

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).44-61](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).44-61)**Т. В. Маловічко¹, Б. В. Панченко²**

¹ Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
tatianamtv@protonmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9075-4356>

² АБ «УКРГАЗБАНК»,
головний фахівець
bodik_panchenko@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-3119-9769>

ВЛАСТИВОСТІ ВІНЕРОВОГО ПРОЦЕСУ ЗІ ЗМІННИМ ФАЗОВИМ ПРОСТОРОМ

Для вінерового процесу зі змінним фазовим простором досліджено існування початкового розподілу із заданими фінальними ймовірностями, зосередженого в одній точці, для випадку чотирьох точок A_1, A_2, A_3, A_4 на межі області. Для дифузійного процесу зі змінним фазовим простором досліджено існування початкового розподілу із заданими фінальними ймовірностями.

Ключові слова: вінерів процес, вінерів процес з поглинанням, початковий розподіл.

1. Вступ. Вивчення стохастичних потоків починалось від ідеї розглядати сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь як функції від початкової точки. З розвитком математичних моделей виникла трактовка потоку як сукупності марківських процесів, що певним чином взаємодіють між собою. В тому числі, почали розглядати й потоки зі склеюванням, тобто потоки, траєкторії частинок в яких після зустрічі склеюються в одну.

Такі потоки з'являються як при описі турбулентних явищ, моделей протікання для річкових систем тощо.

Класичним прикладом стохастичного потоку зі склеюванням є потік Арраття [1], який може бути описаний на інтуїтивному рівні як сукупність частинок, що стартують з кожної точки числової прямої, здійснюють броунівський рух та рухаються незалежно до моменту зустрічі, а при зустрічі склеюються та продовжують броунівський рух разом.

Також прикладами стохастичних потоків зі склеюванням можуть бути потоки Харріса у випадку наявності склеювання [2].

Для стохастичного потоку зі склеюванням n -точковий рух є n -вимірним випадковим процесом, координати якого після зустрічі залишаються рівними.

Випадковий процес, що описує рух броунівських частинок, які при зустрічі склеюються, проте не уповільнюються, досліджував А. А. Дороговцев [3, 4].

Метою цієї роботи є дослідження властивостей схожого процесу, який ми будемо називати вінеровим процесом зі змінним фазовим простором, а також його аналогу. Вінерів процес зі змінним фазовим простором починає свій рух в однозв'язній області, на межі якої вибрано скінченну кількість точок $A_1, A_2, \dots, A_n$, що розбивають межу цієї області на n дуг. Він поводить себе як двовимірний вінерів процес до моменту виходу на межу, а потім як одновимірний вінерів процес на відповідній дузі з поглинанням на кінцях.

В роботі [5] досліджувались початкові розподіли, за яких вінерів процес зі змінним фазовим простором зупинявся у точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з наперед заданими ймовірностями.

У цій статті доповнюються та узагальнюються результати роботи [5].

2. Вінерів процес зі змінним фазовим простором. Нехай задана обмежена однозв'язна область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. На межі цієї області виберемо скінченну кількість точок різних $A_1, A_2, \dots, A_n$ (для зручності позначень будемо вважати, що $A_0 = A_n$), що розбивають межу області Q на n дуг.

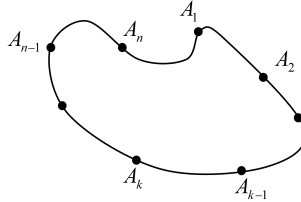


Рис. 1

Будемо розглядати процес $Y_{(x_0, y_0)}(\cdot)$, що стартує з точки $(x_0, y_0) \in Q$ та поводитьься як двовимірний вінерів процес до моменту виходу на межу області Q . У цей момент процес Y потрапляє на одну з дуг $\widehat{A_{k-1}A_k}$, а потім поводитьься, як одновимірний вінерів процес на дузі $\widehat{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням на кінцях.

Цей процес, який ми будемо називати вінеровим процесом зі змінним фазовим простором, можна задати таким чином:

$$Y_{(x_0, y_0)}(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot w_{(x_0, y_0)}(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\left\{w(\tau) \in \widehat{A_{k-1}A_k}\right\}} \cdot w_{w(\tau)}^{(k)}(t - \tau),$$

де $w_{(x_0, y_0)}(\cdot)$ — двовимірний вінерів процес, що стартує з точки (x_0, y_0) в області Q , τ — момент першого виходу процесу $w_{(x_0, y_0)}$ на межу цієї області, тобто

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : w_{(x_0, y_0)}(t) \in \partial Q\},$$

$w_{(x_k, y_k)}^{(k)}, k = \overline{1, n}$, — незалежні в сукупності та незалежні від $w_{(x_0, y_0)}$ вінерові процеси на дугах $\widehat{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням на кінцях, що стартують з точок $(x_k, y_k) \in \widehat{A_{k-1}A_k}$.

