидке перетворення Фур'є (ШПФ). Для цього є декілька причин: ДПФ дозволяють адекватно описувати в частотних координатах всі, крім самих короткочасних (< 1 с) сигналів; обрізані по частоті Фур'є-компоненти описують дані більш правдоподібно, ніж будь-які інші степеневі ряди. Окремі компоненти представляють собою синусоїди і не спотворюються при передачі через лінійні системи, що дозволяє використовувати їх в якості хороших пробних сигналів. І, насамкінець, ШПФ можна дуже швидко порахувати.

3.2 Ряд Фур'є та його властивості

Будь-який періодичний сигнал $f(t)$ можна представити у вигляді суми нескінченного числа синусоїдальних і косинусоїдальних членів та одного постійного члена. Це представлення називається **рядом Фур'є** і задається на відрізку $[-T/2; T/2]$ наступним чином:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad (3.1)$$

де t – незалежна змінна, яка часто позначає час, але може позначати будь-яку іншу величину, наприклад, відстань; $\omega = 2\pi/T$ називають **циклічною частотою** першої (або основної) гармоніки, вона пов'язана з лінійною частотою f співвідношенням $\omega = 2\pi f$, T – період повторення сигнала, через

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (3.2)$$

позначено коефіцієнти ряду Фур'є. Частоти $n\omega$ називають n -ми гармоніками частоти ω . Отже, нескінченний ряд (3.1) містить залежні від частоти синусоїдальні і косинусоїдальні члени з різними амплітудами a_n та b_n на

додатніх частотах гармонік $n\omega$. Цей ряд можна записати більш компактно в експоненціальній формі, до того ж у такому вигляді значно спрощується виконання над ним математичних операцій. Отже, в експоненціальній формі ряд Фур'є виглядає наступним чином:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t}, \quad (3.3)$$

де

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (3.4)$$

є комплексними числами, а $|d_n|$ – величини, що вимірюються у вольтах.

$$|d_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.5)$$

і

$$\phi_n = -\arctg(b_n/a_n). \quad (3.6)$$

Приклад 3.1. *івіваіваііва*

Розв'язок

івівівімівім

3.3 Перетворення Фур'є

$$d(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.7)$$

$$\frac{d(\omega)}{d\omega/2\pi} = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.8)$$

Тут комплексне число $F(i\omega)$ назвають **інтегралом Фур'є** або просто **Фур'є-образом**.

Зазначимо, що із частотної області у часову можна перейти за допомогою оберненого перетворення Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} df. \quad (3.9)$$

3.4 Дискретне перетворення Фур'є

В результаті дискретизації та квантування вхідного аналогового сигналу ми одержуємо дискретну послідовність двійкових чисел. Одержане число відліків в секунду є досить великим для адекватного опису сигналу. Теоретично необхідна швидкість дискретизації називається **частотою Найквіста** і дорівнює $2f_{\max}$, де $f_{\max}$ – найбільша частота високочастотної синусоїдальної компоненти сигналу з істотною амплітудою. Отже, дані, які потрібно перетворити, – вже дискретні і, можливо, неперіодичні. В такому випадку перетворенням Фур'є скористатися не вдасться, оскільки воно застосовне до неперервних даних. Однак існує аналогове перетворення, яке можна застосовувати до дискретних даних, – дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

Припустимо, що сигнал дискретизовано через рівні проміжки часу T , і в результаті отримано дискретну послідовність $\{x(nT)\} = x(0), x(T), \dots, x((N-1)T)$ з N відліків, де n – номер відліку, n пробігає значення від $n = 0$ до $n = N - 1$. Значення $x(nT)$ будуть дійсними тільки тоді, коли вони будуть значеннями деякого часового ряду, наприклад, спектр напруги. У подібному випадку ДПФ послідовності (nT) можна визначити як послідовність комплексних значень $\{X(k\Omega)\} = X(0), X(\Omega), \dots, X((N-1)\Omega)$ в частотній області, де Ω – частота першої гармоніки, яка задається як $\Omega = 2\pi/(N-1)T \simeq 2\pi/NT$ для $N \gg 1$. Отже, $X(k\Omega)$ в загальному випадку має дійсні та уявні компоненти, так що для k -ї гармоніки

$$X(k\Omega) = \text{Re}(X(k\Omega)) + i\text{Im}(X(k\Omega)) \quad (3.10)$$

та

$$|X(k\Omega)| = [\text{Re}^2(X(k\Omega)) + \text{Im}^2(X(k\Omega))]^{1/2}, \quad (3.11)$$

а зсув фази $X(k\Omega)$

$$\phi(k\Omega) = \arctg[\text{Im}(X(k\Omega))/\text{Re}(X(k\Omega))]. \quad (3.12)$$

Отже, наведені співвідношення аналогічні відповідним співвідношенням для перетворення Фур'є.

ДПФ $X(k\Omega)$ задається наступним чином:

$$X(k\Omega) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega nT}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.13)$$

де через F_D позначено дискретне перетворення Фур'є. В цьому рівнянні k – номер гармоніки компоненти перетворення. Зауважимо, що за допомогою перетворення (3.13) N дійсних значень $x(nT)$ (в часовій області) перетворюється в N комплексних значень $X(k\Omega)$ (в частотній області).

Зробивши в інтегралі Фур'є (3.8) заміни $f(t) \rightarrow x(nT)$, $\omega \rightarrow k\Omega$, $t \rightarrow nT$ та одночасно апроксимувавши інтеграл сумою прямокутників висотою

$x(nT)$ та шириною T ($\int f(t)dt \approx T \sum x(nT)$), одержимо

$$F(i\omega) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik\Omega nT} \quad (3.14)$$

для $0 \leq t \leq (N-1)T$. Потім, порівнюючи (3.13) з (3.14), одержимо

$$F(i\omega) = TX(k\Omega), \quad (3.15)$$

звідки видно, що компоненти перетворення Фур'є пов'язані з компонентами ДПФ через інтервал дискретизації T , і їх можна знайти, домноживши компоненти ДПФ на T .

Зауважимо також, що в практичних застосуваннях $N \gg 1$, і тому часто використовується наближення $\Omega = 2\pi/NT$. Надалі (навіть при $N = 4$) ми також будемо використовувати дане наближення.

Приклад 3.2. Знайти ДПФ послідовності $\{1, 0, 0, 1\}$.

Розв'язок

Згідно умови ми маємо чотири послідовних значення напруги $x(0) = 1$, $x(T) = 1$, $x(2T) = 0$, $x(3T) = 1$, записаних з інтервалом T . Таким чином, $N = 4$. Далі потрібно знайти комплексні значення $X(k\Omega)$ для $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ і $k = 3$ (оскільки $N - 1 = 3$). Для $k = 0$ рівняння (3.13) набуває вигляду

$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-i0} = \sum_{n=0}^3 x(nT) = x(0) + x(T) + x(2T) + x(3T) = \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 = 2, \end{aligned}$$

так що $X(0) = 2$ повністю дійсне з модулем 2 і фазою $\phi(0) = 0$. Для $k = 1$ (3.13) набуває вигляду

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-i\Omega nT}.$$

Тут T невідомо, але воно скорочується, якщо згадати, що $\Omega = 2\pi/NT$. Одержимо

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-i2\pi n/N} = 1 + 0 + 0 + 1e^{-i2\pi 3/4} = 1 + e^{-i3\pi/2} = \\ &= 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + i. \end{aligned}$$

Отже, $X(\Omega) = 1+i$, тобто, є комплексним числом з модулем $\sqrt{2}$ та фазою $\phi(\Omega) = \arctg 1 = 45^\circ$. Для $k = 2$ (3.13) набуває вигляду

$$\begin{aligned} X(2\Omega) &= \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-i4\pi n/N} = 1 + 0 + 0 + 1e^{-i4\pi 3/4} = 1 + e^{-i3\pi} = \\ &= 1 + \cos(3\pi) - i \sin(3\pi) = 1 - 1 - i0 = 0. \end{aligned}$$

І так, $X(2\Omega) = 0$ з модулем 0 та невизначеною фазою $\phi(2\Omega)$. Насамкінець, для $k = 3$ (3.13) набуває вигляду

$$\begin{aligned} X(3\Omega) &= \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-i6\pi n/N} = 1 + 0 + 0 + 1e^{-i6\pi 3/4} = 1 + e^{-i9\pi/2} = \\ &= 1 + \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1 - i. \end{aligned}$$

І так, $X(3\Omega) = 1 - i$ з модулем $\sqrt{2}$ та фазою $\phi(3\Omega) = \arctg(-1) = -45^\circ$.

Таким чином, було показано, що у часового ряду $\{1, 0, 0, 1\}$ є ДПФ-образ, який задається комплексною послідовністю $\{2, 1+i, 0, 1-i\}$.

ДПФ прийнято представляти у вигляді графіків залежності $|X(k\Omega)|$ від $k\Omega$ і $\phi(k\Omega)$ від $k\Omega$. Це можна зробити через гармоніки Ω або частоти, якщо Ω відомо. Щоб знайти Ω , необхідно знати значення інтервалу дискретизації T . Якщо припустити, що розглянута в прикладі 3.2 послідовність даних була дискретизована з частотою 8 кГц, $T = 1/(8 \times 10^3) = 125$ мкс. Тоді $\Omega = 2\pi/NT = 2\pi/(4 \times 125 \times 10^3) = 12,57 \times 10^3$ рад/с. Одже, $2\Omega = 25,14 \times 10^3$ рад/с, а $3\Omega = 37,71 \times 10^3$ рад/с. На рис 1,а показано графік залежності $x(nT)$ від t , на рис 1,б – графік залежності $|X(k\Omega)|$ від $k\Omega$, а на 1,в – графік залежності $\phi(k\Omega)$ від $k\Omega$. Слід зауважити, що графік «амплітуди» на рис. 1,б симетричний відносно компонента другої гармоніки, тобто відносно гармоніки з номером $N/2$, а на рис. 1,в фазовий зсув є непарною функцією з центром в цій гармоніці. Відзначимо, що отримані результати справедливі і в більш загальному випадку.

Якщо порівняти k -й компонент ДПФ $X(k\Omega)$ з $(k+N)$ -м компонентом $X((k+N)\Omega)$, можна вивести важливу властивість ДПФ. Таким чином,

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik2\pi n/N},$$

та

$$\begin{aligned} X((k+N)\Omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-i(k+N)2\pi n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik2\pi n/N} e^{-i2\pi n} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-ik2\pi n/N} = X(k\Omega), \end{aligned}$$

оскільки n – ціле, то $e^{-i2\pi n} = \cos(2\pi n) - i \sin(2\pi n) = 1$.

Із $X((k + N)\Omega) = X(k\Omega)$ випливає, що ДПФ-образ повторюється з періодом N . В цьому полягає **властивість циклічності** ДПФ, тобто значення компонентів ДПФ повторюються. Якщо $k = 0$, то $k + N = N$, а $X(0) = X(N\Omega)$. У наведеному вище прикладі $X(0) = 2$, відповідно, $X(4) = 2$. Це факт демонструється на рис. 1, б, де амплітуда четвертої гармоніки взята в точці 50,28 кГц. Симетрія розподілу амплітуди відносно другої гармоніки очевидна. Загальний висновок: амплітудний спектр N -точкового ДПФ є симетричним відносно гармоніки $N/2$ за умови, що графік містить нульову і $N + 1$ -у гармоніки. Аналогічно функція залежності фазового зсуву, будучи непарною, проявляє антисиметричні властивості відносно гармоніки $N/2$. Якщо на протязі t секунд беруться $2f_{max}$ елементів вибірки сигналу в секунду, то $2f_{max}t = N$, так що $1/t = 2f_{max}/N$ – це частота першої гармоніки. Отже, симетрія гармоніки $N/2$ буде повторюватися на частоті $(N/2)/(2f_{max}/N) = f_{max}$ – максимальній частоті, що присутня в сигналі. Таким чином, всі компоненти сигналу повністю описуються амплітудним спектром, графік якого побудований до f_{max} або гармоніки $N/2$, і далі графік будувати не потрібно. У такому контексті f_{max} називають **частотою перегину**, оскільки спектр між гармоніками $N/2$ і N можна перегнути по осі симетрії на частоті f_{max} , і при цьому він точно накладесть на низькочастотну половину спектра. Тепер видно, що N дійсних значень даних перетворюються в N комплексних значень ДПФ. Останні складаються з $N/2$ дійсних і $N/2$ уявних значень, що дають в сумі N значень, які і одержуються з N вихідних значень даних. Нарешті, значення компонентів перетворення Фур'є $F(i\omega)$ послідовності даних $\{1, 0, 0, 1\}$ з прикладу 3.2 можна знайти, домноживши компоненти ДПФ на $T = 125$ мкс. Відповідно, $F(0) = 250$ мкВ/Гц, $F(12, 57 \text{ кГц}) = (125 + i125)$ мкВ/Гц, $F(24, 14 \text{ кГц}) = 0$ В/Гц, $F(37, 71 \text{ кГц}) = (125 - i125)$ мкВ/Гц.

Дискретне перетворення сигналу з частотної області в часову можна зробити за допомогою оберненого дискретного перетворення Фур'є (ОДПФ), яке визначається як

$$x(nT) = F_D^{-1}[X(k\Omega)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{ik\Omega nT}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.16)$$

де через F_D^{-1} позначено обернене дискретне перетворення Фур'є.

Аналогія оберненого дискретного перетворення Фур'є з перетворенням, що означається рівнянням (3.9), очевидна. Легко можна показати, що обернене перетворення Фур'є можна одержати з ОДПФ, розділивши ОДПФ на T .

Приклад 3.3. Одержати часовий ряд $\{1, 0, 0, 1\}$ з його ДПФ-образу $\{2, 1 + i, 0, 1 - i\}$.

Розв'язок

При $n = 0$ рівняння (3.16) набуває вигляду

$$\begin{aligned} x(nT) = x(0) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) = \frac{1}{4} [X(0) + X(\Omega) + X(2\Omega) + X(3\Omega)] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1 + i) + 0 + (1 - i)] = 1, \end{aligned}$$

як i має бути. При $n = 1$

$$\begin{aligned} x(T) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{ik\Omega T} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{ik2\pi/N} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k\Omega) e^{ik\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1 + i)e^{i\pi/2} + 0e^{i\pi} + (1 - i)e^{i3\pi/2}] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1 + i)(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) + 0 + \\ &+ (1 - i)(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))] = \frac{1}{4} [2 + (1 + i)i + (1 - i)(-i)] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + i - 1 - i - 1] = 0. \end{aligned}$$

При $n = 2$

$$\begin{aligned} x(2T) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{ik2\pi2/N} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k\Omega) e^{ik\pi} \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1 + i)e^{i\pi} + 0e^{i2\pi} + (1 - i)e^{i3\pi}] = \\ &= \frac{1}{4} [2 - (1 + i) - (1 - i)] = 0. \end{aligned}$$

Насамкінець, при $n = 3$

$$\begin{aligned} x(3T) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) e^{ik2\pi3/N} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k\Omega) e^{ik3\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1 + i)e^{i3\pi/2} + 0e^{i3\pi} + (1 - i)e^{i9\pi/2}] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1 + i)(-i) + (1 - i)i] = \frac{1}{4} [2 - i + 1 + i + 1] = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, одержано правильний останній член ряду.

3.5 Властивості ДПФ

ДПФ має низку математичних властивостей, якими можна скористатися, для того щоб спростити задачу обробки дискретних сигналів.

1. *Симетрія.*

$$\operatorname{Re}(X((N - k)\Omega)) = \operatorname{Re}(X(k\Omega)), \quad (3.17)$$

дана формула виражає симетрію амплітудного спектра, яка розглядалася в прикладі 3.2 ($\operatorname{Re}(X(3\Omega)) = \operatorname{Re}(X(\Omega)) = 1$), а формула

$$\operatorname{Im}(X((N - k)\Omega)) = -\operatorname{Im}(X(k\Omega)) \quad (3.18)$$

виражає антисиметрію фазового спектра ($\operatorname{Im}(X(\Omega)) = 1$, а відповідно $\operatorname{Im}(X(3\Omega)) = -1$). Дана властивість корисна при знаходженні значень компонентів різних послідовностей.