В роботі [5] було доведено, що процес Y є марківським, а також існування початкового розподілу процесу Y , при якому він зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, за умови, що Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з регулярною кусково-гладкою межею.

Нагадаємо, що точка $a \in \partial Q$ називається регулярною, якщо

$$\forall h > 0 \quad P_x \{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0.$$

При цьому відомо, що для того, щоб точка $a \in \partial Q$ була регулярною, достатньо, щоб зовні області Q існував трикутник з вершиною в точці a .

Також у статті [5] розглядалось питання, чи можливо вказати таку точку в області Q , щоб процес Y , що стартує з неї, зупинявся в точках $A_1, A_2, \dots, A_n \in \partial Q$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Відповідь на це питання для випадку трьох точок на межі A_1, A_2, A_3 була позитивною. Також був наведений приклад для випадку п'яти точок на межі, коли вказана стартова точка не існує. Питання про існування відповідної точки для чотирьох точок на межі області лишалося відкритим.

Ми наведемо приклад для випадку чотирьох точок на межі області, коли вказана стартова точка не існує.

Приклад 1. Нехай область Q є внутрішністю правильного трикутника, точки A_1, A_2, A_3 є вершинами цього трикутника, а точка A_4 є серединою сторони A_1A_3 .

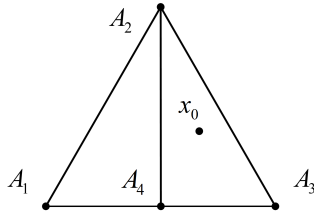


Рис. 2

Позначимо через $\psi_k(x)$ ймовірність того, що процес Y при початковому положенні в точці x зупиниться в точці A_k . Ми покажемо, що точки $x_0, y_0 \in Q$, для яких

$$\psi_1(x_0) = \psi_3(x_0) = \frac{1}{4}, \quad \psi_2(x_0) = \frac{1}{3}, \quad \psi_4(x_0) = \frac{1}{6},$$

$$\psi_1(y_0) = \psi_3(y_0) = \frac{5}{24}, \quad \psi_2(y_0) = \frac{1}{3}, \quad \psi_4(y_0) = \frac{1}{4},$$

одночасно існувати не можуть, а тому вказати таку точку в області Q , щоб процес Y , що стартує з неї, зупинявся в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , можливо не для всіх наперед заданих додатних імовірностей.

Припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони A_3A_2 менше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_2 .

Позначимо

$$B_1(y) = \{x \in A_1A_2 : 0 \leq \rho(x, A_1) < y\},$$

$$B_2(y) = \{x \in A_3A_2 : 0 \leq \rho(x, A_3) < y\}.$$

Для довільної точки $x \in A_2A_4$ з симетрії вінерового процесу впливає рівність

$$P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} = P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
 P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} &= \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y) \text{ через } A_2 A_4\} < P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\},
 \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
 P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_2\} &= \\
 &= \int_{|A_1 A_2|} \left(1 - \frac{y}{|A_1 A_2|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} = \\
 &= \int_{|A_3 A_2|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_2|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} < \\
 &< \int_{|A_3 A_2|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_2|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\} = \\
 &= P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_2\}.
 \end{aligned}$$

Позначимо

$$C_1(y) = \{x \in A_1 A_3 : 0 \leq \rho(x, A_1) < y\},$$

$$C_2(y) = \{x \in A_1 A_3 : 0 \leq \rho(x, A_3) < y\}.$$

Для довільної точки $x \in A_2 A_4$ з симетрії вінерового процесу впливає рівність

$$P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} = P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
 P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} &= \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y) \text{ через } A_2 A_4\} < P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\},
 \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
& P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_4\} = \\
& = \int_{|A_1 A_4|} \left(1 - \frac{y}{|A_1 A_4|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} = \\
& = \int_{|A_3 A_4|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_4|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} < \\
& < \int_{|A_3 A_4|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_4|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\} = \\
& = P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_4\}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\psi_1(x_0) < \psi_3(x_0).$$

Аналогічно доводиться, що якщо відстань від точки x_0 до сторони $A_3 A_2$ більше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$, то

$$\psi_1(x_0) > \psi_3(x_0).$$

Таким чином, з того, що

$$\psi_1(x_0) = \psi_3(x_0), \quad \psi_1(y_0) = \psi_3(y_0),$$

випливає, що $x_0, y_0 \in A_2 A_4$.