2. *Парні функції.* Якщо $x(nT)$ – парна функція $x_{\Pi}(nT)$, тобто, $x_{\Pi}(nT) = x_{\Pi}(-nT)$, то

$$F_D[x_{\Pi}(nT)] = X_{\Pi}(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{\Pi}(nT) \cos(k\Omega nT). \quad (3.19)$$

3. *Непарні функції.* Якщо $x(nT)$ – непарна функція $x_{\mathrm{H}}(nT)$, тобто, $x_{\mathrm{H}}(nT) = -x_{\mathrm{H}}(-nT)$, то

$$F_D[x_{\mathrm{H}}(nT)] = X_{\mathrm{H}}(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{\mathrm{H}}(nT) \sin(k\Omega nT). \quad (3.20)$$

4. *Теорема Парсеваля.* Нормована енергія сигналу рівна

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k\Omega)|^2. \quad (3.21)$$

Права частина рівняння (3.21) – це середньоквадратична спектральна амплітуда, а ліва частина – сума квадратів амплітуд часового ряду.

5. *Дельта-функції.*

$$F_D[\delta(nT)] = 1. \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = nT, \\ 0, & t \neq nT. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.6 Обчислювальна складність ДПФ

Для обчислення ДПФ необхідно виконати велику кількість операцій додавання і множення. Для 8-точкового ДПФ (відповідно до рівняння (3.13)) розписана послідовність $X(k\Omega)$ має вигляд:

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^7 x(nT) e^{-ik2\pi n/8}, \quad k = 0, 1, \dots, 7, \quad (3.23)$$

а заміна $2\pi k/8 = K$ дозволяє записати цей вираз у вигляді

$$X(k\Omega) = x(0)e^{-iK0} + x(\Omega)e^{-i1K} + x(2\Omega)e^{-i2K} + x(3\Omega)e^{-i3K} + x(4\Omega)e^{-i4K} + \\ + x(5\Omega)e^{-i5K} + x(6\Omega)e^{-i6K} + x(7\Omega)e^{-i7K}, \quad k = 0, 1, \dots, 7. \quad (3.24)$$

Права сторона (3.24) містить вісім членів. Обчислення кожного члена включає операцію множення завжди комплексного експоненціального множника на інший множник, який може бути або дійсним, або комплексним (наприклад, у часових рядах напруги він дійсний). Потім всі ці добутки додаються. Таким чином, для обчислення цієї величини необхідно виконати вісім операцій комплексного множення і сім операцій комплексного додавання. Для N -точкового ДПФ (для одної гармоніки) їх число буде становити відповідно N і $N - 1$. Крім того, треба обчислити також вісім компонентів гармонік ($k = 0, 1, \dots, 7$). Для N -точкового ДПФ це число дорівнює N . Отже, для обчислення восьмиточкового ДПФ необхідно виконати $8^2 = 64$ операції комплексного множення і $8 \times 7 = 56$ операцій комплексного додавання. Для N -точкового ДПФ ці числа рівні відповідно N^2 і $N(N - 1)$. Якщо $N = 1024$, то знадобиться приблизно один мільйон операцій комплексного множення і один мільйон операцій комплексного додавання. Зрозуміло, що це число потрібно якимось чином зменшити.

Об'єм необхідних обчислень можна скоротити, якщо згадати значну надмірності, зокрема, таких рівнянь, як (3.5). Наприклад, якщо $k = 1$, а $n = 2$, то $e^{-ik2\pi n/8} = e^{-i\pi/2}$, а якщо $k = 2$, а $n = 1$, то $e^{-ik2\pi n/8}$ теж рівне $e^{-i\pi/2}$.

3.7 Алгоритм швидкого перетворення Фур'є з децимацією в часовій області

Тепер покажемо, як внутрішню надмірність обчислень, притаманну ДПФ, можна використати для зменшення числа необхідних операцій і, відповідно, збільшення швидкості обчислень. Для 1024-точкового ДПФ обсяг необхідних обчислень можна зменшити в 204,8 рази. Відповідні алгоритми отримали назву «швидкого перетворення Фур'є» (ШПФ). Якщо цей алгоритм застосовується в часовій області, то його називають ШПФ з проріджуванням в часовій області (часова децимація – ЧД). Перший алгоритм ШПФ–ЧД з'явився завдяки Кулі (Cooley) і Тьюкі (Tukey), в честь яких його часто і називають. Децимація призводить до значного зниження числа операцій, що виконуються з даними у часовій області. Слід зауважити, що виграш на обчисленнях зростає за законом $N^2 - (N/2) \log_2 N$.

Отже, спростимо спочатку запис і встановимо деякі математичні співвідношення. Рівняння (3.13) можна переписати наступним чином

$$X_1(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.25)$$

Крім того, введемо позначення

$$W_N = e^{-2\pi i/N}. \quad (3.26)$$

Тоді рівняння (3.25) набуває вигляду:

$$X_1(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.27)$$

Звернемо увагу на деякі співвідношення для W_N . По-перше,

$$W_N^2 = (e^{-2\pi i/N})^2 = e^{-2\pi i \cdot 2/N} = e^{-2\pi i/(N/2)} = W_{N/2}. \quad (3.28)$$

По-друге,

$$W_N^{k+N/2} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-(2\pi i/N)(N/2)} = W_N^k e^{-i\pi} = -W_N^k. \quad (3.29)$$

При використанні обчислювальної надмірності, яка виражається рівняннями (3.26) – (3.29), послідовність даних ділиться на дві рівні послідовності, одна з яких складається з елементів з парними порядковими номерами, а інша – з непарними. Щоб довжина послідовностей була однаковою, вони повинні містити парну кількість елементів. Якщо вихідна послідовність складається з непарного числа елементів, то необхідно додати доповнюючий нуль, щоб їх число стало парним. Це дозволить записати ДПФ $X_1(k\Omega)$ через два ДПФ, $X_{11}(k\Omega)$ та $X_{12}(k\Omega)$, які будуть відповідно ДПФ-образами даних з парними і непарними значеннями. Отже, N -точкове ДПФ перетворюється на два ДПФ, кожне з яких містить $N/2$ точок. Потім цей процес повторюється до тих пір, поки $X_1(k\Omega)$ не перетвориться на $N/2$ ДПФ, кожне з яких складається з двох точок, що представляють собою вихідні дані. Таким чином, на практиці відбувається переупорядкування вихідних даних, і обчислюються $N/2$ двоточкових ДПФ, для котрих вихідні дані беруться парами. Результати цих ДПФ зручно об'єднувати в четвірки, всього виходить $N/4$ чотириточкових ДПФ, які обчислюються і відповідно об'єднуються в $N/8$ восьмиточкові ДПФ, які також обчислюються, і так далі, до тих пір, поки не буде отримано кінцеве N -точкове ДПФ $X_1(k\Omega)$. На кожному етапі для зменшення кількості комплексних операцій використовується загальний множник W_N в деякому степені. Правомірність даної процедури доводиться наступним чином.

Індекс n в рівнянні (3.27) пробігає значення від $n = 0$ до $n = N-1$, що відповідає значенням даних $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. Послідовність з парними номерами – це $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-2}$, а послідовність з непарними номерами – $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N-1}$. Обидві послідовності містять по $N/2$ точок. Члени парної послідовності можна позначити x_{2n} , де n пробігає значення від нуля до $N/2 - 1$, тоді як члени непарної послідовності – x_{2n+1} . Тоді рівняння (3.27)

можна переписати так

$$\begin{aligned}
X_1(k\Omega) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{(2n+1)k} = \\
&\quad \text{парна послідовність} \quad \text{непарна послідовність} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{2nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Врахувавши, що $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$ (див. (3.28)), рівняння (3.30) набуває вигляду

$$X_1(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk}, \tag{3.31}$$

$$= X_{11}(k\Omega) + W_N^k X_{12}(k\Omega), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{3.32}$$

Порівнюючи рівняння (3.31) з рівнянням (3.27), бачимо, що $X_{11}(k\Omega)$ – дійсно ДПФ-образ парної послідовності, тоді як $X_{12}(k\Omega)$ – образ непарної послідовності. Відповідно, ДПФ-образ $X_1(k\Omega)$ можна виразити через два ДПФ-образи: $X_{11}(k\Omega)$ і $X_{12}(k\Omega)$. При такому підході коефіцієнт $W_{N/2}^{nk}$ з’являється і в $X_{11}(k\Omega)$ і в $X_{12}(k\Omega)$, а обчислювати його необхідно тільки один раз.