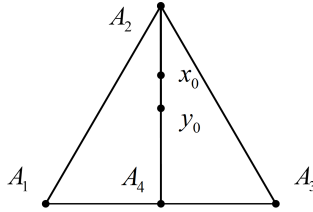


Рис. 3

Разом із процесом

$$Y(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot w(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^4 \mathbb{I}_{\{w(\tau) \in A_{k-1} A_k\}} \cdot w_{w(\tau)}^{(k)}(t - \tau)$$

розглянемо процес

$$\tilde{Y}(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot w(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^3 \mathbb{I}_{\{w(\tau) \in \tilde{A}_{k-1} \tilde{A}_k\}} \cdot \tilde{w}_{w(\tau)}^{(k)}(t - \tau),$$

де точки $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ є точками A_1, A_2, A_3 відповідно, $\tilde{A}_0$ є точкою A_3 ,

$$\tilde{w}_{w(\tau)}^{(2)} = w_{w(\tau)}^{(2)}, \quad \tilde{w}_{w(\tau)}^{(3)} = w_{w(\tau)}^{(3)},$$

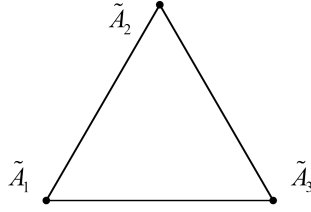


Рис. 4

$\tilde{w}_x^{(1)}$ — незалежний від $\tilde{w}_{w(\tau)}^{(2)}$ та $\tilde{w}_{w(\tau)}^{(3)}$ вінерів процес на відрізку $\tilde{A}_3\tilde{A}_1$ з поглинанням на кінцях, що стартує з точки $x \in \tilde{A}_3\tilde{A}_1$.

Позначимо через $\tilde{\psi}_k(x)$ ймовірність того, що процес $\tilde{Y}$ при початковому положенні в точці x зупиниться в точці $\tilde{A}_k$,

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \frac{|A_1 y|}{|A_1 A_2|}, & y \in A_1 A_2, \\ \frac{|y A_3|}{|A_2 A_3|}, & y \in A_3 A_2, \\ 0, & y \in A_3 A_1. \end{cases}$$

Тоді

$$\tilde{\psi}_2(x) = E_x \varphi_2(w(\tau)) = \psi_2(x).$$

А тому

$$\tilde{\psi}_2(x_0) = \psi_2(x_0) = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\psi}_2(y_0) = \psi_2(y_0) = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $x_0, y_0 \in A_2 A_4$, то з симетрії вінерових процесів випливає, що

$$\tilde{\psi}_1(x_0) = \tilde{\psi}_3(x_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \tilde{\psi}_2(x_0) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\psi}_1(y_0) = \tilde{\psi}_3(y_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \tilde{\psi}_2(y_0) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Таким чином,

$$\tilde{\psi}_1(x_0) = \tilde{\psi}_2(x_0) = \tilde{\psi}_3(x_0) = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\psi}_1(y_0) = \tilde{\psi}_2(y_0) = \tilde{\psi}_3(y_0) = \frac{1}{3}.$$

Припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$ менше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_3$.

Тоді аналогічно до того, як було показано, що

$$P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_2\} < P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_2\},$$

за припущення, що відстань від точки x_0 до сторони $A_3 A_2$ менше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$, доводиться, що

$$P_{x_0} \left\{ \tilde{Y} \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_1 A_3 \right\} < P_{x_0} \left\{ \tilde{Y} \text{ потрапляє у } A_2 \text{ через } A_1 A_2 \right\}.$$