Якщо в якості прикладу розглянути процес обчислення восьмиточкового ДПФ ($N = 8$), то індекс n в рівнянні (3.27) пробігає значення $n = 0, \dots, 7$, що відповідає значенням даних $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ для $k = 0, \dots, 7$. В результаті застосування формули (3.31) до цих даних одержимо розбиття вихідного ДПФ-образу на ДПФ-образи парної і непарної послідовностей $X_{11}(k\Omega)$ і $X_{12}(k\Omega)$:

$$\begin{aligned}
X_1(k\Omega) &= \sum_{n=0}^3 x_{2n} W_4^{nk} + W_8^k \sum_{n=0}^3 x_{2n+1} W_4^{nk}, \\
&= X_{11}(k\Omega) + W_8^k X_{12}(k\Omega), \quad k = 0, 1, \dots, 7.
\end{aligned}$$

$X_{11}(k\Omega)$ буде відповідати чотирьохточкова послідовність з парними номерами x_0, x_2, x_4, x_6 , а $X_{12}(k\Omega)$ – з непарними номерами x_1, x_3, x_5, x_7 для яких $N = 4$, а $k = 0, \dots, 3$. Застосувавши до кожної з них перетворення (3.31), одержимо:

$$\begin{aligned}
X_{11}(k\Omega) &= \sum_{n=0}^1 x_{2n} W_2^{nk} + W_4^k \sum_{n=0}^1 x_{2n+1} W_4^{nk}, \\
&= X_{21}(k\Omega) + W_4^k X_{22}(k\Omega), \quad k = 0, 1, \dots, 3;
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
X_{12}(k\Omega) &= \sum_{n=0}^1 x_{2n} W_2^{nk} + W_4^k \sum_{n=0}^1 x_{2n+1} W_4^{nk}, \\
&= X_{23}(k\Omega) + W_4^k X_{24}(k\Omega), \quad k = 0, 1, \dots, 3.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Тепер видно, що $X_{21}(k\Omega)$, $X_{22}(k\Omega)$, $X_{23}(k\Omega)$ і $X_{24}(k\Omega)$ є ДПФ-образами двоточкових послідовностей, зокрема, $X_{21}(k\Omega)$ відповідає послідовність x_0, x_4 , $X_{22}(k\Omega) - x_2, x_6$, $X_{23}(k\Omega) - x_1, x_5$, $X_{24}(k\Omega) - x_3, x_7$, для яких $N = 2$, а $k = 0, 1$. Застосувавши знову до кожної з них перетворення (3.31), будемо мати:

$$X_{21}(k\Omega) = x_0 W_1^{0k} + W_2^k x_4 W_1^{0k} = x_0 + W_2^k x_4 = x_0 + e^{-i\pi k} x_4, \quad k = 0, 1. \tag{3.35}$$

Відповідно,

$$X_{21}(0) = x_0 + x_4, \quad \text{а} \quad X_{21}(\Omega) = x_0 + e^{-i\pi} x_4 = x_0 - x_4.$$

Аналогічно

$$X_{22}(k\Omega) = x_2 W_1^{0k} + W_2^k x_6 W_1^{0k} = x_2 + W_2^k x_6 = x_2 + e^{-i\pi k} x_6, \quad k = 0, 1;$$

$$X_{22}(0) = x_2 + x_6, \quad \text{а} \quad X_{22}(\Omega) = x_2 - x_6;$$

$$X_{23}(k\Omega) = x_1 W_1^{0k} + W_2^k x_5 W_1^{0k} = x_1 + W_2^k x_5 = x_1 + e^{-i\pi k} x_5, \quad k = 0, 1;$$

$$X_{23}(0) = x_1 + x_5, \quad \text{а} \quad X_{23}(\Omega) = x_1 - x_5;$$

$$X_{24}(k\Omega) = x_3 W_1^{0k} + W_2^k x_7 W_1^{0k} = x_3 + W_2^k x_7 = x_3 + e^{-i\pi k} x_7, \quad k = 0, 1;$$

$$X_{24}(0) = x_3 + x_7, \quad \text{а} \quad X_{24}(\Omega) = x_3 - x_7.$$

З одержаних формул випливає, що значення з $k = 0$ відрізняються від значень з $k = 1$ тільки знаком другого доданку. Повернемося тепер до $X_{11}(k\Omega)$ ($k = 0, 1, 2, 3$)

$$X_{11}(k\Omega) = X_{21}(k\Omega) + W_4^k X_{22}(k\Omega), \tag{3.36}$$

так що

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + W_4^0 X_{22}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0), \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(\Omega) &= X_{21}(\Omega) + W_4^1 X_{22}(\Omega) = X_{21}(\Omega) + e^{-i\pi/2} X_{22}(\Omega) = \\ &= X_{21}(\Omega) - iX_{22}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(2\Omega) &= X_{21}(2\Omega) + W_4^2 X_{22}(2\Omega) = X_{21}(2\Omega) + e^{-i\pi} X_{22}(2\Omega) = \\ &= X_{21}(2\Omega) - X_{22}(2\Omega), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(3\Omega) &= X_{21}(3\Omega) + W_4^3 X_{22}(3\Omega) = X_{21}(3\Omega) + e^{-i3\pi/2} X_{22}(3\Omega) = \\ &= X_{21}(3\Omega) + iX_{22}(3\Omega). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Розглянемо детальніше рівняння (3.39), тепер тут (див. вираз (3.35))

$$X_{21}(2\Omega) = x_0 + W_2^2 x_4 = x_0 + e^{-i2\pi} x_4 = x_0 + x_4 = X_{21}(0),$$

та

$$X_{22}(2\Omega) = x_2 + W_2^2 x_6 = x_2 + e^{-i2\pi} x_6 = x_2 + x_6 = X_{22}(0).$$

Відповідно, рівняння (3.39) еквівалентне рівнянню

$$X_{11}(2\Omega) = X_{21}(0) - X_{22}(0). \quad (3.41)$$

Аналогічно для рівняння (3.40) будемо мати

$$X_{21}(3\Omega) = x_0 + W_2^3 x_4 = x_0 + e^{-i3\pi} x_4 = x_0 - x_4 = X_{21}(\Omega),$$

та

$$X_{22}(3\Omega) = x_2 + W_2^3 x_6 = x_2 + e^{-i3\pi} x_6 = x_2 - x_6 = X_{22}(\Omega).$$

Відповідно, рівняння (3.40) еквівалентне рівнянню

$$X_{11}(3\Omega) = X_{21}(\Omega) + iX_{22}(\Omega). \quad (3.42)$$

Зведемо одержані результати разом. Співвідношення (3.33), з врахуванням властивості (3.28) ($W_4^k = W_8^{2k}$), можна переписати так:

$$X_{11}(k\Omega) = X_{21}(k\Omega) + W_4^k X_{22}(k\Omega) = X_{21}(k\Omega) + W_8^{2k} X_{22}(k\Omega), \quad k = 0, 1, \dots, 3,$$

або у розгорнутому вигляді (з врахуванням властивості (3.29)):

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0) = \underline{X_{21}(0) + W_8^0 X_{22}(0)}, \quad (3.43)$$

$$X_{11}(\Omega) = X_{21}(\Omega) - iX_{22}(\Omega) = \underline{\underline{X_{21}(\Omega) + W_8^2 X_{22}(\Omega)}}, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(2\Omega) &= X_{21}(0) - X_{22}(0) = X_{21}(0) + W_8^4 X_{22}(0), \\ &= \underline{X_{21}(0) - W_8^0 X_{22}(0)}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(3\Omega) &= X_{21}(\Omega) + iX_{22}(\Omega) = X_{21}(\Omega) + W_8^6 X_{22}(\Omega), \\ &= \underline{\underline{X_{21}(\Omega) - W_8^2 X_{22}(\Omega)}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Уважно вивчивши одержані рівняння, бачимо, як ДПФ-образи $X_{11}(\Omega)$ пов'язані з ДПФ-обрами їх послідовностей з парними і непарними номерами, і що $X_{11}(0)$ та $X_{11}(2\Omega)$ задаються виразами з однаковими членами, які відрізняються тільки знаком. Теж саме справедливо і для $X_{11}(\Omega)$ та $X_{11}(3\Omega)$. Рівняння, подібні даним, називають **рекомпозиційними**, оскільки, взявши пари даних і формуючи $X_{21}(k\Omega)$, $X_{22}(k\Omega)$, $X_{23}(k\Omega)$ та $X_{24}(k\Omega)$, можна знайти $X_{11}(k\Omega)$ та $X_{12}(k\Omega)$, а отже, і $X_1(k\Omega)$. При цьому кількість необхідних операцій комплексного додавання і множення зменшується, оскільки, по-перше, рекомпозиційні рівняння записуються через рекурентний коефіцієнт W_N в деякому степені, по-друге, використовуються також співвідношення типу $X_{21}(2\Omega) = X_{21}(0)$ і $X_{21}(3\Omega) = X_{21}(\Omega)$ і, по-третє, відмінність між парами використовуваних виразів полягає тільки в знаці. Цей алгоритм відомий під назвою **алгоритма Кулі-Тьюкі**.

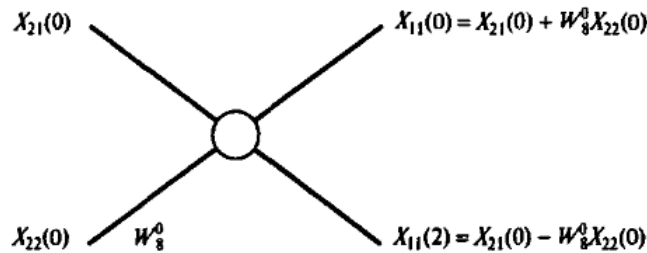


Рис. 3.1. Діаграма «метелик» для $X_{11}(0)$ та $X_{11}(2\Omega)$.

Рівняння (3.43)–(3.46) можна зобразити на діаграмі, взявши їх попарно та скориставшись симетрією знаків. Отже, відповідно до рівнянь (3.43) і (3.45) результатом рекомпозиції будуть $X_{11}(0)$ та $X_{11}(2\Omega)$, отримані з вхідних $X_{21}(0)$ і $X_{22}(0)$. Це показано на рис. 3.1. Вхідні дані знаходяться з лівого боку діаграми, а вихідні – з правого. На рис. 3.2 показано, як за допомогою діаграмми можна отримати $X_{11}(1)$ та $X_{11}(3\Omega)$. При накладенні рис. 3.1 на рис. 3.2 виходить складена діаграма, на якій вихідні ДПФ розташовані в порядку зростання k (див. рис. 3.3). Структура, зображена

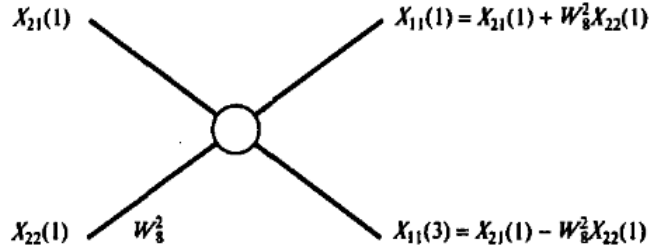


Рис. 3.2. Діаграма «метелик» для $X_{11}(1)$ та $X_{11}(3\Omega)$.

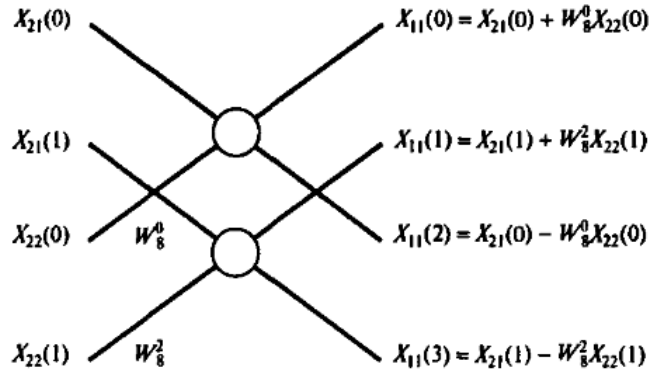


Рис. 3.3. Загальна діаграма «метелик».

на рис. 3.1–3.3, називається «метеликом». Повністю восьмиточкове ШПФ можна зобразити так, як показано на рис. 3.4. Для знаходження $X_{12}(k\Omega)$ треба скористатися виразом (3.34). За відомими $X_{11}(k\Omega)$ та $X_{12}(k\Omega)$ шукані значення ДПФ $X_1(k\Omega)$ знаходять за формулою (3.36).

Приклад 3.4. Знайти ДПФ послідовності $\{1, 0, 0, 1\}$, що раніше розглядалася в прикладі 3.2, за допомогою алгоритма ШПФ з часовою децимацією.

Розв'язок

Маємо чотирьохточкове ДПФ з $x_0 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ і $X_1(k\Omega) = X_{11}(k\Omega) + W_4^k X_{12}(k\Omega)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Перевпорядкуємо послідовність – x_0, x_2, x_1, x_3 . Тепер для виконання ДПФ можна скористатися верхнім лівим кутом на рис. 3.4. Точки x_0, x_4, x_2, x_6 замінимо точками x_0, x_2, x_1, x_3 , тоді шуканими значеннями ДПФ будуть $X_{11}(0)$, $X_{11}(\Omega)$,

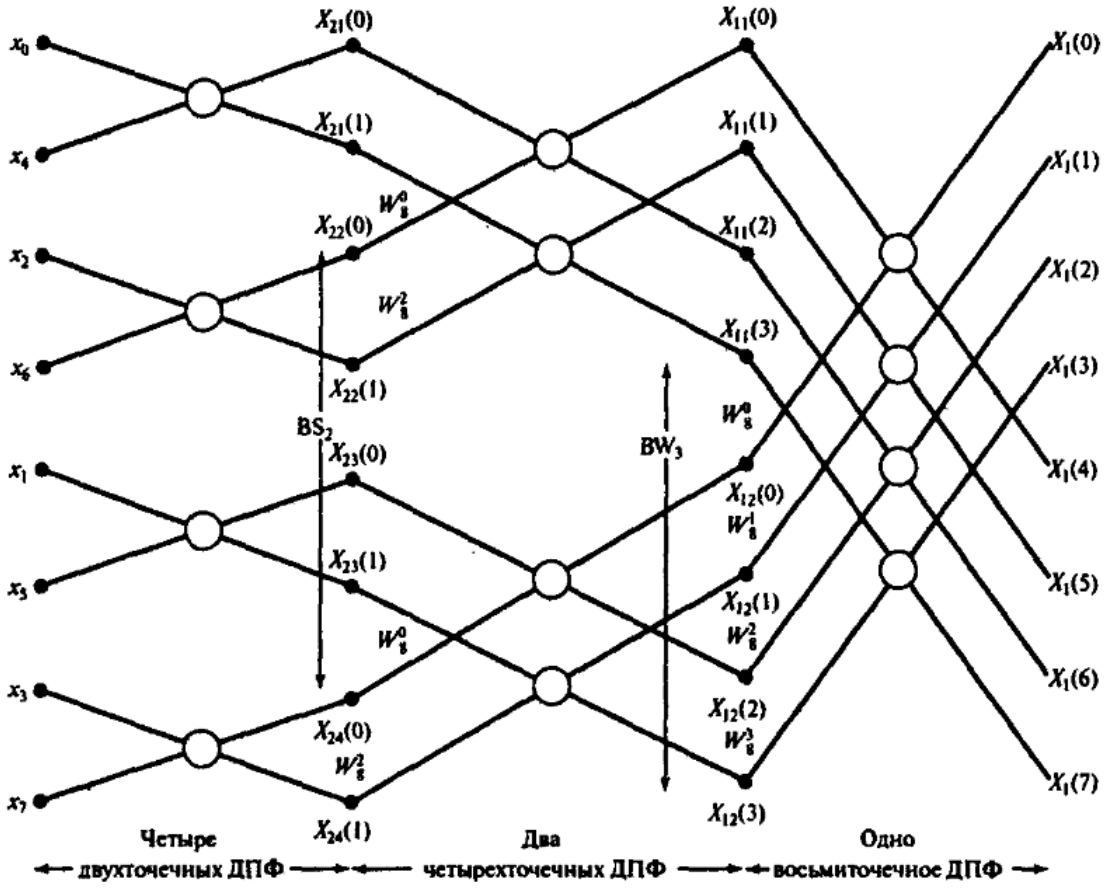


Рис. 3.4. Загальна діаграма «метелик» для восьмиточкового ШПФ.