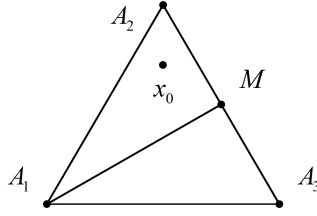


Рис. 5

Позначимо для $y \in (0, \frac{1}{2} |A_2A_3|)$

$$D_1(y) = \{x \in A_2A_3 : 0 \leq \rho(x, A_2) < y\},$$

$$D_2(y) = \{x \in A_2A_3 : 0 \leq \rho(x, A_3) < y\},$$

Для довільної точки x медіани A_1M з симетрії вінерового процесу випливає рівність

$$P_x \{w(\tau) \in D_1(y)\} = P_x \{w(\tau) \in D_2(y)\}.$$

Тому

$$\begin{aligned} P_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} &= \int_{A_1M} P_x \{w(\tau) \in D_2(y)\} dP_{x_0} \{w \text{ потрапляє у } A_1x\} = \\ &= \int_{A_1M} P_x \{w(\tau) \in D_1(y)\} dP_{x_0} \{w \text{ потрапляє у } A_1x\} = \\ &= P_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y), \text{ причому } w \text{ перетнув } A_1M\} < P_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\}, \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned} P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_2A_3\} - P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 \text{ через } A_2A_3\} &= \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} + \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \frac{y}{|A_2A_3|} dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\} - \\ &- \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \frac{y}{|A_2A_3|} dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} - \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\} = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{2y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} - \\ &- \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{2y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\} = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{2y}{|A_2A_3|}\right) d(P_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} - P_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\}) > 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\psi_2(x_0) > \psi_3(x_0).$$

Аналогічно доводиться, що якщо відстань від точки x_0 до сторони A_1A_2 більше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_3 , то

$$\psi_2(x_0) < \psi_3(x_0).$$

Таким чином, з того, що

$$\psi_2(x_0) = \psi_3(x_0), \quad \psi_2(y_0) = \psi_3(y_0),$$

випливає, що $x_0, y_0 \in A_1A_4$.

З цього випливає, що точки x_0 та y_0 лежать в точці перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$, а отже, співпадають. Це протирічить тому, що

$$\frac{1}{6} = \psi_4(x_0) \neq \psi_4(y_0) = \frac{1}{4}. \quad \square$$

3. Дифузійний процес зі змінним фазовим простором. Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = a(\xi_1(t))dt + b(\xi_1(t))dw_1(t), \\ d\xi_2(t) = a(\xi_2(t))dt + b(\xi_2(t))dw_2(t), \end{cases}$$

де $w_1(t), w_2(t)$ — незалежні одновимірні вінерові процеси.

Нехай функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x , тобто

$$\begin{aligned} \exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ |a(x_1) - a(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad |b(x_1) - b(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Тоді для довільної точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ вказана система має єдиний сильний розв'язок $\xi_{(x_0, y_0)}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ з початковою умовою $\xi(0) = (x_0, y_0)$, причому

$$\forall T \geq 0 \quad E \max_{t \in [0, T]} (\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)) < +\infty.$$

Нехай задана обмежена однозв'язна область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. На межі цієї області виберемо скінченну кількість різних точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ (для зручності позначень будемо вважати, що $A_0 = A_n$), що розбивають межу області Q на n дуг.

Розглянемо також сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\xi_{x_k}^{(k)}(t) = a(\xi_{x_k}^{(k)}(t))dt + b(\xi_{x_k}^{(k)}(t))dw^{(k)}(t), \quad k = \overline{1, n},$$

з початковими умовами $\xi_{x_k}^{(k)}(0) = x_k$, де $w^{(k)}(t)$ — незалежні одновимірні вінерові процеси, причому процеси $w_1(t), w_2(t), w^{(1)}(t), w^{(2)}(t), \dots, w^{(n)}(t)$ незалежні в сукупності.

Позначимо

$$\bar{\xi}_{x_k}^{(k)}(t) = \begin{cases} h_k^{-1} \left(\xi_{h(x_k)}^{(k)}(t) \right), & t < \tau_k, \\ h_k^{-1} \left(\xi_{h(x_k)}^{(k)}(\tau_k) \right), & t \geq \tau_k, \end{cases}$$

де відображення h_k^{-1} є оберненим до відображення h_k , що ставить у відповідність кожній точці M дуги $\widehat{A_{k-1}A_k}$ довжину дуги $\widehat{A_{k-1}M}$, τ_k — момент першого виходу процесу $\xi_{h(x_k)}^{(k)}$ з інтервалу $(0, |A_{k-1}A_k|)$, тобто

$$\tau_k = \inf \left\{ t \geq 0 : \xi_{h(x_k)}^{(k)}(t) \in \{A_{k-1}, A_k\} \right\}.$$

Будемо розглядати процес

$$X_{(x_0, y_0)}(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot \xi_{(x_0, y_0)}(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\left\{ \xi(\tau) \in \widehat{A_{k-1}A_k} \right\}} \cdot \bar{\xi}_{\xi(\tau)}^{(k)}(t - \tau),$$

де τ — момент першого виходу процесу $\xi_{(x_0, y_0)}$ на межу області Q , тобто

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : \xi_{(x_0, y_0)}(t) \in \partial Q \right\}.$$

Процес X ми будемо називати дифузійним процесом зі змінним фазовим простором.