$X_{11}(2\Omega), X_{11}(3\Omega)$. Отже

$$X_{21}(0) = x_0 + x_2 = 1,$$

$$X_{21}(\Omega) = x_0 - x_2 = 1,$$

$$X_{22}(0) = x_1 + x_3 = 1,$$

$$X_{21}(\Omega) = x_1 - x_3 = -1,$$

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + W_4^0 X_{22}(0) = 1 + 1 = 2,$$

$$X_{11}(\Omega) = X_{21}(\Omega) + W_4^1 X_{22}(\Omega) = 1 + e^{-i\pi/2}(-1) = 1 + (-i)(-1) = 1 + i,$$

$$X_{11}(2\Omega) = X_{21}(0) + W_4^2 X_{22}(0) = X_{21}(0) - W_4^0 X_{22}(0) = 1 - 1 = 0,$$

$$X_{11}(3\Omega) = X_{21}(\Omega) + W_4^3 X_{22}(\Omega) = X_{21}(\Omega) - W_4^1 X_{22}(\Omega) = 1 - i.$$

Отримані значення ідентичні величинам, котрі були знайдені в прикладі 3.2, але за допомогою алгоритма ШПФ їх отримати набагато простіше. Це загальний висновок, причому зменшення числа обчислень тим більше, чим більший розмір вихідної вибірки.

3.8 Обернене швидке перетворення Фур'є

Алгоритм для визначення оберненого швидкого перетворення Фур'є (ОШПФ) можна легко отримати з алгоритма ШПФ. Цей алгоритм потрібен в основному для перетворення спектрів у відповідні їм сигнали та для перевірки правильності обчислення ШПФ за допомогою (як правило) того самого алгоритму. Щоб зрозуміти, як виводиться ОШПФ, зробимо наступні заміни в рівнянні (3.13). Підсумовування проведемо за змінною λ , а не за n , змінну k перейменуємо в μ , а $\Omega = 2\pi/NT$, щоб показник експоненти став $-i\mu(2\pi/N)\lambda$. Скористаємося позначеннями $x(nT) = x(n)$ та $X(k\Omega) = X(k)$. При цьому рівняння (3.13) набуде вигляду

$$X(\mu) = \sum_{\lambda=0}^{N-1} x(\lambda) e^{-i\mu(2\pi/N)\lambda}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.47)$$

Тепер зробимо аналогічну заміну у рівнянні (3.16), тобто покладемо $k = \lambda$ та $n = \mu$. Рівняння (3.16) набуває вигляду

$$x(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=0}^{N-1} X(\lambda) e^{i\mu(2\pi/N)\lambda}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.48)$$

В двох останніх рівняннях $X(\mu)$, $X(\lambda)$, $x(\mu)$ і $x(\lambda)$ – елементи масивів X і x однакової розмірності, так що ОШПФ $x(\mu)$ відрізняється від ШПФ $X(\mu)$ тільки коефіцієнтом $1/N$ і знаком показника степеня експоненти. Отже, для обчислення ОШПФ можна скористатися ШПФ з невеликими змінами.

3.9 Інші дискретні перетворення

3.9.1 Дискретне косинус-перетворення

Дискретне косинус-перетворення (ДКП) особливо підходить для компресії даних при, наприклад, передачі мови або відеосигналів, а також для запису медичних сигналів, таких як сигнали електрокардіографії (ЕКГ) або електроенцефалограми (ЕЕГ). ДКП представляє собою дійсну частину ДПФ, оскільки ряд Фур'є з дійсних і парних функцій містить тільки косинусоїдальні члени. Нехай ДПФ задається виразом (3.13)

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-ik2\pi n/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Визначивши ДКП $X_c(k\Omega)$ як дійсну частину цього перетворення, будемо мати

$$X_c(k\Omega) = \operatorname{Re}[X(k\Omega)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.49)$$

Або в більш загальному вигляді:

$$\begin{aligned} X_c(k\Omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n + k\pi}{2N}\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k\pi(2n+1)}{2N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.9.2 Перетворення Уолша

До тепер ми розглядали перетворення, що базувалися на функціях косинус і синус. Набагато простіше і швидше обчислюються перетворення, що базуються на імпульсо-подібних сигналах, які приймають значення тільки ± 1 . Крім того, вони більше підходять для опису сигналів з порушенням неперервності, які зустрічаються, наприклад, в зображеннях. І, навпаки, вони менш придатні для опису неперервних сигналів. Тому такі перетворення зазвичай використовуються при обробці зображень (астрономія і спектроскопія), кодуванні сигналів та фільтрації.

Точно так, як ДПФ ґрунтується на наборі гармонічних косинусоїдальних і синусоїдальних сигналів, дискретне перетворення Уолша (ДПУ) базується на наборі гармонічних прямокутних імпульсів, які називаються **функціями Уолша**. Однак для прямокутних імпульсів частота не визначена, тому використовується аналоговий термін «послідовність». Послідовність – це половина середнього числа переходів через нуль за одиницю часу. На рис. 3.5 показані функції Уолша до порядку $N = 8$, розташовані у порядку зростання. У такому вигляді їх називають **упорядкованими по Уолшу**. Функцію Уолша з часом t і порядком n позначають $\text{WAL}(n, t)$. З рис. 3.5, видно, що існує рівна кількість парних і непарних функцій Уолша, точно так, як і косинусоїдальних і синусоїдальних компонентів ряду Фур'є. Парні функції $\text{WAL}(2k, t)$ записуються як $\text{CAL}(k, t)$, а непарні функції $\text{WAL}(2k+1, t)$ записуються як $\text{SAL}(2k+1, t)$, де $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Будь-який сигнал $f(t)$ можна розкласти за набором функцій Уолша як

$$f(t) = a_0 \text{WAL}(0, t) + \sum_{i=1}^{N/2-1} \sum_{j=1}^{N/2-1} [a_i \text{SAL}(i, t) + b_j \text{SAL}(j, t)], \quad (3.51)$$

де a_i та b_j – коефіцієнти ряду.

Для двох довільних функцій Уолша виконується умова ортогональності

$$\sum_{i=1}^{N-1} \text{WAL}(m, t) \text{WAL}(n, t) = \begin{cases} N & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases},$$

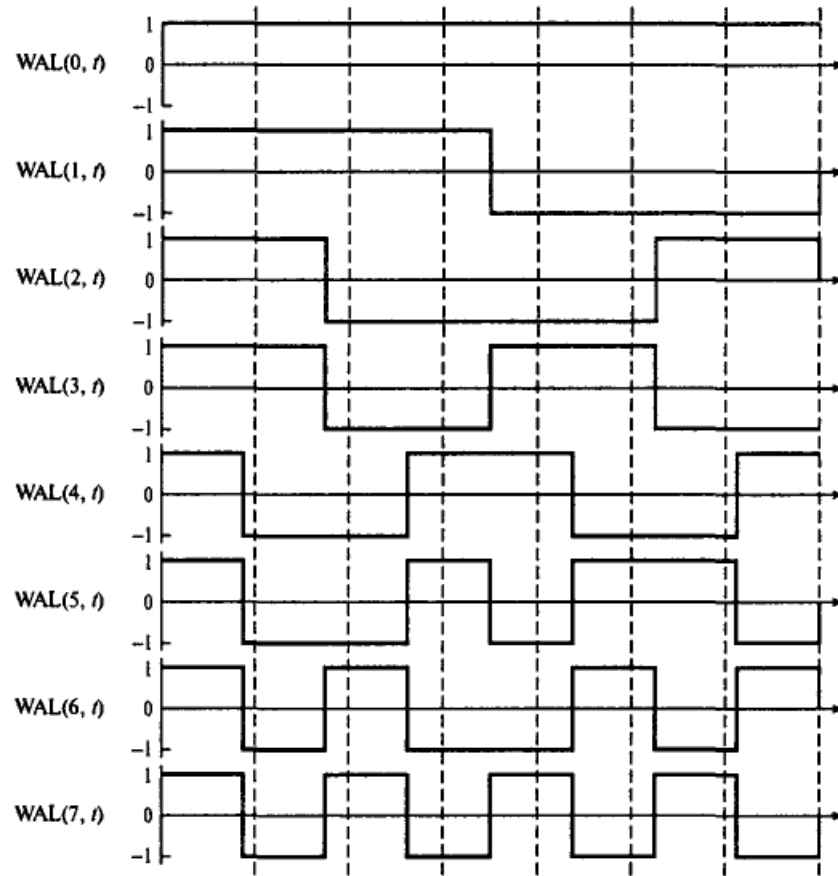


Рис. 3.5. Впорядковані у порядку зростання функції Уолша до $n = 8$, котрі показують часи дискретизації для матриці перетворення Уолша порядку 8×8 .