Нашою метою є узагальнити результати, одержані у роботі [5] для вінерового процесом зі змінним фазовим простором, для процесу X .

Теорема 1. *Процес $X_{(x_0, y_0)}(t)$ є марківським.*

Доведення. Позначимо через $\hat{\xi}_{X(t)}$ розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} d\hat{\xi}_1(s) = a\left(\hat{\xi}_1(s)\right)ds + b\left(\hat{\xi}_1(s)\right)d\hat{w}_1(s), \\ d\hat{\xi}_2(s) = a\left(\hat{\xi}_2(s)\right)ds + b\left(\hat{\xi}_2(s)\right)d\hat{w}_2(s), \\ \hat{\xi}_1(0) = \hat{\xi}_2(0) = X(t), \end{cases}$$

де $\hat{w}_1(t)$, $\hat{w}_2(t)$ — незалежні одновимірні вінерові процеси, а

$$\tau_{X(t)} = \inf \left\{ s \geq 0 : \hat{\xi}_{X(t)}(s) \in \partial Q \right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \forall t \geq 0 \quad \forall s \geq t \quad \forall B \in \mathcal{B}(\bar{Q}) \\ & P\{X(s) \in B \mid X(r), r \leq t\} = \\ & = P\left\{X(s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t\right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n P\left\{X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t\right\} = \\ & = P\left\{s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t\right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n P\left\{t < \tau \leq s, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t\right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ \tau \leq t, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t \right\} = \\
& = P \left\{ s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ t < \tau \leq s, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ \tau \leq t, X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(r), r \leq t \right\} = \\
& = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_{X(t)} > s-t, \hat{\xi}_{X(t)}(t-s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t \right\} + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \cdot \\
& \cdot P \left\{ \tau_{X(t)} \leq s-t, \hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)}) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \right. \\
& \left. \bar{\xi}_{\hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)})}^{(k)}(s-t-\tau_{X(t)}) \in B \mid X(r), r \leq t \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(r), r \leq t \right\} = \\
& = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_{X(t)} > s-t, \hat{\xi}_{X(t)}(t-s) \in B \cap Q \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_{X(t)} \leq s-t, \right. \\
& \left. \hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)}) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{\hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)})}^{(k)}(s-t-\tau_{X(t)}) \in B \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(t) \right\} = \\
& = P \left\{ s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ t < \tau \leq s, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ \tau \leq t, X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(t) \right\} = \\
& = P \left\{ X(s) \in B \mid X(t) \right\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Оскільки події $\{\tau_x > t\}$, $\{\xi_x(t) \in B\}$, $\{\bar{\xi}_x^{(k)}(t) \in B\} \in \mathcal{F}$, то функція

$$\begin{aligned}
P(x, t, s, B) & = P \{ X(s) \in B \mid X(t) = x \} = \\
& = \mathbb{I}_{\{\tau_x > t\}} P \left\{ \tau_x > s-t, \xi_x(t-s) \in B \cap Q \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_x \leq s-t, \xi_x(\tau_x) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{\xi_x(\tau_x)}^{(k)}(s-t-\tau_x) \in B \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \mathbb{I} \left\{ x \in \overbrace{A_{k-1} A_k} \right\} P \{ \bar{\xi}_x^{(k)}(s-t) \in B \}, \quad 0 \leq t \leq s, \quad B \in \mathcal{B}(\bar{Q}),$$

є вимірною, тобто процес X має регулярну ймовірність переходу. Звідси випливає, що

$$P \{ X_x(t_1) \in B_1, \dots, X_x(t_m) \in B_m \} = \int_{B_1} P(x, 0, t_1, dy_1) \cdots \int_{B_m} P(y_{m-1}, t_{m-1}, t_m, dy_m)$$

є вимірною функцією від x .

Нехай μ — ймовірнісна міра на Q . Покладемо тоді

$$P \{ X_\mu(t_1) \in B_1, \dots, X_\mu(t_m) \in B_m \} = \int_Q P \{ X_x(t_1) \in B_1, \dots, X_x(t_m) \in B_m \} d\mu(x).$$

Оскільки ці скінченновимірні розподіли узгоджені, то вони задають випадковий процес, який будемо позначати X_μ та будемо називати процесом X з початковим розподілом μ .

Дослідимо, чи існує початковий розподіл процесу X , при якому він зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Лема 1. *Нехай Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з неперервною межею такою, що*

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{ \tau > h \} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0,$$

функція v неперервна на ∂Q , а функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x , тобто

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ |a(x_1) - a(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|, \quad |b(x_1) - b(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b(x) \neq 0,$$

а функція θ задається формулою

$$\forall x \in Q \quad \theta(x) = E_x v(\xi(\tau)).$$

Тоді

$$\forall c \in \partial Q \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} \theta(x) = v(c).$$

Доведення. Для довільної точки $c \in \partial Q$ та довільного $r > 0$ позначимо

$$\Gamma_r = \{ y \in \partial Q : \rho(y, c) < 2r \}$$

та доведемо, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} P_x \{ \xi(\tau) \in \Gamma_r \} = 1.$$

Позначимо для $h > 0$

$$z(h) = \max_{0 \leq t \leq h} \|\xi(t) - \xi(0)\|.$$

$$\begin{aligned} Ez^2(h) &= E \left(\max_{0 \leq t \leq h} \|\xi(t) - \xi(0)\| \right)^2 = E \max_{0 \leq t \leq h} \|\xi(t) - \xi(0)\|^2 = \\ &= E \max_{0 \leq t \leq h} \sum_{k=1}^2 \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds + \int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \leq \\ &\leq 2E \max_{0 \leq t \leq h} \sum_{k=1}^2 \left(\left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 + \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \right) \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^2 \left(E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 + E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\begin{aligned} E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 &\leq E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t ds \cdot \int_0^t a^2(\xi_k(s)) ds \right) = \\ &= E \max_{0 \leq t \leq h} \left(t \int_0^t a^2(\xi_k(s)) ds \right) = E \left(h \int_0^h a^2(\xi_k(s)) ds \right). \end{aligned}$$

З умови Ліпшиця для функції $a(x)$ випливає, що

$$\begin{aligned} a^2(\xi_k(s)) &\leq (|a(\xi_k(s)) - a(0)| + |a(0)|)^2 \leq 2(a(\xi_k(s)) - a(0))^2 + 2a^2(0) \leq \\ &\leq 2L^2 |\xi_k(s) - 0|^2 + 2a^2(0) = 2L^2 \xi^2(s) + 2a^2(0). \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 &\leq hE \int_0^h (2L^2 \xi^2(s) + 2a^2(0)) ds \leq \\ &\leq h^2 E \left(2L^2 \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2a^2(0) \right) = h^2 \left(2L^2 E \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2a^2(0) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

оскільки за умов леми

$$E \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) < +\infty.$$

За нерівністю Дуба при $p = 2$

$$E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \leq 4E \left(\int_0^h b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 = 4E \int_0^h b^2(\xi_k(s)) d(s).$$

З умови Ліпшиця для функції $b(x)$ випливає, що

$$b^2(\xi_k(s)) \leq 2L^2 \xi^2(s) + 2b^2(0).$$

Тому

$$\begin{aligned} E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 &\leq 4E \int_0^h (2L^2 \xi^2(s) + 2b^2(0)) d(s) \leq \\ &\leq 4hE \left(2L^2 \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2b^2(0) \right) = 4h \left(2L^2 E \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2b^2(0) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$E z^2(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

тобто $z(h)$ збігається до 0 у середньому квадратичному, звідки випливає і збіжність за ймовірністю, тобто

$$\forall r > 0 \quad P\{|z(h)| \geq r\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

тобто

$$\forall r > 0 \quad P\{z(h) < r\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $h > 0$, що

$$P\{z(h) < r\} > 1 - \varepsilon.$$

Оскільки за умовою леми

$$P_x\{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0,$$

то існує таке $\delta \in (0, r)$, що

$$\forall x \in \{y \in Q : \rho(y, a) < \delta\} \quad P_x\{\tau < h\} > 1 - \varepsilon.$$

Якщо $z(h) < r$ та $\tau < h$, то процес ξ за час h встигає вийти на межу області Q , відхилившись від стартової точки на відстань меншу, ніж r . Тому

$$\xi(\tau) \in \Gamma_r.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} P\{\xi(\tau) \in \Gamma_r\} &\geq P_x\{z(h) < r, \tau < h\} = 1 - P_x\left(\{z(h) \geq r\} \cup \{\tau \geq h\}\right) \geq \\ &\geq 1 - P_x\{z(h) \geq r\} - P_x\{\tau \geq h\} = P_x\{z(h) < r\} + P_x\{\tau < h\} - 1 > 1 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Q}} P_x\{\xi(\tau) \in \Gamma_r\} = 1.$$