Пара дискретних Уолш-образів – це

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x_i \text{WAL}(k, i), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.52)$$

та

$$x_i = \sum_{k=1}^{N-1} X_k \text{WAL}(k, i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.53)$$

слід зауважити, що, не беручи до уваги множник $1/N$, обернене перетворення ідентичне прямому, і $\text{WAL}(k, i) = \pm 1$.

З рівняння (3.52) випливає, що k -й елемент ДПУ можна отримати, помноживши кожен дискретний елемент сигналу x_i на функцію Уолша послідовності k і підсумувавши по $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Для всіх елементів k це можна записати в матричному вигляді як

$$\mathbf{X}_k = \frac{1}{N} \mathbf{x}_i \mathbf{W}_{ki}, \quad (3.54)$$

де $\mathbf{X}_i = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}]$ – послідовність даних

$$\mathbf{W}_{ki} = \begin{bmatrix} W_{01} & W_{02} & \dots & W_{0,N-1} \\ W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \dots & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix} -$$

матриця перетворення Уолша, а $\mathbf{X}_k = [X_0 \ X_1 \ X_2 \ \dots \ X_{N-1}]$ – $N-1$ компонент ДПУ. Звернемо увагу, що $\mathbf{W}_{ki}$ – це квадратна матриця порядку $N \times N$, де N – кількість заданих точок дискретного сигналу. Відповідно, якщо є N точок даних, то необхідно розглядати перші N впорядкованих функцій Уолша. Кожна з них дискретизується N разів, при цьому k -й рядок матриці $\mathbf{W}_{ki}$ відповідає N дискретним значенням k -го компонента послідовності.

Приклад 3.5. Знайти ДПУ послідовності даних $\{1, 2, 0, 3\}$.

Розв’язок

Послідовність даних складається з $N = 4$ точок, так що в даному випадку $\mathbf{W}_{ki}$ – це квадратна матриця порядку 4×4 , яка одержується із перших чотирьох рядків рис. 3.5:

$$\mathbf{W}_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Тоді рівняння (3.54) для $\mathbf{X}_k$ набуває вигляду:

$$\mathbf{X}_k = \frac{1}{4} [1 \ 2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} [6 \ 0 \ 2 \ -4],$$

так що $X_0 = 1,5$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0,5$ і $X_3 = -1$. Як видно, ці обчислення значно простіші, ніж відповідне обчислення ДПФ.

3.9.3 Перетворення Адамара

Перетворення Адамара, або перетворення Уолша – Адамара, – це, по суті, теж перетворення Уолша, але з іншим порядком функцій Уолша і,

відповідно, рядків матриці перетворення. В результаті такої перестановки одержується **матриця Адамара**, яка містить підмасиви матриць другого порядку. На рис. 3.6 показана матриця Адамара порядку 8×8 (позначається як ${}^8\mathbf{H}$). Видно, що її можна записати через матриці

$${}^2\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad -{}^2\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Будь яку матрицю Адамара порядку $2N$ можа рекурсивно одержати з ${}^2\mathbf{H}$ як

$${}^{2N}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} {}^N\mathbf{H} & {}^N\mathbf{H} \\ {}^N\mathbf{H} & -{}^N\mathbf{H} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

		$i \longrightarrow$								
			0	1	2	3	4	5	6	7
$j \downarrow$	0	$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$	1	1	1	1	1	1	1	
	1		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	2		1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	3		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	4		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	5		1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	6		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	7		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Рис. 3.6. Матриця перетворення Адамара подку 8×8 .

З цієї рекурсивної властивості випливає, що швидке перетворення Уолша-Адамара, яке одержується при розташуванні функцій Уолша в порядку, визначеному Адамаром, можна обчислити набагато швидше, ніж ДПУ. Розташовані в порядку Адамара (або в природному порядку) функції Уолша показані на рис. 3.7. Послідовність Адамара одержується з послідовності Уолша наступним чином:

- порядковий номер, розташованих по Уолшу, функцій Уолша переводиться у двійкову систему числення;
- біти переставляються в зворотному порядку;
- двійкові значення перетворюються в код Грея;

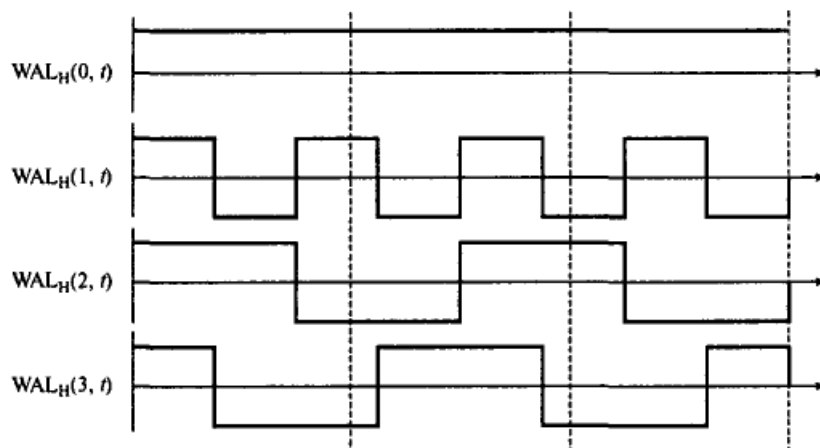


Рис. 3.7. Функції Уолша, розташовані в порядку Адамара, до $n = 7$, які показують часи дискретизації для матриці перетворення Адамара порядку 4×4 .

г) отримані значення перетворюються в десяткові.

Приклад 3.6. Знайти дискретне перетворення Уолша-Адамара (ДПУА) послідовності даних $\{1, 2, 0, 3\}$.

Розв'язок

Матриця Адамара порядку 4×4 $\mathbf{H}_{ki}$ (див. рис. 3.7) рівна:

$$\mathbf{H}_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Відповідно, ДПУА-образ послідовності $\{1, 2, 0, 3\}$ задається так:

$$\mathbf{X}_k^{WH} = \frac{1}{4} [1 \quad 2 \quad 0 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} [6 \quad -4 \quad 0 \quad 2],$$

так що $X_0^{WH} = 1,5$, $X_1^{WH} = -1$, $X_2^{WH} = 0$ і $X_3^{WH} = 0,5$. Значення цих величин такі ж, як і розраховані в прикладі 3.5, компоненти перетворення Уолша, тільки стоять в іншому порядку.

4 ДОДАТОК. ТИПОВІ ДИСКРЕТНІ СИГНАЛИ

Приведемо означення типових дискретних сигналів, які використовуються в роботі.

- *Цифровий одиничний імпульс* – послідовність з єдиним відліком, відмінним від нуля і рівним одиниці в точці $n = 0$ (рис. 4.1 а):

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Затримка цифрового одиничного імпульсу, як і будь-якої іншої послідовності, еквівалентна її зсуву по осі часу вправо (рис. 4.1 б) на $m > 0$ відліків (m періодів дискретизації):

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

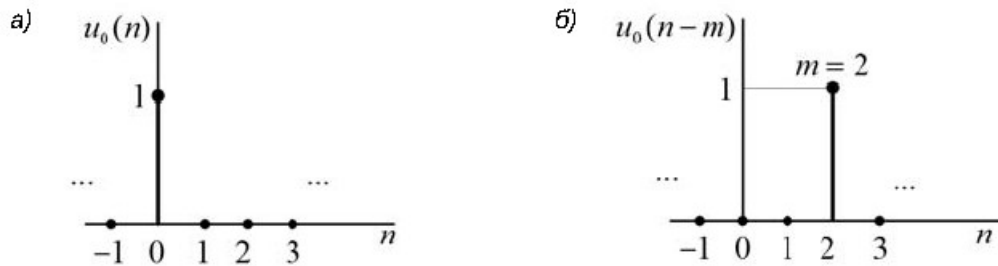


Рис. 4.1. Цифровий одиничний імпульс (а) та цифровий одиничний імпульс із затримкою (б)

У цифровій обробці сигналів цифровий одиничний імпульс $u_0(n)$ відіграє таку ж роль, що і δ -функція (функція Дірака) $\delta(t)$ в аналоговій обробці:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Проте, на відміну від δ -функції, цифровий одиничний імпульс можна фізично реалізувати.