Для $x \in Q$ позначимо через μ_x розподіл $\xi(\tau)$ за умови, що $\xi(0) = x$, тобто

$$\forall A \in \mathcal{B}(\partial Q) \quad \mu_x(A) = P_x\{\xi(\tau) \in A\}.$$

Тоді

$$\theta(x) = E_x v(\xi(\tau)) = \int_{\partial Q} v(y) d\mu_x(y).$$

Оскільки функція v неперервна на ∂Q , то для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільної точки $c \in \partial Q$ існує таке число $r > 0$, що

$$\forall y \in \Gamma_r \quad |v(y) - v(c)| < \varepsilon.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \theta(x) - v(c) &= \int_{\partial Q} v(y) d\mu_x(y) - v(c) \int_{\partial Q} d\mu_x(y) = \\ &= \int_{\Gamma_r} (v(y) - v(c)) d\mu_x(y) + \int_{\partial Q \setminus \Gamma_r} (v(y) - v(c)) d\mu_x(y) \leq \\ &\leq \varepsilon \mu_x(\Gamma_r) + 2 \max_{y \in \partial Q} |v(y)| \mu_x(\partial Q \setminus \Gamma_r) = \varepsilon \mu_x(\Gamma_r) + 2 \max_{y \in \partial Q} |v(y)| (1 - \mu_x(\Gamma_r)). \end{aligned}$$

Як зазначалось вище, існує таке $\delta \in (0, r)$, що

$$\forall x \in \{y \in Q : \rho(y, a) < \delta\} \quad \mu_x(\Gamma_r) > 1 - 2\varepsilon.$$

Для таких точок x

$$\theta(x) - v(c) < \varepsilon + 2 \max_{y \in \partial Q} |v(y)| \cdot 2\varepsilon = \left(1 + 4 \max_{y \in \partial Q} |v(y)|\right) \varepsilon,$$

тобто

$$\forall c \in \partial Q \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} \theta(x) = v(c). \quad \square$$

Зауваження 1. Якщо функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця, Q — обмежена замкнена множина з межею ∂Q та існує така функція $u \in C^2(G)$, що

$$\begin{cases} Lu(x) = -1, & x \in Q, \\ u(x) = 0, & x \in \partial Q, \end{cases}$$

де

$$Lu = \sum_{k=1}^2 a(x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 b^2(x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

то

$$\forall x \in Q \quad E_x \tau = u(x),$$

а з нерівності Чебишова випливає, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{\tau > h\} \leq \frac{E_x \tau}{h} = \frac{u(x)}{h} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x \in Q}]{} 0.$$

Теорема 2. Нехай Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з неперервною межею такою, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{ \tau > h \} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0,$$

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \partial Q$, а функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x , причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b(x) \neq 0.$$

Тоді існує початковий розподіл процесу X , при якому X зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Доведення. Для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через $\theta_k(x)$ ймовірність того, що процес $X_x(t)$ зупиниться в точці A_k . Будемо шукати шуканий розподіл у вигляді

$$\mu = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{x_k},$$

де $x_k \in Q$, $k = \overline{1, n}$.

Для того, щоб така міра μ задовольняла умови теореми, необхідно та достатньо, щоб

$$\begin{aligned} P \{ X_\mu \text{ зупиняється в точці } A_j \} &= p_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_Q P \{ X_x \text{ зупиняється в точці } A_j \} d\mu(x) &= p_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n P \{ X_{x_i} \text{ зупиняється в точці } A_j \} c_i &= p_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \theta_j(x_i) c_i &= p_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Для довільної точки $x \in G$

$$\theta_k(x) = E_x v_k(\xi(\tau)),$$

де $v_k(y)$ — це ймовірність, що процес X_y , що стартує з точки $y \in \partial G$, зупиниться в точці A_k . Відомо, що

$$v_k(y) = \begin{cases} 0, & y \in \widehat{A_{k-1}A_k} \cup \widehat{A_kA_{k+1}}, \\ \frac{g(h_{k-1}(y)) - g(0)}{g\left(\left|\widehat{A_{k-1}A_k}\right|\right) - g(0)}, & y \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \\ \frac{g\left(\left|\widehat{A_kA_{k+1}}\right|\right) - g(y)}{g\left(\left|\widehat{A_kA_{k+1}}\right|\right) - g(0)}, & y \in \widehat{A_kA_{k+1}}, \end{cases}$$

де функція $g(x)$ не є сталою, причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a(x) g'(x) + \frac{1}{2} b^2(x) g''(x) = 0,$$

тобто функцію $g(x)$ можна вибрати у вигляді

$$g(x) = \int_0^x \exp \left\{ - \int_0^y \frac{2a(z)}{b^2(z)} dz \right\} dy.$$

З умови

$$\forall c \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{ \tau > h \} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow c} 0$$

та з неперервності v_k на межі області Q за лемою випливає, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} \theta_k(x) = v_k(c), \quad k = \overline{1, n},$$

для всіх точок $c \in \partial Q$.

Розглянемо n послідовностей $\left\{ x_i^{(k)} \right\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1, n}$, таких, що

$$x_i^{(k)} \in Q, \quad i = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = A_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) = v_k(A_i) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Визначник системи

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} c_i = p_j, \quad j = \overline{1, n},$$

дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Позначимо $\Delta^{(k)}$ визначник системи

$$\sum_{i=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = p_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^{(k)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right)_{i,j=1}^n = \\ &= \det \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right)_{i,j=1}^n = \det (\delta_{ij})_{i,j=1}^n = \Delta = 1. \end{aligned}$$

А отже, починаючи з деякого номера K , система

$$\sum_{i=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = p_j, \quad j = \overline{1, n},$$

має єдиний розв'язок $\left(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_n^{(k)} \right) \in \mathbb{R}^n$.

За формулами Крамера

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_i^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_i^{(k)}}{\Delta^{(k)}} = \frac{\Delta_i}{\Delta} = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки всі ймовірності p_i додатні, то для достатньо великих номерів k всі числа $c_i^{(k)}$ також додатні. Їх сума дорівнює одиниці, оскільки

$$\sum_{i=1}^n c_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Таким чином, для достатньо великих номерів k міра

$$\mu = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \delta_{x_i^{(k)}}$$

задовольняє всі умови теореми. $\square$

4. Висновки. Для вінерового процесу зі змінним фазовим простором, було досліджено існування початкової точки, стартуючи з якої, процес зупинявся б в точках в чотирьох точках A_1, A_2, A_3, A_4 на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями. Було наведено приклад, коли такої точки не існує.

Також був побудований дифузійний процес зі змінним фазовим простором. Для нього було доведено марківську властивість та теорему про існування початкового розподілу, при якому цей процес зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Список використаної літератури

1. Arratia R. A. Coalescing Brownian motions on the line. PhD thesis / The University of Wisconsin. Madison, Ann Arbor, MI. 1979. P. 134.
2. Harris T. E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 . *Stochastic Processes and their Applications*. 1984. Vol. 17, No. 2. pp. 187–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(84\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0304-4149(84)90001-2)
3. Dorogovtsev A. A. Some remarks on a Wiener flow with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. Vol. 57, No. 10. pp. 1550–1558. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0013-9>
4. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. *Theory of Stochastic Processes*. 2004. Vol. 10(26), No. 3–4. pp. 21–25. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0611750>
5. Malovichko T. V. Properties of a wiener process with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, No. 4. pp. 551–572. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0084-7>

Malovichko T. V., Panchenko B. V. Properties of the Wiener Process with a Variable Phase Space.

The existence of an initial distribution with given final probabilities, concentrated at a single point, has been studied for the Wiener process with a variable phase space in

the case of four points A_1, A_2, A_3, A_4 on the boundary of the region. The existence of an initial distribution with given final probabilities has also been investigated for the diffusion process with a variable phase space.

Keywords: Wiener process, Wiener process with absorption, initial distribution.

References

1. Arratia, R. A. (1979). *Coalescing Brownian motions on the line*. (Extended abstract of candidate's thesis). The University of Wisconsin. Madison, Ann Arbor, MI.
2. Harris, T. E. (1984). Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 . *Stochastic Processes and their Applications*, 17(2), 187–210. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(84\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0304-4149(84)90001-2)
3. Dorogovtsev, A. A. (2005). Some remarks on a Wiener flow with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57(10), 1550–1558. <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0013-9>
4. Dorogovtsev, A. A. (2004). One Brownian stochastic flow. *Theory of Stochastic Processes*, 10(26(3–4)), 21–25. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0611750>
5. Malovichko, T. V. (2006). Properties of a wiener process with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*, 58(4), 551–572. <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0084-7>

Одержано 19.11.2024