За означенням інтеграл від δ -функції (його площа) рівний одиниці. В області дискретного часу йому можна співставити суму відліків цифрового одиничного імпульсу, також рівну одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(n) = 1.$$

Фільтруючі властивості (властивості селективності) δ -функції у вигляді інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

відповідає фільтруюча властивість цифрового одиничного імпульсу у вигляді ряду

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n - m) = x(n), \quad (4.2)$$

що означає, що з нескінченної послідовності цифровий одиничний імпульс виділить тільки один відлік, що відповідає моменту часу $n = m$, а решту – «обнулити». Ця властивість ілюструє (рис. 4.2). У кожен момент часу n маємо тільки один відмінний від нуля локальний добуток $x(m)u_0(n - m)$ при рівності $m = n$: $x(n)u_0(0) = x(n)$.

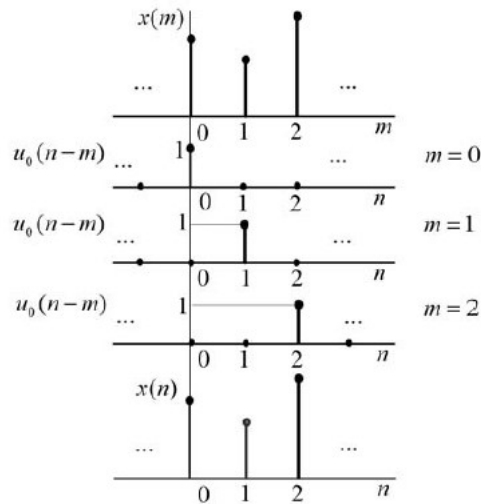


Рис. 4.2. Ілюстрація фільтруючої властивості цифрового одиничного імпульсу

- *Цифровий одиничний стрибок* – це послідовність, відліки якої рівні одиниці при всіх невід’ємних значеннях n і рівні нулю – в протилежному випадку (рис. 4.3 а):

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Цифровий одиничний стрибок із затримкою описується послідовністю (рис. 4.3 б)

$$u_1(n - m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

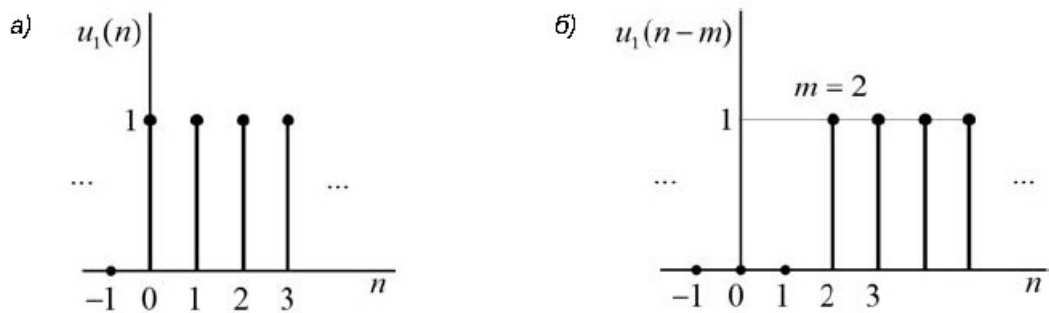


Рис. 4.3. Цифровий одиничний стрибок (а) та цифровий одиничний стрибок із затримкою(б)

- *Дискретна експонента* – послідовність, відліки якої визначаються співвідношенням (рис. 4.4):

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

- *Дискретний гармонічний сигнал* – послідовність, відліки якої збігаються зі значеннями аналогового гармонійного сигналу (синусоїди або косинусоїди) в моменти дискретного часу (рис. 4.5):

$$x(nT) = C \cos(\omega t)|_{t=nT} = C \cos(\omega nT),$$

де C – амплітуда, ω – частота, T – період дискретизації сигналу.

У шкалі дискретного нормованого часу та нормованої частоти це еквівалентно

$$x(n) = C \cos(\hat{\omega}n).$$

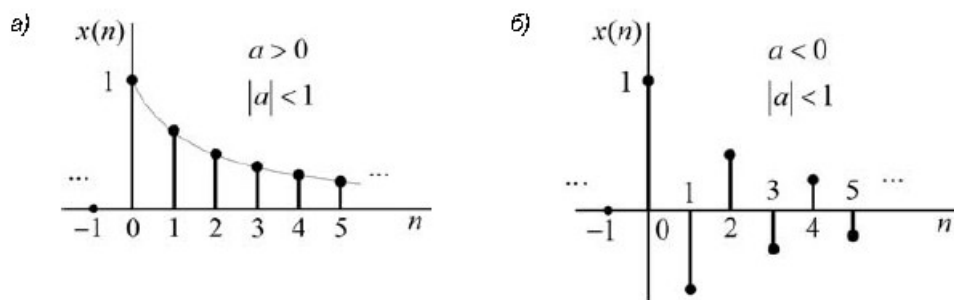


Рис. 4.4. Знакопостійна (а) та знакозмінна (б) дискретні експоненти

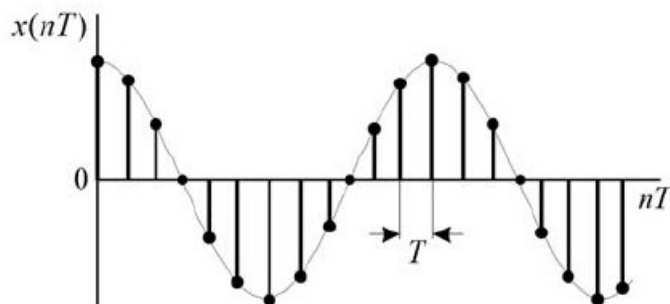


Рис. 4.5. Аналоговий (огинача) та дискретний гармонічний сигнали

- Дискретний комплексний гармонічний сигнал – комплексна послідовність, відліки якої збігаються зі значеннями комплексного аналогового гармонічного сигналу в моменти дискретного часу:

$$x(nT) = Ce^{j\omega t}|_{t=nT} = Ce^{j\omega nT}.$$

У шкалі дискретного нормованого часу та нормованої частоти це еквівалентно

$$x(n) = Ce^{j\omega n}. \quad (4.5)$$

Дійсна та уявна частини комплексного сигналу описуються дійсними послідовностями:

$$x(n) = C \cos(\hat{\omega}n) + jC \sin(\hat{\omega}n).$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Заболотній С.В. Цифрове оброблення сигналів: навч. посібник / Авт.-укл. С.В. Заболотній. – Черкаси: ЧДТУ, 2010. 119 с.
2. Lyons Richard G. Understanding Digital Signal Processing. Third Ed. – Boston: Pearson Education, Inc., 2011, 858 p.
3. Ifeachor E.C., Jervis B.W. Digital Signal Processing. A Practical Approach. Second Ed. – London: Pearson Education, Inc., 2004, 992 p.
4. Atkinson L.V., Harley P.J. (1983), An Introduction to Numerical Methods with Pascal, Chapter 3. – Wokingham: Addison-Wesley.
5. Jury E.I. (1964), Theory and Applications of the Z-transform Method. – New York: Wiley.
6. Proakis J.G., Manolakis D.G. (1992), Digital Signal Processing, 2-nd edn. – New York: Macmillan.
7. Rabiner L.R., Gold B. (1975), Theory and Applications Digital Signal Processing. – Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall.
8. Steiglitz K. (1974), An Introduction to Discrete Systems. – New York: Wiley.
9. Strum R.D., Kirk D.E. (1988), First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing. – Reading MA: Addison-Wesley.
10. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад.: Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 308 с.
11. Цифрова обробка сигналів: Навчальний посібник / А.Й. Наконечний, Р.А. Наконечний, В.А. Павлиш. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 368 с.
12. Цифрова обробка сигналів та зображень: навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Укладачі: О.В. Тотосько, П.Д. Стухляк. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2016. – 140 с.
13. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О.В. Дробик, В.В. Кідалов, В.В. Коваль, Б.Я. Костік, В.С. Лазебний, Г.М. Розорінов, Г.О. Сукач. – Київ: Наукова думка, 2008. – 144 с.

14. Обробка сигналів / В.П. Бабак, Е. Шрюфер. – Київ: Либідь, 1996. – 320 с.
15. Korn G.A., Korn T.M. (2000), Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. – New York: McGraw-Hill Book Company.

В.В. Рубіш, Р.М. Плекан

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Навчально-методичний посібник

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 2,38. Зам. № 67. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ «Говерла». м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Тел.: 3-32-48.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року*